哈工大工科数学分析（下）期中复习笔记

常微分方程.

一阶方程

(1) 可分离变量. $f(x)dx = g(y)dy$.

(2) 齐次方程 $y' = f(\frac{y}{x})$

设 $u=\frac{y}{x}$. $y=ux$. $y'=u'x+u$.

$\therefore u'x+u = f(u)$ 分离变量. u 换回 $\frac{y}{x}$.

(3) 一阶线性微分方程.

1. 齐次. $y'+P(x)y=0$.

$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$. $\therefore \int \frac{1}{y}dy = \int -P(x)dx$

$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln C$.

$y = Ce^{-\int P(x)dx}$.

2. 非齐次 $y'+P(x)y=Q(x)$.

$y = e^{-\int P(x)dx}(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)$

(4) 伯努利方程. P267. $y'+P(x)y = Q(x)y^n$ 通过变换转为线性方

两边除以 y^n $y^{-n}y'+P(x)y^{-n} = Q(x)$

$y^{-n}y'$是 y^{1-n} 的导数(除以$1-n$) 故可以写成 $\frac{1}{1-n}(y^{1-n})' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$

※ 设 $u=y^{1-n}$ $\therefore \frac{1}{1-n}u'+P(x)u = Q(x)$. $u'+(1-n)P(x) = (1-n)Q(x)$

$u = y^{1-n} = e^{-\int P(x)dx}(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)$

可降阶方程 P272.

(1) $y^{(n)} = f(x)$. 一直积分n次.

$y = \int\cdots^{n个}\int f(x)(dx)^n + \frac{C_1}{(n-1)!}$

(2) $y''=f(x,y')$ 型.

令 $u=y'$ 则 $y''=z'$ 故方程转为 $z'=f(x,z)$

求出解z后, 再将z换回y'. 两边积分. 求y.

(3) $y''=f(y,y')$型 P274.

未出现自变量. 令 $z=y'$. 将z视为新函数, 将y视为自变量.

$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$ →(z对y求导)

方程变为. $z\frac{dz}{dy} = f(y,z)$.

解为 $z=\frac{dy}{dx} = f(y,C)$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x).$$

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{d(y^{1-n})}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x).\xrightarrow{y^{1-n}=u}\frac{du}{dx}+P(x)u=Q(x).$$

伯努利例题： $y'-\frac{4y}{x}=x\sqrt{y}\ \cancel{=0}$

$n=\frac{1}{2}$ 设 $z=y^{1-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\frac{dz}{dx}-\frac{4}{x}z=x$

$$z'-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}$$

$$P(x)=-\frac{2}{x}\qquad Q(x)=\frac{1}{2}x.$$

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(c+\int\frac{1}{2}x\,e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right)$$

$$=x^2\left(c+\frac{1}{2}\ln|x|\right)=y^{\frac{1}{2}}$$

$$y=x^4\left(c+\frac{1}{2}\ln|x|\right)^2.$$

例2. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^2y^3}$

$\frac{dx}{dy}=xy+x^2y^3$ $\frac{dx}{dy}-xy=x^2y^3$. 以y为自变量.

$\frac{dx}{dy}-yx=y^3x^2$.

$n=2$. $u=y^{-1}$. $\frac{1}{1-2}u'-yu=y^3$

$u'+yu=-y^3$.

$\boxed{y''=f(x,y')\text{型}}$ 例题.

1. 解初值问题 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=3.\end{cases}$

方程中不含 y

设 $y'=z$. 则方程为 $(1+x^2)\frac{dz}{dx}=2xz$

分离变量. $\int\frac{1}{z}dz=\frac{2x}{1+x^2}dx$.

$\ln|z|=\ln(1+x^2)+\ln c$.

$\therefore z=y'=c(1+x^2)$.

∘ 由初值条件. $x=0$ 时. $y'=3$.

$\therefore 3=C$. $\therefore y'=3(1+x^2)$.

$\therefore y=3(x+\frac{1}{3}x^3+C')$.

$=3x+x^3+C'$

∘ 由初值条件. $x=0$ 时. $y=1$ 得. $C_2=1$.

$\therefore y=x^3+3x+1$

2. 解方程 $y^{(5)}-\frac{1}{x}y^{(4)}=0$.

令 $z=y^{(4)}$, 则方程变为 $z'-\frac{1}{x}z=0$.

$\therefore z=y^{(4)}=cx$.

依次积分4次得

$y=c_1x^5+c_2x^4+c_3x^3+c_4x+c_5$.

$\boxed{y''=f(y,y')\text{型方程}}$ 例题

1. 解 $yy''-(y')^2-(y')^4=0$.

设 $y'=z$. 则 $y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot z$

∴ 原方程为 $y\frac{dz}{dy}z-z^2-z^4=0$.

$\int\frac{1}{z(1+z^2)}dz=\int\frac{1}{y}dy$

$=\int\frac{z}{z^2(1+z^2)}dz=\int z\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{1+z^2}\right)dz$.

$=\int\frac{1}{z}-\frac{z}{1+z^2}dz$.

$=\ln|z|-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|=\ln|c_1y|$

$\therefore\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=c_1y$

$\therefore\frac{z^2}{1+z^2}=(c_1y)^2$.

$\frac{1+z^2}{z^2}=\frac{1}{z^2}+1=(c_1y)^2$ $\therefore\frac{1}{z}=\sqrt{(c_1y)^2-1}$.

高阶微分方程例题.(作业) P.131

1. $y'' = -(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$

解: 两边同乘 $2y'$

$\therefore 2y'\cancel{y}\dfrac{dy'}{dx} = -(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 2\dfrac{dy}{dx}$

$-\int \dfrac{dy'^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cancel{x} = -2\int 1\,dy$. $\therefore \dfrac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = y+C_1$ $(\because y+C_1>0)$

$\therefore 1+y'^2 = \dfrac{1}{(y+C_1)^2}$ $\therefore y'^2 = \dfrac{1-(y+C_1)^2}{(y+C_1)^2}$

$\therefore y' = \pm\sqrt{\dfrac{1-(y+C_1)^2}{(y+C_1)^2}} = \dfrac{dy}{dx}$

$\therefore \pm\int\sqrt{\dfrac{(y+C_1)^2}{1-(y+C_1)^2}}\,dy = \int 1\,dx$.

不会积分. $= \pm\int \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}du = \mp\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}d(1-u^2) = \mp\sqrt{1-(y-C_1)}$

$\therefore \mp\sqrt{1-(y+C_1)^2} = x+C_2$.

平方. $\therefore (x+C_2)^2+(y+C_1)^2=1$.

故所求曲线族为 $y+C_1=\sqrt{1-(x+C_2)^2}$,

是以 $(-C_2,-C_1)$ 为圆心, 1 为半径的上半圆.

我的作法:

复杂了.

设 $y'=z$ $y''=\dfrac{dz}{dy}\cdot z = -(1+z^2)^{\frac{3}{2}}$ 本题没有 y. 所以直接 $z'=\dfrac{dz}{dx}$ $y''=$

$\therefore \int\dfrac{z}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}dz = \dfrac{1}{2}\cdot(-2)\cdot(1+z)^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} = -y+C$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} = y+C$. $\therefore 1+z^2 = \dfrac{1}{(y+C)^2}$

$z^2=(y+C)^2-1$ $\therefore z=\pm\sqrt{(y+C)^2-1} = \dfrac{dy}{dx}$

$\therefore \pm\int\dfrac{1}{\sqrt{(y+C)^2-1}}dy = \int 1\,dx$

$\pm\int\dfrac{1}{\sqrt{(y+C)^2-1}}d(y+C) = \pm\ln\left|(y+C)+\sqrt{(y+C)^2-1}\right| = \int 1\,dx = x+C_2$

$y'=z$ $y''=\dfrac{dz}{dx} = -(1+z^2)^{\frac{3}{2}}$

$\int + \dfrac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz = -\int 1\,dx$

7.4. n阶线性微分方程

- 齐次 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$
- 非齐次 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$

解的结构.

- 齐次
  - 定理1. 叠加定理.
  - 定义：线性无关.
  - 通解 $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots C_ny_n$ （n阶→n个常数、n个无关解.）
- 非齐次
  - 定理1. 叠加定理. $\begin{cases} y_1 \to y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}\cdots a_ny=f(x) \\ y_2 \to \quad = \quad =g(x) \\ \therefore y_1+y_2 \to \quad = \quad =f(x)+g(x) \end{cases}$
  - 定理2. $y_1-y_2=y_H$. （y_1、y_2为非齐解、y_H为齐次解）
  - 通解： $y=\underbrace{C_1y_1+\cdots C_ny_n}_{齐·通}+\underbrace{y_*}_{非齐·特}$.

$a_n(x)\to a_n$

↓

7.5. 常系数微分方程.

- 齐次
  - 二阶 — $y''+py'+qy=0$. $\Rightarrow$ 特征 $\lambda^2+p\lambda+q=0$.
    - 情况
      - 特征方程2实根 — $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
      - 一个2重根 → $y=C_1e^{\lambda_0x}+C_2xe^{\lambda_0x}$
      - 一对复根 → $\boxed{y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x}$
  - 高阶
    - $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots a_{n-1}y'+a_ny=0$.
    - $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots a_{n-1}\lambda+a_n=0$.
    - $=[(\lambda^2+p_1\lambda+q_1)^{k_1}\cdots(\lambda^2+p_m\lambda+q_m)^{k_m}]\cdot(\lambda-a_1)^{l_1}\cdots(\lambda-a_p)^{l_p}=0$.
    - $(\lambda-a_1)^{l_1}=0$.
      ↳ $e^{a_1x}, xe^{a_1x}, x^2e^{a_1x}\cdots x^{l_1-1}e^{a_1x}$
    - $(\lambda^2+p_1\lambda+q_1)^{k_1}=0$.
      ↳ $e^{\alpha x}\cos\beta x \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x \cdots x^{k_1-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$
      $e^{\alpha x}\sin\beta x \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x \quad x^{k_1-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$
- 非齐次.
  - 齐次通解加上一个特解.
  - $f(x)=e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]$
    $y_*=e^{\alpha x}[S(x)\cos\beta x+R(x)\sin\beta x]$.

△找 y_* 规律.

① 设 $S(x)$、$R(x)$ 的次数为 $P(x)$、$Q(x)$ 的最高次数 m.

eg: $P(x)=x+1$　$Q(x)=2x^2$. 则设 $\begin{cases} \tilde{S}(x)=a_1x^2+a_2x+a_3. \\ \tilde{R}(x)=b_1x^2+b_2x+b_3. \end{cases}$

②. 根据 $f(x)$ 判断 α、β. 代入 $\alpha+i\beta$.

若 $\alpha+i\beta$ 是特征方程几重根 (k), 就设 $R(x)=x^k\tilde{R}(x)$

③ 找 α、β. 特殊情况.
$$\begin{cases} f(x)=P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x \rightarrow \alpha=0. \\ f(x)=e^{\alpha x}[P(x)] \quad \rightarrow \beta=0. \\ f(x)=P(x) \quad \rightarrow \alpha=\beta=0. \end{cases}$$

7.4、线性微分方程的通解的结构.

映射 二维空间 $R^2 \xrightarrow{对应} R$.

$R \longrightarrow R$ 函数.

矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.　从一个三维向量变到另一三维向量.

线性形式.

线性: $y=ax$; $y=a_1x_1+a_2x_2=(a_1,a_2)\binom{x_1}{x_2}$

T = 线性映射　　　f、g 自变量

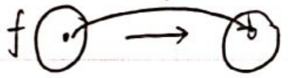
(1) $T(f+g)=Tf+Tg$

(2) $T(\lambda f)=\lambda Tf$　(λ为实数).

光滑、n次可微的函数 $f \xrightarrow{映射} f^{(n)}+a_1 f^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}f^{(1)}+a_n$

线 微分方程.

Q_1: 解 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots a_ny=0$. 求y.



Q_2: 解　　　　$=f(x)$.

定义: 已知自变量的 (n+1) 个函数.

$a_1(X)$.　$a_2(X)$　$\cdots$　$a_n(X)$　$g(X)$

称 $y^{(n)}+a_1(X)y^{(n-1)}+\cdots a_n(X)y=0$ (*) 为n阶齐次线性微分方程

称 $y^{(n)}+a_1(X)y^{(n-1)}+\cdots a_n(X)y=g(X)$ 为n阶非齐次线性微分方程.

(一) 齐次微分方程

若 f 满足(*), 则 λf 也满足.

若 f_1、f_2 满足(*), f_1+f_2 也满足.

定理1 若 y_1、y_2 均满足 (*)

则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 也是(*)的解.　(叠加定理).

定义: 设 y_1、$y_2\cdots y_n$ 是R上的n个函数. 若存在n个实数 $k_1\cdots k_n$

线性相关: 若 $k_1\cdots k_n$ 不全为零, 使得 $k_1y_1+k_2y_2+\cdots k_ny_n=0$.

则称 $y_1\cdots y_n$ 线相关.　$y_1=\sin x$　$y_2=2\sin x$.　$k_1=-2$; $k_2=1$

线性无关: $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ 不是常数.

例(1). $1, x, e^x$. 线性无关.

$k_1+k_2x+k_3e^x=0$ 时, 只能 $k_1 \cdots k_3=0$.

(2) 1 $\cos 2x$. $\sin^2 x$

$1-\sin^2 x-\frac{1}{2}\cos 2x=0$. 相关.

(3) y_1 与 y_2 线性相关 $\Leftrightarrow$ $y_1=ky_2$. (想到 $y_1/y_2=0$)

$y_2=ky_1$

定理2. <齐次方程通解>

设 $y_1, y_2, \cdots y_n$ 是(*)的 n 个线性无关解.

则 $\boxed{y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots c_ny_n}$ 是(*)的通解.

注: ① 若微分方程阶数为 n. 则所有解可由微分方程的 n 个特解来线性表示.

eg: 2阶方程. 找2个解即可

(PS. n阶线性方程只有n个解).

(二) 非齐次

定理3: 若 $y^*(x)$ 是 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots a_{n-1}(x)y'=g(x)$ (**) 的一个特解. $y_1\cdots y_n$ 是(*)的线性无关解.

则(**)的通解为 $\boxed{y=c_1y_1+\cdots+c_ny_n+y^*}$ 无系数(否则不是特解)

即: 解非齐次方程:

先解对应的齐次方程.

再求一个非齐次方程的特解. Δ 非齐的2个特解之差

若 $\tilde{y}$ 满足(**). 则 $\tilde{y}-y^*$ 满足(*)齐次方程. = 齐的解

因此 $\tilde{y}-y^*=c_1y_1+\cdots c_ny_n$

定理4. 叠加原理

若 y_1^* 满足 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots a_ny=f(x)$

y_2^* 满足 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}\cdots a_ny=g(x)$.

则 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots a_ny=f(x)+g(x)$ 的一个特解为 $y_1^*+y_2^*$

($\sin x+2e^x$)

应用: 方程的右侧是2个不同类型函数的线性组合时, 可以拆成2个非齐次方程

7.5· 常系数微分方程

7.5.1 二阶常系数·齐次·微分方程

导数2. 系数为C 右侧为0

即：$\boxed{y''+py'+qy=0}$

基本初等函数 $y=x^a(\times)$、$\sin x/\cos x$ $(\times)$

y''、y'、y 都是线性无关，不可能右侧为0.

$e^{\lambda x}$ (✓)

令 $y=e^{\lambda x}$，则 $y''+py'+qy$

$=\lambda^2 e^{\lambda x}+p\lambda e^{\lambda x}+qe^{\lambda x}=(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$

只有λ满足 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 就可使右侧为0.

二阶常系数齐次微分方程的特征方程为 $\boxed{\lambda^2+p\lambda+q=0}$ (△) <一元二次>. λ为特征值

映射

分情况讨论：(1) 若特征方程有两个不同的实根 λ_1、λ_2.

则 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 可以写作 $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$.

则 $e^{\lambda_1 x}$、$e^{\lambda_2 x}$ 是 $(e^\lambda)''+p(e^\lambda)'+q(e^\lambda)=0$ 的解. (*)

(二阶→有2个线性无关解.) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 成立之

(*) 的通解为 $\boxed{y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}}$

(2) 若特征方程有2个相同实根 λ_0、λ_0

即 可以写作 $(\lambda-\lambda_0)^2$

则 $e^{\lambda_0 x}$ 是 (*) 的解. $y=Ce^{\lambda_0 x}$ 是 (*) 的解.

(差一个无关解→补一个解)

常数变易法 令 $y=C(x)e^{\lambda_0 x}$ 也是 (*) 的解. 求 $C(x)$.

$y'=(C'(x)\cancel{e^{\lambda_0 x}}+\lambda_0 C(x))e^{\lambda_0 x}$?

$y''=[C''(x)+\lambda_0 C'(x)+\lambda_0 C'(x)+\lambda_0^2 C(x)]e^{\lambda_0 x}$

$y''+py'+qy=0$. 代入.

$\therefore C''(x)+2\lambda_0 C'(x)+\lambda_0^2 C(x)+p(C'(x)+p\lambda_0 C(x)+q C(x)$

$\therefore C(x)[\lambda_0^2+p\lambda_0+q]+C'(x)[2\lambda_0+p]=0$ $=0$

$\lambda_0=-\frac{p}{2}$

$\therefore C''(x)=0$

$\therefore$ 开两次积分得 $C(x)=C_1x+C_2$. $\therefore e^{\lambda_0 x}(C_1x+C_2)$ 也是解.

因此 (*) 的两个线性无关解为

$e^{\lambda_0 x}$, $xe^{\lambda_0 x}$?

通解为 $\boxed{y = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}}$ $(C_1 + C_2 x) e^{\lambda_0 x}$

(3) 若特征方程没有实根

$\lambda^2 + p\lambda + q \neq (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$. (△).

无法写作

<求根公式> $\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 但 $p^2 - 4q < 0$.

$\sqrt{-1} = i$.

$\therefore \lambda_1 = \alpha + i\beta$. $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

则 (△) 有一对共轭复根

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

实验之流 Q群
737678045

$\therefore e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ 满足 (*).

$= e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$

[欧拉公式] $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (x为实数, i为虚).

$= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$. <解①>

$e^{(\alpha - i\beta)x}$

$= e^{\alpha x}[\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)]$

$= e^{\alpha x}[\cos\beta x - i \sin\beta x]$ <解②>

①② 仍含 i 不理想.

设 ① = A. ② = B. $\therefore \frac{A+B}{2}$ 仍满足 (*).

$A + B = 2e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$

$\therefore \frac{A+B}{2} = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$. → 微分方程实数函数解. ①.

同时 $\frac{A-B}{2}$ 也满足 (*).

$\frac{A-B}{2} = i e^{\alpha x} \sin\beta x$

$\therefore \frac{A-B}{2i} = e^{\alpha x} \sin\beta x$. → 另一个实数函数解 ②.

因此, 原 (*) 通解为:

$$\boxed{y = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x}$$

PS: 映射是求二阶导时.

$f \xrightarrow{(\frac{df}{dx})^2} f''$

若 $f = e^{\lambda x}$ $f'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ → 是正特征值的 向是

若 $f = \sin\beta x$ $f'' = -\beta^2 \sin\beta x$ → 负

升三角函数.

题型. 给出解求方程 ← 找特征方程. ← 找特征根.

→ 有2不同根.

例1. (1) 求 $y''-6y'+8y=0$ 的通解 → 几阶导就是λ的几次方.

解: 特征方程为 $\lambda^2-6\lambda+8=0$.

$\lambda_1=2$. $\lambda_2=4$. ? 默认 $y=e^{\lambda x}$?

因此通解为 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}$.

(2) 求例(1)关于初值 $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$ 的解.

通解 $\xrightarrow[\text{找}c_1c_2]{\text{条件}}$ 特解.

代入初值条件. $\begin{cases} c_1+c_2=1. \\ 2c_1+4c_2=0. \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} c_1=2 \\ c_2=-1. \end{cases}$

∴ 初值解为 $y=2e^{2x}-e^{4x}$

例2. (1) 求 $y''-6y'+9y=0$ 的通解.

特征方程 $\lambda^2-6\lambda+9=0$?

有二重根 $\lambda=3$.

$y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$

(2)

$y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$ $y|_{x=0}=1$. ∴ $c_1+c_2=1$ ①

$y'=3c_1e^{3x}+c_2e^{3x}+3c_2xe^{3x}$ $y'|_{x=0}=0$

∴ $3c_1+c_2=0$. ②.

∴ $c_1=-\frac{1}{2}$ $c_2=\frac{3}{2}$

初值解为 $y=-\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{3}{2}xe^{3x}$

例3. (1) $y''-6y'+10y=0$.

$\lambda^2-6\lambda+10=0$

$\lambda=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}$ $\sqrt{-4}=\sqrt{-1\times4}=2\sqrt{-1}=2i$

$=\frac{6\pm2i}{2}=\boxed{3\pm i}$ < $\lambda_1/\lambda_2=\alpha\pm i\beta$ >

∴ $\alpha=3$. $\beta=1$

∴ $y=c_1e^{3x}\cos x+c_2e^{3x}\sin x$ < $y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$ >

(2) $x=0$. $y=1$ $y'=0$.

$x=0$ 时 $y=c_1=1$ → $x=0$ 时 $y'=3c_1+c_2=0$.

$y'=3c_1e^{3x}\cos x-c_1e^{3x}\sin x+3c_2e^{3x}\sin x+c_2e^{3x}\cos x$

$=(3c_1+c_2)e^{3x}\cos x+(3c_2-c_1)e^{3x}\sin x$

总结.

一. 看微方程类型. 常系数|齐次

2不同根、2相同根 $C_1e^{\lambda_0 x}+C_2xe^{\lambda_0 x}$、无实根 $\lambda=\alpha\pm\beta i$ $C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

二. 写出特征方程.

$y''\to\lambda^2$ $y'\to\lambda$ $y\to 0$

三. 判断特征方程解的个数、结构.

(一)

(二)

(三) 无实根, 有两个共轭

7.5.(2) 高阶·常系数·齐次·微分方程.

$$\boxed{y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots a_{n-1}y^{(1)}+a_n y=0} \quad (*)$$

要找n个无关解. 套入二阶思想.

仍采用 $y=e^{\lambda x}$. 代入.

得 $e^{\lambda x}(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots a_{n-1}\lambda+a_n)=0$

特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots a_{n-1}\lambda+a_n=0 \quad \text{<一元高次>}$$

解特征方程的根.

代数定理. <n次多项式可以写成一次/二次多项式的乘积> $(\lambda^2+p_1\lambda+q_1)^{k_1}\cdots(\lambda^2+p_m\lambda+q_m)^{k_m}\times(\lambda-a_1)^{l_1}\cdots(\lambda-a_p)^{l_p}=0$

复根. 实根.

二次不能再分的.

=阶 判别式 $\Delta_j=p_j^2-4q_j<0$. $(1\le j\le m)$

(*) 若 $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n+a_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}+\cdots a_n\right]y=\cdots\left(\frac{d}{dx}-a_1\right)^{l_1}y=0$ 其他因式

(*)写成

只要y满足 $\left(\frac{d}{dx}-a_1\right)^{l_1}y$ 或y满足 $\left(\frac{d^2}{dx^2}+p_m\frac{d}{dx}+q_m\right)^{k_m}$ =0 则y是(*)的解.

只需处理 l_1阶/k_m阶方程

Q 比如. 若 $y'''-4y''+5y'-2=0$. 若y满足 $y'-2y=0$. $(\lambda-2=0)$

$\left(\frac{d}{dx}-1\right)^2(y'-2y)=\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2-2\frac{d}{dx}+1\right)=y'''-4y''+5y'-2$

$\left(\frac{d}{dx}\right)^2y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y''$

(1) 解方程 $\left(\frac{d}{dx}-a_1\right)^{l_1}y=0$.

特征方程 $(\lambda-a_1)^{l_1}=0$. ?

e^{a_1x}, xe^{a_1x}, $x^2e^{a_1x}$, $x^3e^{a_1x}$, $\cdots x^{l_1-1}e^{a_1x}$. 共 l_1 个.

同理 $\left(\frac{d}{dx}-a_2\right)^{l_2}y=0$.

e^{a_2x}, xe^{a_2x}, $x^2e^{a_2x}\cdots x^{l_2-1}e^{a_2x}$. 共 l_2 个

(2) 解方程 $\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2+p_1\frac{d}{dx}+q_1\right)^{k_1}y=0$. $\to 2k_1$ 阶

$\to(\lambda^2+p_1\lambda+q_1)^{k_1}=0$ 无实根 (有的话就拆成一次多项式了)

$\lambda=\alpha_1\pm i\beta_1$ 重根为

当 $k_1=1$ 时. (2阶时) $e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x$ · $e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x$.

$k_1=2$ 时 (4阶时) $xe^{\alpha_1x}\cos\beta_1x$ $xe^{\alpha_1x}\sin\beta_1x$.

⋮

$k_1=k_1$ 时 ($2k_1$阶时) $x^{k_1-1}e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x$ $x^{k_1-1}e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x$

共 $2k_1$ 个解

同理.

$\therefore n=l_1+\cdots l_p+2(k_1\cdots+k_m)$

例：解 $y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y^{(2)}+y^{(1)}+y=0$

$\lambda^5+\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+1=0$

$=\lambda^4(\lambda+1)+2\lambda^2(\lambda+1)+\lambda+1$

$=(\lambda+1)(\lambda^4+2\lambda^2+1)=(\lambda+1)\underline{(\lambda^2+1)}^2$

$=\cancel{(\lambda+1)}^3$

方程.
3次一定可以分解.
Q：为什么 3 次方程必有实解
$y=ax^3+bx^2+cx+d=0$
设 $a>0$. $a=1$.
$x\to+\infty$ $y>0$.
$x\to-\infty$ $y<0$. (中值)

没有实根.
无法继续分解

(1) -1 是一重实根. $\therefore e^{-x}$ 必为其中一解.

(2) $(\lambda^2+1)^2=0$ 有二重复根 $\underline{i,-i}$?

$\lambda^2=-3$

$\lambda=\pm\sqrt{-3}=\sqrt{(-1)\cdot 3}=\sqrt{3}\cdot\underset{i}{\sqrt{-1}}=\pm\sqrt{3}i$

$\pm i=\alpha\pm i\beta$.

$\therefore\begin{cases}\alpha=0.\\ \beta=1\end{cases}$

$\therefore e^{\alpha x}\cos\beta x$

$=(\cancel{e^{0x}}\cos x+\cancel{e^{0x}}\sin x)+(x^{2-1}e^{0x}\cos x+x\cancel{e^{0x}}\sin x)$

第一对 ?

$\therefore y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+C_4x\cos x+C_5x\sin x$

7.5.2 常系数·非齐次.

7.5.2 (1) 二阶.

$$y''+py'+qy=f(x)^{(*)} \quad (f(x)\neq 0)$$

齐次方程为:

$$y''+py'+py=0^{(\triangle)}$$

数值分析Q群
926420643

<(*)的通解 = (△)的通解 + (*)的特解.>

上面讲了,　　找一个满足(*)的y

< 限定 $f(x)$ 是 $e^{\alpha x}\cdot[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$ 的形式　这样多项式求导后仍是多项式. 三角导后还是三角.

(α、β 是已知常数)　(m 为 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 的最高次数)

→多项式?

