第一章 函数

一、实数集 $\mathbb{R}$

①完备性 $(+,-,\times,\div)$

②有序性：$\forall a,b\in\mathbb{R}$，要么 $a<b$，要么 $a>b$，要么 $a=b$

③阿基米德性：$\forall c>0$，$\exists$ 正整数 n，使 $n>c$

④稠密性：$\forall a,b\in\mathbb{R}$，$\frac{a+b}{2}$

⑤实数 $\longleftrightarrow$ 数轴上的点．一一对应　$\forall$ 实数 $a\longleftrightarrow$ 点 a

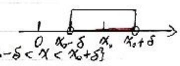
二、常见的数集

①$\forall a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$，开区间 $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$

闭区间 $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$ 有限区间

半开半闭区间 $(a,b]$，$[a,b)$

$(-\infty,+\infty)$ — 无穷区间



②邻域：设 $\delta>0$，x_0 点的 δ 邻域是 $\{x\in\mathbb{R}\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$

记为 $U(x_0,\delta)=U_\delta(x_0)$

x_0 点的去心邻域是 $\{x\in\mathbb{R}\mid x_0-\delta<x<x_0\}\cup\{x\in\mathbb{R}\mid x_0<x<x_0+\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\mathring{U}_\delta(x_0)$

③有(无)界集

定义：设 $D\subseteq\mathbb{R}$，若 $\exists$ 实数 $M>0$（或者 $\exists a,b\in\mathbb{R}$）使 $\forall x\in D$，有 $|x|\le M$，$(a\le x\le b)$ 则称 D 为有界集（a 为 D 的下界，b 为 D 的上界）。否则，称 D 为无界集，即 $\forall M>0$，$\exists x_0\in D$，使 $|x_0|>M$

确界公理．若数集 D 有上(下)界，则必有最小(大)上(下)界，称为 D 的上(下)确界，记为 $\sup D$ $(\inf D)$

确界的鉴别：$A=\sup D\Leftrightarrow\forall x\in D$，有 $x\le A$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists x_0\in D$，使 $x_0>A-\varepsilon$

$A=\inf D\Leftrightarrow\forall x\in D$，有 $x\ge A$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists x_0 \in D$, 使 $x_0 < A+\varepsilon$

三、函数

定义：设在某一问题中，有两个变量 x, y，若对变量 x 所取的每一个数通过一个规律（对应法则）f，总有唯一的一个变量 y 与之对应，这时我们称 y 为 x 的一元函数，简记为 $y=f(x)$，称 x 为自变量，y 为因变量

注：定义域 $\begin{cases}\text{实际定义域：} S=\pi r^2 \ (r>0) \\ \text{自然定义域：函数 } y=\pi r^2 \ r\in\mathbb{R}\end{cases}$

对应规律（函数关系）$\begin{cases}\text{具体的对应规律：公式法、列表法} \\ \text{抽象的对应规律：图形法}\end{cases}$

2.常见的函数形式 (10)

<1>数列 $\{a_n\}$：$a_n=f(n)$ —整标函数

<2>基本初等函数 (6)

常量函数 $y=C$　指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$　幂函数

对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$

三角函数 $\sin x$ $\cos x$, $\tan x$ $\cot x$　图象见 P_{13}

反三角函数 $y=\arcsin x$　$x\in[-1,1]$, $y\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y=\arccos x$　$x\in[-1,1]$, $y\in[0,\pi]$

$y=\arctan x$,　$x\in\mathbb{R}$　$y\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$y=\operatorname{arccot} x$,　$x\in\mathbb{R}$　$y\in(0,\pi)$

<3>初等函数：由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合

<4>反函数

<5>复合函数：$y=f(t)$, $t=g(x)$ $\rightarrow$ $f(g(x))$

<6>参数函数：$\begin{cases}x=\varphi(t), t\in T \\ y=\psi(t)\end{cases}$　$y=\psi(\varphi^{-1}(x))$

<7>隐函数：$x^2+y^2=1$ $\rightarrow$ $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 显函数

狄利克雷函数

<8>分段函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q \\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$　取整函数：$y=[x]=n$, $n\le x<n+1$

$n=0, \pm1, \pm2 \cdots$

3.计算函数值及函数值的表示

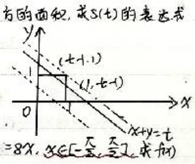
自变量—点　因变量—函数值

比如求 $y=f(x)$ 在 x_0 点的函数值 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$

4 函数图形

例1：设平面上有一正方形 D，$0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$，又有直线 l：$x+y=t$ $(-\infty<t<+\infty)$，$S(t)$ 表示正方形 D 在直线 l 左下方的面积，求 $S(t)$ 的表达式

解：$S(t)=\begin{cases}1, & t\ge 2 \\ 1-\frac{1}{2}(2-t)^2, & 1<t<2 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0<t\le 1 \\ 0, & t\le 0\end{cases}$　注意分类



例2：设 $f(x)$ 满足 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x$, $x\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，求 $f(x)$

解：将 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x \ldots(1)$ 中 x 换成 $-x$

得 $f(1-\sin x)-3f(1+\sin x)=-8x \ldots(2)$

解(1)(2)得 $f(1-\sin x)=-2x$

令 $1-\sin x=t$, $0\le t\le 2$，则 $x=\arcsin(1-t)$

$\therefore f(t)=-2\arcsin(1-t)$ 从而有 $f(x)=-2\arcsin(1-x)$, $0\le x\le 2$

例3：设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\ge 0 \\ \sin x, & x<0\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 1 \\ \ln x, & x>1\end{cases}$　求 $f(g(x))$

解：$f(g(x))=\begin{cases}2^{g(x)}, & g(x)\ge 0 \\ \sin g(x), & g(x)<0\end{cases}=\begin{cases}2^{x^3}, & x\le 1 \text{ 且 } x^3\ge 0 \\ 2^{\ln x}, & x>1 \text{ 且 } \ln x\ge 0 \\ \sin x^3, & x\le 1 \text{ 且 } x^3<0 \\ \sin(\ln x), & x>1 \text{ 且 } \ln x<0\end{cases}=\begin{cases}2^{x^3}, & 0\le x\le 1 \\ 2^{\ln x}, & x>1 \\ \sin x^3, & x<0\end{cases}$

注意答题时的条理性，勿跳步骤

第二章 极限与连续

§2.1. 极限的概念

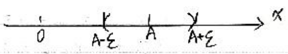
1.数列极限：已知数列$\{x_n\}$，当n无限增大时，对应的项x_n与某一实数A无限接近，则称实数A为数列$\{x_n\}$的极限

"ε-N"定义：已知数列$\{x_n\}$，$A\in R$，若$\forall\varepsilon>0$，∃正整数N，当$n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$(5)，则称数列$\{x_n\}$收敛（有极限），称A为数列$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，或$x_n\to A$，当$n\to\infty$

注：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$（正整数集，不包括0）当$n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$

注：(1) ε要任小，(2) N要존在 至多有$x_1, x_2, \cdots x_n\notin U(A,\varepsilon)$

(3) 几何表示



改变数列前面有限个项并不影响数列的收敛。

2.发散数列：没有极限的数列 e.g. $(-1)^n$

例1：用定义验证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证：分析，$\forall\varepsilon>0$，找N，当$n>N$时，有$|\frac{1}{n}-0|<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$

$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，当$n>N$时，有$n>[\frac{1}{\varepsilon}]$，$\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow|\frac{1}{n}-0|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

例2：用定义验证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

分析：$\forall\varepsilon>0$，$|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1$

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdots 1}\le\frac{2n^{\frac{1}{2}}+n-2}{n}=\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+1<1+\varepsilon$$

取$N=[\frac{4}{\varepsilon^2}]$，当$n>N$时 有$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

例3：下列哪些描述可作a是数列$\{x_n\}$极限的定义 (1.2.3.4)

