



哈尔滨工业大学(深圳)

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

# 2023 级微积分 A 期末考试(回忆版)

2023 年 1 月 5 日 10:30~12:30

回忆: 群 u, 群 u, 群 u 群 u, 群 u, 群 u, ……

排版: 一块肥皂

本试卷考试时间 120 分钟, 共 16 题, 共 50 分, 共 2 页.

## 注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的学院、姓名、学号填写清楚.
2. 请按照题号在试卷各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸上答题无效.
3. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
4. 保持试卷清洁, 不要弄破.
5. 考试结束后, 将试卷交回.

## 一、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 2 分, 共 8 分)

1. 曲线  $y = x + \ln(1 - x^2)$  在点  $(0, 0)$  处的曲率为 \_\_\_\_\_.
2. 曲线  $y = \ln \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{6})$  的弧长为 \_\_\_\_\_.
3. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \dots + n \sin \frac{n}{n}) =$  \_\_\_\_\_.
4. 曲线  $y = x + \frac{1}{e^x - 1}$  有条 \_\_\_\_\_ 渐近线.

## 二、选择题(本大题共 4 小题, 每小题 2 分, 共 8 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

5. 设  $I_n = \int_0^{n\pi} e^{x^2} \sin x dx$ , 则  $I_1, I_2, I_3$  的大小关系为  
A.  $I_1 < I_2 < I_3$                       B.  $I_2 < I_3 < I_1$                       C.  $I_3 < I_2 < I_1$                       D.  $I_2 < I_1 < I_3$
6. 已知  $f(x)$  二阶可导, 且  $f'(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ , 则下列说法正确的是  
A.  $f(x)$  在  $x = 0$  处取到极大值  $f(0)$   
B.  $f(x)$  在  $x = 0$  处取到极小值  $f(0)$   
C.  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点  
D.  $(0, f(0))$  不是曲线  $y = f(x)$  的拐点,  $f(x)$  也不在  $x = 0$  处取得极值
7. 下列反常积分发散的是  
A.  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x \sin x} dx$                       B.  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$                       C.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$                       D.  $\int_0^1 \ln x dx$
8. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上以  $T$  为周期的函数, 则下列函数也必以  $T$  为周期的是  
A.  $\int_0^x f(t) dt$                                       B.  $\int_{-x}^0 f(t) dt$   
C.  $\int_0^x f(t) dt - \int_{-x}^0 f(t) dt$                                       D.  $\int_0^x f(t) dt + \int_{-x}^0 f(t) dt$

三、解答题(本大题共 7 小题,共 34 分. 解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤)

9. 设函数  $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ .

(1) 求  $F(x)$  的极值;

(2) 求曲线  $y = F(x)$  的拐点对应的横坐标;

(3) 求  $\int x^2 F'(x) dx$ .

10. 计算:

(1)  $\int_2^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$ ;

(2)  $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}} dx$ ;

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{e^x} \sin(e^x - t)^2 dt}{x^2 \ln(x+1)}$ .

11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ , 且  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ .

(1) 求  $F(x)$  的表达式;

(2) 讨论  $F(x)$  在  $[-1, 1]$  的可导性.

12. 已知一容器由曲线  $y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$  绕  $y$  轴旋转形成.

(1) 求该容器的容积  $V$ ;

(2) 若将此容器装满密度为  $\rho_0$  的液体, 重力加速度为  $g$ , 求将该种容器全部抽出要做的功  $W$ .

13. 沙特阿拉伯计划从南极洲取冰以缓解其国内的淡水短缺问题. 已知剩余冰块的融化速度与其剩余质量  $m$  (万吨) 成正比, 其比例系数与时间  $t$  (月) 的平方根成比例系数为 0.9 的正比. 现取质量为  $M$  (万吨) 的冰块, 试求耗时 1 个月运至国内时剩余冰块的质量.

14. 已知参数方程  $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \varphi(t) \end{cases}$  ( $t$  为参数), 其中  $\varphi(t)$  二阶可导, 且  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(t+1)}$ ,  $\varphi(1) = \frac{5}{2}$ ,  $\varphi'(1) = 6$ , 求  $\varphi(t)$ .

15. 已知函数  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续,  $(-a, a)$  上二阶可导.

(1) 若  $f(0) = 0$ , 求证:  $\exists \xi \in (-a, a), f''(\xi) = \frac{f(a) + f(-a)}{a^2}$ ;

(2) 若  $f(x)$  在  $(-a, a)$  有极值, 求证:  $\exists \eta \in (-a, a), |f''(\eta)| \geq \frac{|f(a) - f(-a)|}{2a^2}$ .

16. 设  $I_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} dx$ .

(1) 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ ;

(2) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$  存在, 并求其值.