找 y_* 满足. $y_*''+py_*'+qy_*=f(x)$ ↗

$\therefore y_*=e^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x+S(x)\sin\beta x]$

待定系数法求 $R(x)$, $S(x)$

Q: $R(x)$ 与 $S(x)$ 的次数是多少

k+1个未知数

△ 若已知 R、S 次数为k. 则可设 $R(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots a_1x+a_0$

$S(x)=b_kx^k+\cdots \& b_0$

应尽量精减 R、S 的次数.

→ 不可超过 $m+2$ 次. (求二次导后才能出 m 次.)

$y_*=e^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x+S(x)\sin\beta x]$

求导

写错了.

$y_*'=\alpha e^{\alpha x}[R'(x)\cos\beta x-\alpha\beta R(x)\sin\beta x+S'(x)\sin\beta x+\beta S(x)\cos\beta x]$

$=e^{\alpha x}\cos\beta x[\alpha R(x)+\beta S(x)+R'(x)]+e^{\alpha x}\sin\beta x[\alpha S(x)-\beta R(x)+S'(x)]$

$y_*''=e^{\alpha x}\cos\beta x[\alpha^2R(x)+\alpha\beta S(x)+\alpha R'(x)$
$+\alpha\beta S(x)-\beta^2R(x)+\beta S'(x)+\alpha R'(x)+\beta S'(x)+R''(x)]$
$+e^{\alpha x}\sin\beta x[\alpha^2S(x)-\alpha\beta S(x)+\alpha S'(x)$
$-\alpha\beta R(x)-\beta^2S(x)-\beta R'(x)+\alpha S'(x)-\beta R'(x)+S''(x)]$

$\therefore$ 左侧为 $e^{\alpha x}(\cos\beta x)R(x)\cdot(\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q)$ ①

$\therefore$ $+e^{\alpha x}\cos\beta x\,\underline{S(x)}\,(2\alpha\beta+p\beta)+e^{\alpha x}\cos\beta x\,\underline{R'(x)}\,(2\alpha+p)$

$+e^{\alpha x}\cos\beta x\,\underline{S'(x)}\,(2\beta)+e^{\alpha x}\cos\beta x\,\underline{R''(x)}$　　"__" 加起来为 $P_m(x)$

结论⑴: 若 $(\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q)$ 和 $(2\alpha\beta+p\beta)$ 不同时为零. → 等价于 $\boxed{\alpha+i\beta \text{ 不满足 } \lambda^2+p\lambda+q=0}$ $\neq 0$

则设R和S的最高次数为m.

即 $R(x)=a_mx^m+\cdots a_0$
$S(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$ > $2(m+1)$ 个未知数.

$(\alpha+i\beta)^2+p(\alpha+i\beta)+q=\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q+i(2\alpha\beta+p\beta)$

? 一元二次方程只有一对共轭复根，不会有重根。

(2) 若 $(\alpha+i\beta)^2+p(\alpha+i\beta)+q=0$ 但 $(2\alpha+p)$ 和 2β 不同时为零。 $\xleftrightarrow{等价于}$ $\alpha+i\beta$ 是一重根，但不是二重根

设

$R(x)=a_{m+1}x^{m+1}+\cdots a_1x+a_0$
$S(x)=b_{m+1}x^{m+1}+\cdots+b_0$
> 有 $2(m+1+1)$ 个未知数。

因为求导后常数项消失。所以可以不设 a_0、b_0。

设 $\begin{cases} \underline{R(x)}=a_{m+1}x^{m+1}+\cdots a_1x \\ \quad =\underline{x^1\tilde{R}_m(x)} \text{（次数不超过m）} \\ \underline{S(x)}=b_{m+1}x^{m+1}+\cdots b_1x \\ \quad =\underline{x^1\tilde{S}_m(x)} \end{cases}$ 有 $2(m+1)$ 个未知数。

$\alpha+i\beta$ 是一重根，x 的次数就为 1

(3) 若 $\alpha^2+\beta^2+p\alpha+q=0$；$(2\alpha\beta+p\beta)=0$；（$2\alpha+p$，$2\beta=0$。 $\Longleftrightarrow$ $\alpha+i\beta$ 是 $x^2+px+q=0$ 的二重根

只剩 $e^{\alpha x}\cos\beta x\,\underline{R''(x)}$ 求二阶后 a_1、b_1、a_0、b_0 不考虑

设 $R(x)=x^2\tilde{R}_m(x)$ （次数不超过m） > 有 $2(m+2-2)=2(m+1)$ 个
$S(x)=x^2S_m(x)$

。规律：

① $\lambda=\alpha+i\beta$ 是特征方程的k重根，就设 $y_*=x^k[e^{\alpha x}[R(x)\cos\beta(x)+S(x)\sin\beta x]$

② 设 $R(x)=x^k\,\underline{\tilde{R}(x)}$

设的 $\tilde{R}(x)$ 的次数 = f(x) 中的 P(x)、Q(x) 的最高次数。

比如：$f(x)=e^x[(\underline{x+1})\cos2x+(\underline{x^2+1})\sin2x]$

$m=2$.

$\downarrow$

设 $\begin{cases}\tilde{R}(x)=a_1x^2+a_2x+a_3 \\ \tilde{S}(x)=b_1x^2+b_2x+b_3\end{cases}$ → 设的是2次多项式

③ $f(x)=p(x)\to\alpha=\beta=0$.

$f(x)=p(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x\to\alpha=0$.

$f(x)=e^{\alpha x}(p(x))\to\beta=0$.

常系数齐次微分方程求特解规律.

重点

$f(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]$

↓ α、β.

↓ m （$P(x)$、$Q(x)$ 的最高次数.

↓ k （$\alpha+\beta i$ 是特征方程几重根）. 与这里的 α、β 不是一个意思

- 齐次求通解时，若 $\Delta<0$ 时特征方程有一对共轭复根.
  比如 $\lambda_1 = 2+3i$ $\lambda_2=2-3i$
  $\alpha=2$. $\beta=3$ $y_* = e^{2x}[C_1\cos 3x + C$

y_* 设为 $y = \underbrace{x^k}_{①}\ \underbrace{e^{\alpha x}}_{②}\ [\underbrace{R(x)}_{③}\underbrace{\cos\beta x}_{④} + \underbrace{S(x)}_{③}\underbrace{\sin\beta x}_{④}]$ 共4部分.

! 易漏①部分

步骤：

(1) 写出特征方程. 求特征值
写出齐次通解.

(2) 根据 $f(x)$ 找 α、β、$\alpha+i\beta$、m、k.
确定 $y = x^k e^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x]$
求 y'、y'' 代入方程
一一对应.
找到特解

(3) 写出非齐次通解.

难点：设 y. （着重复习）.
叠加原理的使用.

高阶. $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$.

$\to \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

$\alpha+i\beta$ 是 k 重根. 则令 $y_* = x^k e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x)$.

（k 可能大于2）.

$f(x) = (x+1)e^x$ $\alpha=1.\ \beta=0.\ m=1.\ (k=2)$

$y_* = x^2 \ e^x(a_1x+b_1).$

$= e^x(a_1x^3+b_1x^2). \rightarrow y_*' =$

求y_*'. y_*''后. 可以不考虑 x^3与x^2系数.

只考虑x系数.

练习：

例1. 求通解 $y''-5y'+6y=(x+1)e^{4x}$

(Δ) $\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ 有2实根

→通：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

求(*)特：

右 $=(x+1)e^{4x}=e^{4x}[(x+1)\cos\beta x+\sin\beta x]$ ？

$\therefore \alpha=4.\quad \beta=0.$

$P(x)=x+1\qquad Q(x)=0\quad m=$最高次数$=1.$

$4+0i$ 是 的0重根.

$y_*=e^{4x}(\underbrace{R(x)}_{\text{一次}}\cancel{\cos 0x}+\cancel{S(x)\sin 0x})=e^{4x}\cdot R(x)$

$=e^{4x}(ax+b)$ 求a、b.

$y_*'=e^{4x}(4ax+4b+a)$ $\quad e^x(P(x))$求导 $=e^x(P(x)+P'(x))$

$y_*''=e^{4x}(16ax+16b+\overset{8a}{\cancel{4a+4a}})$

代入 $y_*''-5y_*'+6y_*$ 与 $(x+1)e^{4x}$ 作比较.

$\therefore e^{4x}(2ax+3a+2b)=$ ↗

$\therefore \begin{cases}2a=1\\3a+2b=1\end{cases}\quad \therefore \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}$

$\therefore$ 特解为 $y_*=e^{4x}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})$

*易错. $8y\to 8\lambda$ (×) $\quad 8\lambda\to 8y'$

$\to 8$ (√)

*总结. $f(x)=e^{\alpha x}[P(x)\underline{\cos\beta x}+Q(x)\sin\beta x]$ ↙若只有一个

↓

设 y_* 时 都不可少.

$y_*=\underline{x^k}e^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x+S(x)\sin\beta x]$

$\alpha+i\beta$ 是k重根. 次数为P、Q的最高次.

更多见课本 P286.

$\boxed{例2.}$ $y'''-3y''+3y'-y=e^x$.

— 特征方程 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ $\therefore (\lambda-1)^3=0$.

$\therefore$ 特征值 $\lambda=1$ (三重).

$\therefore$ 齐次方程通解为: $y_H=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$

— 因为 $f(x)=e^x=e^{\alpha x}\cdot(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x)$.

$\therefore \alpha=1$ $\beta=0$. $m=0$. <$P(x)=1$ 次数为0>

$\therefore \alpha+\beta i=1$ 是特征方程的三重根.

$\therefore$ $k=3$. 设 $R(x)=a_0$ $(m=1)$.

$\therefore$ 设 $y_*=x^3\cdot e^x[\cancel{R(x)}\ a_0]=x^3a_0e^x$

求导得 $y_*'=a_0e^x(x^3+3x^2)$

$y_*''=a_0e^x(x^3+3x^2+3x^2+6x)=a_0e^x(x^3+6x^2+6x)$,

代入 $y'''-3y''+3y'-y=e^x$ 得

$b_0=\frac{1}{6}$.

$\therefore y_*=\frac{1}{6}x^3e^x$

— 所以方程通解为 $y=(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{1}{6}x^3)e^x$

$\boxed{例3.}$ $y''-y'=\sin x$.

哈工大资源共享
QQ 2842305604

— $\lambda^2-\lambda=0$. $\lambda=0$或1

$\therefore y_H=C_1e^x+C_2$

— $f(x)=\sin x$. $\therefore \alpha=0$. $\beta=1$. $m=0$. $\therefore \alpha+\beta$ 不是特征根. $k=0$

$\therefore$设 $y_*=A\sin x+B\cos x$. ★ 两个都设.

$y_*'=A\cos x+(-B)\sin x$. $y''=-A\sin x-B\cos x$.

代入. $(A-B)\sin x-(A+B)\cos x=\sin x$.

$\therefore \begin{cases}A-B=1\\A+B=0\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

$\therefore y_*=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$.

— $\therefore$ 通解为 $y=C_1+C_2e^x+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$.

$f(x)=e^{-x}(x\cos x+3\sin x)$ 不是叠加。

例13. $y''+y=e^x+\cos x$ 的通解　< 叠加定理 >

一 $y''+y=e^x$ ① ； $y''+y=\cos x$ ②

$\alpha=1,\beta=0$　　$\alpha=0,\beta=1$.　　$m=0$.

一 特征方程 $\lambda^2+1=0$　$\lambda=\pm i$　　$\alpha=0.\ \beta=1.$　通解为 $c_1\cos x+c_2\sin x$

$y_1^*=Ae^x$，　$2Ae^x=e^x$　$\therefore A=\frac{1}{2}$　$\therefore y_1^*=\frac{e^x}{2}$

$y_2^*=x(A\cos x+B\sin x)$.

$y_2^{*\prime}=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x)$.

$y_2^{*\prime\prime}=-A\sin x+B\cos x-A\sin x+B\cos x+x(-A\cos x-B\sin x)$.

$y_2^{*\prime\prime}+y_2^*=2B\cos x-2A\sin x=\cos x$

$2B=1$　$-2A=0$　$\therefore B=\frac{1}{2}$　$A=0$

$y_2^*=x(\frac{1}{2}\sin x)=\frac{1}{2}x\sin x$.

$\therefore$ 通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{e^x}{2}+\frac{1}{2}x\sin x$.

例4. $y''-y=\sin^2 x$.　< 降次扩角 >

$y''-y=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

拆为 $y''-y=\frac{1}{2}$ ①　　$y''-y=\frac{1}{2}\cos 2x$

$\alpha=0,\beta=0.$　　　$\alpha=0$　$\beta=2$.

软件分享群
626648181

例5. $y''+y'=x-2+3e^{2x}$.

设 $f_1(x)=x-2$.　$f_2(x)=3e^{2x}$.

$y_*=x(a_1x+a_2)$　　$y_\Delta=b_1e^{2x}$.

$\therefore y$ 特解 $=x(a_1x+a_2)+b_1e^{2x}$.

高阶 例1

$y'''-3y''+3y'+y=e^x$.　只考虑 x^0 系数.

特方: $(\lambda-1)^3=0$?　$\therefore y_{11}=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$　(3阶→3个无关解).

$y_*=x^3e^x\cdot A$　　$y_*'=Ae^x(x^3+3x^2)$　$y_*''=Ae^x(x^3+3x^2+3x^2+6x)$

$y_*'''=Ae^x(x^3+3x^2+3x^2+6x+3x^2+6x+6x+6)$.

$6A=1$?

例12 $(\lambda^2+\lambda+1)^3=0$.　$\rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是3重(虚)根.

共6个根.

自变量变换. <欧拉思想>.

2/378 设 $y=y(x)\in C^2[-1,1]$. $(1-x^2)y''-xy'+ay=0$. ($a=1$或-1)

作自变量变换 $x=\sin t$.

求 y 作为 t 的函数应满足的方程、求 $y(x)$.

— 令 $x=\sin t$. $\therefore t=\arcsin x$. $\therefore \frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

— $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y''=\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\underline{\frac{dt}{dx}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

— 将 y'、y'' 代入 $(1-x^2)y''-xy'+ay\xlongequal{x=\sin t}\cos^2t\,y''-\sin t\,y'+ay=0$

$$\cos^2t\cdot\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cancel{\frac{x}{1-x^2}}\frac{1}{\cos^2t}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\sin t}{|\cos t|^3}\right)-\sin t\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{|\cos t|}\right)+ay=0$$

$$=\frac{d^2y}{dt^2}+\cancel{\frac{dy}{dt}\frac{\sin t}{|\cos t|}}-\cancel{\frac{dy}{dt}\frac{\sin t}{|\cos t|}}+ay=0.$$

$$=\frac{d^2y}{dt^2}+ay=0.$$

— 所以特征方程为 $\lambda^2+a=0$. ($a=\pm1$).

① $a=1$ 时 $\lambda=\pm i$.

通解为 $y=C_1\cos t+C_2\overset{x}{\underline{\sin t}}=C_1\sqrt{1-x^2}+C_2x$

② $a=-1$ 时 $\lambda=\pm1$.

通解为 $y=C_1e^{t}+C_2e^{-t}=C_1e^{\arcsin x}+C_2e^{-\arcsin x}$.

高阶

$\boxed{例13}$ $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 16(e^{-2x} + e^{2x})$.

一 $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$.

$= \lambda^2(\lambda-2) - 4(\lambda-2)$

$= (\lambda-2)(\lambda^2-4) = (\lambda-2)^2(\lambda+2) = 0$.

$\therefore \lambda_1 = 2$. 为二重根. $\lambda = -2$ 为一重根.

$\therefore y_h =$

一 ①求 $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 16e^{-2x}$. $\alpha = -2$. $\beta = 0$. $k = 1$

设 $y_* = Axe^{-2x}$

$y_*' = e^{-2x}(A + (-2)Ax)$.

$y_*'' = e^{-2x}(-2A + 4Ax - 2A) = e^{-2x}(4Ax - 4A)$.

$y_*''' = e^{-2x}(4A\cancel{0} - 8Ax + 4A + 4A) = e^{-2x}(-8Ax + 8A + 4A)$

$= e^{-2x}(-8Ax + 12A)$.

求 x^0 系数. $12A - 2(-4A) - 4(A) = 16$.

$\therefore A = 1$

$\therefore y_* = xe^{-2x}$.

一② 求 $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 16e^{2x}$. $\alpha = 2$. $\beta = 0$. $k = 2$.

$y_* = Ax^2e^{2x}$. （不应再设A. 笔误. 可记为S）.

$y_*' = e^{2x}(2Ax^2 + 2Ax)$

$y_*'' = e^{2x}(4Ax^2 + 4Ax + 4Ax + 2A) = e^{2x}(4Ax^2 + 8Ax + \underline{2A})$.

$y_*''' = e^{2x}(8Ax^2 + 16Ax + 4A + 8Ax + 8A)$

$= e^{2x}(8Ax^2 + 24Ax + \underline{12A})$.

只看常数项. $12A - 2(2A) = 16$.

$\therefore A = 2$. $\therefore y_* = 2x^2e^{2x}$.

一 相加 $\therefore y = \underline{C_1}e^{2x} + \underline{C_2}xe^{2x} + \underline{C_3}e^{-2x} + \underline{2}x^2e^{2x} + xe^{-2x}$.

齐通解. 可变 　　　是特解, 系数不可变.

新思路.

答案. ~~[illegible]~~ 册 $\frac{127}{134}$

$$y''-2y'+5y=e^{x}\sin(2x)$$

7.5.3.

欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

① 系数是 x^n 幂函数，且次数与 y 的阶数相同.

② 可以想到. 齐次的欧拉方程有幂函数 $\boxed{y=x^\lambda}$ 的解.

eg: 二阶 $x^2y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$.

令 $y = x^\lambda$.

则 $\lambda(\lambda-1)x^2 x^{\lambda-2} + a_1 x(\lambda x^{\lambda-1}) + a_2 x^\lambda = 0$.

$= \lambda(\lambda-1)\underline{x^\lambda} + a_1\lambda\underline{x^\lambda} + a_2\underline{x^\lambda}$.

$= x^\lambda[\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_2] = 0$

若入 ↗ =0. 则 x^λ 就是方程的解.

? 常系数 ↪ $e^{\lambda x}$

$y = x^\lambda$ y的形式不可变. 变 $x = e^t$ 则 $y = e^{\lambda t}$

用t作为自变量后.（y看作t的函数）.

① $xy' = x\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$ 而 $\frac{dt}{dx} = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

插项法. 使 y对t求导.

$= x\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x} = \frac{dy}{dt}$

$D = \frac{d}{dt}$（函数关于t求导）. $= Dy$

② $x^2y'' = x^2\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt})$

$= x^2(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\underline{\frac{dy^2}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}})$

$= x^2(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{dy^2}{dt^2}\cdot\frac{1}{x})$

$= -\frac{dy}{dt} + \frac{dy^2}{dx^2}$ 〈正好消去x.〉

$= (D^2 - D)y = D(D-1)y$.

看作: 矩阵 向量

$\frac{dy}{dt}$ 对x求导.

$f'(g(x))$ 对x求导

$= f''(g(x))\cdot g'(x)$

$(\frac{dy}{dt})^2\cdot\frac{dt}{dx}$.

根据数学归纳法.

假设 $x^n y^{(n)} = D(D-1)\cdots[D-(n-1)]y$.

1° n=1 时成立.

2° 假设 n=k 时成立. 则 $x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$

则当 n=k+1 时 $x^{k+1}y^{(k+1)} = x^{k+1}\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^k}D(D-1)\cdots(D-k+1)y)$

$= x^{k+1}(-kx^{-k-1}D(D-1)\cdots(D-k+1)y$

$+ \frac{1}{x^k}DD(D-1)\cdots(D-k+1)y\cdot\frac{1}{x})$

$= -kD(D-1)\cdots(D-k+1)y + DD(D-1)\cdots(D-k+1)$

$x<0$ 时设 $-x=e^t$

$x>0$

$y=x^\lambda$ $x=e^t$. $y=e^{\lambda t}$

$D=\frac{d}{dt}$

$x^2y^{(2)}+a_1xy'+a_2y=0$.

$\therefore D(D-1)y+a_1Dy+a_2y=0$.

$\therefore D^2-Dy+a_1Dy+a_2y=\underline{1}D^2y+\underline{(a_1-1)}Dy+\underline{a_2}y=0$.

常系数 ← 线性齐次微分方程.

设 $-x=e^t$ ($x=-e^t$). 则 $x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots a_{n-1}xy'+a_ny=0$.

转化为

$\lambda^2+(a_1-1)\lambda+a_2=0$.

$\lambda_1\neq\lambda_2$.

回带!!

$y=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}=c_1(e^t)^{\lambda_1}+c_2(e^t)^{\lambda_2}$

$=c_1x^{\lambda_1}+c_2x^{\lambda_2}$.

<不定积分思想. 换元回带.>.

例题.

1. $x^3y^{(3)}+x^2y''-4xy'=3x^2$.

越看越简单,
先把复杂运算做掉.

设 $x=e^t$. $D=\frac{d}{dt}$.

$D(D-1)(D-2)y+D(D-1)y-4D=\underline{3e^{2t}}$

求几阶导. 就是λ的几次方、 不必打开. 原形式.

$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+\lambda(\lambda-1)-4\lambda=0$.

提公因子 $\lambda[(\lambda-1)(\lambda-2)+(\lambda-1)-4]=0$. $\lambda=0$.

$\lambda^2-2\lambda-3=0$. $\quad$ -3. $\lambda=-1/3$.

$\Rightarrow \underline{\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)=0}$.

特解 $y_*=Ae^{2t}$. ↙ 形式一式.

"D-D" 注意.

① $\underline{D(D+1)(D-3)y=3e^{2t}}$

只消把 $y=Ae^{2t}$ 代入即可. 否则算3次. y''、y', y.

② 简单运算放最前. 让复杂先做.

$D(D+1)(D-3)y=3e^{2t}$.

$(D-3)Ae^{2t}=(Ae^{2t})'-3\cdot(Ae^{2t}).=2Ae^{2t}-3Ae^{2t}=-Ae^{2t}$.

$t=\ln x$.

$(D+1)(-Ae^{2t}) = -2Ae^{2t} - Ae^{2t} = -3Ae^{2t}$

$D(-3Ae^{2t}) = -6Ae^{2t}$

$-6Ae^{2t} = 3e^{2t}$ $\therefore A=-\frac{1}{2}$ $\therefore y_* = -\frac{1}{2}e^{2t}$

∴非齐次的通解：$y = C_1e^{-t} + C_2e^{0} + C_3e^{3t} \underline{-\frac{1}{2}e^{2t}}$

③ 回带 $y = C_1\frac{1}{x} + C_2 + C_3x^3 - \frac{1}{2}e^2$

法2). $x^3y^{(3)} + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$. ④ 借尸还魂. 由 $y_* = e^{2t} \to y_* = x^2$. 用$x^2$A

$y_* = Ax^2$. 代入.

<二次函元三阶导> $0 + 2Ax^2 - 2Ax\cdot(4x) = 3x^2$.

$(y_*' = 2Ax \quad y_*'' = 2A.)$

$\therefore 2Ax^2 - 8Ax^2 = 3x^2 \quad -6A = 3. \quad A = -\frac{1}{2}$.

哈工大彩虹墙
3609217933

总结.

(1) 由欧拉方程得出的常系数齐次线性微分方程的特征方程的求解，不要打开 $D(D-1)\cdots(D-n+1)$，而且尽可能地提取公因子进行因式分解.

(2) 代入特解有两种方法. eg: 若特解设为 Ae^{2t}.

(一) $x^3y^{(3)} + x^2y^{(2)} - 4xy \Rightarrow D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y + (-4)Dy$
$= D(D+1)(D-3)y = 0$.
将 $y = Ae^{2t}$ 代入y 最后代回 $e^t = x$.

(二). $x^3y^{(3)} + x^2y^{(2)} - 4xy' \Rightarrow$ 设特解形式为 $Ae^{2t} = \underline{Ax^2}$.
将 Ax^2 代入 $y^{(3)}$、$y^{(2)}$、y' 中. 对比得A.

例2. $\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = x\ln x. \\ y(1) = 1. \quad y'(1) = 1. \end{cases}$

设 $x = e^t$ 则 $D(D-1)y - Dy + y = \underline{e^t\cdot t}$

$D = \frac{d}{dt}$ $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0$.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0. \quad \therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

$\therefore y_H = e^t + xe^t$

! 设y_* 以t为自变量. $\because f(t) = \underline{e^t\cdot t}$ (t) $\therefore \alpha = 1. \beta = 0. m = 1. \quad \alpha + \beta i$ 是二重根.

设 $y_* = \cancel{x}^2e^t(A\cancel{x}+B)$. $y_* = (At^3 + Bt^2)e^t$.

$= x^3(Ax+B) = Ax^4 + Bx^3$

$\cancel{y_*' = 4Ax^3 + 3Bx^2}$. $\cancel{y_*'' = 12Ax^2 + 6Bx}$

$\therefore 12Ax^4 + 6Bx^3 - 4Ax^4 - 3Bx^3 + Ax^4 + Bx^3 = x\ln x$.

法(一). $\underset{\downarrow}{(D-1)^2} y_* = te^t$.

$<Dy_* - y_*>$ $\because y_* = \underline{\underline{e^t}}(At^3+Bt^2)$.

$\therefore (D-1)y_* = e^t(At^3+Bt^2)' = e^t(3At^2+2Bt)$.

$(D-1)\underline{(D-1)y_*} = e^t(6At+2B) \quad \underline{= e^t \cdot t}$ $(f(t))$

$\therefore 6At+2B = t$

$\therefore 6A = \frac{1}{6} \quad B=0$.

$\therefore y_* = \frac{1}{6}t^3e^t$

$\therefore$ 非齐次通解为 $y = e^t(C_1+C_2t) + \frac{1}{6}t^3e^t$

※ $\underline{= x(C_1+C_2\ln x) + \frac{x}{6}\ln^3 x}$.

法(二). $y_* = e^t(At^3+Bt^2)$.

$= x(A\ln^3 x + B\ln^2 x)$.

初值给的是 $x=1$，所以将初值条件代入最后的式子.

$y' = C_1+C_2\ln x + x(\frac{C_2}{x}) + \frac{1}{6}\ln^3 x + \frac{x}{6}\cdot 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$

$= C_1+C_2\ln x + C_2 + \frac{1}{6}\ln^3 x + \frac{1}{2}\ln^2 x$

$y|_{x=1} = 1$. $\therefore C_1 = 1$.

$y'|_{x=1} = 1$. $\therefore C_1+C_2 = 1$.

$\therefore \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$.

特解：$y = x + \frac{x}{6}\ln^3 x$.

7.5.3. Eular 方程.

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots a_{n-1} x y^{(1)} + a_n y = f(x).$$

① $a_1 \cdots a_n$ 为常数.

② 法1. $y = e^{\lambda x}$ 只能出 $\lambda e^{\lambda x} x^n$ 无关. (×).

法2. $y = x^{\mu} \longrightarrow xy' = \mu \underline{x^{\mu}}$ $x^2 y^{(2)} = \mu(\mu-1)\underline{x^{\mu}} \cdots x^n y^{(n)} = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)\underline{x^{\mu}}$

每项中都有 x^{μ}. 提出去.

$$\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1) + a_1\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+2) + a_2\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+3) + \cdots a_{n-1}\mu + a_n = 0$$

复杂 (×).