(1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当$n\ge N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，有$n>N$时，有$|x_n-a|\le\varepsilon$

(3) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，有$n>N$时，有$|x_n-a|<k\varepsilon$，k为正常数

(4) $\forall m\in\mathbb{N}$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\frac{1}{m}$

(1) ⇒ (5) 显然

(5) ⇒ (1) $\forall\varepsilon>0$，取$N'=N+1$，当$n\ge N'>N$，有$|x_n-a|<\varepsilon$

(5) ⇒ (2) 显然

(2) ⇒ (5) $\forall\varepsilon'>0$，取$\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{2}$，由(2)可知 $\exists N$当$n>N$时有$|x_n-a|\le\varepsilon<\varepsilon'$

(5) ⇒ (3) 显然 (5) ⇒ (4) 显然

3.子数列的概念

已知数列$\{x_n\}$，$x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$

子数列$\{x_{n_k}\}$，$x_2, x_8, x_{15}, x_{27}\cdots$

n_k是表示x_{n_k}这一项在$\{x_n\}$中是第n_k项

k是表示x_{n_k}这一项在$\{x_{n_k}\}$中是第k项 显然$n_k\ge k$

4.定理：数列收敛于$a\Leftrightarrow$它的所有子数列都收敛于a

证：⇐ 显然

⇒ 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$

取$N'=N+1$，当$k>N'$时，$n_k\ge k>N'=N+1$，$\Rightarrow n_k>N$

$\therefore$有$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$，$\therefore\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$

<1>判定数列发散 e.g. $\{(-1)^n\}$ $\{\sin\frac{n}{2}\pi\}$

<2>判定数列收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}$

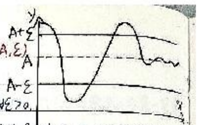
§2.2 函数的极限

一.函数的自变量趋于无穷大时的极限

(1) 函数$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限

定义1：设$f(x)$在$(a,+\infty)$上有定义，A为常数，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A$，当$x\to+\infty$

注：$\forall U(A,\varepsilon)$，$\exists X>0$，使 $f((X,+\infty))\subseteq U(A,\varepsilon)$



几何表示

定义2：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上有定义，A为常数，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限。

记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$，当 $x\to-\infty$。

定义3：设 $f(x)$ 在 $|x|>a$ 上有定义，A为常数，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ $(x\to\infty)$

定理1：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

例：$f(x)=\frac{1}{x}$　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$　$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

二. 函数自变量趋于有限值时的极限(函数在一点处的极限)

设 $f(x)$，自变量 x 无限接近 x_0，且 $x\neq x_0$，若 $f(x)$ 无限接近常数A，则称A为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限

定义4：$(\varepsilon-\delta)$ 设 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义，A为常数，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为 $f(x)$（当 $x\to x_0$ 时）在 x_0 点的极限

记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$，当 $x\to x_0$ 时

注：$\forall U(A,\varepsilon)$，$\exists \mathring{U}(x_0,\delta)$，使 $f(\mathring{U}(x_0,\delta))\subseteq U(A,\varepsilon)$

定义5：若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$

定义6：若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$

左、右极限统称为单侧极限

定理　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

例1：用定义验证 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

分析：$\forall\varepsilon>0$，找 δ，$0<|x-x_0|<\delta$，$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$

$|\sin x-\sin x_0|<\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|<\delta\le\varepsilon$

证：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le|x-x_0|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$　$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

例2：用定义验证 $\lim\limits_{x\to1}x^2=1$

分析：$\forall\varepsilon>0$，找 δ，$0<|x-1|<\delta$，$|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|<\delta|x+1|=\delta|x-1+2|\le\delta\,||x-1|+2|<\delta^2+2\delta<3\delta\le\varepsilon$　$0<\delta<1 \Rightarrow$ 取 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{3},1\}$

法二：$\forall\varepsilon>0$ 不妨设 $0<|x-1|<1 \Rightarrow 0<x<2$ 且 $x\neq1$，$1<1+x<3$ 取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{3}\}$，$|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|<3|x-1|<\varepsilon$

结论：由极限定义可得几个极限定式：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0$　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$　$0<a<1$

(3) 若 $f(x)$ 是基本初等函数且 $f(x)$ 在 x_0 有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

§2.3 极限的性质与计算

1.极限的性质

定理1（唯一性）若一个数列（或函数）有极限，则极限唯一

证：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 反证法　又设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$，且 $A\neq B$，不妨设 $B<A$

取 $\varepsilon=\frac{A-B}{2}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\exists N_1\in N$，当 $n>N_1$ 时有 $|x_n-A|<\varepsilon \Rightarrow x_n>A-\varepsilon=\frac{A+B}{2}$ ①

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$，$\exists N_2\in N$，当 $n>N_2$ 时有 $|x_n-B|<\varepsilon \Rightarrow x_n<B+\varepsilon=\frac{A+B}{2}$ ②

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时①②同时成立，从而 $x_n<\frac{A+B}{2}<x_n$ 矛盾

所以假设不成立，$A=B$

定理2（有界性）

1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界，即 $\exists M>0$，使 $|x_n|\le M$

2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 则 $\exists X>0$，使 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 有界，即 $\exists M>0$，使 $|f(x)|\le M$，$\forall x\in(X,+\infty)\cup(-\infty,-X)$

3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)$ 有界，即 $\exists M>0$，使 $|f(x)|\le M$，$\forall$

$\in \mathring{U}(x_0,\delta)$

注: 数列是整体有界, 函数是局部有界

定理3: (保序性) 设 $\lim x_n = A$, $\lim y_n = B$, 则

(1) 若 $A>B$, 则 $\exists N$, 使 $n>N$ 时, 有 $x_n > y_n$ ＞ 逆否命题

证明 ← (2) 若 $\exists N$, 使 $n>N$ 时 有 $x_n \geq y_n$, 则 $A \geq B$　　保序性

证: (1) (类似唯一性证明), 取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$, 由 $\lim x_n = A$ 得 $|x_n - A| < \varepsilon$ 即 $x_n > \frac{A+B}{2}$ 由 $\lim y_n = B$ 得 $|y_n - B| < \varepsilon$ 即 $y_n < \frac{A+B}{2}$ $\therefore y_n < \frac{A+B}{2} < x_n$

2. 极限的四则运算与复合运算

定理4: 设 $\underbrace{\lim x_n = A,\ \lim y_n = B}_{\text{前提: 极限存在}}$, 则 $\lim (x_n \pm y_n) = A \pm B$, $\lim x_n y_n = AB$

$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$ $(B \neq 0,\ y_n \neq 0)$

证: $\forall \varepsilon > 0$ 由 $\lim x_n = A$ $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$

由 $\lim y_n = B$ $\exists N_2$ 当 $n > N_2$ 时 有 $|y_n - B| < \varepsilon$, 且 $\exists M$ 使 $|y_n| \leq M$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n y_n - AB| = |(x_n - A)y_n + A(y_n - B)| < \varepsilon|y_n| + |A|\varepsilon \leq (M + |A|)\varepsilon = \varepsilon'$ $\therefore \lim x_n y_n = AB$

定理5: 设 $f(g(x))$ 为 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 的复合函数, 且满足:

(1) $f(g(x))$ 在 x_0 的去心邻域内有定义　　eg. $y=f(u)=\sqrt{u}$　$u=\sin x - 1$

(2) $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$

(3) $g(x) \neq u_0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$

则 $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A = \lim_{u\to u_0} f(u)$

证: $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$ $\exists \eta > 0$, 当 $0 < |u - u_0| < \eta$, 有 $|f(u) - A| < \varepsilon$

对上述的 $\eta > 0$, 由 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时 有 $|g(x) - u_0| < \eta$ 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_0\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$

$\therefore$ 有 $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$, $\therefore \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A$

