2023级微积分A
期中考试(回忆版)
参考答案

编写&排版:一块肥皂

答案速查:

1. 2
2. $2x+y=0$
3. 24
4. $\frac{4}{5}\mathrm{d}x$
5. D
6. A
7. B
8. B
9. 函数 $f(x)$ 有4个间断点 $x=-1,0,\frac{1}{3},1$,其中:
   $x=-1$ 为无穷间断点,$x=0$ 为跳跃间断点,$x=\frac{1}{3}$ 为振荡间断点,$x=1$ 为可去间断点
10. $\frac{1}{2}$
11. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t}{(t+1)(1-\cos y)}$
12. $g'(x)=\begin{cases}\frac{(x-a)f'(x)-f(x)}{(x-a)^2}, & x\neq a\\ \frac{f''(a)}{2}, & x=a\end{cases}$;略
13. 略
14. 略;
    略;$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

详解:

1. 记 $a_k=\frac{4k-3}{n^2-n+k}$,则 $\frac{4k-3}{n^2-n}\geqslant a_k\geqslant\frac{4k-3}{n^2}$,两边对 k 从1到 n 求和有:$\frac{2n^2-n}{n^2-n}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\geqslant\frac{2n^2-n}{n^2}$,
   因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2}=2$,由夹逼准则知:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2-n+1}+\frac{5}{n^2-n+2}+\cdots+\frac{4n-3}{n^2}\right)=2$.

2. 先验证 $(0,0)$ 在原曲线上:$\tan\left(0+0+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^0=1$.
   在曲线方程两边对 x 求导有:$\frac{1+y'}{\cos^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)}=y'\mathrm{e}^y$,将 $x=y=0$ 代入得:$\frac{1+y'}{\cos^2\left(0+0+\frac{\pi}{4}\right)}=y'\mathrm{e}^0$,
   解得 $y'=-2$,则 $(0,0)$ 处的切线方程为:$y-0=-2(x-0)$ 即 $2x+y=0$.

3. 解法一：利用高阶导数的 Leibniz 公式，$f^{(4)}(0)=C_4^0 2^4 e^{2\times 0}\sin 0+C_4^1 2^3 e^{2\times 0}\cos 0+C_4^2 2^2 e^{2\times 0}(-\sin 0)+C_4^3 2^1 e^{2\times 0}(-\cos 0)+C_4^4 2^0 e^{2\times 0}\sin 0=0+32-0-8+0=24$.

解法二：利用 Taylor 公式，$e^{2x}=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+o[(2x)^3]=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$，

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$，

则 $f(x)=e^{2x}\sin x$ 的 Taylor 公式中 x^4 系数为 $2\times\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{4}{3}\times 1=1$，故 $f^{(4)}(0)=1\times 4!=24$.

4. 为了防止混淆，先令 $y=f(x)$，则 $x=f^{-1}(y)$，则所求为 $\mathrm{d}\{[f^{-1}(y)]^2\}\big|_{y=3}$.

则 $\mathrm{d}\{[f^{-1}(y)]^2\}=2f^{-1}(y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\mathrm{d}y$，由题设条件知 $y=3$ 时，$x=f^{-1}(y)=2$，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{5}$，

故 $\mathrm{d}\{[f^{-1}(y)]^2\}=2f^{-1}(y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\mathrm{d}y=2\times 2\times\frac{1}{5}\mathrm{d}y=\frac{4}{5}\mathrm{d}y$.

（注意填空时填 $\frac{4}{5}\mathrm{d}x$）

5. 显然当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是无界的，排除 A,C.

而 $\frac{1}{\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}=\frac{x^2}{\sin\frac{1}{x}}$ 在 $x\to 0$ 时，存在无定义的点即 $\sin\frac{1}{x}=0$ 即 $\frac{1}{x}=k\pi$ 即 $x=\frac{1}{k\pi}$（$|k|$ 很大且 $k\in\mathbb{Z}^*$），

故 $\frac{1}{\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}$ 不是无穷小，进而 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 无界但不是无穷大.

6. 由 Taylor 公式：$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$，$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，

则当 $x\to 0$ 时，$f(x)=3x-4\sin x+\tan x=x^3+o(x^3)$ 与 x^n 是同阶无穷小，

故 $n=3$.