法3. 齐值转移. 化为好处理的方程. (将幂函数变为指数函数).

令 $x = e^t$. 则 $y = x^{\mu} \Rightarrow y = e^{\mu t}$ <自变量变为t>

则 $a_n y = a_n y$

$xy' = x \cdot (\frac{dy}{dx}) = \boxed{x} \cdot (\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx})$ y'化为t的函数

$x = e^t$ $t = \ln x$. $\therefore \frac{dt}{dx} = \boxed{\frac{1}{x}}$

$\Downarrow$

$xy' = \frac{dy}{dt}$ ① $D_t y$

$$x^2 y'' = x^2 (y')'_x = x^2 (\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x})'_x = x^2 ((\frac{dy}{dt})' \frac{1}{x} + \frac{dy}{dt}(-\frac{1}{x^2}))$$

$$= x [\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt})] - \frac{dy}{dt}$$

$$= x [\frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})] - \frac{dy}{dt}$$

$$= x [\frac{1}{x} \cdot (\frac{d}{dt})^2 y] - \frac{dy}{dt}$$

$$= (\frac{d}{dt})^2 y - \frac{d}{dt} y$$

大将实验群
290028380

$\Downarrow$

$$x^2 y^{(2)} = (\frac{d}{dt})^2 y - \frac{d}{dt} y \quad ②$$

$$= \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt} y) - \frac{d}{dt} y$$

$$= D(Dy) - Dy = \underline{D(D-1)y}$$

$\therefore y^{(2)} = \frac{1}{x^2} D(D-1)y$.

$$x^3 y^{(3)} = x^3 [\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2}[D(D-1)y])]$$

$$= x^3 [-2\frac{1}{x^3}(D(D-1)y) + \frac{1}{x^2}\underbrace{\frac{d}{dx}[D(D-1)y]}_{\frac{1}{x} D[D(D-1)y]}]$$

$$= x^3 [\frac{1}{x^3}[(D-2)(D-1)D y]]$$

? 完全归纳法

$$= (D-2)(D-1)D \cdot y$$

$$x^n y^{(n)} = D(D-1)\cdots(D-n+1)y.$$

故方程自变量换为t. $D=\frac{d}{dt}$

得 $D(D-1)\cdots(D-n+1)y+a_1D(D-1)\cdots(D-n+2)y+\cdots a_{n-1}Dy+a_ny=0$

例题:

<齐次>求通解. $x^3y^{(3)}+x^2y^{(2)}-4xy^{(1)}=0$.

由x次数=y阶数 可知 欧拉. 故用 $x=e^t$ 做

解:
设 $e^t=x$. $D=\frac{d}{dt}$ $D(D-1)(D-2)y+D(D-1)y-4Dy=0$. 是三阶常系数微分方程.

特征方程为 $[(\lambda-2)(\lambda-1)+(\lambda-1)-4]\lambda=0$.

$Dy\ [(D-1)(D-2+1)]=y'[(D-1)(D-1)]$

$=(y''-y')(D-1)$

$=(y'''-y''-y''+y')$

$=y'''-2y''+y'$

特征方程. $\lambda(\lambda^2-2\lambda-3)=\lambda(\lambda-3)(\lambda+1)=0$.

∴特征值为 $\lambda_1=0$ $\lambda_2=3$ $\lambda_3=-1$

∴ 通解为 $y=C_1+C_2e^{3t}+C_3e^{-t}$ → 自变量为t.

e^t 换回x.

原欧拉的通解为 $y=C_1+C_2x^3+C_3x^{-1}$

Q: $x<0$ 怎么做.

$x=-e^t$ 作代换.

最后通解 结果一样.

<非齐次> $x^3y^{(3)}+x^2y^{(2)}-4xy'=3x^2$. (可以直接写为)

先求齐次的通解,再求非齐次的特解.

解:令 $x=e^t$. $D(D-1)(D-2)y+D(D-1)y-4Dy=\cancel{0}\ 3e^{2t}$

是三阶常系数非齐次方程.

特征方程为 $\lambda(\lambda-3)(\lambda+1)=0$.

故齐次通解为 $y_H=C_1+C_2e^{3t}+C_3e^{-t}$

$3e^{2t}=e^{2t}[3\cos 0x+0\sin 0x]$ ∴ $\alpha=2$. $\beta=0$. $m=0$. 2不是根 $k=0$

设 $y_*=Ae^{2t}$ 求A,代入 $D(D+1)(D-3)y=3e^{2t}$.

$(D-3)Ae^{2t}=2Ae^{2t}-3Ae^{2t}=-Ae^{2t}$.

$(D+1)(-Ae^{2t})=-2Ae^{2t}-Ae^{2t}=-3Ae^{2t}$.

$D[(D+1)(D-3)y] = D(-3Ae^{2t}) = -6Ae^{2t} = 3e^{2t}$.

$A = -\frac{1}{2}$.

$\therefore y_* = -\frac{1}{2}e^{2t}$

$\therefore$ 非齐次通解为 $y = c_1 + c_2e^{3t} + c_3e^{-t} + (-\frac{1}{2})e^{2t}$.

代回 $e^t = x$. 则 $y = c_1 + c_2x^3 + c_3x^{-1} - \frac{1}{2}x^2$.

例3.

$= 3x^3$.

$= 3e^{3t}$.

$\alpha = 3, \beta = 0$. 3是一重根.

$\therefore$ 设 $y_* = A\,t \cdot e^{3t}$

$\therefore \underline{(**)} = y''' - 3y'' + 2y' + y'' - y' - 4y' = y''' - 2y'' - 3y' = 3e^{3t}$

$y_*' = A(t \cdot e^{3t})' = A[e^{3t} + 3te^{3t}]$

$y_*'' = A(3e^{3t} + 9te^{3t})$

$y_*''' = A(9e^{3t} + 27te^{3t})$

$-3A - 12A + 27A = 3$. $\therefore A = \frac{1}{4}$

$\therefore y_* = \frac{1}{4}te^{3t}$.

$\therefore$ 通解为 $y = c_1 + c_2e^{-t} + c_3e^{3t} + \frac{1}{4}te^{3t}$.

$y = c_1 + c_2x^{-1} + c_3x^3 + \frac{1}{4}\ln x \cdot x^3$.

例题：课本 P288.

1. 求解方程 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$.

- 设 $x=e^t$. 则 $t=\ln x$. 设 $\frac{d}{dt}=D$.
- 故方程可化为 $D(D-1)(D-2)y+D(D-1)y-4Dy=3e^{2t}$. (*)

  即 $D(D+1)(D-3)y=3e^{2t}$ 简单运算离y最近

  尽量因式分解 只留一个y.
- 特征方程为 $\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)=0$ 的根 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$. $\lambda_3=3$.

  故相应的齐次线性方程通解为 $y_H=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{3x}$ (X) 自变量t.

  $y_H=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}$
- 设方程特解为 $y=Ae^{2t}$.

  代入(*) $D(D+1)(D-3)y_*=3e^{2t}$.

  $(D-3)y_*=2Ae^{2t}-3Ae^{2t}=-Ae^{2t}$.

  $(D+1)[(D-3)y_*]=(D+1)(-Ae^{2t})=-2Ae^{2t}-Ae^{2t}=-3Ae^{2t}$.

  $D[(D+1)(D-3)y_*]=(D+1)(-3Ae^{2t})=-6Ae^{2t}$

  ∴ $-6Ae^{2t}=3e^{2t}$. ∴ $A=-\frac{1}{2}$. ∴ $y_*=-\frac{1}{2}e^{2t}$.
- 方程通解：$y=C_1e^{-t}+C_2+C_3e^{3t}-\frac{1}{2}e^{2t}$.
- 将 e^t 换回x. ∴ $y=C_1x^{-1}+C_2+C_3x^3-\frac{1}{2}x^2$.

法2) 用 $f(t)=3e^{2t}$ 设出 $y_*=Ae^{2t}=\underline{Ax^2}$. 二次开3次导后变为0. $y^{(3)}=0$.

将 $y_*=Ax^2$ 代入 $\cancel{x^3y^{(3)}}+x^2y^{(2)}-4xy'=\underline{3x^2}$. 最后结果是 x^2.

$y_*'=2Ax$. $y''=2A$ ∴ $x^2\cdot 2A-4x\cdot 2Ax$.

$=2Ax^2-8Ax^2=-6Ax^2=3x^2$.

∴ $A=-\frac{1}{2}$. ∴ $y_*=-\frac{1}{2}x^2$

x.x^3 的系数必为0. 不用管.

注：(1) 由欧拉方程得到的常系数微分方程 (*) 不要打开 $D(D+1)\cdots(D-n+1)$.

而是尽可能地提取公因子进行因式分解 (求导运算次数少)

(2) 代入特解的待定系数的两种方法.

例2. 解 $\begin{cases} x^2y''-xy'+y=x\ln x \\ y(1)=1. \quad y'(1)=1. \end{cases}$

— 设 $x=e^t$. $D=\frac{d}{dt}$.

$D(D-1)y-Dy+y=t\cdot e^t$.

特征方程为 $\lambda(\lambda-1)-\lambda+1=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0$.

∴ $\lambda=1$ 是二重根.

$\alpha=1$. $\beta=0$. $\alpha+i\beta$ 是二重根.

— ∴设 $y_*=t^2\cdot(At+B)e^t$.

$=(At^3+Bt^2)e^t$.

原方程为 $\underline{(D-1)^2}y_*=te^t$ 注:$[e^t(P(x))]'=e^t(P'(x)+P(x))$ 而$(D-1)$又减去$P(x)$]

$(D-1)y_*=e^t(3At^2+2Bt)$.

$(D-1)(D-1)y_*=e^t(6At+2B)$.

$=f(x)=te^t$

$6At+2B=t$. $A=\frac{1}{6}$. $B=0$.

— ∴ $y_*=\frac{1}{6}t^3e^t$

∴非齐次方程的通解: $y=e^t(c_1+c_2t)+\frac{1}{6}t^3e^t$.

— 回带 $\underline{y=x(c_1+c_2\ln x)+\frac{1}{6}x\ln^3x}$.

法2). $y_*=(A\ln^3x+B\ln^2x)x$.

代入不方便.

— 代入初值条件.

$y'=c_1+c_2\ln x+x\frac{c_2}{x}+\frac{1}{6}\ln^3x+\frac{1}{6}\cdot3\cdot\ln^2x$.

$=c_1+c_2\ln x+c_2+\frac{1}{6}\ln^3x+\frac{1}{2}\ln^2x$ 代入 $x=0$. $y'=1$. $y=1$.

∴ $\begin{cases} c_1=1 \\ c_1+c_2=1 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} c_1=1 \\ c_2=0. \end{cases}$ ∴ $y=x+\frac{1}{6}x\ln^3x$.

习题课.

1. $y(x)$ 是 $y'''+y'=0$ 的解 且 $x\to0$ 时是 x^2 的等价无穷小，则 $y(x)=$ ___

初值条件.

$\alpha=0\quad \beta=\pm1$.

特征方程 $\lambda^3+\lambda=0\quad \lambda(\lambda^2+1)=0\quad \lambda_1=0\quad \lambda_2=i.\quad \lambda_3=-i$

$\therefore y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$. 通解.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{y}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{C_1+C_2\cos x+C_3\sin x}{x^2}$　如果有极限. 下面趋于0 ⇒ 上面趋于0

法1) 等价无穷小代换

C_1代为$-C_2$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}C_1+C_2\cos x+C_3\sin x=C_1+C_2=0$.

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\boxed{-C_2}+C_2\cos x+C_3\sin x}{x^2}$

一个分式的分母若为0. 如果极限存在，那么说明分子的极限也为0.

$C_1+C_2\cos0+C_3\sin0=C_1+C_2=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{C_2(\cos x-1)}{x^2}+C_3\frac{\sin x}{x^2}$

极限存在.　高阶无穷小作分母. 应是∞. 无极限. 故$C_3=0$.

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{C_2(-\frac{1}{2}x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}C_2=1\quad \therefore C_2=-2$.

$C_2=-2.\quad C_1=2.\quad C_3=0.\quad \therefore y=-2-2\cos x$.

法2) 洛必达.

分子趋于0, 极限才可能存在 ⇒ $C_3=0$.

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-C_2\sin x+C_3\cos x}{2x}=-\frac{C_2}{2}=1\quad C_2=-2$.

分母趋于0.

法3). 泰勒展开.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{y}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{C_1+C_2\cos x+C_3\sin x}{x^2}$.

分母x^2, $\therefore C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$ 展成x^2形式.

x^3 不行.

$=C_1+C_2(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))+C_3(x-o(x^2))$.

$=-\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+\underline{(C_1+C_2)}+o(x^2)$.

$\begin{cases}C_1+C_2=0,\ C_3=0.\\ -\frac{C_2}{2}=1.\end{cases}\quad \therefore\begin{cases}C_1=2\\C_2=-2\\C_3=0.\end{cases}$

45. - 51:00

2、求 $y''+a^2y=\sin x$ $(a>0)$ 的通解.

解：特征方程 $\lambda^2+a^2=0$. $\lambda=\pm ai$ $\alpha=0$, $\beta=a$.

$f(x)=\sin x$. $\alpha'=0$. $\beta'=1$. 看 a 与 1 的关系.

① 若 $a=1$. 则 $y_*=x(A\cos x+B\sin x)$.

法2) 或 $y''+a^2y=\cos x+i\sin x=e^{ix}$?

设 $\underline{y_*=xAe^{ix}}$.

$y_*'=A(e^{ix}+ixe^{ix})=Ae^{ix}(1+ix)$.

$\cancel{y_*''}=Ae^{ix}(i+i-x)$

$\underline{=Ae^{ix}(2i-x)}$.

$y''+a^2y=A\cancel{e^{ix}}(2i-x)+a^2xA\cancel{e^{ix}}=1\cancel{e^{ix}}$ (此式中 $a=1$).

得：$2Ai=1$ $A=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$

$y_*=x\cdot(-\frac{i}{2})(\cos x+i\sin x)$

$=\frac{x}{2}\sin x-(\frac{x}{2}\cos x)i$

$y_{*2}=-\frac{1}{2}x\cos x$.

通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{x}{2}\cos x$.

② 若 $a\neq 0$. 则设 $y_*=A\cos x+B\sin x$.

$y_*'=-A\sin x+B\cos x$.

$y_*''=-A\cos x-B\sin x$.

$\therefore y_*''+a^2y_*=-A\cos x-B\sin x+a^2(A\cos x+B\sin x)$.

$=A\cos x\cdot(a^2-1)+B\sin x\cdot(a^2-1)=\sin x$.

$\therefore\begin{cases}A(a^2-1)=0.\\B(a^2-1)=1\end{cases}$ $\because a\neq1$. $\therefore a^2-1\neq0$. $\therefore A=0$. $B=\frac{1}{a^2-1}$

$y_*=\frac{\sin x}{a^2-1}$.

$\therefore$ 通解为 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{1}{a^2-1}\sin x$.

(常考题型)

3、设 $y=e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)+e^{3x}$ 是二阶常系数非齐次微分方程的通解 信息多

该方程为______

有 C_1、C_2 式子是齐次的通解　e^{3x} 为特解.

— 由 $e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$ 可知　$\lambda=\alpha\pm\beta i$. $\begin{cases}\alpha=2\\\beta=1\end{cases}$　$\therefore\lambda=2\pm i$

— 由 λ_1、λ_2 可恢复特征方程

$\lambda_1+\lambda_2=4$　　$\lambda_1\cdot\lambda_2=5$.　　则 $-\frac{b}{a}=4$　$\frac{c}{a}=5$.

$\therefore$ 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+5=0$. $\therefore y''-4y'-5y=0$ 为齐次方程.

— 求非齐次的 $f(x)$.

→ 解 $y_*=e^{3x}$. 代入 → 即可.

$\therefore\ 9e^{3x}-12e^{3x}+5e^{3x}=2e^{3x}=f(x)$.

— $\therefore$ 非齐次微分方程为: $y''-4y'-5y=2e^{3x}$.

二阶非齐次解结构: $y_*=\underbrace{C_1y_1+C_2y_2}_{y_H}+y_0$　C_1、C_2 λ_1、λ_2　5 ...

4、设二阶常系数微方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma\cdot e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$

试确定 α,β,γ，并求出该方程的通解.

法1) 特解可分解为 $y=e^{2x}+e^x+xe^x$. 其中两项是齐次的通解. 一项为特解

分析法. $y=e^{2x}$ 是齐次的解. $\lambda_1=2$.　xe^x 两种情况. 1) $\lambda=1$ 的重根. 但 $\lambda_1=2$. ×.

e^x 是齐次的另一解. $\lambda_2=1$.　2) 由设 y_* 时带出来. ($\alpha=1\ \beta=0$ 是一重根)

✓ $y_*=e^{\alpha x}(\underline{Ax+B})\cos\beta x$).

$\therefore$ 通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x$.

$\lambda_1+\lambda_2=-p=3$.　$p=-3$、$\lambda_1\cdot\lambda_2=2$.

$\therefore$ 齐次为 $y''-3y'+2y=0$.　$\therefore\ \alpha=-3$. $\beta=2$.

将 $y_*=xe^x$ 代入.　$\gamma\cdot e^x=-e^x$. $\gamma=-1$.

给出特解 就往里带. 待定系数法

法2). $y'=2e^{2x}+(2+x)e^x$, $y''=4e^{2x}+(3+x)e^x$

$y''+\alpha y'+\beta y=(4+2\alpha+\beta)e^{2x}+[(3+x)+\alpha(2+x)+\beta(1+x)]e^x=\gamma e^x$

于是 $4+2\alpha+\beta=0$.　$3+2\alpha+\beta=\gamma$,　$1+\alpha+\beta=0$.

$\therefore\ \alpha=-3$. $\beta=2$. $\gamma=-1$.　$\therefore$ 方程为 $y''-3y'+2y=-e^x$.

特征方程为 $r^2-3r+2=(r-1)(r-2)=0$.

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$

5. ~~4.~~ $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$

是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，求此微分方程.

解：设所求微分方程为 $y''+py'+qy=f(x)$. (1)

∵ y_1, y_2, y_3 是 (1) 的解

※ ∴ y_1-y_2、$y_1-y_3=e^{-x}$ 是相应于(1)的齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的特解.
$=e^{2x}-e^{-x}$ → $\lambda_1=2$. $\lambda_2=-1$ 找张类似的

※ 故特征方程为 $(\lambda-2)(\lambda+1)=\lambda^2-\lambda-2=0$ 对照. $\Leftrightarrow$ $\lambda^2+p\lambda+q=0$.

※ ∴ $p=-1$. $q=-2$. ?

将 $y_1=xe^x+e^{2x}$ 代入(1)式.

得 $f(x)=e^x-2xe^x$

∴ (1)式为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$ 即为所求方程.

~~5. $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$~~

~~是某二阶非齐次线~~

☆ 6. 设 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+by'+cy=0$ 的解. 其中 b, c 为正常数.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ ______

A. 与解的初值 $y(0)$, $y'(0)$ 有关，与 b, c 无关. $\lambda^2+b\lambda+c=0$.

B. 与解的初值 $y(0)$, $y'(0)$ 及 b, c 无关 求 y 即求通解.

$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$

C. 与解的初值 $y(0)$, $y'(0)$ 及 c 无关，只与 b 有关.

D. 与解的初值 $y(0)$, $y'(0)$ 及 b 无关，只与 c 有关.

① $\Delta=b^2-4c>0$ 时. 有两个相异的实根 λ_1、λ_2.

$\lambda_1+\lambda_2=-b<0$. $\lambda_1\cdot\lambda_2=c>0$. ∴ λ_1、$\lambda_2<0$.

通解：$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$.

∵ λ_1、$\lambda_2<0$. ∴ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\lambda_1 x}=0$；$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\lambda_2 x}=0$

∴ $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

② $\Delta=0$. 有一个二重根 λ.

$\therefore 2\lambda=-b<0.\quad \lambda^2=c>0.$

$\lambda=-\frac{b}{2}<0.$

$\therefore$ 通解为 $y=c_1e^{-\frac{b}{2}x}+c_2xe^{-\frac{b}{2}x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{b}{2}x}}=0.$ （$e^{\frac{b}{2}x}$ 比 x 增的快）.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0.$

③ $\Delta<0$. 无实根. 有一对共轭的复特征根.

$\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm i\beta.\quad \lambda_1+\lambda_2=2\alpha=-b.\quad \lambda_1\lambda_2=\alpha^2+\beta^2=c.$

通解. $y=\underset{\to 0}{e^{\alpha x}}\underbrace{(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)}_{\text{有界量}}=0.\quad \alpha=-\frac{b}{2}<0.$

证明.

$|c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x|\le|c_1\cos\beta x|+|c_2\sin\beta x|\le c_1+c_2.$

$|c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x|=|\sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos(\beta x-\varphi)|\le\sqrt{c_1^2+c_2^2}$

7. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+by'+y=0$. 的每一个解 $y(x)$ 都在区间 $(0,+\infty)$ 上有界，则实数 b 的取值范围？

解：① 由6可知. 若 $b>0$ 时. $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$. 有界. 成立.

②若 $b=0$ 时. $y''+y=0$. 特征方程 $\lambda^2+1=0$. $\lambda=\pm i$ $\alpha=0.\ \beta=1.$

通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$.

由 $|c_1\cos x+c_2\sin x|=|\sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos(x-\varphi)|\le\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ 有界

③ $b<0$ 时. $y''+by'+y=0$.

$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}$ $\sqrt{\Delta}$

1° $\Delta>0$. $\lambda_1+\lambda_2=-b>0$ $\quad\lambda_1\cdot\lambda_2=1>0.\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2>0.$

通解 $y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$ 无界.

2° $\Delta=0$. $\lambda_1+\lambda_2=-b$ $\quad\lambda=-\frac{b}{2}>0.$

通解. $y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2xe^{\lambda_1x}$. 极限为0. 有界.

3° $\Delta<0$. $\alpha\pm i\beta$. $2\alpha=-b\to\alpha=-\frac{b}{2}$.

通解 $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$.

$=\underset{\alpha>0}{e^{\alpha x}}\sqrt{c_1^2+c_2^2}\underbrace{\cos(\beta x-\varphi)}_{[-1,1]}$ 振幅越来越大. 无界

8. 求 $y''-4y'+4y=e^{2x}+\sin 2x$ 的通解.

第一部分、 $y''-4y'+4y=e^{2x}$.　　$y''-4y'+4y=\sin 2x$.

$\lambda^2-4\lambda+4=0$.　$\lambda_1=\lambda_2=2$.

设 $y_{*1}=Ax^2e^{2x}$

解得 $A=\frac{1}{2}$.

$\therefore y_{*1}=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

第二部分. $y''-4y'+4y=\overset{f_2(x)}{\cancel{\sin 2x}}$.　$\cos 2x+i\sin 2x=e^{i2x}$.　　$2i$ 不是特征根

设特解 $y_{*2}=Ae^{i2x}$.

$y_{*2}'=2iAe^{i2x}$.

$y_{*2}''=-4Ae^{i2x}$

$\therefore y''-4y'+4y=(-4A-8iA+4A)e^{i2x}=e^{i2x}$.

$\therefore A=\frac{1}{8}i$ *.

$$\therefore y_{*2}=\frac{1}{8}ie^{i2x}$$
$$=\frac{1}{8}i(\cos 2x+i\sin 2x)$$
$$=\frac{1}{8}i\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x$$

$\because f_2(x)=\sin 2x$ 是作为 e^{ix} 的虚部.

$\therefore y_{*2}$ 的虚部 $\frac{1}{8}\cos 2x$. 即为 $f_2(x)$ 对应的特解.

汇总. 综上. 方程通解为 $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{8}\cos 2x$

用复杂方程找通解
用简单方程代初值

<初值问题>

9. 若函数满足 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=?$

$f(x)=e^x+0$. → 写出通解 → 代入. 求出 c_1、c_2.

10. xe^x 与 $e^x\cos x$ 是n阶常系数齐次线性微分方程的两个解，则最小的正整数 $n=?$

解：若 xe^x 为一个解. 则 $\lambda=1$ 至是二重根.

若 $e^x\cos x$ 为一个解. 则 $\lambda=1+i$ 至是是一重根. 随之还有 $\lambda=1-i$（成对出现

$2+2=4$. $\therefore n\geq 4$

11. $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$ 其中 $f(x)$ 为连续函数 求 $f(x)$

变上限积分函数的积分函数中不能包含x.

$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$

$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt-\cancel{xf(x)}+\cancel{xf(x)}$. 右侧可导，相加，左侧也可导.

$f''(x)=-\sin x-f(x)$

$f''(x)+f(x)=-\sin x$.

解得 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$.

积分方程自带初值 $f(0)=0$. $f'(0)=1$ $f''\cancel{(0)=-f(0)=0}$

$f'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x+\frac{1}{2}\cos x+(-\frac{1}{2})x\sin x$.

$f(0)=0$ 得 $c_1=0$. $f'(0)=1$. 得. $c_2+\frac{1}{2}=1$ $c_2=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

12. 解方程 $y'=\frac{y+x+1}{y-x+5}$. <自变量、因变量的平移] 消除常数项. 变成齐次式.

$\begin{cases}x+a=u\\y+b=v\end{cases}$ $y+x+1=u+v-(a+b)+1$

$y-x+5=v-u-b+a+5=0$.

$\begin{cases}a+b=1\\a-b=-5\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}=\frac{v+u}{v-u}=\frac{\frac{v}{u}+1}{\frac{v}{u}-1}$ 设 $p=\frac{v}{u}$. $v=pu$. $v'=p'u+pu$.

$\frac{dv}{du}=\frac{dpu}{du}=p'u+p=p+\frac{dp}{du}u=\frac{p+1}{p-1}$

$\therefore u\frac{dp}{du}=\frac{p+1-p^2+p}{p-1}=\frac{-p^2+2p+1}{p-1}$.

$\therefore \int \frac{(p-1)}{p^2-2p-1} dp = -\int \frac{du}{u}$

$\int \frac{2(p-1)}{p^2-2p-1} dp = -\int \frac{2}{u} du.$

$= \ln|p^2-2p-1| = -\ln u^2 + \ln C.$

$\therefore p^2-2p-1 = Cu^{-2}$ $\therefore (p^2-2p-1)u^2 = C.$

$p = \frac{v}{u}.$ $\therefore (v^2-2uv-u^2) = C.$

$u = x+a = x-2.$ $\cancel{y=}$ $v = y+3$

$\therefore (y+3)^2 - 2(x-2)(y+3) - (x-2)^2 = C.\ (C\in R)$

13、$y''+y' = \frac{1}{1+e^x}$ 的通解. <缺y型的二阶微分方程>.

设 $z=y'$ 则 $y''=\frac{dz}{dx}$. ∴方程化为 $\frac{dz}{dx}+z=\frac{1}{1+e^x}$.

$z'+1z=\frac{1}{1+e^x}$. 是一阶线性微分方程. $P(x)=1$. $Q(x)=\frac{1}{1+e^x}$.

∴解为 $z = e^{-\int dx}\left[C+\int \frac{e^{\int dx}}{1+e^x} dx\right]$ 特解为 $C=0$.