结论: (1) 指,幂,对数,三角,反三角运算可以交换次序 (和极限) (极限存在)

若 f 是基本初等函数, $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))$

(2) 若 $f(x)$ 是初等函数 且 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义 则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$　定式 / 不定式

eg. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$　$u = g(x) = 0$ 则 $\lim_{x\to 0} f(g(x)) \neq \lim_{u\to 0} f(u) = -1$

$\lim_{u\to 0} f(u) = 1$

初等函数的极限问题

例1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3}$ (运用极限的四则运算)

例2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$

例3. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$

例4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a(p-1)(q^n-1) + b(q-1)(p^n-1)}{a(p-1)(q^{n-1}-1) + b(q-1)(p^{n-1}-1)}$ $(a>0, b>0, p>0, p\neq 1, q>0, q\neq 1)$

解 (1) $0<p<1$, $0<q<1$ 原式 $=1$

(2) $0<p<1$, $q>1$ 原式 $= \lim_{n\to\infty} \frac{a(p-1)(1-\frac{1}{q^n}) + b(q-1)(\frac{p^n}{q^n}-\frac{1}{q^n})}{a(p-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{q^n}) + b(q-1)(\frac{p^{n-1}}{q^n}-\frac{1}{q^n})} = q$

(3) $p>1$, $0<q<1$ 原式 $= p$

(4) $p>1$, $q>1$ $\begin{cases} p=q & \text{原式} = p \\ p>q & \text{原式} = p \\ p<q & \text{原式} = q \end{cases}$

② 例5. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2^3-1)(3^3-1)\cdots(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\cdots(n^3+1)}$　无穷积/和问题

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1)\cdots(n-1)(n^2+n+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(3^2-3+1)\cdots(n+1)(n^2-n+1)}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{\frac{1}{2}(n+1)!} \cdot \frac{(n^2+n+1)}{(2^2-2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{3} = \frac{2}{3}$

③ 例6. 设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2 - nx_n + 1$, 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$　猜证 数归法 递推

§2.4 收敛准则

1. 收敛准则 I

定理1 (两边夹挤准则)

若从某项以后有 $y_n \leq x_n \leq z_n$ (若从某一时刻后有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$) 且 $\lim_{n\to\infty} y_n = A = \lim_{n\to\infty} z_n$ ($\lim g(x) = A = \lim h(x)$), 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ ($\lim f(x) = A$)

证: 设 $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $y_n \leq x_n \leq z_n$.

均值不等式

$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

简单不等式

$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$

$\forall \varepsilon>0, \exists N_2$, 当 $n>N_2$ 时, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, 有 $A-\varepsilon < y_n < A+\varepsilon$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ $\exists N_3$, 当 $n>N_3$ 时, 有 $A-\varepsilon < z_n < A+\varepsilon$

取 $N=\max\{N_1, N_2, N_3\}$, 当 $n>N$ 时, 有 $A-\varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < A+\varepsilon$.

即 $|x_n - A| < \varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

例1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$ $0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{3}{n} < \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{3}{n}$

例2: $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$

$4 = (4^n)^{\frac{1}{n}} < (2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} < (3\times 4^n)^{\frac{1}{n}}$

例3: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$

解: 设 $a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{a_n(2n+1)}$

$\Rightarrow a_n^2 < \frac{1}{2n+1}$

例4: $\lim\limits_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$

解: $1 \le (n!)^{\frac{1}{n^2}} = (1^{\frac{1}{n}}\cdot 2^{\frac{1}{n}}\cdot 3^{\frac{1}{n}}\cdots n^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} \le \frac{1+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n} \le \frac{n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{n} = n^{\frac{1}{n}}$

$= \sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdots 1} \le \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n} \to 1$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$

法二: $(n!)^{\frac{1}{n^2}} \le (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n]{n}$

2 收敛准则 II

定理2 (单调有界准则) 单调有界数列必收敛.

定义1: 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 \le (\ge) x_2 \le (\ge) x_3 \le (\ge) x_4 \le (\ge) \cdots \le (\ge)$ $x_n \le (\ge) \cdots$ 则称数列 $\{x_n\}$ 是单调上升(下降)的. 单调上升, 单调下降数列统称为单调数列

证: 设数列 $\{x_n\}\uparrow$ 有界, $\Rightarrow \{x_n\}$ 有上确界, 记为 $A = \sup x_n$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 使 $x_N > A-\varepsilon$, 当 $n>N$ 时, $A+\varepsilon > A \ge x_n \ge x_N > A-\varepsilon$

即 $|x_n - A| < \varepsilon$, $\therefore \lim x_n = A$

类似可证, 若 $\{x_n\}\downarrow$ 有界, 则 $\lim x_n = \inf x_n$

注: ① 一般先证单调性再证有界性

② 作差 $x_{n+1} - x_n \ge 0 \uparrow$ $(\le 0 \downarrow)$

作比 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1 \uparrow$ $(\le 1 \downarrow)$

③ 若已证 $\{x_n\}\uparrow$, $x_1 \le x_n \le \lim x_n$

若已证 $\{x_n\}\downarrow$, $x_1 \ge x_n \ge \lim x_n$

例1: 设 $x_1>0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{9}{x_n})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解: $\because x_1>0$ $x_n>0$ $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n+\frac{9}{x_n}) \ge \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{9} = 3$ $(n\ge 1)$

$\therefore \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1+\frac{9}{x_n^2}) \le 1$ $(n\ge 2)$ $\therefore \{x_n\}\downarrow$

又 $\because 3 \le x_n \le x_2$ 由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在记为A

$\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(x_n+\frac{9}{x_n})$ $\therefore A = \frac{1}{2}(A+\frac{9}{A})$ $\therefore A=3$ 或 -3(舍去)

$\because x_n>0$ $\therefore \lim x_n \ge \lim 0 = 0$. 即 $A\ge 0$

例2: 设 $x_1 = a>0$, $x_{n+1} = \sqrt{b+x_n}$, 求 $\lim x_n$ $(b>0)$

解: $x_{n+1} - x_n = \sqrt{b+x_n} - \sqrt{b+x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{b+x_n}+\sqrt{b+x_{n-1}}}$

$\therefore x_{n+1}-x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号, 从而与 $x_2 - x_1$ 同号, 且 $\{x_n\}$ 单调

$x_2 - x_1 = \sqrt{b+a} - a = \frac{b+a-a^2}{\sqrt{b+a}+a}$

(1) $b+a-a^2=0$ $\Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 或 $\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ (舍去)

此时 $x_n = a$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\therefore \lim x_n = a$

(2) $b+a-a^2<0$ 时 $\{x_n\}\downarrow$ 此时 $a > \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 或 $a < \frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ (舍去)

又 $0 < x_n \le x_1$ 由单调有界准则知 $\lim x_n \exists$ 记为A, $\therefore \lim x_{n+1} = \lim\sqrt{x_n+b}$

$\Rightarrow A = \sqrt{b+A} \Rightarrow A = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 或 $A = \frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ (舍去)

(3) $b+a-a^2>0$ 时 $\{x_n\}\uparrow$ 此时 $\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 又 $\because a>0$

$\therefore 0 < a < \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 下证 $x_n \le \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 用数归法证之

当 $n=1$, $x_1 = a < \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$

设 $n=k$ 时, $x_k \le \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 则

当 $n=k+1$ 时, $x_{k+1} = \sqrt{b+x_k} \le \sqrt{b+\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}} = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$

$\therefore \{x_n\}$ 有界且 $\uparrow$

由单调有界准则知 $\lim x_n \exists$ 记为 A. $\therefore \lim x_{n+1} = \lim\sqrt{x_n+b}$

$\Rightarrow A = \sqrt{b+A} \Rightarrow A = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 或 $A = \frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ (舍去)

牛顿二项式定理

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

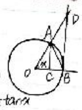
$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