7. 记对角线长为 $s=\sqrt{l^2+w^2}$，由于 $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2\ \mathrm{cm/s}$，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=1\ \mathrm{cm/s}$，则 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}+2w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}}{2\sqrt{l^2+w^2}}=\frac{2l+w}{\sqrt{l^2+w^2}}\ \mathrm{cm/s}$，

当 $l=12\ \mathrm{cm}$，$w=9\ \mathrm{cm}$ 时，$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{2\times 12+9}{\sqrt{12^2+9^2}}\ \mathrm{cm/s}=\frac{11}{5}\ \mathrm{cm/s}$.

8. 解法一：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3$，

且 $x\to 0$ 时，x 是无穷小，故 $\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)$ 也是无穷小，即 $x+\frac{f(x)}{x}$ 也是无穷小，

可知 $x\to 0$ 时，$x+\frac{f(x)}{x}\sim 3x$ 即 $\frac{f(x)}{x}\sim 2x$.

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)}=e^2$.

解法二：利用 Taylor 公式和 e 的重要极限，由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$ 可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的展开式为 $f(x)=2x^2+o(x^2)$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2$.

9. 由于 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}\sin\dfrac{1}{3x-1}=\dfrac{x(x-1)}{|x|(x+1)(x-1)}\sin\dfrac{1}{3x-1}$，观察可得，$f(x)$ 有四个无定义点 $x=0$，$-1,1,\dfrac{1}{3}$，下面对其进行讨论：

①显然 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\sin1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\sin1$ 都存在，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点；

②显然 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$，故 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点；

③显然 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 都存在，且 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{2}$，故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

④显然当 $x\to\dfrac{1}{3}$ 时，$\sin\dfrac{1}{3x-1}$ 在 -1 和 $+1$ 之间变动无限多次，故 $x=\dfrac{1}{3}$ 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

综上，函数 $f(x)$ 有 4 个间断点 $x=-1,0,\dfrac{1}{3},1$，其中 $x=-1$ 为无穷间断点，$x=0$ 为跳跃间断点，$x=\dfrac{1}{3}$ 为振荡间断点，$x=1$ 为可去间断点.

10. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\xlongequal{\text{换元：}t=x-1}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(t+1)\ln(t+1)-t}{t\ln(t+1)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(t+1)\ln(t+1)-t}{t^2}$，

解法一：$\xlongequal{\text{L'hospital}}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\dfrac{t+1}{t+1}+\ln(t+1)-1}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(t+1)}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{2t}=\dfrac{1}{2}$.

解法二：$\xlongequal{\text{Taylor}}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(t+1)\left[t-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\right]-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^2}=\dfrac{1}{2}$.

11. 由 $x=t^2+2t$ 知 $\mathrm{d}x=(2t+2)\mathrm{d}t$；由 $t^2-y+\sin y=1$ 知 $2t\mathrm{d}t-\mathrm{d}y+\cos y\mathrm{d}y=0$ 即 $\mathrm{d}y=\dfrac{2t}{1-\cos y}\mathrm{d}t$.

则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{2t}{1-\cos y}\mathrm{d}t}{(2t+2)\mathrm{d}t}=\dfrac{t}{(t+1)(1-\cos y)}$.

12. 当 $x=a$ 时，$g'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{f(a+h)}{a+h-a}-f'(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-hf'(a)}{h^2}$

$\xlongequal{\text{L'hospital}}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(a+h)-1}{2h}\xlongequal{\text{L'hospital}}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f''(a+h)}{2}=\dfrac{f''(a)}{2}$；

当 $x\neq a$ 时，$g'(x)=\dfrac{(x-a)f'(x)-f(x)}{(x-a)^2}$，

故 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)f'(x)-f(x)}{(x-a)^2}, & x\neq a\\ \dfrac{f''(a)}{2}, & x=a\end{cases}$，下面讨论其在 $x=a$ 处的连续性：

由于 $\lim\limits_{x\to a}g'(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)f'(x)-f(x)}{(x-a)^2}\xlongequal{\text{L'hospital}}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)+(x-a)f''(x)-f'(x)}{2(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)f''(x)}{2(x-a)}$

$=\dfrac{f''(a)}{2}=g'(a)$，故 $g'(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的.