$= e^{-\int dx}\left[\int \frac{e^x}{1+e^x} dx\right]$

$= e^{-x} \ln|1+e^x|.$

$\therefore y = \int z\,dx = \int e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx. = -\int \ln(1+e^x)\,d(e^{-x}).$

$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{1}{1+e^x} dx.$

$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$

$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x).$ → 特解.

特征方程为 $\lambda^2+\lambda=0$. ∴ $\lambda=0$ 或 $\lambda=-1$.

∴通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 - e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x)$

13. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，$g(x)\neq 0$，且有 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，$f^2(x)\neq g^2(x)$，试证方程 $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ 有且仅有一个实根。

解：$f'(x)=g(x)$　$f''(x)=g'(x)=f(x)$.

$\therefore f''(x)-f(x)=0$.

$\lambda^2-1=0$.　$\lambda_1=1$. $\lambda_2=-1$.

$\therefore f(x)$ 通解为 $c_1e^x+c_2e^{-x}$.

$g(x)=f'(x)=c_1e^x-c_2e^{-x}$.

$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{c_1e^x+c_2e^{-x}}{c_1e^x-c_2e^{-x}}$　　$F(x)$ 只有一个实根.(零点存在定理).

$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\frac{g^2(x)-f^2(x)}{g^2(x)}=1-[\frac{f(x)}{g(x)}]^2$　$\because f(x)\neq g(x)$

$\therefore F'(x)\neq 0$.　　$\therefore F(x)$ 为连续函数. 不等于0的连续函数的符号是确定的.

$\therefore F(x)>0$ 或 <0 恒不变.　　要么恒正/负

$\therefore F(x)$ 单调.

$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\frac{c_1e^x+c_2e^{-x}}{c_1e^x-c_2e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{c_2e^{-x}+0}{-c_2e^{-x}+0}=-1<0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{c_1e^x+0}{c_1e^x-0}=1.>0$.

由连续函数的零点存在定理可知. 仅存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $F(x_0)=0$.

且由 $F(x)$ 单调性，x_0 是唯一的.

$\therefore \frac{f(x)}{g(x)}=0$ 有唯一解.

$x=0$ 时 $y''|_{x=0}+p\cdot 0+q\cdot 0=1$. $\therefore y''|_{x=0}=1$.

14. $y=y(x)$ 是二阶常系数线性方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$

解：$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y(x)}\xrightarrow{\text{洛}\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{y'(x)}\xrightarrow{\text{洛}\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{y''(x)}=2$.

$\lim\limits_{x\to 0}y''(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[e^{3x}-py'-qy\right]=1-0-0=1$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=2$.

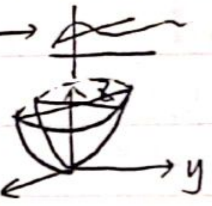
第八章

多元函数的微分学.

映射. 线性. ⟶ 线性.

非线性 ⟶

二元函数.



$z=x^2+y^2 \xrightarrow{x=a} z=a^2+y^2$ 一元.

n维空间. 概念

8.1. 基本概念.

8.1.1. 预备知识.

1. n元向量 称n元有序实数组$(x_1,x_2\cdots x_n)$为n元向量.

n维空间R^n $\{(x_1\cdots x_n)\mid x_i\in R\}=R^n$ 点集的.

$(0,0,\cdots 0)$为原点.

2. 距离(度量). $x=(x_1\cdots x_n)$ $y=(y_1\cdots y_n)$

距离 $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ 作差求和开平方

满足: △ $d(x,x)=0$. 故若$d(x,y)=0$. 则$x=y$

△ $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ A C B

3. 邻域 $U_\delta(P_0)=\{P\in R^n : d(P,P_0)<\delta\}$. ($P_0$点以圆心的一个球)

n维空间内到P_0距离小于δ的点的集合. P_0 $P_0(x_1,x_2,\cdots x_n)$

空心邻域 $\mathring{U}_\delta(P_0)=U_\delta(P_0)\setminus\{P_0\}$.

↘集合

4. (1) 内点 $E\subseteq R^n$ $\exists P_0\in R^n$. E为n维空间一块区域 若对于P_0.存在一个邻域完全包在E内. 则P_0为E的内点

↓全体内点 若$\exists\delta>0$, $U_\delta(P_0)\subseteq E$. 称P_0为E的内点

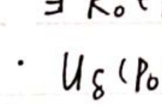
内部. <从P_0出发,走δ后仍在E内,说明完全在里面>.

(3) 边界点 $\forall\delta>0$ $U_\delta(P_0)$中既有E的点,也有不属于E的点. 则称P_0为E的边界点

<从P_0出去δ后要么进入E内,要么出去E外面>

注: 边界点可能处于E中, 也可能在E外 B A AB均为边界点. 但B不包在E中.

eg: $\begin{cases}x\ge0\\ y>0\end{cases}$.



A、B都是边界点. 但B不在E内

边界点不属于内点.

边界 边界点的全体, 记为∂E E P_0(外)

(2) 外点 若对P_0, 存在一个邻域完全包在E的补集中. (与E无任何交集).

↓全体外点

外部

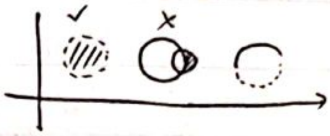
开集：没边界.

闭集：含有边界.　　$\mathring{U}_\delta(P_0) = \{P\in R^n \mid 0< d(P,P_0) < \delta\}$　　有实

$U_\delta(P_0) = \{P\in R^n \mid d(P,P_0) < \delta\}$　　开球　〈边界必须全部为虚线〉

5. 开集　　若E中所有点都是内点，则E为开集.

eg：$B=\{x\in R^n : d(x,0)<1\}$.



闭集. 释① 若E的补集 E^c 为开集，则 $\mathring{E}$ 为闭集.

释② 若E包含它的所有边界点，则E闭集

$\overline{U_\delta(P_0)} = \{P\in R^n \mid d(P,P_0)\le\delta\}$　闭球

eg：$E=\{(x,y)\in R^2 \mid \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\}$.

边界点为 $\begin{cases} (x,0): x\geq 0. & \cap E=\phi \\ (0,y): y\geq 0. \Rightarrow & \subseteq E \end{cases}$　　?

$\overline{E}=\{(x,y)\in R^2 \mid \begin{matrix} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{matrix}\}$ 闭集

6. 有界　　若 $\exists M>0$. s.t. $E\subseteq U_M(0)$　则称E有界 包含于某个闭球

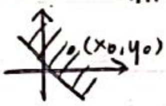
〈以0为圆心. 向外扩大M. 可以将E包起来〉

无界.

E有界 $\Leftrightarrow$ $\exists M>0$. s.t $\forall x\in E$. $d(x,0)<M$.

$\Leftrightarrow$ $\exists x_0\in R^n$ $\exists M>0$. s.t $E\subseteq U_M(x_0)$

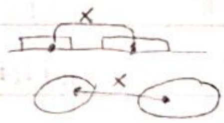
〈开集〉例：(二维空间) $A=\{(x,y)\in R^2 \mid x+y>0\}$.



若 $x_0+y_0>0$. 则 $\exists\delta>0$. 使 $U_\delta(x_0,y_0)\subseteq A$.

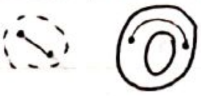
无界.　找不到 $M>0$. 使 $E\subseteq U_M(0)$.

7. 连通　　E内的任意两点 都有E中的(曲线)连接.



则说 E 是 (线)连通集.　　则，f 有取到：若AB连通 $[f(A), f(B)]$

开区域　连通的开集.



闭区域. 连通的闭集.

多元函数.

多元函数的例子.

1. 圆柱体 体积V. 底面圆半径r. 高h. $V=\pi r^2 h$.

当 r, h 在集合 $\{(r,h)|r>0, h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时, V的对应值随之确定.

$R^2 \to R^1$

定义：设D是 xoy 平面的点集. 若变量 z 与D中的变量 x,y 之间有一个依赖关系，使得在D中每取定一个点 $P(x,y)$ 时，按着这个关系有唯一确定的z值与之对应. 则称 z是x,y的二元函数. 记为 $z=f(x,y)$ 或 $z=f(P)$

$f: D \ni (x,y) \mapsto z \in R$, x,y称为自变量, z 称为因变量

点集D 称为函数的定义域

数集 $\{z\in R \mid z=f(x,y), (x,y)\in D\}$ 称为值域

<类似地, 可定义多元函数（2元及以上）>

△多元函数的定义域 $\begin{cases}\text{实际问题（应用问题}\\ \text{最大定义域（纯数学）.}\end{cases}$

例2. $z=\ln(x+y)$ 的定义域是 $\{(x,y)\in R^2 \mid x+y>0\}$. 在oxy 平面中是直线 $x+y=0$ 右上方的半平面（不含该直线），是无界开区域.

例3. $z=\dfrac{\sqrt{2x-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 的定义域是.

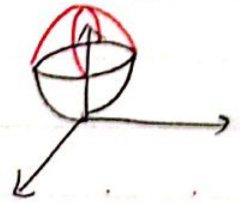
$\begin{cases} 2x-x^2-y^2\ge 0 \\ x^2+y^2-1>0. \end{cases}$ $x^2+y^2-2x\le 0.$ $(x-1)^2+y^2\le 1.$ $\to x^2+y^2>1.$

$\{(x,y)\in R^2 \mid (x-1)^2+y^2\le 1 且 x^2+y^2>1\}$. 是 oxy平面中的有界非开非闭区域.

例4. $u=\sqrt{z-x^2-y^2}+\arcsin(x^2+y^2+z^2)$ 的定义域是 $\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2\le z 且 x^2+y^2+z^2\le 1\}$

是三维欧式空间中旋转抛物面 $x^2+y^2=z$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 围成的闭区域

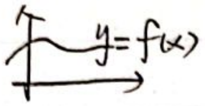
?、



杯和球围成

一元 $\{(x,y)\in R^2 \mid y=f(x),\ x\in D\}$. 是函数 $y=f(x)$ 的图像.

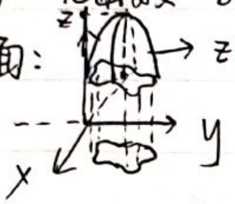
$y=f(x)$ 的曲线



二元函数图像. $f: D\subseteq R^2\to R$，则集合 $\{(x,y,z)\in R^3 \mid z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$.

称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形. 是 R^3 中的曲面.

<曲面:



→ $z=f(x,y)$ 是三维曲面.

再例 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ：以 $(0,0)$ 为球心，R 为半径的上半球面.

$z=x^2+y^2$. ：旋转抛物面

$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ ：双曲抛物面.

$Ax+By+Cz+D=0$ ：平面.

8.1.2. 多元函数.

定义：设D是oxy平面上的点集、若z与D中的点有一个依赖关系、使得在D内，每取一个点P(x,y)，都有一个z与P(x,y)对应.

则说z是x,y的二元函数/点函数.

记为 $z=f(x,y)$ 或 $z=f(P)$

二元函数 $z=f(x,y)$ 就是oxy平面点集D到z轴上的映射

$f: D\to R^1$

PS：自变量是x,y. 因变量是z.

点集D为定义域. 值域为 $\{z \mid z=f(x,y), (x,y)\in D\}$.

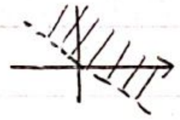
$f(x_0,y_0)$ 或 $f(P_0)$ 指二函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的函数值

若自变量为2个以上

多元函数.

举例：

① $z=\ln(x+y)$

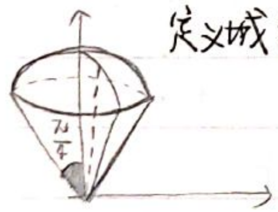
定义域 $\{(x,y) \mid x+y>0\}$.  无界开区域.

② $z=[\sin(x^2y)]^2-2$.

定义域 $\{(x,y)\in R^2 \mid x,y\in R\}$.

值域为 $[0-2, 1-2]=[-2,-1]$.

③ $u=\sqrt{z-x^2-y^2}+\arcsin(x^2+y^2+z^2)$



定义域为 $\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2\le z 且 x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

是以原点为球心，1为半径的球体内.旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上方的部分

有界、闭区域.

※ $\underbrace{z=f(x,y)}_{二元函数}$，$(x,y)\in D$ 的图形是三维空间中的曲面.

由空间解析几何知：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的图形：以(0,0)为球心，R为半径的上半球面

$z=x^2+y^2$ 旋转抛物面　　$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 圆锥面

$z=xy$ 双曲抛物面　　二元隐函数：$Ax+By+Cz+D=0$ 平面.

?　　?

8.1.3. 多元函数的极限与连续.

(一) 极限

定义一：聚点：若P_0的任何邻域，都与E有重合区域，则称P_0为E的聚点.

[若$\forall \delta>0$.都有$U_{\delta}(P_0)\cap E\neq\emptyset$
则P_0为E聚点.]

ps：集合的内点必是聚点.
边界点可能是聚点，也可能不是聚点.

定义二. 极限：

若P是D区域内的聚点.

[任取一个正的ε.都可以找到$\delta=\delta(\varepsilon)$，使$d(P,P_0)<\delta$时，
满足$|f(P)-A|<\varepsilon$.
即"P与P_0要多接近有多接近时，函数值为A.]

则称"P→P_0时，函数f(P)以A为极限."

记作"$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$."

↓ 若P为二维点，$P_0(x_0,y_0)$时

记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

多元函数极限 含义：只要P到P_0距离$d\to 0$，就有$f(P)\to A$.

例1：证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}=0$.

法1 $\because \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}-0\right|=(x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{xy}\right|\leq x^2+y^2=d^2(P,P_0)$

$\therefore \forall\varepsilon>0$. 取$\delta=\sqrt{\varepsilon}$. 则当$0<d(P,P_0)<\delta$时

恒有$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}-0\right|<(\delta)^2=\varepsilon$.

法2. $\because \sin\frac{1}{xy}$是有界量 x^2+y^2是无穷小量. $\therefore$问题得证.

注意：

1. 若$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$，则P以任何方式趋于$P_0$时，都会得到极限为A.

2. 若P以两种方式趋于P_0时，有不同的极限，则$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$不存在.
即f在P_0点不存在极限.

eg: →

eg：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 是否存在.

让 P 分别用不同路径趋于 P_0.

当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时.

$\lim\limits_{(x,kx)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{k^2x}{1+k^4x^2} = 0.$

当 (x,y) 沿 $x=0$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0.$

↑ 这说明沿任何直线趋于原点时，$f(x,y)$ 极限都为 0.

但 $(x,y)\to(0,0)$ 还有许多路径.

当 (x,y) 沿抛物线 $x=y^2$ 趋于 $(0,0)$ 时.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$

当 (x,y) 沿抛物线 $x=\frac{1}{2}y^2$ 趋于 $(0,0)$ 时.

极限 $=\frac{2}{5}$.

因此 极限不存在.

3、即使用几种方式使 $P\to P_0$ 所得的 $f(P)$ 相同，

也不断定 $f(P_0)$ 有极限.

4、如果知道 $f(P)$ 在 P_0 处有极限，只需采用一种途径求极限.

5、辨别好 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ & $\lim\limits_{x\to x_0}[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)]$

同时逼近 ↘ 先求 $y\to y_0$ 的极限.

当确定极限存在时，可以设出路径. 再让 $x\to x_0$

* 极限计算

<计算技巧> 两边夹求极限. 拆成四则运算、特殊极限、无穷小替换.

唯一性、极限点附近的保序性 和有界性.

例1 $\lim\limits_{\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy^2}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\cancel{\sin} xy}{xy^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

例2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} (1+\sin(xy))^{\frac{y}{x}}$

$= \lim (1+\sin xy)^{\frac{1}{\sin xy}\cdot\frac{\sin xy\cdot y}{x}} = e^{\lim\frac{\sin xy\cdot y}{x}} = e^{(\pi^2)}.$

例3. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2-y^4}$

作变换. 令 $x=\rho\cos\theta$. $y=\rho\sin\theta$. $\therefore (x,y)\to(0,0)$ 化为 $\rho\to0$.

又 $\because \left|\dfrac{2\rho\cos\theta\sin^2\theta}{1-\rho^2\sin^4\theta}\right| < \dfrac{2\rho}{1-\rho^2}$ $(0<\rho<1)$

(ps: $\dfrac{2\rho}{1-\rho^2}$ 与 θ 无关. $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{2\rho}{1-\rho^2}=0$)

由夹挤准则: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2-y^4} = \lim\limits_{\rho\to0} \dfrac{2\rho\cos\theta\sin^2\theta}{1-\rho^2\sin^4\theta} = 0$

(二) 连续. & 间断. { 定义不存在 / 函数值与极限不相等 }

1. 定义: $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$ 则 $f(P)$ 在 P_0 点连续.

P_0 为 $f(P)$ 的连续点.

$\lim\limits_{d(P,P_0)\to0} f(P)-f(P_0)=0$

<$P\to P_0$ 时 $f(P)$ 与 $f(P_0)$ 重合>

2. 符号: $f(P)\in C(E)$ 指 $f(P)$ 在 E 内每一点处都连续.

例: $f(x,y)=\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 处处连续.

$f(x,y)=\dfrac{xy}{1-x^2-y^2}$ 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上处处间断.

$f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ 仅在 $(0,0)$ 处间断.

3. 图形: △ E为平面区域. 则 E上的二元连续函数 $z=f(x,y)$

图形为在E上张开的"无孔无缝"的连续曲面.

4. △ 多元连续函数的和差积商及复合 仍是连续的.

△ 多元初等函数 在内点处均连续.

相关概念: 多元初等函数: 由各个自变量的基本初等函数经有限次

四则运算和复合, 由一个式子表达的函数.

△ 有界闭区域上的多元连续函数性质:

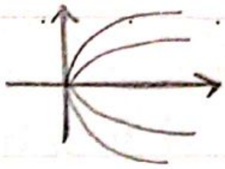
① 必有界.

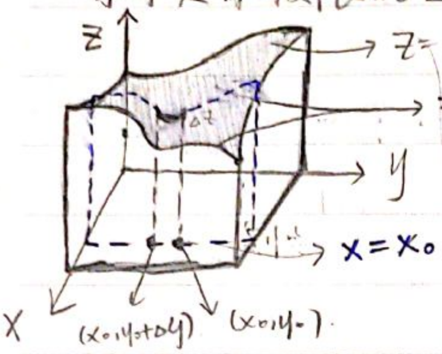
② 必有最值.

③ 介值定理 (可以取到最小值与最大值之间的任何值)

8.2. 偏导数

求导是取极限的过程. 若平面上的函数有两条曲线





对 $z=f(x_0,y)$ 求导

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

8.2. 偏导数

定义：若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域内有定义

则固定 $x=x_0$，给 y_0 以增量 Δy

称对应的函数值的增量 $\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.

→ 称为**偏增量**. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处关于 x 的偏增量.

若 $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ 存在，则称此极限为 z 关于 y 的**偏导数**.

记为 z_y' ; $\frac{\partial z}{\partial y}$

f_y' ; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $f_y'(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}$

同理，固定 $y=y_0$. 得到 z 关于 x 的导数.

如果在 E 内每一点，z 关于 x 的偏导数都存在的话，

那么偏导数为 (x,y) 的函数，称为**偏导函数**.

偏导函数 $f_x'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的值
↓
$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数

$$f_y'(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$f_x'(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

例1. $z=x^2y+\sin y$. 求偏导函数和在 $(1,0)$ 处的偏导数.

①偏导函数将 y 看作实数. 作 x 的一阶导.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y2x+0=2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+\cos y$$

②在 $(1,0)$ 处的偏导数.

$x=1$. $y=0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,0)}=2.$$

※多元函数求某个自变量的偏导数就是把其他变量视为常量，考察函数对这个自变量变化的变化率

例2. $f(x,y,z)=z-a^{xy}\sin(\ln x^2)$.

求其在 $(1,0,2)$ 处的3个偏导数.

① △先把其他变量固定住. 则偏导数只与x一个变量有关. 得出f关于x的关系式.

$f(x,0,2)=2-\sin(\ln x^2)$ ↘对x求导

$f'(x,0,2)=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,0,2)}=0-\cos(\ln x^2)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x.\quad (x\to 1)$

$=0-\cos 1\cdot 2=-2.$

② $f(1,y,2)=2-\cancel{a^{y}\sin 0}$

$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,0,2)}=0$ ↙对y求导, 代入y=0.

③ $f(1,0,z)=z-0$

$\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=2}=1$

例3. $z=y^x\ (y>0)$. 求 $\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$ （指数函数求导）

$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$ （幂函数求导）.

∴原式 $=y^x+y^x=2y^x=2z$

例4. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在(0,0)不连续，但两个偏导数都存在.

<不连续：在该点无极限 / 不等于 $f(x_0,y_0)$>. ? 两不同路径接近, 极限不同

$x=y^2$ 时. $f(x,y)=\frac{1}{2}$. $x=\frac{1}{2}y^2$. $f(x,y)=\frac{2}{5}$. 无极限，不连续

$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$. $f(x,0)=\begin{cases}0, & x=0\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$ $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=0.$

$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$ $f(0,y)=\begin{cases}0, & y=1\\ 0, & y\neq 1.\end{cases}$

左导 = 右导 ⇒ 导数存在?

? f_x', f_y' 在(0,0)附近无界.

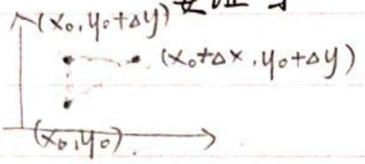
偏导数存 → 偏增量存在.

例5. 设$f(x,y)$在(x_0,y_0)的某邻域 f_x', f_y' 存在且$\boxed{\text{有界}}$.

证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证: $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 记为Δz

要证当Δx、$\Delta y \to 0$时, $\Delta z \to 0$.



$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta x) - f(x_0,y_0)$

$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)$ 固定住 $y_0+\Delta y$

$+ f(x_0\cancel{+\Delta x}, y_0+\Delta y) - f(x_0\cancel{+\Delta x}, y_0)$. ?

由拉格朗日 $= \underline{f_x'(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x}$ $(\theta \in (0,1))$ ①

$+ \underline{f_y'(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y}$

有界量×无穷小②

∵ f_x', f_y'有界 ∴ 当$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \to 0$时, ①、② $\to 0$. ∴ $\Delta z \to 0$.

?

∴ 连续.

偏导数存在 $\xrightarrow{\times}$ 连续性.

加条件:

8.2.2. 高阶偏导数.

<定义> $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)$、$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$ 仍是x,y的函数

若 $f_x'(x,y)$ / $f_y'(x,y)$ 仍有导，则称它们的偏导为二阶偏导数.

<分类> ① $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx}$

② $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy}$

③ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx}$

] 混合二阶导.

④ $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy}$

<定义> 二阶及以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例1. $z=\ln(x^2+y)$ 求四个二阶偏导数.

$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot\left(\frac{1}{x^2+y}\right)$ $\qquad z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2\cdot\frac{1}{x^2+y}+2x\cdot\left(-\frac{2x}{(x^2+y)^2}\right)=\frac{2}{x^2+y}-\frac{4x^2}{(x^2+y)^2}$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-2x\frac{1}{(y+x^2)^2}$

(1) $z''_{xy}=z''_{yx}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$

并(2) $z''_{xx}+z''_{yy}=0$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{1}{(y+x^2)^2}$

可见 $\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z^2}{\partial y\partial z}$ 两个混合二阶偏导数相等.

<定理> 若 z''_{xy} 存在 z_x', z_y' 也存在，且 $\boxed{z''_{xy}}$ 在 (x,y) 处 $\boxed{\text{连续}}$

则混合偏导数 z''_{yx} 在 (x,y) 处也存在，且 $z''_{xy}=z''_{yx}$

→ 一般地，多元函数的混合偏导数如果连续，就与求导次序无关.

例2. 设 $u=xy^2z^3$.

可得 $u''_{xy}=u''_{yx}$; $u''_{xz}=u''_{zx}$; $u''_{yz}=u''_{zy}$

例3. $f(x,y)=\begin{cases}0, & x\in Q.\text{有理数}\\ 1, & x\notin Q\end{cases}$

?

则 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ 不存在 $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$ $\qquad f(x,0)=D(x)$ 不连续 不可导

$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$ $\qquad f(0,y)\equiv0$ $\quad f(1,y)=1$

例4. (1) 证明 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. $\qquad$ 求导后是0

$z'_x=\frac{-x}{x^2+y^2}$ $\qquad z''_{xx}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

同理，将 $x\to y$，$y\to x$，得 $\quad z''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. $\qquad$ <对称性>.

$\therefore z''_{xx}+z''_{yy}=0$.

例14(2). 证 $u=\frac{1}{r}$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$. 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{-r^3}$ ↗ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{r^3-x\cdot 3r^2\cdot(+\frac{x}{r})}{r^6}=\frac{3x^2-r^2}{r^5}$ ⇒ $x\to y.z$ 即可

IDEAS COME FROM JIAN

例14. $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

证明 $f''_{xy}|_{(0,0)}\neq f''_{yx}|_{(0,0)}$

$f_x'(x,y)=\begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+yx\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, & \cancel{x\neq 0}\ (x,y)\neq(0,0) \\ & \cancel{x=0}\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$=\begin{cases} \frac{y(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & \cancel{x\neq 0}\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & x=0\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

↓ 是用定义法求得 $f_x'(0,0)\overset{y=0}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ (y=0)$ $=\cancel{x}\ 0$.

$f''_{xy}(x,y)=\{$ 太复杂 因为求具体点处导数 直接代入

$\because f''_{xy}(0,0)=[f'_x(0,y)]'_y$ ∴ 求 $f'_x(0,y)$

$(x,y)\neq(0,0)$, $y\neq 0$ 时, $\therefore f_x'(0,y)=\frac{y\cdot(-y^4)}{y^4}=-y$ $\therefore f_x'(0,y)=\begin{cases}-y, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$

∴由定义法, $y\neq 0$ 时 $f'_x(0,y)=-y$, 而 $y=0$ 时 $f'_x(0,y)=0$ ∴ $f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=-1$

同理 $f_y'(x,y)=\begin{cases}\frac{x(-4x^2y^2+x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & \cancel{x\neq 0}\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \cancel{x=0}\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$f_y'(x,0)=\begin{cases}\frac{x\cdot x^4}{x^4}=x, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

$f''_{yx}(x,0)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$

↳ 定义法. < 分段函数 求单个点极限时用定义法做 >.

由此可见 $f''_{xy}|_{(0,0)}\neq f''_{yx}|_{(0,0)}$

∴ f''_{xy} 在 $(0,0)$ 处 必不连续. ?

$f''_{xy}(\ ,\ )$

例15. $u=e^{xy}\sin z$ 求 u'''_{xxz} 与 u'''_{xzx}

$u'_x=ye^{xy}\sin z$ $u''_{xx}=y^2e^{xy}\sin z$ $u'''_{xxz}=y^2e^{xy}\cos z$

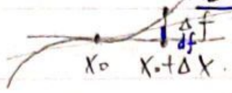
$\because u''_{xx}$ 存在. u''_{xz} 存在, 且 u'''_{xxz} 连续

∴ u'''_{xzx} 存在. 且与 u'''_{xxz} 相等.

8.3. 全微分

<复习一元：$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 是增量.

若 $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$，则称 f 在 x_0 处可微. f的改变量与自变量增量的近似的线性关系



f 在 x_0 处的微分 $df = A\Delta x$ （A为 x_0 处斜率）.

