

# 24秋季学期高数期中考试（回忆版）

整理：菜鸡 混子 潜伏 卡基米 天赐 老汉 离谱

## 一、选择题

1. 设 $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的非零无穷小, 下列说法正确的有( ).

- ①若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$
  - ②若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$ , 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$
  - ③若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则 $\alpha(x) - \ln(1 + \beta(x)) = o(\alpha(x))$
  - ④若 $\alpha(x) - \tan \beta(x) = o(\alpha(x))$ , 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$
- A. ①②    B. ①④    C. ①③④    D. ②③④

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 2 - ax, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 0 \\ x - b, & x \geq 0 \end{cases}$ , 若 $f(x) + g(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则( ).

- A.  $a = 3, b = 1$ ;    B.  $a = 3, b = 2$ ;    C.  $a = -3, b = 1$ ;    D.  $a = -3, b = 2$ .

3. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 + n \sin^2 \pi x} \right)$ , 则( ).

- A. 不存在间断点
- B. 只存在可去间断点
- C. 只存在跳跃间断点
- D. 只存在无穷间断点

4.  $f(x)$ 在 $x = a$ 的邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导与下列哪个选项等价( ).

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a + x(1 - \cos x)) - f(a)}{\sin^3 x}$  极限存在

B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a + x) - f(a - x)}{2x}$  极限存在

C.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a + e^{x^2} - 1) - f(a)}{e^{x^2} - 1}$  极限存在

D.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a + 1 - \cos x) - f(a)}{1 - \cos x}$  极限存在

5.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}, & x \geq 0 \\ -x \sin x, & x \leq 0 \end{cases}$ , 则( ).

- A.  $f'(0)$ 不存在,  $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.
- B.  $f'(0)$ 存在,  $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.
- C.  $f''(0)$ 存在,  $f''(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.
- D.  $f''(0)$ 存在,  $f''(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

## 二、填空题

6.  $f(x) = x^2 \cdot 3^x$ , 求 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 已知 $y^3 + xy + x^2 - 2x - 1 = 0$ , 求 $(1, 1)$ 处的法线方程  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

8.  $y = y(x)$  连续, 且自变量在点  $x$  处取增量  $\Delta x$  时相应的函数增量  $\Delta y$  满足  $\Delta y = xy^2 \Delta x + x^2 y \Delta x \Delta y + o(\Delta x)$ , 且  $y(1) = -2$ , 则  $dy|_{x=1} =$  \_\_\_\_\_.

9. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + ax^2)^{\sin x} - 1}{x^3} = 6$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

10. 已知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有二阶导数, 且  $f'(x) > 0$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = 3$ ,  $f''(1) = a$ ,  $y = f^{-1}(x)$  为  $y = f(x)$  的反函数, 则  $g(x) = f^{-1}(3x - 1)$  在  $x = 1$  处的二阶导数  $g''(1) =$  \_\_\_\_\_.

三、求数列极限

(1).  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$ .

(2).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6 \times 1}{n^2 + 2 \times 1} + \frac{6 \times 2}{n^2 + 2 \times 2} + \dots + \frac{6 \times n}{n^2 + 2 \times n} \right)$ .

四、设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  用极限的定义证明

(1).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a + b}{2}$

(2).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$ .

五、求导

(1). 已知  $y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

(2).  $\begin{cases} x = 3t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ , 求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

六、已知  $f(x)$  的在  $[0, 1]$  上一阶导数存在,  $f(1) = 0$ ,  $f(0) = 1$ , 证明

(1).  $\exists a \in (0, 1)$ ,  $f(a) = a$

(2).  $\exists 0 < \xi < \eta < 1$ ,  $f'(\xi)f'(\eta) = 1$

七、数列  $\{x_n\}$  满足  $\ln x_n + \frac{e}{x_{n+1}} < 2$ , 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求出其极限值.