2024年秋季学期高数期末考试（回忆版）

回忆整理：24学术讨论群（syhanjin 老汉 离谱 潜伏 混子 浮萍 東牆 天赐 卡基米 黄鹂 Yasumi Speculator Schwarz Fun10165 Jaaack）

一、选择题

1. 下列函数在 0 处可导的是 (　　).

A. $|\tan x-\sin x|$　B. $|\tan x+\sin x|$　C. $\tan|x|+\sin|x|$　D. $|\tan x|+|\sin x|$

2. $f(x)>0$，$\{c_n\}$ 为正值数列，$a_n=\int_0^{c_n}f(x)dx, b_n=\int_{c_n}^{c_{n+1}}f(x)dx$，下列说法正确的是 (　　).

A. $b_n<0$，则 $\{a_n\}$ 必发散 B. $b_n<0$，则 $\{a_n\}$ 必收敛

C. $b_n>0$，则 $\{a_n\}$ 必发散 D. $b_n>0$，则 $\{a_n\}$ 必收敛

3. $f(x)=\int_0^{x}e^{\cos t}dt, g(x)=\int_0^{\sin x}e^{t^2}dt$，则 (　　).

A. $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数.

B. $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数.

C. $f(x)$ 和 $g(x)$ 都为奇函数.

D. $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是周期函数.

4. $(y')^2-yy''=0$ 的解为 (　　).

A. $e^{C_1x}+e^{C_2x}$　B. $C_1+C_2e^x$ C. $y=C_2e^{C_1x}$　D. $y=C_2xe^{C_1x}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n^2+i}{n^3+i^3}=$ (　　).

A. $\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx$ B. $\int_0^1\frac{2}{x^3+1}dx$ C. $\int_0^1\frac{x+1}{x^3+1}dx$ D. $\int_0^1\frac{x^2+1}{x^3+1}dx$

二、填空题

1. $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x(1+\frac{1}{t})^{xt}$，则 $f(x)$ 的拐点横坐标 $x=$ ________.

2. $y=xe^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 ________.

3. $\int_{-2024}^{2024}[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+1]dx=$ ________.

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{3x}(e^{-t^2}-1)dt}{x^3} & x\neq 0\\ a-9 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

5. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\cos x$，则 $\int_0^{2\pi}xf'(x)dx=$ ________.

三、当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\int_0^{x^2}\cos t^2dt$ 与 $g(x)=a\sin x-b\ln(1+x)$ 是等价无穷小，求 a,b 的值.

四、计算积分 $\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx$.

五、设曲线 C 星形线在第一象限的部分 C，具有参数方程 $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ $(a > 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}])$，试计算曲线 C 的弧长.

六、设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $f(x) = \int_0^x 2te^{-f(t)} dt$，求 $f^{(2n)}(0)$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

七、$f(x)$ 的导函数在 $[0, 1]$ 上连续，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$.