$df \xrightarrow{\text{加上 } o(\Delta x)} \Delta f$

<几何意义>. 曲面在某点处的切面.

<全微分定义>.

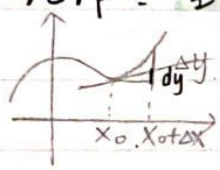
当 $\Delta y=0$ 时变成偏增量 $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$

△ 全增量：$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$. 表示立体距离

△ 可微：若 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ 表示，（A、B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关）.

则称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微 / 全微分存在.

△ 记作：全微分 $dz = A\Delta x + B\Delta y$.



△ 可微函数：若函数在区域E内每一点都可微，则称其为区域E内的可微函数，也称函数在E内可微.

<定理1> 多元函数若可微，必连续. 在 P_0 处有极限且与函数值相等，而可微也是四面八方 全面的

但连续不一定可微.

证：$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ ↙可微.

当 Δx、$\Delta y \to 0$ 时. $\Delta z \to 0$. →连续

连续 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

$\lim\limits_{\rho\to 0} \Delta z = 0$ $\left[\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x,y) - f(x_0,y_0) = 0 \right.$

<定理2> $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 处可微.

$\Rightarrow$ z 在 P 处的偏导都存在，且 $\frac{\partial z}{\partial x}=A$，$\frac{\partial z}{\partial y}=B$. 偏导存在，不一定可微

因此，$z=f(x,y)$ 的全微分可表示为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

注：因 x、y 为自变量，所以 Δx：$\Delta y = dx, dy$.

<偏微分> $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 处的关于 x、y 的偏微分

分别是 $f'_x(x,y)dx$ / $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ ；$\frac{\partial z}{\partial y}dy$

*：偏增量 $\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + o(\Delta x)$ →偏微分

$\Delta_x z = A\Delta x + o(\Delta x)$

偏微分是偏增量的 线性主部

<微分的叠加原理>

全微分 = 两偏（微）分之和.

函数的全微分 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ → 函数的偏微分.

多元 → $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial v}dv$. $u=f(x,y,v)$

注：(1) 若 $z=f(x,y)$ 可微，则 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$

其中 $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}dx}$ 称为 z 在P点处关于 x 的 $\boxed{\text{偏微分}}$

· 偏微分是偏增量 $\Delta_x z=\underbrace{A\Delta x}_{\frac{\partial z}{\partial x}dx}+o(|\Delta x|)$ 的线性主部

· 全微分是全增量的线性主部.

$\Delta z=dz+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$.

(2) 各偏导数存在 只是全微分存在的必要条件 而非充分条件.

→ 连该点函数值极限都无法保证存在　　? 可微必得连续 连续指 $\lim=f(x_0)$

并且两个偏导数都存在，$z=f(x,y)$ 还连续，也不能保证可微.

△ 若分段函数在分段点都不连续 $\begin{cases}\text{极限不存在}\\ \text{极限}\neq\text{函数值}\end{cases}$ 直接不可微.

例：$z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

? 夹挤为何加绝对值

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)\overset{0\leq}{=}\lim\limits_{\to(0,0)}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}}_{\to0}$. $\therefore\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(2) 偏导 $f_x'(0,0)=f_x'(x,0)=0'=0$. 　＞都存在

$f_y'(0,0)=f_y'(0,y)=0'=0$.

(3) 验证不可微：　　$\langle\Delta z=dz+o(\rho)\rangle$ ↑

$\because f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均存在. 则 $\Delta z=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y+o(\rho)$

即 $\Delta z-(f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y)=o(\rho)$.

→ 若验不可微. 即 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\quad}{\rho}\neq0$

而 $\Delta z-(\overbrace{f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y}^{=0})=\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)$

$=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y^2)}}=\frac{\Delta x\Delta y}{\rho}$ 　　$=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}-0$

$\lim\limits_{\rho\to0}\frac{\frac{\Delta x\Delta y}{\rho}}{\rho}=\frac{\Delta x\Delta y}{\rho^2}=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ $(\Delta x\to0,\Delta y\to0)$

? 任取一条路径. 设 $\Delta y=\Delta x$

上式 $=\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta x^2}=\frac{1}{2}\neq0$. 可见在 $(0,0)$ 附近 $\Delta z-(f_x'\Delta x+f_y'\Delta y)\neq o(\rho)$

$\therefore z=f(x,y)$ 在 $P(0,0)$ 处不可微.

<定理3> 在 $P(x,y)$ 邻域内，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　二元函数有±极限→邻

若 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 均存在，它们在 P 处连续，

则 $z=f(x,y)$ 在 P 处可微

证明：$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$　　插入

$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$= f_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y'(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$　拉格

$f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 连续、　$= [f_x'(x,y)+\alpha]\Delta x + [f_y'(x,y)+\beta]\Delta y$

含义：自变量增量→0时　$(\alpha、\beta\to 0, \rho\to 0$ 时$)$.

函数值增量→0

$= f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y$ ②

$f(x+\Delta x, y+\Delta y)$　　　　　A、B与 Δx、Δy 无关

$= f(x,y)+\alpha$　　证②为 $o(\rho)$

$(\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha=0)$.　$\lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\(\Delta x,\Delta y\to 0)}} \frac{\alpha\cdot\Delta x}{\rho} + \frac{\beta\cdot\Delta y}{\rho}$

校学生会
QQ 3348756836

$\because |\Delta x| \le \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = \rho$　$\therefore \frac{|\Delta x|}{\rho} \le 1$　$\therefore \frac{\Delta x}{\rho}$ 有界.

$\therefore \lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\alpha\cdot\Delta x}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0} \alpha\cdot\frac{\Delta x}{\rho} = 0$. 有界值 $=0$.

同理 $\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\beta\cdot\Delta y}{\rho} = 0$

$\therefore \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y = o(\rho)$　$\therefore \Delta z = f_x'\cdot\Delta x + f_y'\Delta y + o(\rho)$

$\therefore$ 满足 $f(x,y)$ 可微结构.

注：不是只有可偏导且偏导连续才能可微. 以上只是充分条件.

偏导不连续也可能可微.　（偏导不连续一般是分段函数的情况）

例：$z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微，但偏导函数不连续.

$\Delta z = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = (\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \rho^2$(有界量) $= o(\rho)$

可见 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.　　　　　$=0\Delta x+0\Delta y+o(\rho)$

法2) $\Delta_x z = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=0}} f(x,0)-f(0,0)$　$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{|x|}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{|x|} = 0$.

0309
87:11

写出偏导函数.

不连续：在 $(0,0)$ 附近找一个路径趋于0，证明极限≠函数值

$\lim\limits_{x\to 0} f_x'(x,0) \xrightarrow{\text{沿x轴正半轴}} \frac{d}{dx}(x^2\sin\frac{1}{x}) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2(-\frac{1}{x^2})\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_x'(x,0)$ 无极限 $\Rightarrow f_x'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续

例1：求 $z=x^4y^3+2x$ 在(1,2)处的全微分.

由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3y^3+2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^4y^2$ 都连续

特别地 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=34$，$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=12$

∴有 $dz\big|_{(1,2)}=34dx+12dy$

例2：求 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

① 全增量 $\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x}=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{42}$

② 全微分.

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$　连续.

$dz=-\frac{y}{x^2}\cdot\cancel{dx}^{\,\Delta x}+\frac{1}{x}\,dy^{\,\Delta y}=-\frac{1}{4}\cdot0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.2)=-\frac{1}{8}$

可见 Δz 与 dz 不相等，但差别很小.

例3：求 $z=e^{xy}$ 当 $x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$ 时的全微分.

$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$　$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot e^{xy}$

$dz=e\cdot(0.15)+e\cdot(0.1)=0.25e$

例4. 计算 $1.01^{1.98}$ 的近似值.

$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$.

∴ $\Delta y\approx dy=f'(x_0)\cdot\Delta x$

$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x_0)\Delta x$

$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x_0)\cdot\Delta x$

$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+o(\rho)$.

$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ → 近似计算

则 $z=x^y$　$x=1$. $y=2$. $\Delta x=0.01$. $\Delta y=-0.02$

$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$　$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\cdot\ln x$

$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=2$.　$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=0$.

$z(1.01,1.98)\approx z(1,2)+2\times(0.01)+0\times(-0.02)$

$=1+0.02=1.02$

$1.01^{1.98}\approx1.02$.

对于一元函数，在一点处

$$\boxed{可微} \Longleftrightarrow \boxed{可导} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \boxed{连续} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \boxed{有极限}$$

对于多元函数. 在一点处

$$\boxed{偏导连续} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \boxed{可微} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \boxed{连续} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \boxed{有极限}$$ （全方位性）

$$\boxed{可微} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \boxed{有偏导}, \quad \boxed{连续} \underset{\not\Downarrow}{\not\Uparrow} \boxed{有偏导}, \quad \boxed{有极限} \not\Leftrightarrow \boxed{有偏导}$$

（单向性）.

偏导函数 & 可微.

例1：$f'_x(x_0,y_0)$存在，$f'_y(x,y)$在(x_0,y_0)附近存在，且在(x_0,y_0)处连续.

证：f在(x_0,y_0)处可微.

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= \underbrace{f'_x(x+\theta_1\Delta x, y)\Delta x}_{①} + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

↳ 连续 $=(f'_y(x,y)+\beta)\Delta y$

∵ f'_x 只能保证在(x_0,y_0)处存在. ∴ $f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ 换种形式表示

由导数定义. $= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + o(\Delta x)$ P15

大物实验群
290028380

8.4. 复合函数求导法.

<复习——一阶复合函数求导>.

例：$u=\sin(xy^2)$ $z=\log u$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$

$z=\log[\sin(xy^2)]$ $z_x'(x,y)=\frac{1}{\sin(xy^2)}\cdot\cos(xy^2)\cdot y^2$

$z_y'(x,y)=\frac{1}{\sin(xy^2)}\cdot\cos(xy^2)\cdot 2xy$.

<复合函数求导原理>.

R^2 $\cdot(x,y)$ $\xrightarrow[v=v(x,y)]{u=u(x,y)}$ $\cdot(u,v)$ R^2 $\xrightarrow{z=f(u,v)}$ $z\cdot$ $\xrightarrow{求导z'}$ $z'(u,v)=\cdots$

<定理·链导法则>

若：$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在 (x,y) 处对 x 的偏导数存在.

且 $z=z(u,v)$ 在 (x,y) 的对应点 (u,v) 处可微

则：复合函数 $z=z(u(x,y),v(x,y))$ 在 (x,y) 处对 x 的偏导数也存在，且数值上

$z'_x=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x$

或 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

证明：

要证 $z=z(u(x,y),v(x,y))$ 在 (x,y) 处偏导数存在 即证 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ 与 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y}{\Delta}$

~~由 $z=(x,y)$ 可微. ∴ 全增量 $\Delta z=z_x'\Delta x+z_y'\Delta y+o(\rho)$~~

证：由 $z=(u,v)$ 可微 ∴ 全增量 $\Delta z=z_u'\Delta u+z_v'\Delta v+o(\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2})$ (1)

$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)$；$\Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)$

当 y 固定即 $\Delta y=0$ 时，得偏增量 $\Delta_x u$、$\Delta_x v$ ↓

$\Delta_x u=u(x+\Delta x,y)-u(x,y)$；$\Delta_x v=v(x+\Delta x,y)-v(x,y)$ (2)

∴ z 也受到 Δx 的影响，产生 z 对 x 的偏增量

(1)式变为 $\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v+o(\rho)$

∴ z 对 x 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left[\frac{\partial z}{\partial u}\underbrace{\frac{\Delta_x u}{\Delta x}}_{\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial z}{\partial v}\underbrace{\frac{\Delta_x v}{\Delta x}}_{\frac{\partial v}{\partial x}}+\frac{o(\sqrt{\Delta}\quad)}{\Delta x}\right]$

$=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{o(\rho)}{\Delta x}$ 重点拿出来

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{o(\rho)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta x}$ $(\rho=\sqrt{(\Delta_x u)^2+(\Delta_x v)^2})$.

由(2)知 ∵ $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x,y) 附近有偏导 ∴ y 固定时 $u(x,y)$ 是连续的

∴ 当 $\Delta x\to0$ 时 $u(x+\Delta x,y)-u(x,y)\to0$

同理可知 $\Delta_x u\to0$、$\Delta_x v\to0$，当 $\Delta x\to0$ 时 ∴ $\rho\to0$，$\Delta x\to0$ 时 ∴ $\frac{o(\rho)}{\rho}=$ 无穷小.

$\lim\frac{\rho}{\Delta x}=\pm\sqrt{\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)^2}\to\pm\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}=$ 有界量 ？ 函数单侧有极限，就单侧局部有界

$z = z(u,v)$, $\begin{cases} v = v(x,y) \\ u = u(x,y) \end{cases}$ EAS COME FROM JIAN

故 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

注：(1) 如果 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 对 x 的偏导数 u'_x、v'_x 连续，

且 $z(u,v)$ 关于 u,v 的偏导数 z'_u、z'_v 连续

则：z 关于 x 的偏导数也连续. z'_x

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ 连续函数 $\xrightarrow{\text{四则运算}}$ 仍连续

$\therefore z'_x$ 存在且连续 同理 z'_y 也连续

$\therefore$ $\underline{z = (u(x,y), v(x,y))}$ 可微

看作 x,y 的二元函数

(2) 多元复合函数："链式法则"

$z = z(u_1, u_2 \cdots u_n)$， $u_i = u_i(x_1, x_2 \cdots x_l)$ $i = 1 \cdots n$

则 $$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \cdots \frac{\partial z}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \quad , j = 1, 2, \cdots l$$ (1)

可以用矩阵符号记作

$$\underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_l}\right]}_{1\times l} = \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial u_1}, \cdots \frac{\partial z}{\partial u_n}\right]}_{1\times n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_l} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_l} \end{bmatrix}}_{n\times l}$$

$$\begin{array}{cc} & x_1 \\ u_1 & \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_l} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_l} \end{bmatrix} \end{array}$$ 称为雅可比矩阵，记作 $\frac{\partial(u_1, u_2 \cdots u_n)}{\partial(x_1, x_2 \cdots x_l)}$

第一行是第1个 u_1 求偏导；第n行是 u_n 求偏导

第一列是关于 x_1 求偏导数，…第 l 列是由于 x_l 求偏导数.

<特殊> (3) 全导数公式.

(1)式的 $l=1$ 即 u_i 均是对同个自变量的一元函数时，

$z = (u_1(x), u_2(x), \cdots u_n(x))$

则 $$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dx} + \cdots + \frac{dz}{\partial u_n} \cdot \frac{du_n}{dx}}$$

为啥不写成 $\frac{\partial z}{\partial x}$？ z、u_i 是 x 的一元函数，d

$$= \left[\frac{\partial z}{\partial u_1}, \frac{\partial z}{\partial u_2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial u_n}\right] \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx} \\ \frac{du_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dx} \end{bmatrix}$$

求之前验一下：外层是否可微，内层是否有偏导

$$dz = \begin{cases} z'_u\,du + z'_v\,dv \\ z'_x\,dx + z'_y\,dy \ (\checkmark) \end{cases}$$

$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x$

z'_y

例1. $z = e^u \sin v$，$u = xy$，$v = x+y$，求 z 的全微分 <偏微分>

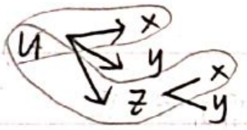
z对x偏微分：
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$ 列链导公式
$$= e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v \cdot 1$$ 求偏导
$$= e^{xy}\left(y\sin(x+y) + \cos(x+y)\right)$$ 将中间变量代回

z对y偏微分：
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v$$
$$= e^{xy}\left(x\sin(x+y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\therefore dz = e^{xy}\left(y\sin(x+y) + \cos(x+y)\right)dx + e^{xy}\left(x\sin(x+y) + \cos(x+y)\right)dy$$

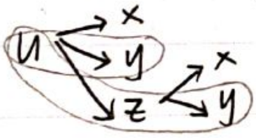
例2：$u = f(x,y,z) = e^{x^2+y+z^2}$，而 $z = x^2 \sin y$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$

u 是 x, y 的二元函数 → 2个偏导



(1) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$= f'_1(x,y,z) + f'_3(x,y,z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$?? 20200311 56:00
$$= e^{x^2+y+z^2}\cdot 2x + e^{x^2+y+z^2}\cdot 2z \cdot 2x\sin y$$
$$= 2x\,e^{x^2+y+z^2}(1 + 2z\sin y)$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = f'_2 + f'_3\frac{\partial z}{\partial y}$$



$$= e^{x^2+y+z^2} + 2z\cdot e^{x^2+y+z^2}\cdot x^2\cos y$$
$$= e^{x^2+y+z^2}(1 + 2x^2 z\cos y)$$
$$= e^{x^2+y+z^2}(1 + 2x^2\cdot x^2\sin y\cos y)$$

例3、设 $y = (\cos x)^{\sin x}$，求 $\frac{dy}{dx}$

幂指型函数 $y = [u(x)]^{v(x)}$，$u(x) > 0$ 恒成立.

$y = e^{v(x)\ln u(x)}$ 求导x

✓ 法一) $$\frac{dy}{dx} = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$?

法二) $\ln y = v(x)\ln u(x)$ 两边取导
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

✓ 法三) $y = u^v$ $u = \cos x$. $v = \sin x$. 全导数
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$
$$= v\cdot u^{v-1}\cdot u'(x) + u^v\cdot\ln u\cdot v'(x)$$
$$= u(x)^{v(x)}\left[v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} + v'(x)\ln u(x)\right]$$ 将u、v代入

例3、 $u=u(x,y)$ 可微.

设 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 证明 $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

将x,y看作中间变量，θ、r看作自变量.

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot(r\cdot\cos\theta)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta+2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta-2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\cos\theta$$

例4. $f(u,v)$ 可微.

求 $z=f(x+y^2,x^2+y)$ 在 $A(x,y)=(1,1)$ 处的全微分.

R^2: $\underset{A}{(x,y)\ \cdot(1,1)}\xrightarrow[v=x^2+y]{u=x+y^2}\underset{B}{(u,v)\ \cdot(2,2)}\xrightarrow{f(u,v)}\underset{C}{\cdot f(2,2)}$

给出具体点，求出对应点代入

当 $A(x,y)=(1,1)$ 时， $B(u,v)=(2,2)$

$\because f(u,v)$ 可微

$\therefore \underline{df=f'_u du+f'_v dv}$ ×　　f是对x,y的函数. 全微分 = 两偏分之和

$df=f'_x dx+f'_y dy$

① $f'_x=f'_u\cdot u'_x+f'_v\cdot v'_x$

$=f'_u\cdot 1+f'_v\cdot 2x$

② $f'_y=f'_u\cdot u'_y+f'_v\cdot v'_y$

$=f'_u\cdot 2y+f'_v\cdot 1$

$\because f'_u=f'_u(u,v)=f'_u(2,2)$

$\therefore$ ① $f'_x(1,1)=f'_u(2,2)+f'_v(2,2)\cdot 2\cdot 1$

② $f'_y(1,1)=f'_u(2,2)\cdot 2+f'_v(2,2)$

$\therefore df=[f'_u(2,2)+2f'_v(2,2)]dx+[2f'_u(2,2)+f'_v(2,2)]dy$

例5. 已知$f(t)$可微，证明 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$ 满足 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$

引入中间变量　令$t=x^2-y^2$. 则 $z=\frac{y}{f(t)}$

则 t, y 为中间变量，x, y为自变量.　　$z<{}^{y}_{t}<{}^{x}_{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=-y\frac{1}{f^2(t)}\cdot 2x=-\frac{2xy}{f^2(t)}\cdot f'(t)$$

$f'(t)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{f(t)}+\frac{2y^2f'(t)}{f^2(t)}$$

$$\therefore \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\cancel{\frac{2y}{f^2(t)}f'(t)}+\frac{1}{yf(t)}+\cancel{\frac{2yf'(t)}{f^2(t)}}=\frac{1}{y\,f(t)}$$

$\because z=\frac{y}{f(t)}$　$\therefore \frac{1}{f(t)}=\frac{z}{y}$　$\therefore$ 上式 $=\frac{z}{y^2}$

例6、设$u=f(x,xy,xyz)$，其中f可微. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

设 $Q=x$，$v=xy$，$w=xyz$.

则 $u=f(Q,v,w)$.

$u<{}^{Q-x}_{\substack{v<{}^{x}_{y}\\ w<{}^{x}_{\substack{y\\z}}}}$

① $\frac{\partial u}{\partial x}=u'_Q\cdot Q'_x+u'_v\cdot v'_x+u'_w\cdot w'_x$
$=u'_Q\cdot 1+u'_v\cdot y+u'_w\cdot yz$

② $\frac{\partial u}{\partial z}=u'_w\cdot w'_z=u'_w\cdot xy$

像上面这样给中间变量设一个记号也可，
但本题中三个变量可简单地用1, 2, 3来标记.
如f'_1表示f对第一个变量的偏导数.
则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot y+f'_3\cdot yz$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f'_3\cdot xy$$

例7. 设 $z=F(x,y)$，$y=\psi(x)$，其中 F,ψ 都有二阶连续的导数，求 $\frac{d^2z}{dx^2}$?

z 是 x 的一元函数.

∵由全导数公式得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$=F_x'+F_y'\cdot\psi'(x)$$ 此为一阶导.

求二阶导时，务必注意 $\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial F}{\partial y}$ 仍是 x,y 的二元函数.

y 仍是 x 的函数. 再用全导数公式得

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{\partial^2F}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$=F_{xx}''(x,y)+2F_{xy}''(x,y)\psi'(x)+F_{yy}''(x,y)\psi'^2(x)+F_y'(x,y)\psi''(x)$$

例8. 设 f 具有二阶连续偏导数，求函数 $u=f(x,\frac{x}{y})$ 的混合二阶偏导数

解: $u<\begin{matrix}x\,①\\ \frac{x}{y}\,②<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\end{matrix}$. $u=f(x,\frac{x}{y})$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\left[f_1'(x,\tfrac{x}{y})+f_2'(x,\tfrac{x}{y})\frac{1}{y}\right]_y'$$

$$=f_{12}''\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial y}+\left(f_{22}''\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial y}\right)\frac{1}{y}+f_2'(x,\tfrac{x}{y})\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=\frac{1}{y^3}\left(xyf_{12}''+xf_{22}''-yf_2'\right)$$

∵ f 有二阶连续偏导数 ∴ 混合偏导数相等.

∴ $\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}$ 存在，且等于上式.

$u < \begin{matrix} r < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ \theta < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \end{matrix}$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\theta=\arctan\frac{y}{x}$

例9. 设 $u=u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，求

表达式 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$； $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在极坐标系中的形式

要消灭 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；代之以 $\frac{\partial u}{\partial r}$，$\frac{\partial u}{\partial \theta}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

(1) $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$

$=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}=r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \rightarrow \frac{-y}{x^2+y^2}$

[$\cos\theta=\frac{x}{r}$ $\sin\theta=\frac{y}{r}$]

$=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{1}{r}\sin\theta$ ①

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$

$=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{1}{r}\cos\theta$ ②

$$(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2=(\frac{\partial u}{\partial r})^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-2\cos\theta\sin\theta(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r})$$

$$+(\frac{\partial u}{\partial r})^2\sin^2\theta+2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+(\frac{\partial u}{\partial \theta})^2\frac{\cos^2\theta}{r^2}$$

$$=(\frac{\partial u}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial u}{\partial \theta})^2$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}$ 得 此处 r 和 θ 分别是 x, y 函数.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=[(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x})\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial r}(-\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x})]$$

$$-[(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}\frac{\partial r}{\partial x})\frac{\sin\theta}{r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot[(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x})\sin\theta+\frac{1}{r}(\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$\left[\begin{matrix}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\sin\theta}{r}\ ?\end{matrix}\right]$ 代入 ↗

$=$

例1: $u = f(x-y)^{g(x,y)}$

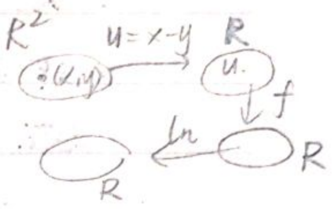
$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)[\ln f(x)]}$

解: $u = e^{g(x,y)\ln f(x-y)}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{g(x,y)\ln f(x-y)} \cdot \frac{\partial (g(x,y)\ln f(x-y))}{\partial x}$

$= u \cdot \left(\frac{\partial [g(x,y)]}{\partial x} \ln f(x-y) + g(x,y) \frac{\partial \ln f(x-y)}{\partial x} \right)$

$\frac{\partial g}{\partial x}$



f 二元 $f(M)$

$\frac{\partial(\ln f(x-y))}{\partial x} = \frac{1}{f(x-y)} \cdot \cancel{f'(x-y)}\ \frac{\partial f(x-y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(x-y)}{\partial x}$

复合 ↳ $\frac{df}{dx}\Big|(x-y)$ …

$= \frac{1}{f(x-y)} \cdot f'(x-y)$

↳先求 f 对 M 偏导 $M = x-y$

$= u\left(\frac{\partial g}{\partial x}\ln(x-y) + g(x,y)\frac{f'(x-y)}{f(x-y)}\right)$

$z = z(u,v)$ $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)$??

$f'(x)$ $x=x^2$

$f'(x^2-y)$

$\frac{\partial[f(x^2-y)]}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial x}$

例2. $f(x,y)$ 的全微分为 $(axy^3 - y^2\cos x)\,dx + (1 + by\sin x + 3x^2y^2)\,dy$。
求 a、b 及 $f(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} \Leftarrow f'_x = axy^3 - y^2\cos x$

$f(x,y) = \frac{1}{2}ay^3x^2 - y^2\sin x + C(y)$ $\quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad z = C(y)$

对y求导 $f_y' = \frac{3}{2}ay^2x^2 - 2y\sin x + C'(y)$

而 $f'_y = 3x^2y^2 + by\sin x + 1$

$\therefore \frac{3}{2}a = 3 \quad b = -2 \quad a = 2$

$C'(y) = 1 \qquad C(y) = y + C$

$f(x,y) = y^3x^2 - y^2\sin x + y + C$

8.4.2. Jacobi 矩阵

l ~~维~~元自变量 $\qquad\qquad$ n个中间变量

推广. $\underset{(x_1,x_2\cdots x_l)}{\underset{R^l}{D}} \xrightarrow[(x_1,\cdots x_l)]{u_i=u_i} \underset{(u_1,u_2,\cdots u_n)}{\underset{R^n}{E}} \xrightarrow[z=z\,(u_1,u_2\cdots u_n)]{z} R$

若 z 可微，且每一个中间变量函数 u_i 可偏导

则 $z=(u_1(x_1,x_2\cdots x_l), u_2(x_1,\cdots x_l)\cdots u_n(x_1,\cdots x_l))$ 可偏导.

$$* \quad \frac{\partial z}{\partial x_j}=\frac{\partial z}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_j}+\frac{\partial z}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_j}+\cdots\frac{\partial z}{\partial u_n}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$$

先对最外层对中间变量求导，再中间变量对自变量求导

例1. $z=uv+\sin t$ $\quad u=e^t$, $v=\cos t$, 求 $\frac{dz}{dt}$

$z < \begin{matrix} u - t \\ v - t \\ t \end{matrix}$ $\qquad R \xrightarrow[x=x]{\substack{u=u(x)\\ v=v(x)}} R^3 \xrightarrow{z} R$

z 是一元函数

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{dz}{dt}$$ 求各项偏导

$$=v\cdot e^t+u\cdot(-\sin t)+\cos t$$ 代入 u、v

$$=e^t\cos t-e^t\sin t+\cos t$$

例2. $u=f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$, $z=x^2y$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$

自变量是 x,y. 而函数包含 x,y,z.