① 有理式 $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$ 无理式 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

② 三角运算 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}$

③ 对数运算 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$

§25 两个重要极限



1 重要极限 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

证：不妨设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，如图所示，取单位圆O

$S_{\triangle AOB}<S_{扇形AOB}<S_{\triangle DOB}$ 即 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$

$\Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

又∵ $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ 都是偶函数 ∴ $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 且 $x\neq0)$

$\lim_{x\to0}\cos x=1$ 由两边夹挤准则 有 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

推论：① $\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$ ($\square\to0$ 且 $\square\neq0$)

② $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$ ③ $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ ④ $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1$

eg. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\arctan 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}\cdot\frac{2x}{\arctan 2x}=\frac{3}{2}$

2 重要极限 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

证明：① $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

$a_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\frac{1}{n})^3+\cdots+(\frac{1}{n})^n$

$a_{n+1}=1+(n+1)\frac{1}{n+1}+\frac{(n+1)n}{2!}(\frac{1}{n+1})^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}(\frac{1}{n+1})^3+\cdots+$

$\frac{(n+1)n\cdots}{n!}(\frac{1}{n+1})^n+\frac{(n+1)n\cdots(n+1-n)}{(n+1)!}(\frac{1}{n+1})^{n+1}\Rightarrow a_n<a_{n+1}$

∴ $\{a_n\}\uparrow$ $2=a_1\le a_n$

$a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$

由单调有界准则知，$\lim a_n$ 存在，记为e，即 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

② $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

不妨设 $x>0$，$n=[x]$，$n\le x<n+1$，$1+\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}+1\le\frac{1}{n}+1$

由 $1+\frac{1}{n}\ge1+\frac{1}{x}\ge1+\frac{1}{n+1}$ $n+1>x\ge n$ 得

$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{x})^x>(1+\frac{1}{n+1})^n$

$(1+\frac{1}{n})^{n+1}=(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})\to e\ (n\to+\infty)$

$(1+\frac{1}{n+1})^n=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}(1+\frac{1}{n+1})^{-1}\to e\ (n\to+\infty)$

由两边夹挤准则可知 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

③ $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x\overset{x=-t}{=\!=\!=}\lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t-1})^t=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}\cdot(1+\frac{1}{t-1})\to e$

∴ $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 即 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

推论：$\lim_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$ ($\square\to0$ 且 $\square\neq0$) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

例1：$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$

例2：$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=\ln a$

$e=\lim_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}$ 可简化"1^∞"型的极限计算

例3：$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x+b})^x \quad (a\neq b)$

$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a-b}{x+b})^{\frac{x+b}{a-b}\cdot\frac{a-b}{x+b}\cdot x}=e^{a-b}$

例4：$\lim_{x\to0}(\cos x+\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$

原式 $=\lim_{x\to0}(1+\cos x-\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos x(1-\cos x)}\cdot\cos x(1-\cos x)\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\to0}\cos x(1-\cos x)\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to0}\cos x\, 2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to0}2\cdot(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

例5：$\lim_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}})^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n}$

$=e^4$ $\quad \frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n=\frac{2\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot 2=4$

§26 两种量

1. 概念

定义1：若 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$（或 $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ 或 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$）则称 $\{x_n\}$（或 $f(x)$）是自变量给定趋向下的无穷小量

注：常量0是无穷小量，无穷小量常用字母 α, β, γ 表示

定义2：设有数列 $\{x_n\}$（或函数 $f(x)$），$\forall M>0$，若 $\exists N\in\mathbb{N}$（$\exists\delta>0$ 或 $\exists X>0$）当 $n>N$（$0<|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$）时，有 $|x_n|>M$（或 $|f(x)|>M$），则称数列 $\{x_n\}$（或函数 $f(x)$）是在自变量给定趋向下的无穷大量，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）

注：无穷大量是无界函数，反之不成立。

例如 $f(x)=x\sin x$　$x_n'=2n\pi+\frac{\pi}{2}$　$f(x_n')=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty\ (n\to\infty)$

$x_n''=n\pi$　$f(x_n'')=0$

非0无穷小的倒数是无穷大

2. 无穷小的性质

性质1：有限个无穷小的和、积仍是无穷小

无限个无穷小的和、积不一定是无穷小

反例：$\{x_n^1\}$　$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

$\{x_n^2\}$　$1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

$\{x_n^3\}$　$1, 1, 3^2, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

……

$\{x_n^k\}$　$1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots, k^{k-1}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^1x_n^2x_n^3x_n^4\cdots)=1$

性质2：有界量与无穷小之积仍是无穷小

证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　$|y_n|\le M$，$\forall n\in\mathbb{N}$，$M>0$，证 $\lim x_ny_n=0$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时 $|x_n|<\varepsilon$，$\therefore |x_ny_n|\le\varepsilon M$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n=\lim\limits_{x\to 0}x\sin x$

$\lim x_n=A$　$\lim y_n=B$　若 $A=B$ 则 $\lim x_n=\lim y_n$　$\lim(x_n-y_n)=0$

$\Leftrightarrow x_n-y_n=\alpha$，$\Leftrightarrow x_n=y_n+\alpha$

性质3：$\lim x_n=\lim y_n$（$\lim f(x)=\lim g(x)$）$\Leftrightarrow x_n=y_n+\alpha$（$f(x)=g(x)+\alpha$），$\alpha$ 是无

穷小量。

例：已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$，$f(x)$ 是已知函数，求常数 a 和 b

解：$f(x)-ax=b+\alpha$　$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha=0$　$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-b-\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

3. 无穷小的阶

定义1：设 α, β 为自变量相同趋向下的无穷小。

(1) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，称 α 是 β 的高阶无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$

(2) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，称 α 是 β 的低阶无穷小

(3) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=C\neq0$，称 α 与 β 是同阶无穷小，（记为 $\alpha=O(\beta)$）

(4) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$

(5) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=C\neq0$，称 α 是 β 的 k 阶无穷小（$k>0$）

e.g. $\lim\frac{\gamma}{\beta^m}=C'\neq0$　$k>m$，$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha}{\beta^k}\cdot\frac{\beta^k}{\beta^m}\cdot\frac{\beta^m}{\gamma}\to0$

注：$0<k<1$，α 是 β 的低阶无穷小　$k>1$，α 是 β 的高阶无穷小

$k=1$，α 与 β 是同阶无穷小

e.g. 注意分母不为0　$\sin x\sim\sin\frac{1}{x}\ (x\to\infty)$　$\sim x\sin\frac{1}{x}\ (x\to\infty)$ ×

定理1：$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\alpha-\beta=o(\alpha)$（或 $\alpha-\beta=o(\beta)$）

证：$\Rightarrow\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=1-\frac{\beta}{\alpha}\to0$　$\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1\to0\right)$

$\Leftarrow\ \alpha-\beta=o(\alpha)\Rightarrow\alpha=\beta+o(\alpha)\Rightarrow1=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\Rightarrow1=\lim\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow\beta\sim\alpha$

定义2：若 $\alpha\sim\beta$，则称 β 是 α 的主（要部分），$\alpha-\beta$ 是 α 的次（要部分）

主部不唯一，次部不唯一

定理2：若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，

则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$（等价无穷小代换定理）

注：在极限运算过程中，分子或分母中的无穷小因式可用其等价无穷小代换 乘法运算中

即 $\lim\frac{\alpha f(x)}{\beta g(x)}=\lim\frac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}$　e.g. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=0$　$\sin x\sim x+x^2$

$\lim\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\neq\lim\frac{\alpha'-\gamma'}{\beta'}$

4. 常见的等价无穷小

二、无关系：

1. 自反性

e.g. $\alpha\sim\alpha\Leftrightarrow\lim\frac{\alpha}{\alpha}=1$

2. 对称性

$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\beta\sim\alpha$

3. 传递性

$\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma\Leftrightarrow\alpha\sim\gamma$

