24秋季学期高数期中考试（回忆版）解析

解析：天赐 老汉 Yasumi 菜鸡

一、选择题

1. 解析

①显然成立.

②反例: $\alpha = -\beta$

③ $\because \alpha \sim \beta, \therefore \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha - \ln(1+\beta)}{\alpha} = \lim\limits_{x\to 0}(1 - \dfrac{\ln(1+\beta)}{\alpha}) = 1 - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta}{\alpha} = 0, \therefore \alpha - \ln(1+\beta) = o(\alpha)$.

④ $\because \alpha - \tan\beta = o(\alpha), \therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha - \tan\beta}{\alpha} = 1 - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta}{\alpha} = 0, \therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 即 $\alpha \sim \beta$.

2. 解析

由题意知 $\begin{cases} 2 + a - 1 = -1 - 1, \\ 0 - b + 1 = 0 - 1, \end{cases}$ 解得 $a = -3, b = 2$.

3. 解析

当 $x = k (k \in \mathbb{N})$ 时, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^2 = x^2$.

当 $x \neq k (k \in \mathbb{N})$ 时, $f(x) = \dfrac{x(1-x)\sin^2 \pi x}{sin^2 \pi x} = x(1-x)$.

$\therefore x = k (k \in \mathbb{N}, k \neq 0)$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

4. 解析

可导条件: ①一定一动; ②两侧极限.

A.成立.

B. $a + x$ 与 $a - x$ 均为变量, 不成立.

C. $e^{x^2} - 1$ 只能从 0^+ 逼近.

D.同C

5. 解析$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}, x \geq 0 \\ -x\sin x, x \leq 0 \end{cases}$,

~~由题目提示得~~由$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$得，$f(x)$在$x = 0$处连续；

又因为$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\sin x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3} = 0 \end{cases}$，所以$f'(0) = 0$；

在$(-\infty, 0), (0, +\infty)$上分别对$f(x)$求导，并结合$f'(0) = 0$，有$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{9}\cos\dfrac{x}{3}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\sin x - x\cos x, & x < 0 \end{cases}$,

所以$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0) = 0$，$f'(x)$在$x = 0$处连续；

所以$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{9}\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} + \dfrac{1}{9}\cos\dfrac{x}{3} = \dfrac{2}{9} \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{\sin x}{x} - \cos x = -2 \end{cases}$，$f''(0)$不存在.

综上所述，选B.

二、填空题

6. 已知$f(x)=x^2\cdot 3^x$,则$f^{(n)}(0)=$____.

解析：由莱布尼兹公式$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$,

考虑到$(x^2)'=2x,(x^2)''=2,(x^2)^{(n)}=0(n\geq 3);(3^x)^{(n)}=3^x(\ln 3)^n$,

当$x=0$时,非零项有且仅有$C_n^2\cdot 2\cdot 3^0(\ln 3)^{n-2}=n(n-1)(\ln 3)^{n-2}(n\geq 2)$.

容易验证,当$n=1$时,上式也成立,故答案为$n(n-1)(\ln 3)^{n-2}$.

7. 已知$y=y(x)$是由方程$y^3+xy+x^2-2x-1=0$确定的函数,且$y(1)=1$,则曲线$y=y(x)$在$(1,1)$处的法线方程为____.

解析：对方程两边求导得$3y^2y'+y+xy'+2x-2=0$,代入$x=1,y=1$解得$y'|_{x=1,y=1}=-\dfrac{1}{4}$,从而曲线$y=y(x)$在$(1,1)$处的切线斜率为$-\dfrac{1}{4}$,法线斜率为4,则法线方程为$y-1=4(x-1)$,即$y=4x-3$.

8. 设$y=y(x)$连续，且自变量在点x取增量Δx时相应的函数增量Δy满足$\Delta y=xy^2\Delta x+x^2y\Delta x\Delta y+o(\Delta x)$.若$y(1)=-2$，则$dy|_{x=1}=$____.

解析：本题需熟知微分的定义.如果$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$,把$A\Delta x$称为$y$的微分,记作$dy$,即有$dy=A\Delta x=Adx$.此题中$\Delta y=xy^2\Delta x+x^2y\Delta x\Delta y+o(\Delta x)=xy^2\Delta x+o(\Delta x)$.

其中由于$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x^2y\Delta x\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}x^2y\Delta y=0$,有$x^2y\Delta x\Delta y=o(\Delta x)$.

从而$dy=xy^2dx$,因此$dy|_{x=1}=4dx$.

9. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=6$,则$a=$____.

解析：本题考查等价无穷小.我们熟知,当$x\to 0$时,$e^x-1\sim\ln(1+x)\sim\sin x\sim x$.

从而$6=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x\ln(1+ax^2)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ln\left(1+ax^2\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot ax^2}{x^3}=a$,

即$a=6$.

10. 已知函数$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶导数,且$f^{-1}(x)>0,f(1)=2,f'(1)=3,f''(2)=a,y=f^{-1}(x)$为$y=f(x)$的反函数,则$g(x)=f^{-1}(3x-1)$在$x=1$的二阶导数$g''(1)=$____.

解析：本题考查反函数和复合函数的导数.