$\cdot(x,y) \xrightarrow{z} \cdot(x,y,z) \xrightarrow{f} u \quad R$

$(x,y)\mapsto(x,y,x^2y)$

f 对第一个变量的偏导. $\quad$ x在自变量与中间变量中都有

$$① \ \frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+f_2'\frac{\partial y}{\partial x}+f_3'\frac{\partial z}{\partial x}$$

$\frac{\partial y}{\partial x}=0$ $(x,y)\mapsto x$. 与y无关 两个自变量 ~~偏~~ 微分$=0$

$$=1\cdot e^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x+2z\,e^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2xy$$

$$② \ \frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\frac{\partial x}{\partial y}+f_2'\frac{\partial y}{\partial y}+f_3'\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=e^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y+e^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z\cdot x^2$$

是函数 x用管.

例3. $u=f(xy)g(yz)$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial[f(xy)g(yz)]}{\partial x}=\frac{\partial[f(xy)]}{\partial x}\cdot g(yz)+f(xy)\cdot\frac{\partial[g(yz)]}{\partial x}$$
$$=f'(xy)\cdot\frac{\partial(xy)}{\partial x}g(yz)+f(xy)\cdot g'(yz)\cdot\frac{\partial(yz)}{\partial y}=0$$
$$=f'(xy)\cdot y\cdot g(yz)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial[f(xy)g(yz)]}{\partial y}=f'(xy)\cdot\frac{\partial(xy)}{\partial y}g(yz)+f(xy)g'(yz)\cdot z$$

$f(xy)$ 是一元，直接写作 $f'(u)$

※

雅可比矩阵：

对于 $z=z(u_1,u_2\cdots u_n)$，u_i是l元函数 $u_i=u_i(x_1,x_2\cdots x_l)$

若 z 可微，u_i 偏导存在，

则 $\frac{\partial z}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\quad(j=1,\cdots,l)\qquad(2)$

用矩阵符号写作： → n条链 $z\to u_i\to x_j$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x_1},\frac{\partial z}{\partial x_2},\cdots\frac{\partial z}{\partial x_l}\right]=\left[\frac{\partial z}{\partial u_1},\cdots\frac{\partial z}{\partial u_n}\right]_{1\times n}\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial u_1}{\partial x_l}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial u_n}{\partial x_l}\end{bmatrix}\qquad(1).$$

其中，$\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial u_1}{\partial x_l}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}&&\frac{\partial u_n}{\partial x_l}\end{bmatrix}$ 称为雅可比矩阵. n行l列.

记作：$\frac{\partial(u_1,u_2\cdots u_n)}{\partial(x_1,x_2\cdots x_l)}$ → n行 → l列.

第i行是u_i对x_i的偏导.
第i列是x_i的偏导.

*特别的. $u_1\sim u_n$是x的一元函数.

即 $z=z(u_1(x),u_2(x),\cdots u_n(x))$，则 $\frac{dz}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial u_i}\frac{du_i}{dx}$

记作：称为 z 的全导数.

$\frac{\partial(u_1u_2\cdots u_n)}{\partial x}$

$$\frac{dz}{dx}=\left[\frac{\partial z}{\partial u_1},\frac{\partial z}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial z}{\partial u_n}\right]\begin{bmatrix}\frac{du_1}{dx}\\ \frac{du_2}{dx}\\ \vdots\\ \frac{du_n}{dx}\end{bmatrix}$$

二手市场Q群
731429909

* (1)(2)式可写为

$$\frac{\partial(z)}{\partial(x_1,\cdots x_l)}=\left(\frac{\partial(z)}{\partial(u_1\cdots,u_n)}\right)\cdot\left(\frac{\partial(u_1,\cdots u_n)}{\partial(x_1\cdots x_l)}\right).$$

8.4.3. 全微分形式不变性

设 $z=z(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$. 均可微.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy=du$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

可见，当 z 是 u,v 的函数时，不论 u,v 是自变量还是中间变量，z 的全微分形式不变 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$

这有利于计算全微分、求偏导数.

证明方法2). $z=z(u,v)$ u与v 均是(x,y)的函数.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$$

由链式法则 $\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

$$\because\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ 行列 $=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

※ 全微分的四则运算法则.

① $d(u\pm v)=du\pm dv$

② $d(uv)=vdu+udv$

③ $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$ $(v\neq 0)$

$z=uv$ $z'_x=u'_xv+uv'_x$

④ $d(cu)=c\,du$ $(c\in R)$

证 $d(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial x}dx+\frac{\partial(uv)}{\partial y}dy=\left(v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$

$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$

$=vdu+udv.$

8.4.4. 高阶导数

$z=f(u,v)$ $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$

⓪ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

① $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})$

$=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial u})\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial v})\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial x})}_{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$

$\frac{\partial z}{\partial u}$ 是以u,v为自变量 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})$

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial u}(u,v))=\frac{\partial}{\partial x}(f'_1(u,v))=f''_{11}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f''_{12}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}$

$=(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot(\frac{\partial u}{\partial x})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2$

$+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

② $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})$

$=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial u})\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial x})}$ $\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

$+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial v})\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$

$[\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}]$

$=\underbrace{\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial u})}_{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}}\cdot(\frac{\partial u}{\partial y})\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial z}{\partial u})}_{\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

$+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$

例1. $z=F(x,y)$ $y=f(x)$ 求z关于x的二阶导数.

$z\begin{cases}x\\ y-x\end{cases}$ $z'_x=F'_1(x,y)+F'_2(x,y)\cdot f'(x)$ ＊写清楚是

$(z'_x)'=[F''_{11}(x,y)+F''_{12}(x,y)\cdot f'(x)]+[(F'_2(x,y))'_x f'(x)+F'_2(x,y)\cdot f''(x)]$

$=F''_{11}+F''_{12}\cdot f'+F'_2\cdot f''+f'[F''_{21}(x,y)+F''_{22}(x,y)\cdot f']$

$=F''_{11}+F''_{12}f'+F'_2\cdot f''+f'F''_{21}+(f')^2F''_{22}$

但此时F仍是(x,y)

例2. $u=f(x,\frac{x}{y})$ 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

① $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot(\frac{x}{y})'_x=f'_1(x,\frac{x}{y})+f'_2(x,\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y}$

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})=f''_{11}(x,\frac{x}{y})+f''_{12}(x,\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{y}[f''_{21}(x,\frac{x}{y})+f''_{22}(x,\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y}]$

$=f''_{11}+f'_{12}\cdot\frac{1}{y}+f''_{21}\frac{1}{y}+f''_{22}\cdot(\frac{1}{y})^2$

② $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}[f'_1(x,\frac{x}{y})+f'_2(x,\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y}]$

↓

$z=(x,y)\ \frac{\partial x}{\partial y}=0$.

$= f''_{11}(x,\frac{x}{y})\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + f''_{12}(x,\frac{x}{y})\cdot(-\frac{x}{y^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(f'_2(x,\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y} + f'_2(x,\frac{x}{y})\cdot(-\frac{1}{y^2})$?

$= f''_{12}(x,\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2}) - f'_2(x,\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y^2} + f''_{22}(x,\frac{x}{y})\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial y}\cdot\frac{1}{y}$

? $\quad f''_{22}\frac{x}{y^3}$

例13. $u=f(r)$ $r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$

求 $f(r)$

解: $u=f(r)=f(\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

① $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2})\cdot\frac{\partial(\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x} = f'(\ln\sqrt{\quad})\cdot\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$

→ 一元 ?? $\quad (\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2})'_x=\cdots$

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(f'(r))\cdot\frac{x}{x^2+y^2+z^2}+f'(r)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2+z^2})$

$\frac{\partial}{\partial x}(f'(r))=f''(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$???

$= f''(r)\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\cdot\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

$x\cdot y\cdot z$ 在 r 中地位对称.

② $\frac{\partial u}{\partial y} = f''(r)\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{-y^2+x^2+z^2}{(\quad)^2}$

③ $\frac{\partial u}{\partial z}=f''(r)\cdot\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{-z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot f''(r)+\frac{1}{x^2+y^2+z^2}f'(r)$

$=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$

两边约去. 得 $f''(r)+f'(r)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$\because r=\ln\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ $\therefore (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=e^r$ $\therefore f''(r)+f'(r)=e^{-r}$

$\lambda^2+\lambda=0$. $\lambda=0$ 或 -1. $y_H=c_1+c_2e^{-r}$

$f(r)=e^{-r}$ $\alpha=-1$. $\beta=0$. $\therefore$ 设 $y_*=Are^{-r}$

$A=-1$. $\therefore f(r)=-re^{-r}+c_1+c_2e^{-r}$

各看作中间变量1,2,3 ｜ 二阶导也连

例4. $z=f(x,2x-y,xy)$，f 三阶连续可导. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 、$\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x\partial y}$

例5.〈通过偏微分方程得常微分方程〉. 已知 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 有形如 $u=g(\frac{y}{x})$ 的解. 求 g.

8.5 隐函数求导法

※ 隐函数存在定理及求导公式

(一) $F(x,y)$，$y=f(x)$ 情况

设 $F(x,y)=0$. (x_0,y_0) 为 $F(x,y)=0$ 上一点. 若在 (x_0,y_0) 的邻域内，F'_x 和 F'_y 都存在且连续. $\boxed{F'_y \neq 0}$

则 ① 有唯一一个确定的 $y=f(x)$ 满足 $F(x,y)=0$.

② $f(x)$ 在 x_0 附近的导函数 $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}}$

且导函数连续

证明 ①：

隐函数存在 $\Leftrightarrow$ "对于任意的 x_1，有唯一的 y_1 使得 $F(x_1,y_1)=0$."

现假定 (x_1,y_1)、(x_1,y_2) 使得 $F(x,y)=0$ → 意思指：对于 x，$F(x,y)=0$ 求出的 y 不唯一.

$F(x_1,y_2)-F(x_1,y_1) = F'_y(x_1,\xi)\cdot(y_2-y_1)$

偏增量 $\Delta_y F$　　　　中值定理（有限增值公式）

又 ∵ (x_1,y_1) 和 (x_1,y_2) 满足 $F(x,y)=0$.

∴ 左侧 $=0$.　右侧中 $y_2-y_1 \neq 0$　∴ $F'_y(x_1,\xi)=0$.

∴ 结论：若存在不唯一的 y，使 $F(x_1,y)=0$. 则 $F'_y(x_1,\xi)=0$.

→ 逆否可得：若 $F'_y(x,y)\neq 0$，则对于任意的 x，仅有唯一的 y 使得 $F(x,y)=0$

即：隐函数存在.

证明 ②.

$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ y=f(x) \end{cases}$　则 $F<\begin{matrix} x \\ f(x)-x \end{matrix}$

$\boxed{F(x,y)=0 \text{ 两边求导}}$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

例：$x\sin y - e^x + e^y = 0$ 经过 $(0,0)$ 求 y'_x 在 $x=0$ 处的值

法1) $\underline{F(x,y)} = x\sin y - e^x + e^y = 0$.　$F'_x = \sin y - e^x$　$F'_y = x\cos y + e^y$

$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\sin y - e^x}{x\cos y + e^y}$

将 y 看作 F 的一个自变量，求偏导.

法2) 两边求导　$\sin y + \underline{x\cos y\cdot y'} - e^x + \underline{e^y\cdot y'} = 0$.

$y' = \frac{e^x - \sin y}{x\cos y + e^y}$

推广:

(二)

① 隐函数存在定理:

设 $F(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内有连续的偏导数

且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$ $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内唯一确定一个 $z=f(x,y)$

使其满足 $F(x,y,f(x,y))=0$ $z_0=f(x_0,y_0)$

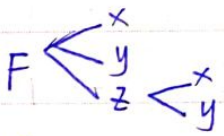
② 隐函数求偏导公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

分子是F对某自变量的偏导
分母是F对因变量的偏导

证明偏导公式 $\frac{\partial z}{\partial x}$:

将 $F(x,y,f(x,y))=0$ 两边同时关于x求导



$F'_x(x,y,z)1+F'_z(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial x}+F'_3(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

$\therefore F'_x+F'_z\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$\because F'_z$ 连续 且 $F'_z\neq 0$

$\therefore$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内,$F'_z(x,y,z)\neq 0$

$\therefore$ 有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$

变量中仅有一个因
若 $F(x,y,u,v)$ 求出的是三元函数
* 一个方程求出一个函数. 因此求出的函数只能是二元函数

* 对方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 有类似的隐函数存在定理,
要有有一点 $(x_{10},\cdots,x_{n0})$ 满足方程,在该点处,函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对哪个变量的偏导不等于零,就能把哪个变量作为因变量表示为其余变量的函数.

(不具有排他性. F'_x,F'_y,F'_z 可能有多个不为零的.)

因此所得到的隐函数是不唯一的. $z=z(x,y)$,也可能是 $x=x(y,z)$

$$F'_1=\frac{\partial(z^3-3xyz-1)}{\partial x}$$

例1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

法1) $F(x,y,z)=\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0}$.

注: $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2}{a^2}x+\cancel{\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}}$ (这里z看作F的第3个自变量).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{\frac{2}{a^2}x}{\frac{2}{c^2}z}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2z}{c^2}}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}\right)$$

$$=\frac{c^2 x}{a^2 z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c^2 x}{a^2 z^2}\left(-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}\right)$$

$$=-\frac{c^4}{a^2b^2}\cdot\frac{xy}{z^3}$$

$(\frac{x}{z})'_y = x\cdot(\frac{1}{z})'_y = x\cdot(-\frac{1}{z^2})\cdot z$

法2) 将z看作(x,y)的函数. 则是复合函数求导

对x求偏导 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$. $\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2z}{c^2}}=-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z}$.

同理. $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}$

实验交流 Q群 737678045

下面求混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 同方法一.

或直接 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$.

$$=0+\cancel{\frac{2}{c^2}}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=0.$$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{z}$. 代入 $\begin{cases} z'_y=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z} \\ z'_x=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}\end{cases}$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4 xy}{a^2b^2z^3}$$

$\frac{\partial y}{\partial x}=0$???

例2. $z^3-3xyz=10$. 求 y'_x 和 z'_y

?怎么确定 y不是x的函数, 而是与x 同为F的自变量

$F(x,y,z)=z^3-3xyz-10=0$ $z=f(x,y)$

法1) $F(x,y,f(x,y))=0$ $\frac{\partial F}{\partial x}=F'_1+F'_3\frac{\partial f}{\partial x}=F'_1+F'_3\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$F'_1(x,y,z)=\frac{\partial(z^3-3xyz-10)}{\partial x}$ 将x,y,z均看作自变量. $=-3yz+(3z^2-3xy)\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

$\frac{\partial xyz}{\partial x}=yz$ (此时yz看作常数). $\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}$

法2) $F'_x(x,y,z)=-3yz$. <F对x的偏导数>.

$F'_z=3z^2-3xy$ $\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{xy-z^2}$

法3) 全微分法处理隐函数.

$\because F(x,y,z)=0$. $\therefore dF=0$.

$F'_1=\frac{\partial(z^3-3xyz-10)}{\partial x}$ $=-3yz$

$d(z^3-3xyz-10)=\cancel{F'_1dx+F'_2dy+F'_3dz}$. $F'_2=-3xz$ $F'_3=3z^2-3xy$

$=dz^3-3dxyz-d10$

$=3z^2dz-3(yzdx+xzdy+xydz)$ $\therefore (3z^2-3xy)dz=3yzdx+3xzdy$ $\therefore dz=\square dx+\square dy$

例2. $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$ 由此方程确定的 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

法一：求 F'_x 和 F'_z 套公式求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

设 $G(x,y,z) = F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$ 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{G'_x}{G'_z}$

$G'_x = F_1' \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} + F_2' \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x}$ → z看作G的自变量

$= F_1' \cdot 1 + F_2' \cdot 2x$

$G'_y = F_1' \cdot 1 + F_2' \cdot 2y$

$G'_z = F_1' \cdot 1 + F_2' \cdot 2z$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1'+F_2' \cdot 2z}{F_1'+F_2' \cdot 2x}$ 写反了. ① $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_1'+F_2' \cdot 2y}{F_1'+F_2' \cdot 2z}$ ②

高阶 不满足全微分形式不变性？

$\begin{cases} F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0 \\ z=f(x,y) \end{cases}$ 设 $u=x+y+z$ $v=x^2+y^2+z^2$ $\therefore F(u,v)=0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x} = 0$

$= F_1'(x+y+z, x^2+y^2+z^2) \cdot (1+\frac{\partial z}{\partial x}) + F_2'(x+y+z, x^2+y^2+z^2) \cdot (2x+2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}) = 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[F_1'(x+y+z, x^2+y^2+z^2)(1+\frac{\partial z}{\partial x}) + F_2'(x+y+z, x^2+y^2+z^2)(2x+2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x})\right]$

$= (F_{11}'' \frac{\partial(x+y+z)}{\partial y} + F_{12}'' \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y}](1+\frac{\partial z}{\partial x}) + F_1'[\frac{\partial}{\partial y}(1+\frac{\partial z}{\partial x})]$

$+ (F_{21}'' \frac{\partial(x+y+z)}{\partial y} + F_{22}'' \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y}](2x+2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}) + F_2' \frac{\partial}{\partial y}(2x+2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x})$

$= [F_{11}''(1+\frac{\partial z}{\partial y}) + F_{12}''(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y})](1+\frac{\partial z}{\partial x}) + F_1'(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})$

$+ (F_{21}''(1+\frac{\partial z}{\partial y}) + F_{22}''(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}](2x+2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}) + 2F_2'(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})$

$= 0$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$. $\frac{\partial z}{\partial y}$ 已经由①②求得

只有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 是未知的，摘出来即可

例3.

设有隐函数 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$. 其中 F的偏导数连续.

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

法1) 由隐函数，复合函数求导法得

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$.　　$F'_x=F_1'(\frac{x}{z},\frac{y}{z})\cdot\frac{\partial(\frac{x}{z})}{\partial x}=F_1'\cdot\frac{1}{z}$

$$F'_y=F_2'(\frac{x}{z},\frac{y}{z})\cdot\frac{\partial(\frac{y}{z})}{\partial y}=F_2'\cdot\frac{1}{z}$$

$$F'_z=F_1'\cdot(x\cdot(-\frac{1}{z^2}))+F_2'\cdot(y\cdot(-\frac{1}{z^2})).$$

$$\therefore\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=z\cdot\frac{}{xF_1'+yF_2'}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\end{cases}$$

法2) 全微分法.　　两边求全微分.

$$dF(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=F_1'(\frac{x}{z},\frac{y}{z})\,d(\frac{x}{z})+F_2'(\frac{x}{z},\frac{y}{z})\,d(\frac{y}{z})$$

$$=F_1'(\frac{1}{z}dx+(-\frac{x}{z^2})dz)+F_2'(\frac{1}{z}dy-\frac{y}{z^2}dz)=0.$$

$$=F_1'\frac{z\quad dx-xdz}{z^2}+F_2'\frac{zdy-ydz}{z^2}=0.$$

$$\therefore zF_1'dx+zF_2'dy-(xF_1'+yF_2')dz=0.$$

$$\therefore dz=\frac{1}{xF_1'+yF_2'}((zF_1')dx+(zF_2')dy)$$

dx、dy 的系数即为偏导数.

大学物理实验群
290028380

例4. $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$ 都由 $F(x,y,z)=0$ 确定

证明：$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$

先求 $\frac{\partial x}{\partial y}$.

两边对 y 求偏导 $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=0$.

$=F_1'\frac{\partial x}{\partial y}+F_2'\cdot 1+F_3'\frac{\partial z}{\partial y}$ 为何是0？ $(x=x(y,z))$

$=F_1'\frac{\partial x}{\partial y}+F_2'+0=0$.

$\therefore\ \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_2'}{F_1'}$

同理求 $\frac{\partial y}{\partial z}$. $\begin{cases}F(x,y,z)=0.\\ y=y(x,z)\end{cases}$ 两边对 z 求导

$F_1'\frac{\partial x}{\partial z}+F_2'\frac{\partial y}{\partial z}+F_3'\frac{\partial z}{\partial z}$

$=0+F_2'\frac{\partial y}{\partial z}+F_3'=0$. $\therefore\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_3'}{F_2'}$

总之，谁作自变量，就让两边对谁求偏导.

法2) $\frac{\partial F}{\partial x}$. $\frac{\partial F}{\partial z}$ 代公式 ？

F_1'

* 方程组的情况：（隐函数由联立的方程组所确定，对这样的函数求导）.

设由方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ (5) 确定2个二元函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$

将此式 $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases}$ 两边关于x求偏导.

由链式法则，得到 $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0. \end{cases}$

解这个以 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 为未知量的代数方程组，

当系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ 时

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$ (6)

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$

雅可比行列式　记 $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$

于是 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$

如果方程组中不出现y，即 $\begin{cases} F(x,u,v)=0. \\ G(x,u,v)=0. \end{cases}$ 则 u.v 是x的一元函数.

则(6)式就是其导数公式

若出现y，则同理有

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$　　$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$

* 二元方程组存在的条件：

令 $A=\begin{bmatrix} F'_3 & F'_4 \\ G'_3 & G'_4 \end{bmatrix}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ （雅可比）.

若 A 的行列式 $|A|\neq 0$. 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} F'_1 & F'_4 \\ G'_1 & G'_4 \end{vmatrix}=-\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\right|}{|A|}$

例1. $\begin{cases} 2x-u^2+v^2=0 & ① \\ y-uv=0. & ② \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

法1. 套 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ (前页)公式 $\begin{cases} F(x,u,v)=2x-u^2+v^2=0 \\ G(x,y,u,v)=y-uv=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial v}=2v \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial v}=-u. \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial u}=-v \\ \dfrac{\partial F}{\partial u}=-2u \end{cases}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{\begin{pmatrix} 2 & 2v \\ 0 & -u \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -v & -u \end{pmatrix}}$$? then

法2). 对①②式两边对x求偏导. $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$

$\begin{cases} 2-2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0. \\ 0-\dfrac{\partial u}{\partial x}v-u\dfrac{\partial v}{\partial x}=0. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} v\dfrac{\partial v}{\partial x}-u\dfrac{\partial u}{\partial x}=-1 & ③ \\ v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}=0. & ④ \end{cases}$

③+④ $(u+v)\dfrac{\partial v}{\partial x}+(v-u)\dfrac{\partial u}{\partial x}=-1$.

?

$\therefore \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{v}{u^2+v^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u}{u^2+v^2}$

例2. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=50 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{dz}{dx}$

方程组中有3个变量. y、z 均为x的函数. 要求$y'(x)$、$z'(x)$.

法2) 对①②式求x偏导.

$\begin{cases} 2x+2y\cdot y'+2z\cdot z'=0. \\ 1+2y'+3\cdot z'=0 \end{cases}$

法1) 令 $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-50 \\ G(x,y,z)=x+2y+3z-4 \end{cases}$ P26

由 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=$

$$A = \frac{\partial(F_1, F_2 \cdots F_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots y_n)} = \begin{vmatrix} (F_1')y_1 & \cdots & (F_1')y_n \\ \vdots & & \\ (F_n')y_1 & \cdots & (F_n')y_n \end{vmatrix} \quad ?$$

若 $A \neq 0$ 则 $\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial(F_1, F_2, \cdots F_n)}{\partial(y_1 .. y_{k-1}, x_j, y_{k+1}, y_n)} \cdot \frac{1}{|A|}$

$$\begin{vmatrix} (F_1')y_1 \cdots & \boxed{(F_1')y_k} \cdots & (F_1')y_n \\ (F_2')y_1 \cdots & (F_2')y_k \cdots & (F_2')y_k \\ \vdots & & \\ (F_n')y_1 \cdots & (F_n')y_k \cdots & (F_n')y_n \end{vmatrix} \quad ?$$

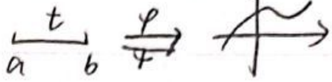
$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} (F_1')x_j \\ (F_2')x_j \\ \vdots \\ (F_n')x_j \end{matrix}}$$

8.6 偏导数的几何应用

一、8.6.1 空间曲线的切线

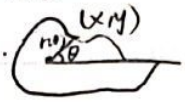
* 二维空间内的曲线：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t\in[a,b]$



例1. $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

例2. $\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \end{cases}$ $x\in[a,b]$

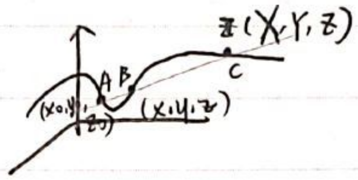
例3. 极坐标 $r=r(\theta)$.



$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$

* 三维空间内的曲线.

(一) 参数式 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ $t\in[a,b]$



割线向量可以是 $\vec{AB}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 也可以是 $\vec{AC}=(X-x_0,Y-y_0,Z-z_0)$. $\vec{AB}\parallel\vec{AC}$

$\therefore$ 割线方程为 $\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}$

* 切线：割线的极限位置.

$$\frac{X-x_0}{\underset{\Delta x}{x-x_0}}=\frac{Y-y_0}{\underset{\Delta y}{y-y_0}}=\frac{Z-z_0}{\underset{\Delta z}{z-z_0}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{X-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$$

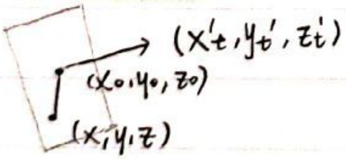
当 $\Delta t\to 0$ 时，切线方程为 $\boxed{\frac{x-x_0}{x'_t}=\frac{y-y_0}{y'_t}=\frac{z-z_0}{z'_t}}$ 平行

* 切向量（切线的方向向量）.

(x'_t,y'_t,z'_t)

(x'_t,y'_t,z'_t) 为直线方向向量

* 法平面：过 P_0 点，且垂直于切线.



内积. $\boxed{x'_t(x-x_0)+y'_t(y-y_0)+z'_t(z-z_0)=0.}$

(x'_t,y'_t,z'_t) 为法向量.

例1. (1) $\begin{cases} x=\cos t-\sin t \\ y=\sin t(1-\cos t) \\ z=\cos t \end{cases}$ 求其在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线 & 法平面.

$x'_t=-\sin t+\cos t=-1$　　$y'_t=\cos t(1-\cos t)+\sin t(\sin t)=1$

$z'_t=-\sin t=-1$. $\therefore$ 切向量为 $(-1,1,-1)$　　$(x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$.

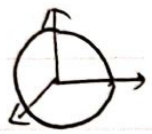
法平面：$x-1+(y-1)-z=0$. 切线为 $\frac{x-1}{-1}=y-1=-z$

例11 (2) $\begin{cases} x=\cos 2t+\sin 2t \\ y=\sin 2t(1-\cos 2t) \\ z=\cos 2t \end{cases}$ $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

求$t=\frac{\pi}{4}$ 切线&法平面.