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\to1$

思考题

无穷小量 α, β

$\alpha\pm\beta$　$\alpha\beta$

$\square \sim \sin\square \sim \arcsin\square \sim \tan\square \sim \arctan\square \sim e^{\square}-1 \sim \ln(1+\square)$ $\sim \frac{(1+\square)^{\alpha}-1}{\alpha}$

$(\square \to 0$ 且 $\square \neq 0)$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \ (x\to 0)$

证. $\lim \frac{(1+\square)^{\alpha}-1}{\alpha\square} = \lim \frac{e^{\alpha\ln(1+\square)}-1}{\alpha\square} = \lim \frac{\alpha\ln(1+\square)}{\alpha\square} = 1$

$(1+\square)^{\alpha}-1 \sim \alpha\square \quad (\square \to 0) \qquad \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3 \ (x\to 0)$

例1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{2x-1}\cdot\sin\frac{5}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{2x-1}\cdot\frac{5}{x} = \frac{15}{2}$

例2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}$

例3. 当 $n\to\infty$ 时, $(1+\frac{a}{n^2})^{\frac{1}{3}}-1 \sim 1-\cos\frac{1}{n}$, 求 a

解 $(1+\frac{a}{n^2})^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{n^2}\ (n\to\infty) \qquad 1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\ (n\to\infty)$

$\lim \frac{\frac{1}{3}\frac{a}{n^2}}{\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}} = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$

牛顿二项式

$(a+b)^n = \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

↓推广

$(n+1)^{\beta} = (1+n)^{\beta} = \sum\limits_{r=0}^{\beta} C_{\beta}^r n^r$

$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$C_{\beta}^r = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-r+1)}{r!}$

例4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\beta}-n^{\beta}}$ ($\beta>0$, α,β 都是常数)

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-\beta}}{(1+\frac{1}{n})^{\beta}-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-\beta}}{\frac{1}{n}\cdot\beta} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta}$

$\alpha-\beta+1>0$ 原式 $=+\infty \qquad \alpha-\beta+1=0$ 原式 $=\frac{1}{\beta} \qquad \alpha-\beta+1<0$ 原式 $=0$

法二. $(n+1)^{\beta} = n^{\beta}+\beta\cdot n^{\beta-1}+\frac{1}{2!}\beta(\beta-1)n^{\beta-2}+\cdots$

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{\beta n^{\beta-1}+\frac{1}{2!}\beta(\beta-1)n^{\beta-2}+\cdots} =$

例5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x} \qquad \sin\frac{\tan x-\sin x}{2} \sim \frac{\tan x-\sin x}{2} \sim \frac{1}{4}x^3\ (x\to 0)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan\tan x-\sin\tan x}{\tan x-\sin x} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\tan^3 x}{\frac{1}{2}x^3} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos\frac{\tan x+\sin x}{2}\sin\frac{\tan x-\sin x}{2}}{\frac{1}{2}x^3}$

$= 1 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{\tan x-\sin x}{2}}{\frac{1}{2}x^3} = 2$

§2.7 函数的连续性

1.连续的概念

定义1. 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 任取此邻域内一点 $x \neq x_0$ 称差 $x-x_0=\Delta x$ 为 x_0 点的一个增量 $(x=x_0+\Delta x)$. 相应的函数差 $f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$, 称为 x_0 点对应的函数增量

注: Δx 可正可负, 但 $\Delta x \neq 0$, 而 Δy 可以等于0

定义2: 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点

注. 连续的"ε-δ"定义. $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

定义3: 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续

左、右连续统称为单侧连续 (有时也称连续 e.g $f(x)$, $x\in[a,b]$)

注: ① 当 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点左连续且右连续

② 当 $f(x)$ 在包含 x_0 点的单侧邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点单侧连续

定义4. 若 $f(x)$ 在点集 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 是 I 上的连续函数, 记为 $f(x)\in C_I$

若 $I=\langle a,b\rangle$ ($[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$), 则 $f(x)$ 的图形是一条连续的曲线

注: 函数图形断开: ① 自变量断开了 ② 函数不连续

2.间断点及其类型

定义5: 设 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义, 若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点

第I类间断点: 若 $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ 都存在, 但 $f(x_0-0) \overset{跳跃}{\neq} f(x_0+0)$; 或 $f(x_0-0) \overset{可去}{=} f(x_0+0) \neq f(x_0)$; 或 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 但 $f(x)$ 在 x_0 点无定义

第II类间断点: 不是第I类间断点的间断点, 即左、右极限至少有一个不存在的间断点

例1 ① $f(x)=\begin{cases} 2, & x\geq 1 \\ 1, & x<1 \end{cases} \quad f(1-0)=1 \quad f(1+0)=2$

$\therefore x=1$ 是第I类跳跃间断点

② $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ $\quad x=1$ 是第I类可去间断点

③ $f(x)=\frac{1}{x}$ $f(0+0)=+\infty$ $f(0-0)=-\infty$ ∴ $x=0$ 是第Ⅱ类无穷间断点.

④ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

$x\to0^+$ $x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $f(x_n')=1$ $x_n''=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$, $f(x_n'')=-1$

$x_n'''=\frac{1}{n\pi}$ $f(x_n''')=0$ ∴ $x=0$ 是第Ⅱ类震荡间断点

定义5′. 若 $f(x)$ 在点 x_0 点内的单侧邻域内有定义, 而 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。此时, 若 $f(x)$ 在 x_0 点的单侧极限存在, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第Ⅰ类间断点, 否则, 称 x_0 是 $f(x)$ 的第Ⅱ类间断点

例: ① $y=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$ $f(0+0)=-\infty$ ∴ $x=0$ 是第Ⅱ类无穷间断点.

② $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(1,3]\\ 2, & x=1\end{cases}$ $f(1+0)=1\neq f(1)$ ∴ $x=1$ 是第Ⅰ类间断点.

e.g. $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$, $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, 既不连续又不间断

3. 连续函数的性质

极限的四则复合运算 → <1> 连续函数的四则运算与复合仍是连续函数

<2> 连续函数的反函数仍是连续函数

<3> 初等函数在其有定义的区间上连续

例1. $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & |x|\le1\\ e^{\frac{1}{x+1}}, & |x|>1\end{cases}$ 连续性, 间断点分类

解 ∵ $f(x)$ 是 $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$ 上的初等函数

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续

$f(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1^-}e^{\frac{1}{x+1}}=0$ $f(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1^+}(x^3+1)=0$ $\lim\limits_{x\to-1}=0=f(-1)$ ∴ $x=-1$ 点连续

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}x^3+1=2$ $f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x+1}}=e^{\frac{1}{2}}$ ∴ $x=1$ 是第Ⅰ类跳跃间断点

综上, $f(x)$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续

例2. 设 $f(x)$ 对任意实数 x_1, x_2 成立 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 证明 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$

证明: 令 $x_1=x_2=0$ $f(0+0)=f(0)f(0)$ ⇒ $f(0)=0$ 或 1

(1) 当 $f(0)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+0)=f(x)f(0)=0$ ∴ $f(x)=0$

(2) 当 $f(0)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0)f(\Delta x)-f(x_0)]=f(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(\Delta x)-1]$

∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续 ∴ $\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(0+\Delta x)-f(0)]=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(\Delta x)-1]=0$

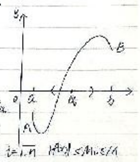
从而 $\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$ ∴ $f(x)$ 在 x_0 点连续

由 x_0 的任意性可知, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

4. 闭区间上连续函数的四个原理

定理1. 若 $f(x)\in C[a,b]$ 则 $f(x)$ 必有界

正面证明: 有限覆盖定理



证 $\exists M>0$, $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)|\le M$

∵ $f(x)$ 在 x_0 点连续, 取定 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\forall x_0\in[a,b]$, $\exists\delta_{x_0}$