13.【思考于脑中】观察发现：

$f(b)-e^{b}f(0)=[f(\xi)-f'(\xi)](1-e^{b})$ 等价于 $e^{-b}f(b)-e^{0}f(0)=[f(\xi)-f'(\xi)](e^{-b}-e^{0})$，

且由题设条件有 $0\neq -b$ 故 $e^{-b}-e^{0}\neq 0$，则上式又等价于 $\dfrac{e^{-b}f(b)-e^{0}f(0)}{e^{-b}-e^{0}}=f(\xi)-f'(\xi)$，

进而不难得到 $f(\xi)-f'(\xi)=\dfrac{-e^{-\xi}f(\xi)+e^{-\xi}f'(\xi)}{-e^{-\xi}}$，若令辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x),G(x)=e^{-x}$，

则只需证 $\exists\,\xi\in(0,b)$，$\dfrac{F(b)-F(0)}{G(b)-G(0)}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$，即为柯西中值定理的形式.

【解答于卷上】令辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x),G(x)=e^{-x}$，则 $\exists\,\xi\in(0,b)$，$\dfrac{F(b)-F(0)}{G(b)-G(0)}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$

即 $\dfrac{e^{-b}f(b)-e^{0}f(0)}{e^{-b}-e^{0}}=\dfrac{-e^{-\xi}f(\xi)+e^{-\xi}f'(\xi)}{-e^{-\xi}}=f(\xi)-f'(\xi)$

即 $e^{-b}f(b)-e^{0}f(0)=[f(\xi)-f'(\xi)](e^{-b}-e^{0})$

即 $f(b)-e^{b}f(0)=[f(\xi)-f'(\xi)](1-e^{b})$，

故 $\exists\,\xi\in(0,b)$，$f(b)-e^{b}f(0)=[f(\xi)-f'(\xi)](1-e^{b})$，证毕.

14. 令 $f_n(x)=e^{-x}-x^{2n+1}$，$x\in[0,1],n\in\mathbb{N}^*$.

（1）由于 $f_n'(x)=-e^{-x}-(2n+1)x^{2n}<0$，故 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上是单调递减的；

又 $f(0)=1>0$，$f(1)=e^{-1}-1<0$，则 $f(0)\cdot f(1)<0$，

故 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一零点 x_n，即方程 $e^{-x}-x^{2n+1}=0$ 在 $(0,1)$ 有唯一实根 x_n.

（2）由 $f_n(x_n)=0$ 得 $e^{-x_n}=x_n^{2n+1}$ 即 $x_n^{2n+1}e^{x_n}=1$；由 $f_{n+1}(x_{n+1})=0$ 得 $e^{-x_{n+1}}=x_{n+1}^{2n+3}$ 即 $x_{n+1}^{2n+3}e^{x_{n+1}}=1$.

两式作比有：$e^{x_{n+1}-x_n}\cdot\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{2n+1}\cdot x_{n+1}^2=1$.（*）

①若 $x_{n+1}<x_n$ 即 $x_{n+1}-x_n<0$ 即 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$，由 $x_{n+1}\in(0,1)$，则(*)式左边三个因式都小于1，乘积不可能为1，舍去；

②若 $x_{n+1}=x_n$ 即 $x_{n+1}=x_n<0$ 即 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$，则 $x_{n+1}=1$，又 $x_{n+1}\in(0,1)$，矛盾，舍去.

故 $x_{n+1}>x_n$，又 $x_{n+1}<1$，故 $\{x_n\}$ 单调有界存在极限，设其极限为 A.

$(*)=e^{x_{n+1}-x_n}\cdot e^{(2n+1)\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}}\cdot x_{n+1}^2=e^{x_{n+1}-x_n+(2n+1)(\ln x_{n+1}-\ln x_n)}\cdot x_{n+1}^2=e^{x_{n+1}-x_n+(2n+1)\left(\frac{-x_{n+1}}{2n+3}-\frac{-x_{n+1}}{2n+1}\right)}\cdot x_{n+1}^2=e^{\frac{2}{2n+3}x_{n+1}}\cdot x_{n+1}^2=1$

两端取极限：$e^{0}\cdot A^2=1$ 即 $A^2=1$，又 $x_n\in(0,1)$，故 $A=1$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=1$.