例12. 设 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 在任一点处的法平面过原点

证明 此曲线在以原点为圆心的球面上.



$x'(t)(X-x(t))+y'(x)(Y-y(t))+z'(t)(Z-z(t))=0$.

过原点 $-x'(t)x(t)-y'(t)y(t)-z'(t)z(t)=0$.

若曲线在球面上，则其上一点 $(x(t),y(t),z(t))$ 与$(0,0,0)$距离为一个常数

即 $d^2=x(t)^2+y^2(t)+z^2(t)=C$

由上知 $x'(t)\cdot x(t)+y'(t)y(t)+z'(t)z(t)=0$.

$=[x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)]'=0$.

$\because (x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2)'_t=0$.

$\therefore \Rightarrow x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2=C$. 故得证.

例13. $y=6x^2$, $z=12x^2$

求$x=\frac{1}{2}$对应点处的切线方程. $\begin{cases} x=x \\ y=6x^2 \\ z=12x^2 \end{cases}$ (将x看作t)

分别求导 $x'_x=1$ $y'_x=12x=6$ $z'_x=24x=12$

切线向量 $(1,6,12)$.

切线为 $\frac{(x-\frac{1}{2})}{1}=\frac{(y-\frac{3}{2})}{6}=\frac{(z-3)}{12}$

例14. $x=y^2$ $z=x^2$ 在$y=1$处切线方程.

2个曲面 $\begin{cases} x=y^2 \\ y=y \\ z=y^4 \end{cases}$ 将y看作t.

或者 $t=x$ $\begin{cases} x=x \\ y=\sqrt{x} \\ z=x^2 \end{cases}$ 求在$x=1$处的〃即可.

(二) 曲线表达示2：隐函数方程组.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \xRightarrow{x} \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

定义 y,z 为 x 的一元函数. $\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$

例5. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 求其在 $(1,-2,1)$ 处的切线.

↳ 平面　　↓ $t=x$.

将 $x^2+y^2+z^2=6$ 看作隐函数. y,z 为 x 函数.

想求 $(1,y'_x,z'_x)$. 切向量，则需要 y'_x. z'_x. 由前面所学. 隐函数方程组中 $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|}$

$$\begin{cases} 2x+2y\cdot y'_x+2z\cdot z'_x=0. \\ 1+y'_x+z'_x=0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'_x=\dfrac{2z-2x}{2y-2z}=0 \\ z'_x=\dfrac{2x-2y}{2y-2z}=-1. \end{cases}$$

切向量为 $(1,0,-1)$

切线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1} \to \begin{cases} x-1=1-z \\ y=-2. \end{cases}$

$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$　$A=\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}\neq 0.$

$y'_x=-\frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}$　　$z'_x=-\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix}$

切向量 $(x'_x,y'_x,z'_x)=\left(1,-\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix},-\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix}\right)$ ↓同乘A.

$=\left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix}\right)$

$x \to y \to z$

$\vec{t}=\left\{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|,\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|,\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|\right\}$

二、空间曲面 Π：$F(x,y,z)=0$.

在 Π 上任取 l：$[a,b]\to\Pi$.

$l\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ $t\in[a,b]$.

l 的切线为 $\frac{X-x_0}{x'(t)}=\frac{Y-y_0}{y'(t)}=\frac{Z-z_0}{z'(t)}$

切向量 $(x'(t),y'(t),z(t))$.

$\because l$ 在 Π 上 $\therefore F(x(t),y(t),z(t))=0$.

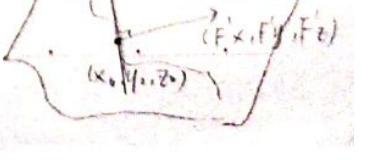
$F'_x\cdot x'_t+F'_y\cdot y'_t+F'_z\cdot z'_t=0$.

$\Rightarrow (x'_t,y'_t,z'_t)\perp(F'_x,F'_y,F'_z)$

(F'_x,F'_y,F'_z) 垂直于 Π 在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面.

则称 (F'_x,F'_y,F'_z) 为法向量

l 是任取的



曲面的第二种表示方法.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0. & (y,z\text{为}x\text{的隐函数}). \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

切向量 $\left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \right)$

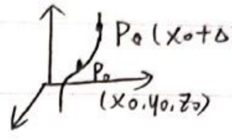
* 曲线有2种表示方法.
(1) 参数式 $\begin{cases} x_1 = x(t) \\ \vdots \\ x_i = x_i(t) \end{cases}$
(2) 方程组式 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \rightarrow \text{曲面} \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ (交线)
* 曲线只有t一个变量，是一维的.

8.6 偏导数的几何应用.

1. 曲线

$\begin{cases} \text{切线} \\ \text{法平面}. \end{cases}$

(1) 切向量.



曲线L用参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $(t \in I)$

L上有P_0和P_1

$P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$.

P_0对应的参量为t_0，P对应的是$t_0+\Delta t$.

于是割线P_0P_1的方向向量为$\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$.

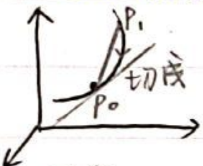
向量元素同乘$\frac{1}{\Delta t}$ 变成 $\{\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\}$.

让P_1沿L趋于P（即$\Delta t \to 0$）此时割线的极限位置为曲线L在P_0处的切线

而向量极限为 $\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$

则 切线的方向向量为$\vec{t}=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$，称为L在$P_0$处的切向量$\vec{t}$

图示



设$M(x,y,z)$为切线上一点.

$\overrightarrow{P_0M}$与切向量$\vec{t}$平行，故得出方程:

(2) 切线

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

其中，$\begin{cases} (x_0, y_0, z_0) \text{为定点} P_0. \\ \vec{t}\,(x'_t, y'_t, z'_t)|_{t_0} \text{为方向向量} \end{cases}$

(3) 法平面.

法平面是过P_0且与切向量$\vec{t}$垂直的平面.

故$\vec{t}$相当于它的法向量.

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

若曲线L用方程组表示

$L: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ $\qquad P_0(x_0,y_0,z_0) \in L$

因为 该方程组可求出y对x的函数$y(x)$和$z(x)$. 同时$x=x$.

故可得 $\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

方向向量为 $\{\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}\}$. 由隐函数求导法则.

$\left\{1, -\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|}, -\frac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|}\right\}$. 将分母提出去. 后两项互换位置？

方向向量为 $\vec{t} = \left\{ \frac{|\partial(F,G)|}{|\partial(y,z)|}, \frac{|\partial(F,G)|}{|\partial(z,x)|}, \frac{|\partial(F,G)|}{|\partial(x,y)|} \right\}$.

例：求曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9. \\ z^2=3x^2+y^2 \end{cases}$ 上点 $P_0(1,-1,2)$ 处的切线方程与法平面方程．

设 $\begin{cases} F(x,y,z)= & =0 \\ G(x,y,z)= & =0. \end{cases}$

$\vec{t} = \left\{ \begin{vmatrix} 6y & 2z \\ 2y & -2z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2z & 4x \\ -2z & 6x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4x & 6y \\ 6x & 2y \end{vmatrix} \right\}.$

$= \{-16yz, 20zx, -28xy\}$

$\vec{t}\,|_{(1,-1,2)} = \{32, 40, 28\} = \{8, 10, 7\}$

切线：$\frac{x-1}{8} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-2}{7}.$

法平面：$8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0.$

$\frac{3}{66}$

切 切

"线线，面面"

$\begin{cases}\text{切平面}\\ \text{法线}\end{cases}$

2. 曲面

(一) 设曲面 Σ: $F(x,y,z)=0$. 上有 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

F 在 P_0 处可微. Σ 上任意一条过 P_0 的光滑曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$

即 $F(x(t_0),y(t_0),z(t_0))=0$. 对 求 t 导数.

$F'_x(x_0,y_0,z_0)\,x'(t_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\,y'(t_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\,z'(t_0)=0$. (*)

△ 切向量：$\vec{t}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$ 为曲线的切线向量.

△ 这些切线均在同一平面上，经过 P_0，称为"曲面在 P_0 处的切平面."

△ 法向量：$\vec{n}=\{F'_x(x_0,y_0,z_0),\ F'_y(x_0,y_0,z_0),\ F'_z(x_0,y_0,z_0)\}$

由方程 (*) 可知，$\vec{n}$ 与切平面上的切线们垂直. 则 $\vec{n}$ 为切平面的法向量

※ 切平面方程：

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

→ 法向量为 (F'_x, F'_y, F'_z).

※ 法线方程：

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

→ 方向向量为 (F'_x, F'_y, F'_z)

※ 切向量求法.

$$\vec{t}=\vec{n}_F\times\vec{n}_G=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F'_x & F'_y & F'_z\\ G'_x & G'_y & G'_z\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ G'_y & G'_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}F'_x & F'_z\\ G'_x & G'_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\ G'_x & G'_y\end{vmatrix}\right\}$$

切向量同时垂直于 $\begin{cases}\text{曲面 } F(x,y,z) \text{ 的法向量 } \vec{n}_F=\{F'_x, F'_y, F'_z\}.\\ \text{曲面 } G(x,y,z) \text{ 的法向量 } \vec{n}_G=\{G'_x, G'_y, G'_z\}.\end{cases}$

左右对换

$$\vec{t}=\left\{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|,\ \left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|,\ \left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|\right\}.$$

(显函数)

(二) 曲面表达方式二：由 $z=f(x,y)$ 给出

<仍然化为隐函数来求>

令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$

则 $\vec{n}=\{F'_x(x_0,y_0,z_0),\ F'_y(x_0,y_0,z_0),\ F'_z(x_0,y_0,z_0)\}$.

$=\{f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ -1\}$

所以切平面方程

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+(-1)(z-z_0)=0$$

即 $z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{f'_x}=\frac{y-y_0}{f'_y}=\frac{z-z_0}{-1}$$

(三). 曲面表达式三：由二维参数方程给出.

$x=x(u,v)$；$y=y(u,v)$；$z=z(u,v)$

求 (u_0,v_0) 所对应的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量

固定 $v=v_0$，得到曲面 Σ 上一条曲线 L_1：$x=x(u,v_0)$；$y=y(u,v_0)$；$z=z(u,v_0)$

方程对 u 求导，L_1 的切向量为 $(x'_u,y'_u,z'_u)=\vec{t_u}$

同理，固定 $u=u_0$. 得曲线 L_2.

曲线 L_2 的切向量为 $(x'_v,y'_v,z'_v)=\vec{t_v}$

因此，切平面的垂线法线为 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}$

例8、

※ 简化算法、

例6. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{27}=1$ 上点 $P_0(1,2,3)$ 处的切平面和法线方程.

设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{27}-1$

$F'_x=\frac{2}{3}x$　$F'_y=\frac{1}{6}y$　$F'_z=\frac{2}{27}z$. $\vec{n}|_{P_0(1,2,3)}=\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{9}\}=\frac{1}{9}\{6,3,$

∴法向量为 $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{9})$

∴切平面为 $\frac{2}{3}(x-1)+\frac{1}{3}(y-2)+\frac{2}{9}(z-3)=0$.

$6(x-1)+2(y-2)+2(z-3)=0$.

即 $6x+2y+2z=16$.

法线方程为 $\frac{x-1}{\frac{2}{3}}=\frac{y-2}{\frac{1}{3}}=\frac{z-3}{\frac{2}{9}}$　变成分母　$\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$

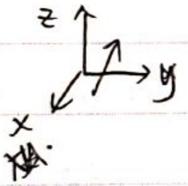
$\cancel{\frac{3(x-1)}{2}=3(y-2)=2(\frac{z-3}{2})}$.

例7. $z=x^2+y^2-1$ 在任意点 $P(x,y,z)$ 处向上的法向量.

设 $z=f(x,y)=x^2+y^2-1$.

$\vec{n}=\{f'_x,f'_y,-1\}=(2x,2y,-1)$

$\vec{n_2}=\{-2x,-2y,1\}$ 是向上的法向量



向上: $z>0$　向下: $z<0$.

例8. 求 $x=u+v$, $y=u-v$, $z=uv$ 上在 $\begin{cases}u=1\\v=1\end{cases}$ 对应的点 P_0 处的切面方程.

解: $P_0(2,0,1)$

$\vec{t_u}=(x'_u,y'_u,z'_u)=(1,1,v)$

∴ $\vec{t_u}|_{P_0}=(1,1,1)$

$\vec{t_v}=(x'_v,y'_v,z'_v)=(1,-1,u)$

∴ $\vec{t_v}|_{P_0}=(1,-1,1)$

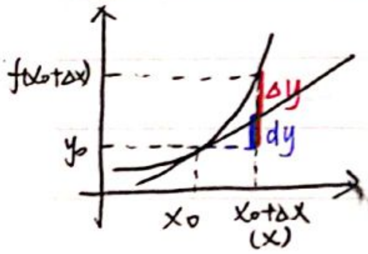
$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=2\vec{i}+0\vec{j}+(-2)\vec{k}=\{2,0,-2\}=\{1,0,-1\}$.

切平面 $1\cdot(x-2)+0(y-0)+(-1)(z-1)=0$.

∴ $x-z-1=0$.

8.6.3、二元函数全微分的几何意义

<复习> 一元：



切线方程 $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)=y'dx=dy$ $\therefore dy=y-y_0$

微分 dy：切线上 ~~X~~ 处的值与原函数在 x_0 处的值之间的差异

可微 $\Leftrightarrow$ 在 $P_0(x=x_0)$ 处有切线，且切线不平行于 y 轴。

二元：

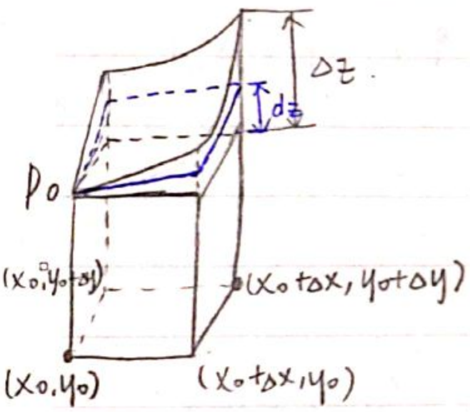
$z=f(x,y)$

切平面方程：$z-z_0=f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)$

$=f'_x\,dx+f'_y\,dy=dz$ 全微分

$\therefore dz=z-z_0$

当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$



Δ_1：二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的 $\boxed{全微分}$ 对于 $\boxed{其切平面竖坐标的增量}$

< 切平面方程设为 $G(x,y)$ 则 $dz=G(x,y)-f(x_0,y_0)$ >

$(f(x_0,y_0)=G(x_0,y_0))$

Δ_2：$z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处 $\boxed{可微}$，几何上表现为：$\boxed{曲面 z=f(x,y) 在点 (x_0,y_0,z_0) 处存在切平面，且切平面不平行于 z 轴}$

8.7、多元函数的一阶泰勒公式与极值.

8.7.1 多元函数的一阶泰勒公式.

<复习一元:极值:

P点为极值 $\Longrightarrow f'(P)=0$. [费马引理]

$\Uparrow$

充分条件 {①②.

充条①. $f(x)$在P的邻域内可导,且$f'(x)$在P左右符号相反.(单调性原理).

② $f'(P)=0$ $f''(P)\neq 0$.

($f''(P)>0$ 极小值. 反之极大值).

<引申>. 但对于多元函数(eg:二元)不强调单调性、条①用不了.

故多元函数极值第一充分条件为"条②"思想.

<定理>若二元函数 $z=f(x,y)$ 在X_0的某邻域$U(X_0)$内有二阶连续偏导数, →$H(X^*)$为对称矩阵

则对$U(X_0)$内任一点$X(x,y)$存在数$\theta\in(0,1)$,使得

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+[f'_x,f'_y]_{X_0}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}+R$$

其中 $R=\frac{1}{2!}[\Delta x,\Delta y]\begin{bmatrix}f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{bmatrix}_{X^*}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}$,称为拉格朗日型余项

$X^*=(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)$

<黑塞矩阵> $H(X)=\begin{bmatrix}f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{bmatrix}_X$

对照:一元函数泰勒公式:

$$f(x)=f(x_0)+\underline{f'(x_0)(x-x_0)}+\frac{1}{2!}f''\underline{(x_0+\theta\Delta x)}(x-x_0)^2$$

$f(x_0)$ ↓ 固定点处函数值.

$f'(x_0)(x-x_0)$ ↓ dy 微分.

$\xi=x_0+\theta\Delta x$ $\because\theta\in(0,1)$ $\therefore\xi\in(x_0,x)$

↓ $\frac{1}{2!}f''(\xi)\Delta x^2$ 其实也是二次型 $[\Delta x][f''(\xi)][\Delta x]$

证明:设$\varphi(t)=f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)$. 变成一元.

$\varphi(0)=f(x_0,y_0)$ $\varphi(1)=f(x,y)$

$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{1}{2}\varphi''(\theta)t^2$

$\varphi'(t)=f'_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta y$. $t=0$时:

$\varphi'(0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$

$\varphi''(t)=f''_{xx}(\Delta x)^2+f''_{xy}(\Delta x\Delta y)+f''_{yx}(\Delta y\Delta x)+f''_{yy}(\Delta y)^2$

$$=[\Delta x,\Delta y]\begin{bmatrix}f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{bmatrix}_{(x_0+t\Delta x,\,y_0+t\Delta y)}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}$$

$\varphi(1) = \cancel{\varphi_x} \cdot f(x,y) = \varphi(0) +$

$f(x,y) = f(x_0, y_0) + [f'_x, f'_y] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} +$

第九章 多元函数积分学

9.1.1 黎曼积分的概念

1. 为了解决非均匀分布在某间上的量的总量的问题.
2. 要素：被积函数、积分区间.
3. 思想：整体由局部构成，局部线性化，近似中求精确.
   "分割、作积、求和、取极限"
4. 分布区间：几何形体 Ω $\begin{cases} \text{二/三维有界闭域} \\ \text{空间曲线段或曲面片} \end{cases}$

定义：设 $f(P)$ 是几何形体 Ω 上有定义的点函数，将 Ω 分割为 n 个小的几何形体 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \cdots, \Delta\Omega_n$，同时用它们表示其度量（面积、体积或弧长）

称数 $d_i = \sup\limits_{P_1,P_2\in\Delta\Omega_i} \{d(P_1,P_2)\}$ 为 $\Delta\Omega_i$ 的直径.

记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$

任取点 $P_i \in \Delta\Omega_i$ $(i=1,2,\cdots n)$，作乘积的和式

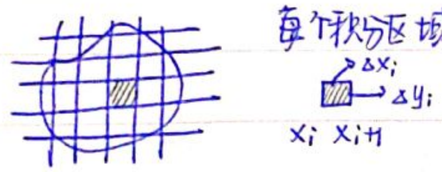
$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\Omega_i$$

9.2. 二重积分的计算.

$\iint_\sigma f(x,y)\,d\sigma$

σ 为平面上某区域.　　积分存在 $\Rightarrow$ 任意划分区域均可 $\to$ 规则划分.

每个积分区域为小矩形



$\Delta\sigma_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$

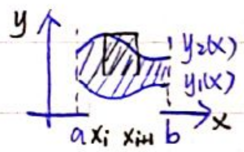
9.2.1. 直角坐标系.

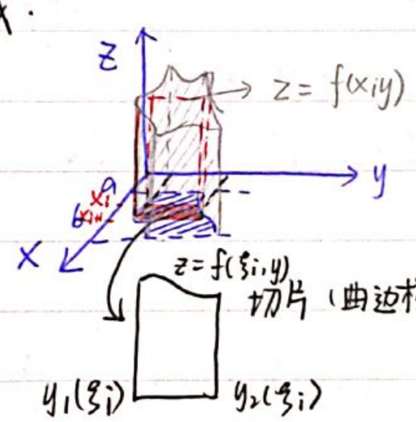
$d\sigma = dx\,dy$

二重积分化为 $\iint_\sigma f(x,y)\,dx\,dy$

关注 σ

(1) σ 为 X-型曲域.





求柱体体积.

切片.

取 $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$　　切片(曲边梯形).

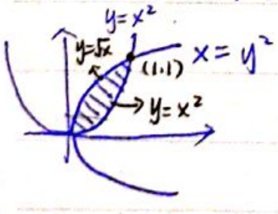
曲边梯形面积S: $\int_{y_1(\xi_i)}^{y_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)\,dy$

$= \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$

切片(每片)体积. $S\,dx \xrightarrow{\text{求和}} \Sigma S\,dx \xrightarrow{\text{极限}} \int_a^b (\cancel{\Sigma} S)\,dx$　　$\sigma: \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$

$\therefore V = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$

例1. 计算 $I = \iint_D xy\,dx\,dy$.　　D: $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 围成.



首先确定 X-型. 确定 x 的范围 [0,1]　确定上底边、下底边.
$y=\sqrt{x}$　　$x^2=y$

解: D $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

$I = \int_0^1 dx \underline{\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x y^2 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right] dx$

$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^5 \right] dx.$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12}.$

例2、计算 $\iint_D 3x^2y^2 d\sigma$

D：由x正轴、y轴和 $y=1-x^2$ 围成．

$x \in [0,1]$ $\quad y_1(x)=0 \quad y_2(x)=1-x^2$．

$$D\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1-x^2\end{cases}$$

$$\int_0^1 dx\left[\int_0^{1-x^2} 3x^2y^2\, dy\right]$$

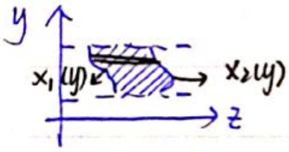
$$=\int_0^1 \left[\cancel{6x^2y}\Big|_0^{1-x^2}\right]dx.$$

$$=\int_0^1 \left(6x^2(1-x^2)\right)dx$$

step1：写出区域．

step2：将二重积分写作累次积分形式．

(2) σ 为y－型曲域．



$$\sigma:\begin{cases}a\le y\le b\\x_1(y)\le x\le x_2(y)\end{cases}$$

对每个固定的y．

$$I=\iint_\sigma f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

例1.

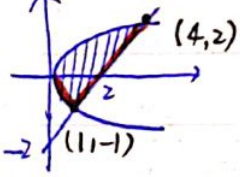
$P_1(\underline{y^2},y) \quad P_2(\underline{\sqrt{y}},y)$

$$D:\begin{cases}0\le y\le 1\\y^2\le x\le\sqrt{y}.\end{cases}$$

$$I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy\,dx$$

例2． (既是X－型，又是y－型，自己判断)

$\iint_D xy\,d\sigma$ D：$y^2=x$ 与 $y=x-2$ 围成．



X－型：
$$\begin{cases}0\le x\le 4\\y_1(x)\le y\le\sqrt{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_1(x)= \quad , 0<x<1\\y_1(x)= \quad , x\ge 1\end{cases}$$

y－型
$$\begin{cases}-1\le y\le 2.\\y^2\le x\le y+2.\end{cases}$$

$$\iint_D xy\,d\sigma=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} xy\,dx=\int_{-1}^2 dy\left(\tfrac{1}{2}x^2y\right)\Big|_{y^2}^{y+2}$$

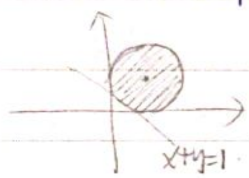
例1 求 $\iint_S f(x^2+y^2+z^2)\,dS$，其中 S为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

$f(x^2+y^2+z^2)=f(R^2)$ $\qquad \iint_S \underbrace{f(x^2+y^2+z^2)}_{常值}\,dS = f(R^2)\cdot|S|$ → $|S|$为球面面积.

$= f(R^2)(4\pi R^2)$.

例2. (1) 比较 $\iint_D (x+y)^2\,d\sigma$ 和 $\iint_D (x+y)^3\,d\sigma$ 其中D: $(x-2)^2+(y-2)^2\le 4$

(2) 比较 $\iint_D \ln(x+y)\,d\sigma$ 和 $\iint_D xy\,d\sigma$ 其中D=由x轴、y轴、$x+y=1$，$x+y=\frac{1}{2}$围成



被积函数均为 $(x+y)^n$ 积分限制在D区域

只需看 1和$(x+y)$的关系. 比较圆与$x+y=1$的位置关系

例3. $f(x,y,z)$连续，$f(0,0,0)\neq 0$，V_t是以原点为圆心半径为t的球形域

求$t\to 0$时，下列积分是t的几阶无穷小量.

(1) $\iiint_{V_t} f(x,y,z)\,dV$

(2) $\cancel{\iiint}\ \iint_{S_t} f(x,y,z)\,dS$ ， S_t为V_t表面

(3) $\int_{C_t} f(x,y,z)\,ds$.

C_t为S_t与$x+y+z=0$的交线.

$\iiint_{V_t} f(x,y,z)\,\underline{dV} \to t^3$?

$= |V_t|\cdot f(x_0,y_0,z_0)$ 当$t\to 0$时 $f(x_0,y_0,z_0)\to f(0,0,0)$

例4. 求 $I=\iint_S (xe^2+x^2\sin y)\,dS$.

其中 $S: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z\geq 0 \end{cases}$

关于x轴/y 轴对称

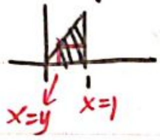
$I = e^2\iint_S x\,dS + \iint_S x^2\sin y\,dS$

奇

实验之流 Q群
737678045

例5. $\iint_G e^{x^2}\,dxdy$ 记作I.

G: $y=x$; $x=1$; x轴 围成的区域

解 

$G: \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq x \end{cases}$ (x-型)

$G: \begin{cases} 0\leq y\leq 1 \\ \cancel{0\leq x\leq y} \end{cases}$ $y\leq x\leq 1$

$\int_0^1\left[\int_0^x \overset{e^{x^2}}{1}\,dy\right]dx$

x-型 $\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy$ 被积函数中没有y，对dy来说是常数，提出去.

$=\int_0^1 xe^{x^2}dx$?

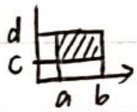
y-型 $\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx$

注：$\int e^{x^2}dx$ 求不出. 但连续且光滑→原函数存在

所以用x-型方法来做 e^{x^2}型函数

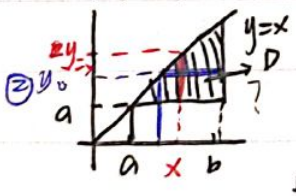
有时

※ 累次积分的换序问题



$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$

具体问题：变换次序 $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dy$



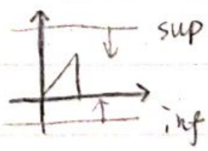
$\rightarrow \int_{?}^{?} dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$

求积分上下限.

步骤.

① 确定所有可能的y的取值

$c=\inf\{y:(x,y)\in D\}$ $d=\sup\{y:(x,y)\in D\}$



② 取定y，确定x的取值范围

$\varphi_1(y)\leq x\leq \varphi_2(y)$

这里是 $y\leq x\leq b$.

