

主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学 2023 年 秋季学期

微积分先修试题

题号	一	二	三					总分
			11	12	13	14	15	
得分								
阅卷人								

片纸鉴心 诚信不败

注意事项:

1. 本卷满分 100 分;
2. 本卷共五大页, 请勿缺损, 否则按作弊处理;
3. 本卷背面亦可作为演草纸使用, 但阅卷以答题区域为准。

一. 选择题 (共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

1. 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导的充要条件为 ()

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(h) - f(-h)]$ 存在; (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f[\ln(1+h)]$ 存在;

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(\sinh^2)$ 存在; (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(e^{h^2} - 1)$ 存在.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 则 ()

(A) 当 $f'(x)$ 为单调函数时, $f(x)$ 一定为单调函数;

(B) 当 $f(x)$ 为单调函数时, $f'(x)$ 一定为单调函数;

(C) 当 $f'(x)$ 为偶函数时, $f(x)$ 一定为奇函数;

(D) 当 $f(x)$ 为偶函数时, $f'(x)$ 一定为奇函数.

草 纸

(草纸内不得答题)

授课教师

姓名

学号

院系

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $F'(x) = f(x)$, 则定积分 $\int_0^1 f(ax) dx$ ($a \neq 0$) 为 ()

(A) $F(1) - F(0)$

(B) $F(a) - F(0)$

(C) $\frac{1}{a} [F(a) - F(0)]$

(D) $a[F(a) - F(0)]$

4. 设 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f'(x_0)g'(x_0) > 0$, $f''(x_0), g''(x_0)$ 均存在, 则 ()

(A) x_0 不是 $f(x)g(x)$ 的驻点;(B) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点, 但不是极值点;(C) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点, 且是 $f(x)g(x)$ 的极小值点;(D) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点, 且是 $f(x)g(x)$ 的极大值点.

5. 若已知 $f(\pi) = 2$ 且 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5$, 则 $f(0) =$ ()

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

二. 填空题(共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\cdots+k} =$ _____.

7. 函数 $f(x) = x^4$ 在区间 $[1, 2]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi =$ _____.

草 纸

(草纸内不得答题)

8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{\ln x}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知 $y = x^2 e^{x^2}$, 则 $y^{(5)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三. 解答题(每小题 12 分, 共 5 小题, 满分 60 分)

11. 设 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -1$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln \cos x^2$ 是比 $x^n f(x)$ 高阶的无穷小量, 而 $x^n f(x)$ 是比 $e^{\sin^2 x} - 1$ 高阶的无穷小量, 求正整数 n .

草 纸

(草纸内不得答题)

.....
密
.....
封
.....
线
.....

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 且 $g(0) = g'(0) = 0$. 讨论 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与可

导性.

13. 设 $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$ ($0 < \theta < 1$), $f''(x)$ 连续, 且 $f''(x) \neq 0$, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$.

草 纸

(草纸内不得答题)

14. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数, 它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式

$$f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin x^2) = 2x^2 + o(x^2),$$
 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程.

15. 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$.

(1) 证明: 存在 $c \in (0, 1)$, 使得 $f(c) = c$;

(2) 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = 1 - f'(\xi)$.

草 纸

(草纸内不得答题)