$M_{x_0}=\frac{1}{2}+|f(x_0)|$ 有 $|f(x)|\le M_{x_0}$ $x\in U(x_0,\delta_{x_0})$

$\max\{M_{x_i}\}=M$ $\forall x\in[a,b]\subseteq\bigcup U(x_i,\delta_{x_i})$ $i=1\ldots n$ $|f(x)|\le M_i\le M$

反面证法: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界

将 $[a,b]$ 二等分, $[a,b]=[a,\frac{a+b}{2}]\cup[\frac{a+b}{2},b]$, 则 $f(x)$ 至少在其中一个区间上无界, 记为 $[a_1,b_1]$, 即 $f(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上无界, 再将 $[a_1,b_1]$ 二等分, $[a_1,b_1]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]\cup[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ $f(x)$ 至少在其中一个区间上无界, 记为 $[a_2,b_2]$ …如此下去, 得到一列闭区间 $[a_n,b_n]$ $n=1,2,3\cdots$ 且 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ 函数到 $f(x)$ 于 数列 $\{a_n\}$

且 $a\le a_n<b_n\le b$ ∴ 由单调有界准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 都存在

$\lim(b_n-a_n)=\lim\frac{b-a}{2^n}=0$ ∴ $\lim a_n=\lim b_n=\xi\in[a,b]$ ∴ $f(x)$ 在 ξ 点连续

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\exists\delta>0$, 当 $|x-\xi|<\delta$, $|f(x)-f(\xi)|<\frac{1}{2}$ ⇒ $|f(x)|\le|f(\xi)|+\frac{1}{2}$

∵ $\lim a_n=\xi$, 对上述 $\delta>0$, $\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时 有 $|a_n-\xi|<\delta$ ⇒ $\xi-\delta<a_n<\xi$

$\lim b_n=\xi$, $\exists N_2$, 当 $n>N_2$ 时 有 $|b_n-\xi|<\delta$ ⇒ $\xi<b_n<\xi+\delta$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时 有 $\xi-\delta<a_n<b_n<\xi+\delta$ ⇒

$\forall x\in[a_n,b_n]\subseteq U(\xi,\delta)$ $|f(x)|\le|f(\xi)|+\frac{1}{2}$ ⇒ $f(x)$ 在 $[a_n,b_n]$ 上有界 $(n>N)$

这与 $f(x)$ 在 $[a_n, b_n]$ 上有界矛盾 ∴假设不成立 ∴ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

注：函数有界 ⇏ 有最值 e.g. $g(x)=x,\ x\in(0,1)$ $|g(x)|<2$

定理2. 若 $f(x)\in C[a,b]$ 则 $f(x)$ 有最大值和最小值（最值原理）

最小值自己证明

证：用反证法，由Th1. $f(x)$ 有界 ⇒ $f(x)$ 有上确界 $M=\sup f(x),\ x\in[a,b]$

即 $f(x)\le M$，若 $f(x)<M$，$M-f(x)>0$ $\forall x\in[a,b]$

令 $g(x)=\frac{1}{M-f(x)}\in C[a,b]$，$g(x)$ 有界 ⇒ $g(x)$ 有上确界 $K>0$，$g(x)<K$

⇒ $\frac{1}{M-f(x)}<K$ ⇒ $\frac{1}{K}<M-f(x)$ ⇒ $f(x)<M-\frac{1}{K}$ 这与 M 是 $f(x)$ 的上确界矛盾

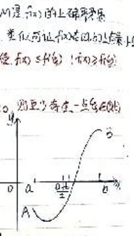
∴ $\exists x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)=M$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值，类似可证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值

定义1. 设 $f(x)$ 在点集 I 上有界，若 $\forall x\in I$，$\exists\xi\in I$，使 $f(x)\le f(\xi)$（$f(x)\ge f(\xi)$）

则称 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的最大(小)值

定理3.（零点原理）设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$

使 $f(\xi)=0$



证：不妨设 $f(a)<0$，$f(b)>0$，取 $[a,b]$ 的中点 $\frac{a+b}{2}$

若 $f(\frac{a+b}{2})=0$ 则 $\xi=\frac{a+b}{2}$；若 $f(\frac{a+b}{2})\ne0$

(1) 若 $f(\frac{a+b}{2})>0$，令 $[a_1,b_1]=[a,\frac{a+b}{2}]$

$f(\frac{a+b}{2})<0$，令 $[a_1,b_1]=[\frac{a+b}{2},b]$

取 $[a_1,b_1]$ 的中点 $\frac{a_1+b_1}{2}$，若 $f(\frac{a_1+b_1}{2})=0$ 则 $\xi=\frac{a_1+b_1}{2}$ $f(a_1)<0$ $f(b_1)>0$

若 $f(\frac{a_1+b_1}{2})\ne0$，重复步骤(1) 得到区间 $[a_2,b_2]$ 且 $f(a_2)<0$ $f(b_2)>0$

如此下去，得一列闭区间 $[a_n,b_n]$ $(n=1,2,3\cdots)$ 满足：

① $f(a_n)<0$ $f(b_n)>0$ ② $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ ③ $\{a_n\}\uparrow$ $\{b_n\}\downarrow$

④ $[a,b]\supseteq[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots$

$\lim a_n$ 和 $\lim b_n$ 都 $\exists$ $\lim(b_n-a_n)=\lim\frac{b-a}{2^n}=0$ ∴ $\lim a_n=\lim b_n=\xi\in[a,b]$

$a\le a_n<b_n\le b$ ∵ $f(x)$ 在 ξ 处连续 $\lim f(a_n)=\lim f(b_n)=f(\xi)$

又 $\lim f(a_n)\le0$ $\lim f(b_n)\ge0$ ∴ $f(\xi)=0$

定理4.（介值原理）设 $f(x)\in C\langle a,b\rangle$，$x_1,x_2\in\langle a,b\rangle$ 满足：$f(x_1)<\mu<f(x_2)$

则至少 $\exists$ 一点 $\xi\in\langle a,b\rangle$，使 $f(\xi)=\mu$

证：令 $g(x)=f(x)-\mu$ 则 $g(x)\in C[x_1,x_2]$ 不妨设 $x_1<x_2$ $g(x_1)g(x_2)<0$ 由零点原理

将开区间转闭区间的方法 ① 缩小区间 ② 补充定义

$\exists\xi\in[x_1,x_2]\subseteq\langle a,b\rangle$，使 $g(\xi)=0$ 即 $f(\xi)-\mu=0$ ∴ $f(\xi)=\mu$

例1. 设 $f(x)\in C(a,b)$ 且 $f(a+0)=f(b-0)=A$，又存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)\ge A$ 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值

证明：令 $g(x)=\begin{cases}A, & x=a,b\\ f(x), & x\in(a,b)\end{cases}$ 则 $g(x)\in C[a,b]$ 由最值原理

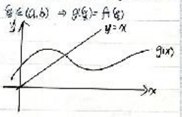
值

$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 $M=g(\xi)$ $\xi\in[a,b]$

① 若 $M=g(\xi)>f(c)\ge A=g(a)=g(b)$ ⇒ $\xi\ne a,b$ $\xi\in(a,b)$ ⇒ $g(\xi)=f(\xi)$

∴ $f(x)$ 在 ξ 点有最大值 M

② $M=f(c)$，$f(x)$ 在 c 点取最大值 M



迭代法

$F(x)=0$ 解方程 ⇒ $g(x)=x$

$\forall$ 取 $x_0\in\mathbb{R}$ 若 $g(x_0)=x_0$ 得解 若 $g(x_0)\ne x_0$ 令 $x_1=g(x_0)$ 若 $g(x_1)=x_1$ 得解

