2023级微积分A期中考试(回忆版)

哈尔滨工业大学(深圳) HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

回忆:Hdao,limbo　　　　排版:一块肥皂

本试卷考试时间90分钟,共14题,共30分,共2页.

注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的学院、姓名、学号填写清楚.
2. 请按照题号在试卷各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸上答题无效.
3. 作图可先使用铅笔画出,确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
4. 保持试卷清洁,不要弄破.
5. 考试结束后,将试卷交回.

一、填空题(本大题共4小题,每小题1分,共4分)

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2-n+1}+\dfrac{5}{n^2-n+2}+\cdots+\dfrac{4n-3}{n^2}\right)=$ ______.
2. 曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程是 ______.
3. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\sin x$,则 $f^{(4)}(0)=$ ______.
4. 设函数 $f(x)$ 可导且其导数 $f'(x)\neq 0$,$f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 存在,已知 $f(2)=3$,$f'(2)=5$,则 $\mathrm{d}\{[f^{-1}(x)]^2\}\Big|_{x=3}=$ ______.

二、选择题(本大题共4小题,每小题1分,共4分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

5. 当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是

   A. 无穷小　　B. 无穷大　　C. 有界的,非无穷小　　D. 无界的,但非无穷大

6. 已知当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=3x-4\sin x+\tan x$ 与 $g(x)=x^n$ 为同阶无穷小,则 $n=$

   A. 3　　B. 2　　C. 5　　D. 4

7. 已知一长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加,宽 w 以 1 cm/s 的速率增加,则当 $l=12$ cm,$w=9$ cm 时,它的对角线增加的速率为

   A. $\dfrac{12}{7}$ cm/s　　B. $\dfrac{11}{5}$ cm/s　　C. 3 cm/s　　D. $\dfrac{4}{3}$ cm/s

8. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$

   A. e^3　　B. e^2　　C. 3　　D. e

三、解答题(本大题共 6 小题,共 22 分. 解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤)

9. 指出函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}\sin\dfrac{1}{3x-1}$ 的间断点,并判断其类型.

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

11. 已知参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ t^2-y+\sin y=1\end{cases}$ (t 为参数),求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

12. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(a)=0$,函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a}, & x\neq a\\ f'(a), & x=a\end{cases}$. 求 $g'(x)$ 并证明:$g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

13. 已知函数 $f(x)$,且 $0,b\in I$. 求证:$\exists\,\xi\in(0,b)$,使得 $f(b)-\mathrm{e}^b f(0)=[f(\xi)-f'(\xi)](1-\mathrm{e}^b)$ 成立.

14. 已知方程 $\mathrm{e}^{-x}-x^{2n+1}=0$,其中 $n\in\mathbb{N}^*$. 回答下列问题:

(1)证明方程 $\mathrm{e}^{-x}-x^{2n+1}=0$ 在 $(0,1)$ 上有唯一实数解 x_n;

(2)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求其值.