由于$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}},\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{\frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=-\dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$,

故$(f^{-1}(x))''=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

因此$g''(1)=9\cdot(f^{-1}(1))''=-9\times\dfrac{a}{3^3}=-\dfrac{a}{3}$.

三、求数列极限

(1). 计算：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos x-e^x+1}{\sin x(e^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin 2x-e^x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-e^x}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x-e^x}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

(2). 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6\times 1}{n^2+2\times 1}+\dfrac{6\times 2}{n^2+2\times 2}+\cdots+\dfrac{6\times k}{n^2+2\times k}+\cdots+\dfrac{6\times n}{n^2+2\times n}\right)$.

解：法一(夹逼准则)

注意到$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{6\times k}{n^2+2\times n}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{6\times k}{n^2+2\times k}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{6\times k}{n^2+2\times 1}$.

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{6\times k}{n^2+2\times n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+2\times n}=3$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6\times k}{n^2+2\times 1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+2\times 1}=3,$$

从而可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6\times 1}{n^2+2\times 1}+\dfrac{6\times 2}{n^2+2\times 2}+\cdots+\dfrac{6\times k}{n^2+2\times k}+\cdots+\dfrac{6\times n}{n^2+2\times n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{6\times k}{n^2+2\times k}=3.$

法二(泰勒展开)

考虑如下泰勒展开式:

$\frac{6k}{n^2+2k}=\dfrac{\dfrac{6k}{n^2}}{1+\dfrac{2k}{n^2}}=\frac{6k}{n^2}\cdot\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{6k}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$(当$n\to\infty$时)

因此，$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{6k}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}=3.$

四、已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b,$

(1). 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{a+b}{2}.$

证明:

$\because\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b,$

$\therefore\forall\varepsilon>0,$

$\exists N_1$ 使得 $n>N_1$ 时 , $|a_n-a|<\varepsilon,$

$\exists N_2$ 使得 $n>N_2$ 时 , $|b_n-b|<\varepsilon.$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时,

$|\dfrac{a_n+b_n}{2}-\dfrac{a+b}{2}|=|\dfrac{(a_n-a)+(b_n-b)}{2}|\le\dfrac{|a_n-a|}{2}+\dfrac{|b_n-b|}{2}<\dfrac{\varepsilon+\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{a+b}{2}$，证毕.

(2). 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$

分析与证明:

我们考虑用定义证明.任取$\varepsilon>0$,$\exists$正整数N_1,使得当$n>N_1$时,有

$|a_n-a|<\varepsilon.$

我们只需证明存在正整数N,使得当$n>N$时,有

$\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<k\varepsilon.$

考虑到

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\le\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}$$

$$<\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+(n-N_1)\varepsilon}{n}<\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\varepsilon.$$

由于$|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$为一确定常数,可以考虑放缩消去分母$n$.

从而存在正整数N_2,使得当$n>N_2$时,有$|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|<n\varepsilon.$

因此,取$N=max\{N_1,N_2\}$,就有$\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\dfrac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\varepsilon<2\varepsilon.$

至此,命题证毕.

五、求导

(1) 已知$y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

解析: $\dfrac{dy}{dx}=\arcsin\dfrac{x}{2}+x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-(\dfrac{x}{2})^2}}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{2}.$

(2) 设$\begin{cases}x=t^3+3t^2+1\\y=t^3-3t^2+1\end{cases}$求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解析：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2-3}{3t^2+3}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}=1-\dfrac{2}{t^2+1}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}}{3t^2+3}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}.$$

六、(1) 证明：设$g(x)=f(x)-x$，则$f(0)=1$，$f(1)=-1$.

$f(x)$在$[0,1]$上可导，则$f(x)$在$[0,1]$上连续，$g(x)$在$[0,1]$上连续.

由介值定理，$\exists a\in(0,1)$，使得$g(a)=0$，即$f(a)=a$.证毕.

(2) 证明：在$[0,a]$上使用Lagrange中值定理，

$\exists\xi\in(0,a)$，使得

$f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=\dfrac{a-1}{a}\quad(1)$

在$[a,1]$上使用Lagrange中值定理，

$\exists\eta\in(a,1)$，使得

$f'(\eta)=\dfrac{f(1)-f(a)}{1-a}=\dfrac{-a}{1-a}\quad(2)$

$(1)\times(2)$得，$\exists 0<\xi<\eta<1$,使得

$f'(\xi)f'(\eta)=\dfrac{a-1}{a}\dfrac{-a}{1-a}=1$

七、数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{e}{x_{n+1}}<2$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出其极限值.

*解：*易知$x_n>0$.

由 $\ln x_n+\dfrac{e}{x_{n+1}}<2$ 得 $\ln x_n<2-\dfrac{e}{x_{n+1}}\leq\ln x_{n+1}$(研究函数 $f(x)=2-\dfrac{e}{x}-\ln x$ 单调性).

因此 $x_n<x_{n+1}$, 即 $\{x_n\}$ 单调递增.

又 $\ln x_n<2-\dfrac{e}{x_{n+1}}<2$, 则 $x_n<e^2$, 所以 $\{x_n\}$ 有界.

由单调有界准则, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 设为 A,

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_{n+1}=\ln A$.

由夹逼准则, $\lim\limits_{n\to\infty}(2-\dfrac{e}{x_{n+1}})=2-\dfrac{e}{A}=\ln A$, 解得 $A=e$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$.