主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2022年秋季学期

微积分 A（期末）试题

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得　分											
阅卷人											

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为120分钟，总分50分。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

一、本题得分______

填空题（每小题2分，共4小题，满分8分）

1. 当 $x\to 0$ 时 $\int_0^{-2x}\left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$ 是 ax^3 的等价无穷小（a 是常数），则 $a=$________.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ \mathrm{e}^{-x}, x\ge 0\end{cases}$，则 $\int_1^3 f(x-2)\,\mathrm{d}x=$__________.

3. 设函数 $f(x)=\left(x^2+x+1\right)\mathrm{e}^{x^2}$，则 $f^{(8)}(0)=$____________.

4. 设 $R=R(x)$ 是曲线 $y=\ln x$ 上任意一点 $P(x,y)$ 处（$x\ge 1$）的曲率半径，$s=s(x)$ 是该曲线介于点 $A(1,0)$ 与点 P 之间弧段的长度，则 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}=$____________.

二、本题得分______

选择题（每小题2分，共4小题，满分8分，把正确选项的字母填在题后的括号内）

1. 当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$（$a$ 常数）时方程 $\ln x=ax$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的实根个数是(　　　)

　(A)　0　　（B）　1　　(C)　2　　(D)　不确定

2. 设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$，则(　　)

(A) $M>N>K$　(B) $M>K>N$　(C) $K>M>N$　(D) $K>N>M$

3. 设函数$f(x)$连续，则极限$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{2i-n}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$等于下面的定积分(　　)

(A) $\int_{-1}^{1}f(2x-1)\mathrm{d}x$　(B) $\int_{0}^{2}f(2x-1)\mathrm{d}x$　(C) $2\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$　(D) $\int_{0}^{1}f(2x-1)\mathrm{d}x$

4. 斜边长为$2a$的等腰直角三角形平板铅直的沉没在水中，且斜边与水面相齐，记重力加速度为g，水的密度为ρ，则三角形平板的一侧受到的水压力为(　　)

(A) $\frac{1}{6}\rho g a^3$　(B) $\frac{1}{3}\rho g a^3$　(C) $\frac{2}{3}\rho g a^3$　(D) $\frac{1}{2}\rho g a^3$

三、 本题得分______

(5分) 求函数$y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$的单调区间与极值，并求对应曲线的凹凸区间、拐点以及渐近线**.**

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 班号＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

密 …… 封

四、本题得分＿＿＿

计算下列各题（共 4 题，每题 3 分，满分 12 分）

1. 计算反常积分 $\int_0^{e^4} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

2. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$

3. 计算不定积分$\int \mathrm{e}^{2x} \arctan \sqrt{1-\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$．

4. 计算极限$\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x - 1} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$．

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封

五、本题得分______

解方程（共 2 题，每题 3 分，满分 6 分）

1. 求连续函数 $f(x)$ 使其满足方程 $f(x)+2\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=x^2$.

2. 设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 切于原点，记 α 为曲线 $y=y(x)$ 在点 (x,y) 处切线的倾角，若 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，求 $y(x)$.

六、 本题得分______

应用题（共 2 题，每题 3 分，满分 6 分）

1. 求心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$（$a > 0$ 常数）的弧长与所围图形的面积.

2. 设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2, y = 0$ 所围成的图形，D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, y = 0$ 所围成的图形，其中 $0 < a < 2$，（1）求由 D_1 绕 x 轴旋转一周所成旋转体体积 V_1 和由 D_2 绕 y 轴旋转一周所成旋转体体积 V_2；（2）问当 a 为何值时，$V_1 + V_2$ 取最大值？并求此最大值.

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

……密……封……

七、本题得分______

(3 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，在开区间 $\left(a,b\right)$ 内可导，且 $f'(x)>0$．若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

（1）在区间 $\left(a,b\right)$ 内 $f(x)>0$；

（2）在区间 $\left(a,b\right)$ 内存在点 ξ，使得 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

（3）在区间 $\left(a,b\right)$ 内存在与 ξ 相异的点 η，使得 $f'(\eta)\left(b^2-a^2\right)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$．

八、**本题得分______**

(2 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$ ，又 $f(x)$ 不恒为零，证明 $\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \ge 4\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|$.

学院________ 班号________ 学号________ 姓名________

……………………封……………………密……………………