

2022 年高等数学 A 期中考试

一、填空题：本题共 4 小题，每小题 1 分，共 4 分。

1. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$
2. 设函数 $f(u)$ 可导，且 $y = f(\ln^2 x - e^{-x})$ ，则 $dy = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$
3. 设 $f(x) = x^2 \sin x$ ，则 $f^{19}(0) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$
4. 一个圆锥体底面直径 d 与高 h 分别以 v_1, v_2 的速度匀速增长。则当 $d = d_0, h = h_0$ 时圆锥体的增长速度等于 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 1 分，共 4 分。

5. 设 α 与 β 是同一极限过程的无穷小量，则 $\alpha - \beta$ ()
 A. 是无穷小量，且与 α, β 之一同阶
 B. 是无穷小量，可能比 α, β 高阶
 C. 是无穷小量，可能比 α, β 低阶
 D. 可能不是无穷小量
6. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = x - \sin(ax)$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小，则 ()
 A. $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ B. $a = 1, b = \frac{1}{6}$ C. $a = -1, b = -\frac{1}{6}$ D. $a = -1, b = \frac{1}{6}$
7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x \geq 1 \\ \frac{x^2}{2} & x < 1 \end{cases}$ ，则在点 $x = 1$ 处 ()
 A. 左导数存在，右导数不存在
 B. 右导数存在，左导数不存在
 C. 左右导数都存在
 D. 左右导数都不存在
8. 曲线 $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} + t + 1 \\ y = \frac{t^3}{3} - t - 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 0$ 点处的切线方程是 ()
 A. $y = -x + 1$ B. $y = x - 2$ C. $y = -x$ D. $y = x + 2$

三、解答题：本题共 6 小题，共 22 分。解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤。

9. (5 分) 找出函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x^2 + x - 2|} \sin x$ 的间断点并判断其类型。
10. (4 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y \cos x - y = 1$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$
11. (4 分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\arcsin x}}{x^2 \ln(1+x)}$
12. (3 分) 设数列 $\{a_n\}$ 由 $0 < a_1 < \frac{1}{3}, a_{n+1} = a_n(2 - 3a_n), n = 1, 2, \dots$ 所确定。证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限。

13. (4 分) 设奇函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:
- (1) 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = 1$;
 - (2) 存在 $\eta \in (-1, 1)$ 使得 $f''(\eta) = 2f'(\eta) - 2$.
14. (2 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L > 0$ (L 为常数), 证明
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$