若 $g(x_1)\ne x_1$ 令 $x_2=g(x_1)$

例2. 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)>a$，$f(b)<b$，则必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\xi$

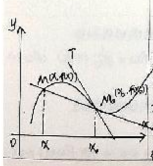
（不动点原理）

证明：令 $g(x)=f(x)-x$ 则 $g(a)=f(a)-a>0$ $g(b)=f(b)-b<0$ ∴ $g(a)g(b)<0$

$g(x)\in C[a,b]$ 由零点原理 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $g(\xi)=0$ 即 $f(\xi)-\xi=0$ ∴ $f(\xi)=\xi$

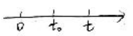
第三章 导数与微分

1.实际问题



问题1：曲线的切线（斜率）问题

如图所示，设 $y=f(x)$ 为一曲线，$M_0(x_0,f(x_0))$ 为曲线上一点，过 M_0 点作曲线任意一条割线 MM_0，$M(x,f(x))$，割线斜率 $k(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则规定此极限为 $y=f(x)$ 在 M_0 点的切线斜率



问题2：变速直线运动的速度问题

$S=S(t)$ $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{1}{2}g(t+t_0)$

导数定义

定义1：设 $y=f(x)$ 在 x_0 点的邻域内有定义，给 x_0 一个增量 Δx，相应地有一个函数增量 $\Delta y=f(x+x_0)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导，称此极限为 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数(微商)

记为 $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$

定义2：若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称之为 $f(x)$ 在 x_0 点的右导数，记为 $y'_+|_{x=x_0}=f'_+(x_0)$；若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称之为 $f(x)$ 在 x_0 点的左导数，记为 $y'_-|_{x=x_0}=f'_-(x_0)$，左、右导数统称为单侧导数

易见：当 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

当 $f(x)$ 在 x_0 的单侧邻域有定义，$f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点的单侧导数存在

比如 $f(x)$，$x\in[a,b]$，此时 $f(x)$ 在 a 点可导，指的是 $f'(a)=f'_+(a)$

例1：若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+x^2)-f(x)}{x^2}$ 存在，此极限值 $=f'(x)$ (×)

若 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]$ 存在，此极限值 $=f'(x_0)$ (×)

定义3：设 $f(x)$ 在点集 I 上每一点都可导，则其导数又构成 I 上的一个新的函数，称之为 $f(x)$ 在 I 上的导(函)数，记为 $y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$，若 $I=[a,b]$，则 $f'(a)=f'_+(a)$，$f'(b)=f'_-(b)$

3.导数的意义

(1) $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 点处的切线斜率

切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$　法线方程 $y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ $(f'(x_0)\neq 0)$

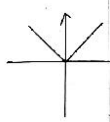
注：若 $f'(x_0)=0$，切线 $y=f(x_0)$，法线 $x=x_0$

(2) $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)$ 是变速直线运动 $y=f(x)$ 在 x_0 时刻的瞬时速度

4.与连续的关系　　可导 $\Rightarrow$ 连续，反之不成立

若 $f'(x_0)\exists$，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0\Rightarrow\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$

$\therefore\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续



反例 $y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ x, & x<0\end{cases}$　$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & f'_+(0)\\ -1, & f'_-(0)\end{cases}$ $\therefore f'(0)$ 不 $\exists$

§3.2 导数基本公式和导数四则运算

1.导数公式

(1) $(C)'=0$　(2) $(x)'=1$　(3) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$　(4) $(a^x)'=a^x\ln a$

(5) $(e^x)'=e^x$　(6) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$　(7) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$　(8) $(\sin x)'=\cos x$

(9) $(\cos x)'=-\sin x$　(10) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$　(11) $(\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

(12) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(13) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$　(15) $(\text{arccot}\, x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

证：(3) $(x^\alpha)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=x^\alpha\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha-1}{\Delta x}=x^\alpha\lim\limits_{\Delta x\to 0}=\frac{\alpha\cdot\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1}$

(4) $(a^x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x\ln a}-1}{\Delta x}$

$=a^x\lim\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$

(12) $(\arcsin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x}{\Delta x}$

令 $y=\arcsin x$，$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，$\Delta y=\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x=\arcsin(x+\Delta x)-y$　$x+\Delta x=\sin(y+\Delta y)\Rightarrow\Delta x=\sin(y+\Delta y)-\sin y$

$(\arcsin x)'=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\sin(y+\Delta y)-\sin y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{\Delta y}}=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}$

$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.导数的四则运算法则

定理：设 $f(x)$，$g(x)$ 可导，则 (1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

(2) $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　(3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$　$(g(x)\neq 0)$

证：(2) $[f(x)g(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

$=g(x)f'(x)+f(x)g'(x)$

(14) $[kf(x)]' = kf'(x)$ (15) $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

(16) $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n'$

例1: 设 $y = x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$, 求 $y'|_{x=0}$ $100!$

§3.3 复合函数求导法及其它

1.复合函数求导公式

定理. 设 $y = f(u)$ 可导, $u = g(x)$ 可导, 且 $f(g(x))$ 在 x 的邻域内有定义 则 $y = f(g(x))$ 可导, 且 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 即 $[f(g(x))]' = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

注 ① $y = u^{\frac{3}{2}}$, $u = g(x) = \sin x - 1$ $y = f(g(x)) = (\sin x - 1)^{\frac{3}{2}}$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$

② $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim \frac{\Delta u}{\Delta x}$ (X)

证明: $y = f(u)$ 可导, $f'(u) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha$, $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha = 0$

$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha \cdot \Delta u$ (*) $(\Delta u \neq 0)$ $\begin{cases} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta u} - f'(u), & (\Delta u \neq 0) \\ \text{补充 } \alpha = 0, & \Delta u = 0 \end{cases}$

规定: 当 $\Delta u = 0$ 时令 $\alpha = 0$, 此时(*)的左边

$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = 0$ (*)的右边 $= 0$ ∴ 当 $\Delta u = 0$ 时, (*)式也成立

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x)$

注 $\{f\{g[\varphi(x)]\}\}' = f'\{g[\varphi(x)]\} g'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$

例1: $y = e^{\sin \ln^2 x}$, 求 $y' = e^{\sin \ln^2 x} \cos \ln^2 x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$

例2 设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, 求 $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

公式 $[\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

例3: $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x) = \arcsin x^2$, 求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{3}{2}\pi$

2.反函数求导公式

设 $y = f(x)$ 与 $x = g(y)$ 互为反函数

$(y)_y' = [f(x)]_y' \Rightarrow 1 = f'(x)\frac{dx}{dy} = f'(x)g'(y)$

从而有 当 $y = f(x)$ 可导且 $f'(x) \neq 0$, 有 $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ — 互为倒数关系

例4: 求 $(\arctan x)'$

3.参数函数求导公式

设 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$

方法: 对 $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$ 的两端同时关于 x 求导

$(x)_x' = (\varphi(t))_x' \Rightarrow \begin{cases} 1 = \varphi'(t)\frac{dt}{dx} \\ \frac{dy}{dx} = \psi'(t)\frac{dt}{dx} \end{cases}$ 消去 $\frac{dt}{dx}$ 得公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, 这里

$(y)_x' = (\psi(t))_x'$ $\Rightarrow$ 要求 $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 都存在且 $\varphi'(t) \neq 0$

$(y)_x' = (\psi(t))_x' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \psi'(t)\frac{dt}{dx} = \psi'(t)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

公式: $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

例5: 设 $x = \ln(1+t^2)$, $y = t^3 + 3t + 1$, 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{3(t^2+1)^2}{2t}$

4.隐函数求导方法

设 $x^2 + xy + y^3 = \sin(xy^2)$ 确定了一个隐函数, $y = y(x)$, 求 y'