故 $\rightarrow \int_c^d dy\int_y^b f(x,y)\,dx$

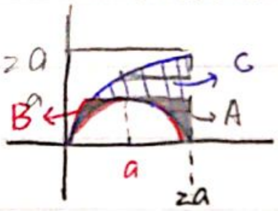
例2. 交换积分顺序

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy$$

$\Rightarrow x = \frac{y^2}{2a}$

$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2a \\ \sqrt{2ax-x^2} \le y \le \sqrt{2ax} \end{cases}$

$y^2 = 2ax - x^2$ $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ $(a,0)$ a



$0 \le y \le 2a$

$\begin{cases} \cancel{\frac{1}{2a}y^2 \le x \le 2a,\ a \le y \le 2a} \\ \frac{1}{2a}y^2 \le x \end{cases}$

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

x同时满足 $\Rightarrow \begin{cases} y \ge \sqrt{2ax-x^2} & y^2 \ge 2ax - x^2 \Rightarrow x \ge a+\sqrt{a^2-y^2} \text{ 或 } x \le a-\sqrt{a^2-y^2} \ ? \\ y \le \sqrt{2ax} & \Rightarrow x \ge \frac{y^2}{2a} \end{cases}$

比较 $\frac{1}{2a}y^2$ 与 $a+\sqrt{a^2-y^2}$

A区域 (1) $y \le a$ 时 $\frac{1}{2a}y^2 \le a+\sqrt{a^2-y^2} \Rightarrow x \ge a+\sqrt{a^2-y^2}$ 且 $x \le 2a$

在这一段对应的积分 $\int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx$

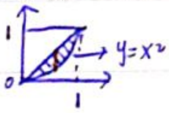
B区间 (2) $y \le a$ 时 $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2a}y^2 \\ x \le a-\sqrt{a^2-y^2} \end{cases}$ $\frac{1}{2a}y^2 \le x \le a-\sqrt{a^2-y^2}$

$B = \int_0^a dy \int_{\frac{1}{2a}y^2}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx$

C区间 (3) $y > a$ 时 $2a \ge x \ge \frac{y^2}{2a}$

例3. 交换积分次序有帮助了 计算 $I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}\,dx$ → 算不出来

本来区域



换序 $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$ → 确定血型 $\begin{cases} \text{图象法} \\ \text{不等式法} \end{cases}$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \frac{\sin x}{x}\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\sin x}{x}(x - x^2)\right] dx$$

$$= \int_0^1 (\sin x - x\sin x)\,dx$$

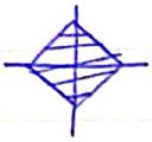
分部积分

$|x|$ $\quad |f(x,y)| = [(f(x,y))^2]^{\frac{1}{2}}$

例 4：求 $\iint_D (|x|+y)\,d\sigma$

$D: |x|+|y| \le 1$

积分区域 在第一象限中 同理



$\iint_D (|x|+y)\,d\sigma$

$= \iint_D \underbrace{|x|}_{|-x|=|x| \text{偶}} d\sigma + \iint_D y\,d\sigma$ → 奇函数．积分为0．？

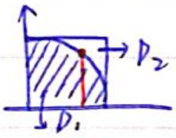
$= 2 \iint_{D_1} |x|\,d\sigma = 2\iint_{D_1} x\,d\sigma$

$= 2\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} x\,dy$

$= 2\int_0^1 dx \left(\frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^2\right)$

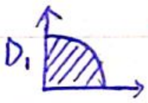
△ 通过讨论x的区域，将绝对值去掉．

例5．求 $\iint_D |x^2+y^2-1|\,dxdy$ ；$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$



△ | 为了去除积分函数、
将积分区域分成2块．在 D_1 内为负．

$D_1: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ $\quad D_1 = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{|x^2+y^2-1|}_{1-x^2-y^2} dy$ $\qquad D_1$ 内 $x^2+y^2 \le 1$

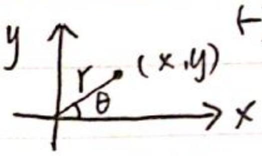


$= \int_0^1 dx \left[y(1-x^2) - \frac{1}{3}y^3 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right]$ ？

$= \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot (1-x^2)\,dx$

9.2. 二重积分

9.2.2.



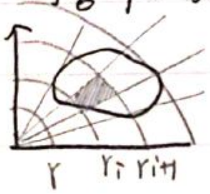
(一) 两坐标系对应关系：

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

{ r为(x,y)与原点的距离.

由直角坐标

$\iint_\sigma f(x,y)\,d\sigma \longrightarrow \iint_{\square} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta$



$S = \pi(r_{i+1}^2 - r_i^2)\cdot\frac{\theta}{2\pi}$ → 采用弧度制

$\downarrow \theta = \theta_{i+1} - \theta_j$

$S = \pi(r_{i+1}^2 - r_i^2)\cdot\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2\pi}$

$\Delta\sigma = \pi[(r_i+\Delta r)^2 - r_i^2]\cdot\frac{\Delta\theta}{2\pi}$

$d\sigma = \lim_{\Delta r\to 0}\underline{[\pi(\Delta r)^2 + \pi\cdot 2\Delta r\cdot r_i]\cdot\frac{\Delta\theta}{2\pi}} =$

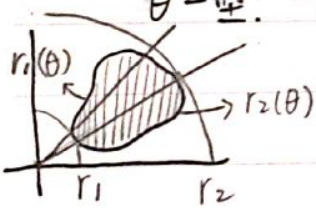
$\underline{d\sigma} = 2\pi r_i\,dr\cdot\frac{d\theta}{2\pi} = \underline{r\,dr\,d\theta}$ ※

二手市场Q群
731429909

(二) 确定积分区域.

道理同x-y.

θ-型. 先找一条θ固定的线. 找r的边界 $r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)$



$\iint_\sigma f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

$\boxed{= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\cos\theta)\,r\,dr}$

例1. 将二重积分 $\iint_\sigma f(x,y)\,d\sigma$ 表示成极坐标下的累次积分

$\sigma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ 中间的圆环.

$\sigma: \{$

解: $\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

$\sigma: \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 1\le r\le 2 \end{cases}$

$\therefore I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$

例2. $\sigma: x^2+y^2 \le a^2$ 计算 $\iint_\sigma e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$

解: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ d\sigma = r\,dr\,d\theta \end{cases}$ $\rightarrow \iint_\sigma e^{\boxed{-(x^2+y^2)}} dxy = \iint e^{\boxed{-r^2}} r\,dr\,d\theta$

$D: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \end{cases}$

$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^a$

$= 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}\right)$

例3. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

$I_M = \int_0^M e^{-x^2} dx = \int_0^M e^{-y^2} dy$

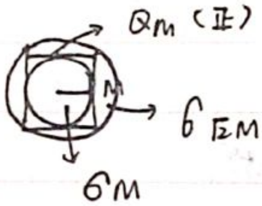
$I_M^2 = \int_0^M e^{-x^2} dx \int_0^M e^{-x^2} dx = \int_0^M e^{-x^2} dx \int_0^M e^{-y^2} dy$?

$= \iint_{D_M} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$

$4I_M^2 = \iint_{Q_M} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$

$\ge \iint_{\sigma_M} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$

$= \pi(1-e^{-M^2})$



当 $M \to +\infty$ 时 $I_M = ?$ 呢 2

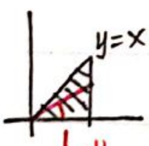
$4I_M^2 \le \pi\left(1-e^{-(\sqrt{2}M)^2}\right)$ $\therefore \pi(1-e^{-M^2}) \le 4I_M^2 \le \pi\left(1-e^{-(\sqrt{2}M)^2}\right)$

↳ 极限为 π

$\therefore 4I_M^2$ 极限为 π.

$I_M \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{4}}$

例4. 计算 $\int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dy$



$\frac{1}{r} = \cos\theta$

$r = \frac{1}{\cos\theta}$

解: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\therefore \sqrt{x^2+y^2} = r$ 处理被积函数

$" = \iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r\; r\,dr\,d\theta$ → 反?

$\rightarrow \frac{1}{3}r^3\Big|_0^{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{1}{3\cos^3\theta}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\cos^3\theta} d\theta$

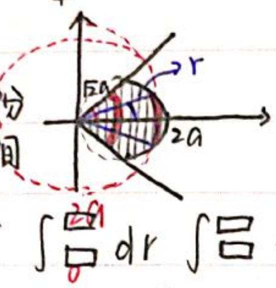
$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4\theta} \frac{d\sin\theta}{\cancel{\cos\theta\, d\theta}}$

例5. 在极坐标系下变换累次积分顺序

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} f(r,\theta) r dr$$

$\theta=0$时 $2a\cos\theta=2a$；$\theta=\frac{\pi}{4}$时 $2a\cos\theta=\sqrt{2}a$

描述积分区间



要写成 $\int_0^{2a} dr \int_{?}^{?} f(r,\theta) r d\theta$

确定θ取值范围　　将r固定(以原点为圆心画个圆

① 当$r<\sqrt{2}a$时 $=\int_0^{2a} dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(r,\theta) r d\theta$

② 当$\sqrt{2}a<r<2a$时

∵ 这一段上的点是 $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ (x-a)^2+y^2=a^2 \end{cases}$ 的交点

$$\begin{cases} x=\frac{r^2}{2a} \\ y=\sqrt{r^2-\frac{r^4}{4a^2}} \end{cases}$$

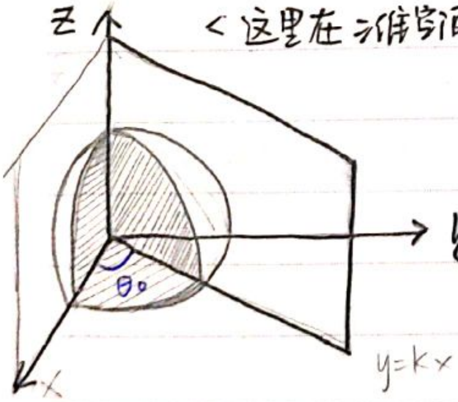
$(x,y) \to \theta=\arctan\frac{x}{y}$

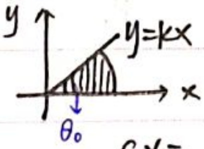
⇒ 则 $\theta_1=\arctan\frac{2a\sqrt{r^2-\frac{r^4}{4a^2}}}{r^2}$　　$\theta_2=-$ ——

$\therefore = \int_0^{2a} dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r,\theta) r d\theta$

例6. 求 $y=0$　$y=kx$ $(k>0)$ 和 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 在第一象限围成的体积.

<这里在三维空间中，$y=0$与$y=kx$均为平面>　　z是一个球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

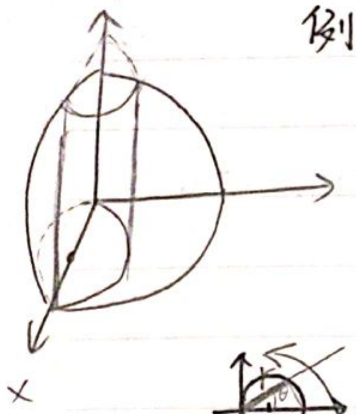




$\tan\theta_0=k$

$\begin{cases} x= \\ y= \end{cases}$ $\to \sqrt{R^2-r^2}\, r dr d\theta$

$$\int_0^{\theta_0} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\, r dr$$　　$\theta_0=\arctan k$



例1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 包围的体积.

（这里仅画出一半. 所以2倍.
被积函数 $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$.）

$2\iint_{6}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$

$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le r\le 2a\cos\theta \end{cases}$

$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,r\,dr$ 对称性.

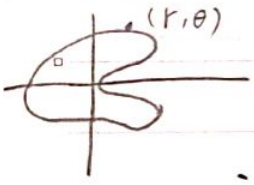
$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,r\,dr$

例2. 求曲线 $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$ 围成的面积. $\to \iint_6 1\,dxdy = |6|$?

$\to 6$

令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

曲线为: $r^6=r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$



即: $r^2=\cos^4\theta+\sin^4\theta$

6: $r^2\le\cos^4\theta+\sin^4\theta$?

$\therefore \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ \cancel{0\le r\le} \cos^4\theta+\sin^4\theta \end{cases}$

$\therefore \iint_6 dxdy$

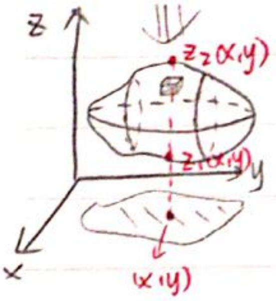
曲线关于x、y轴对称

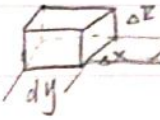
$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}r\,dr$?

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}r\,dr$

9.3. 三重积分的计算.

9.3.1. 直角坐标系下三重积分的计算.





$\Delta V_i = \Delta x \Delta y \Delta z \xrightarrow{\text{体积微元}} dV = dx\,dy\,dz$

$$\iiint_V f(P)\,dV = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

1. 投影法.

xoy面取定 (x,y) 找出相应线上 z 的上下界 $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

$\iint_{6xy} dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

积掉z 得与x、y有关函数
再到二重积分中算

Ω_1 联想 $\iint_6 dx\,dy$ $\quad\Omega_2 \Rightarrow \iint_{6yz} dy\,dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx$

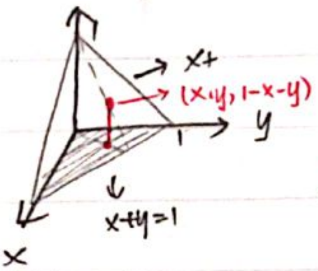
$\sum f(\xi_i,\eta_i,\theta_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$

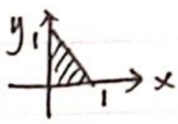
$\downarrow \Delta z_i \Rightarrow 0$

$= \int_{z_1(\xi_i,\eta_i)}^{z_2(\xi_i,\eta_i)} f(\xi_i,\eta_i,\theta_i)\Delta x_i \Delta y_i\,dz$

$\hookrightarrow \iint_{6xy} \boxed{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}\,dx\,dy.$

例1. 求 $\iiint_V \frac{dV}{(1+x+y+z)^3}$. 其中 V 由 $x+y+z=1$ 与三坐标平面围成的区域





$z_{min}=0 \qquad z_{max}=1-x-y.$

$I = \iint_{6xy} dx\,dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$

$\hookrightarrow \frac{1}{-2(1+x+y+z)^2}\Big|_0^{1-x-y}$

$= \iint_{6xy}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(x+y+1)^2}\right)dx\,dy$

$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(x+y+1)^2}\right)dy$

$= -\frac{1}{8}|S_{6xy}| = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2(x+y+1)^2}dy - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}$

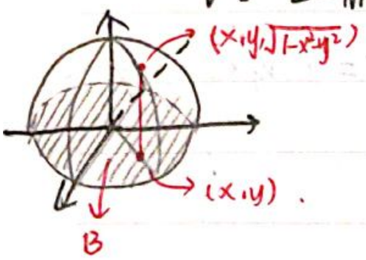
$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx$ 原函数 $\left(-\frac{1}{(x+y+1)}\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} - \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)dx - \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln(1+x)\Big|_0^1\right)-\frac{1}{16} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\ln 2.$

例2. $I=\iiint_V (1-x+y^3)z\,dV$

V: $z=\sqrt{1-x^2+y^2}$ 与 $z=0$ 围成的上半球.



$\iint_{B_{xy}} dxdy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (1-x+y^3)z\,dz$

若区域关于 $x=0$ 对称，且 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$

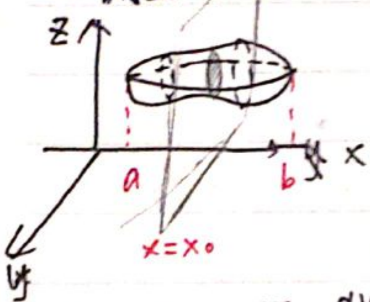
则 $\int_D f(x,y,z)=0$

$I=\int$ ~~dxdy~~

$=\iiint_V (z-\underbrace{xz-y^3z}_{=0})dV$

$=\iint_{B_{xy}} dxdy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz=\iint_{B_{xy}} \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)dxdy$

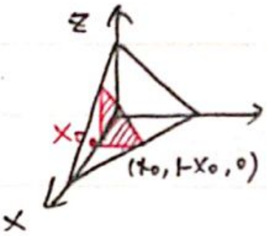
2. 截面法.



$$\iiint_V f(P)\,dV = \underbrace{\int_a^b dx}_{②} \underbrace{\iint_{\sigma_x} f(x,y,z)\,dy\,dz}_{①}$$

先确定x范围. 在每个x平面上, 找截面面积.

例1: 求 $I=\iiint_V \frac{dV}{(1+x+y+z)^3}$, 其中V 由x+y+z=1 与三坐标平面围成.

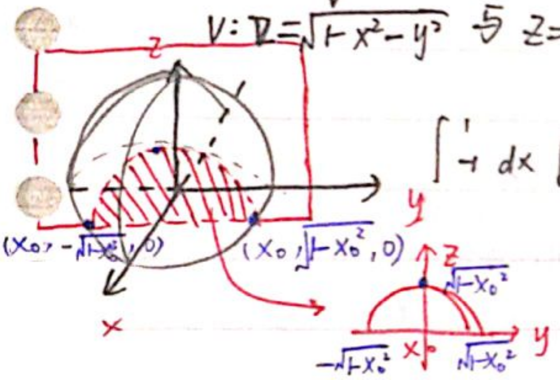


$$V:\begin{cases}0\le x\le 1\\ (y,z)\in\sigma_x\end{cases}$$

$$\int_0^1 dx \iint_{\sigma_x} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dy\,dz$$

例2. $I=\iiint_V (1-x+y^3)\,z\,dV$

$V: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 z=0 围成的上半球.



$$\int_{-1}^1 dx \iint_{\sigma_x} z\,dy\,dz$$

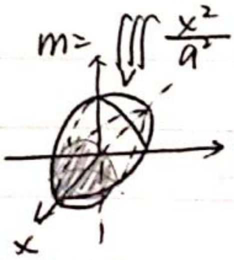
例3. $I=\iiint_V z\,dV$　　$V: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与平面 z=0 围成的上半球体.

$$I=\int_0^1 dz \iint_{\sigma_z} z\,dx\,dy. =\frac{\pi}{4}$$

例4. 椭球体 $V:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 内点(x,y,z)处质量的体密度 $\rho=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

求椭球的质量.

$$m=\iiint \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\,dx\,dy\,dz.$$



$$=\iiint \frac{x^2}{a^2}dx\,dy\,dz+\iiint\frac{y^2}{b^2}dx\,dy\,dz+\iiint\frac{z^2}{c^2}dx\,dy\,dz.$$

$$\iiint_V \frac{x^2}{a^2}dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{-a}^a dx \iint_{\sigma_x} \frac{x^2}{a^2}dy\,dz=\frac{1}{a^2}\int_{-a}^a x^2|\sigma_x|\,dy\,dz$$

求 σ_x 面积: 椭圆: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}}_{=A}+\underbrace{\frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})}}_{=B}=1.\ \text{面积 } S=\pi AB$$

$$=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^a\left(x^2-\frac{x^4}{a^2}\right)dx$$

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a\left(x^2-\frac{x^4}{a^2}\right)dx=\frac{4\pi abc}{15}$$

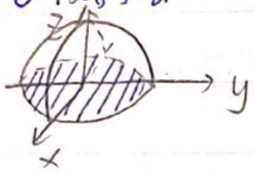
同理可得 $\iiint_V \frac{y^2}{b^2}dx\,dy\,dz=\iiint_V\frac{z^2}{c^2}dx\,dy\,dz=\frac{4\pi}{15}abc$

投影法&截面法比较:

(1)

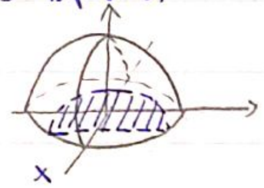
例1: $I=\iiint_V z\,dV$ V为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z=0$ 围成的半圆球

① 投影法:



$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\,dz$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

② 截面法.

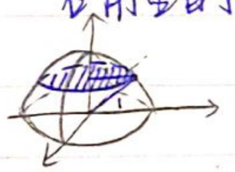


$$\int_{-1}^{1}dx\iint_{\sigma_x}z\,dz$$
$= \cancel{\int_{-1}^{1}dx\int}$ 显然. 求 $\iint_{\sigma_x} z\,dz$ 比上法困难.

(2) 当 $f(x,y,z)$ 仅与x有关时, 用垂直于x轴的平面做截面法, 算积分较易.

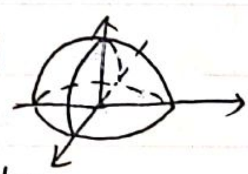
例2 例1. 用截面法计算 $\iiint_V z\,dV$.

若用垂直于z轴的平面截



$$\int_0^1 dz\iint_{\sigma_z}z\,dxdy=\int_0^1 z\,dz\iint_{\sigma_z}1\,dxdy$$
$$=\int_0^1 z\,|\sigma_z|\,\cancel{dxdy}\,dz$$
$$=\int_0^1 z\cdot\pi(1-z^2)\,dz$$
$$=+\frac{\pi}{4}.$$

例3. $\iiint_V f(z)\,dV$. $V: x^2+y^2+z^2\le 1$

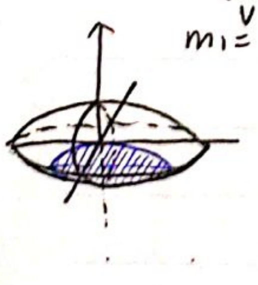


$$\iiint_V f(z)dz=\int_{-1}^{1}dz\iint_{\sigma_z}f(z)dxdy$$
$$=\int_{-1}^{1}f(z)|\sigma_z|\,dz$$
$$=\int_{-1}^{1}f(z)\,\pi(1-z^2)\,dz$$

例4. 椭球体V: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$. 质量密度为 $\rho=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

求质量. $m=\rho V$

$$m=\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dV$$



$m_1=\frac{1}{a^2}\iiint x^2 dV$ $m_2=\frac{1}{b^2}\iiint y^2 dy$ $m_3=\frac{1}{c^2}\iiint z^2 dz$

$$m_1=\int_{-a}^{a}dx\iint_{\sigma_x}\frac{x^2}{a^2}dydz=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}|\sigma_x|\,dx$$

$|\sigma_x|=\pi AB$ ∵椭球上 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ∴ $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$

∴ $\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=1$. ∴ $A=\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}$ $B=\sqrt{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})}$

$$\therefore\ m_1=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}\pi\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}\sqrt{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})}\,dx$$

9.3.2. 柱坐标系下三重积分的运算.

1. 柱坐标/柱面坐标: 若 $P(x,y,z)$ 在坐标面 xoy 上的投影点 M 的极坐标为 (r,θ)

则 (r,θ,z) 为 P 的柱坐标.

2. r 表示 P 到 z 轴的距离. $r \geq 0$.

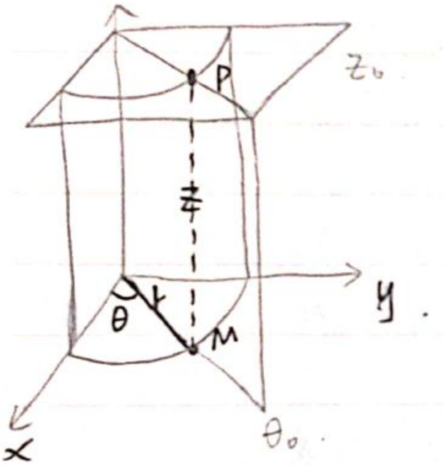
θ 表示 Ozx 的 $x>0$ 半平面绕 z 轴正向逆时针转到 P 的转角. $0 \leq \theta \leq 2\pi$

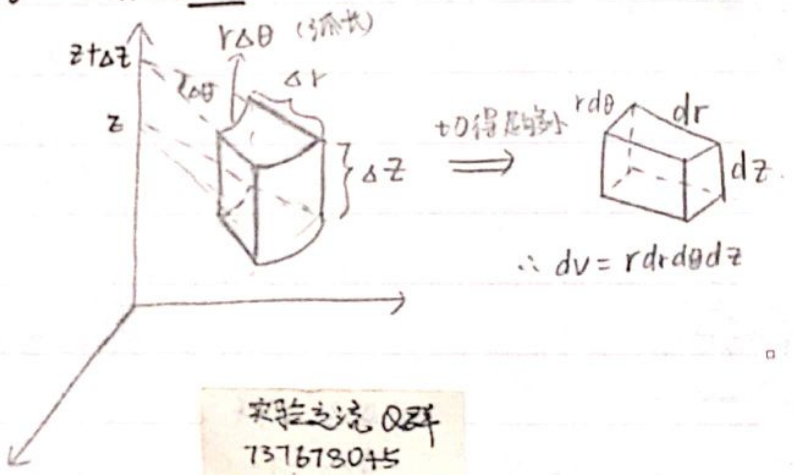
z 表示 P 的竖坐标 $z \in R$.

3. $(r,\theta,z) \mapsto (x,y,z)$:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$ (x,y 的极坐标化).

柱坐标系下的体积微元 $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$





实验交流 Q群
737678045

截面法.（用 $z=z_0$ 截得 G_z.）

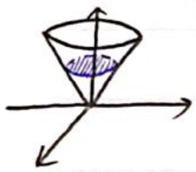
$$V:\begin{cases} a\le z\le b \\ (x,y)\in G_z \end{cases} \xrightarrow{\text{柱坐标}} \begin{cases} a\le z\le b \\ \alpha\le\theta\le\beta(z) \\ r_1(\theta,z)\le r\le r_2(\theta,z) \end{cases}.$$

$\iiint_V f(x,y,z)\,dV$

$=\iiint_V f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dV$

$=\int_a^b dz\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)}d\theta\int_{r_1(\theta,z)}^{r_2(\theta,z)} rf(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dr$

例：计算 $\iiint_V (x^2+y^2)\,dV$.　V: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成



$V:\begin{cases} 0\le z\le 1 \\ (x,y)\in G_z \end{cases}$　分析 G_z：半径为 $r=z$　（$z=\sqrt{x^2+y^2}$. 在 yoz 轴上 $x=0$）

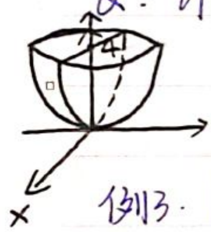
$V:\begin{cases} 0\le z\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le z \end{cases}$　$I=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z r^2\cdot r\,dr$

$=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\left(\frac{1}{4}z^4\right)$

$=\frac{1}{20}z^5\Big|_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\ 2\pi$

$=\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10}$

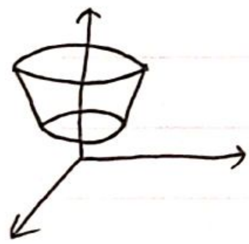
Q：计算 $\iiint_V (x^2+y^2)\,dV$　V: $z=x^2+y^2$ 与 $z=4$ 围成的.



旋转抛物面. 让 $x=0$、$z=y^2$；$y=0$　$z=x^2$

例3. $\iiint_V \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dV$　V: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=1$, $z=2$ 围成.

柱坐标.处理 $\sqrt{x^2+y^2}$　　锥台.



投影法：$\begin{cases} (x,y)\in G_{xy} \\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \end{cases}$

$\iint_{G_{xy}} dr\,d\theta\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \underline{\frac{e^{z^2}}{r}\cdot r\,dz}$ 这里算不出.

截面法. $\begin{cases} 1\le z\le 2 \\ (x,y)\in G_{z_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le z \end{cases}$　$(1,z)/(z,2)$?

$\int_1^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\ \underline{\int_0^z \frac{e^{z^2}}{r}r\,dr}$

$=\int_1^2$　　$=e^{z^2}(z-0)$

$=\int_1^2 ze^{z^2}dz\cdot(2\pi)$