方法: 将 $y = y(x)$ 代入方程,得到恒等式: $x^2 + xy(x) + y^3(x) = \sin(xy^2(x))$

再对此等式左、右两端同时关于 x 求导

$2x + y(x) + xy'(x) + 3y^2(x)y'(x) = \cos(xy^2(x))(y^2(x) + x2 \cdot y(x)y'(x))$

$\therefore y'(x) = \frac{y^2(x)\cos(xy^2(x)) - 2x - y(x)}{x + 3y^2(x) - 2xy(x)\cos(xy^2(x))}$

$\therefore y_x' = \frac{y^2\cos(xy^2) - 2x - y}{x + 3y^2 - 2xy\cos(xy^2)}$ — 复合函数

例6: 设 $xe^{\sin y} = e^y$ 确定了一个隐函数, $y = y(x)$, 求 $y' = \frac{1}{x(1 - \cos y)}$

5.幂指函数求导公式

$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x)\ln f(x)})' = f(x)^{g(x)}(g(x)\ln f(x))'$

例7: $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$

注: $[f(x)]' = f(x)(\ln f(x))'$ — 用此公式, 当 $f(x)$ 中因子多时, 含根号时, 乘除变加减, 此公式中, $f(x) < 0$ 也没关系

例8: 设 $y = \sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x^3+1)(x^5+1)}{(x+1)(x^2+x+1)(x^4+1)}}$, 求 $y' = \frac{3x^6 - 5x^4 - 2x}{5(x^2-1)(x^5+1)}\sqrt[5]{\frac{x^5+1}{x^2-1}}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

§3.4 高阶导数

1.高阶导数

定义：设 $y=f(x)$ 在 I 上可导，且在 I 上的导函数 $y'=f'(x)$ 还可导，则称 $y'=f'(x)$ 的导函数为 $y=f(x)$ 的二阶导(函)数，记为 $y''=f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}=\frac{d^2y}{dx^2}$

若 $y''=f''(x)$ 还可导，则称其导函数为 $y=f(x)$ 的三阶导(函)数，记为 $y'''=f'''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x}$ …如此下去，可以定义 $y=f(x)$ 的 n 阶导函数，记为 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$，$n=1,2,3\cdots$，$y^{(0)}=y$，$y^{(1)}=y'$，$y^{(2)}=y''$

例1：设 $f(x)$，$g(x)$ 互为反函数，且 $f(x)$ 有二阶导，而 $f'(x)\neq 0$，求 $g''(x)$

解 设 $y=g(x)$　$x=f(y)$　$y'=g'(x)=\frac{1}{f'(y)}$

$y''_x=g''(x)=\frac{d}{dx}(g'(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(y)}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(y)}\right)\frac{dy}{dx}=-\frac{f''(y)}{[f'(y)]^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}=-\frac{f''(y)}{[f'(y)]^3}$

$=-\frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}$　$y'''_x=\frac{d}{dx}(y'')=\frac{d}{dy}(y'')\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{f''(y)}{[f'(y)]^3}\right)'_y\frac{1}{f'(y)}$

后作业

例2：设 $xe^{\sin y}=e^y$ 确定了一个隐函数 $y=y(x)$，求 y''

$y'=\frac{1}{x(1-\cos y)}$　$y''=-\frac{1-\cos y+x\sin y\,y'}{x^2(1-\cos y)^2}=-\frac{1-\cos y+\frac{\sin y}{1-\cos y}}{x^2(1-\cos y)^2}$

$=-\frac{(1-\cos y)^2+\sin y}{x^2(1-\cos y)^3}$

例3：设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解、$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(t^2-2t)'}{(\arctan t)'}=(2t-2)(t^2+1)$　$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=$

$(6t^2-4t+2)(t^2+1)$

例4. $(f[g(x)])''$

$(f[g(x)])''=(f'[g(x)]g'(x))'=f''[g(x)][g'(x)]^2+f'[g(x)]g''(x)$

2.高阶导数公式

用数学归纳法可证如下高阶导数公式：

(1) $[f(x)\pm g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$　(2) $[kf(x)]^{(n)}=kf^{(n)}(x)$

(3) $[f(x)g(x)]^{(n)}=f^{(n)}\cdot g+nf^{(n-1)}g'+\frac{n(n-1)}{2!}f^{(n-2)}g''+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}f^{(n-3)}g'''+\cdots$

$+C_n^r f^{(n-r)}\cdot g^{(r)}+\cdots+f\cdot g^{(n)}$ — 莱布尼茨公式

线性函数复合 — (4) $[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b)$

下面给出基本初等函数的高阶导数公式

(5) $(C)^{(n)}=0$ $(n=1,2,3\cdots)$　(11) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$

(6) $(x^{\alpha})^{n}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$　$(\sin ax)^n=a^n\sin(ax+\frac{n}{2}\pi)$

(7) $(\frac{1}{x})^n=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$　(12) $(\cos x)^n=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$

(8) $(a^x)^n=a^x(\ln a)^n$

(9) $(e^x)^n=e^x$

(10) $(\ln x)^n=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

例1：设 $y=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$，求 $y^{(n)}$ 用积化和差公式

解 $y=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\sin x=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin(-2x))$

$=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x$

$\therefore y^{(n)}=\frac{1}{4}\cdot 4^n\sin(4x+\frac{n}{2}\pi)-\frac{1}{4}\cdot 6^n\sin(6x+\frac{n}{2}\pi)+\frac{1}{4}\cdot 2^n\sin(2x+\frac{n}{2}\pi)$

例2：设 $y=(1+x^2)e^x$，求 $y^{(n)}$

解 $y^{(n)}=(e^x)^n(1+x^2)+(e^x)^{n-1}\cdot n(1+x^2)'+(e^x)^{n-2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot(1+x^2)''$

$=(1+x^2)e^x+2nxe^x+n(n-1)e^x$

例3：设 $y=e^x\cos\sqrt{3}x$，求 $y^{(n)}$　找规律　用 $a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi)$

$y'=2e^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{\pi}{3})$　猜 $y^{(n)}=2^ne^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{n}{3}\pi)$ 用数归法证

§3.5 微分

1.微分概念

定义1：设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，给 x_0 点一个增量 Δx，相应的函数增量 Δy 满足：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=k\Delta x+o(\Delta x)$（k是一个常数），则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微(分)，记为 $dy|_{x=x_0}=k\Delta x$

注：$dy|_{x=x_0}=k\Delta x$ 是关于 Δx 的一个线性函数（k是和 $f(x)$ 和 x_0 有关 $k=f'(x_0)$）

当 $\Delta x \to 0$，有 $dy \to 0$ 从而 $\Delta y = dy + o(\Delta x) \to 0$（可微 ⇒ 连续）

当 $k \neq 0$ $dy = k\Delta x \neq 0$，$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{k\Delta x} \to 1$ $(\Delta x \to 0)$

⇒ $\Delta y \sim dy$ ∴ dy 是 Δy 的线性主部

定义2：设 $y=f(x)$ 在区间 I 上的每一点都可微，则其微分又构成 I 上一个新的函数，称之为 $y=f(x)$ 在 I 上的微分（函数），记为 $dy = k(x)\Delta x$（$k(x)$ 是关于 x 的函数）

直线 $y=ax+b$　$dy = a\Delta x$　（$\Delta y = a\Delta x + 0$，⇒ $a\Delta x = dy$）

特别地，取直线 $y=x$　$dx = \Delta x$

所以 $dy = k(x)\Delta x = k(x)dx$

若 $y=f(x)$ 可微 $\Delta y = dy + o(\Delta x) = k(x)\Delta x + o(\Delta x)$，⇒ $k(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$

⇒ $k(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$，∴ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ∃，从而 $f'(x)$ 存在 且 $f'(x) = k(x)$，∴

可微 ⇒ 可导 且 $f'(x) = k(x)$

反之，若 $f'(x)$ 存在，则 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$，从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$

⇒ $\Delta y = \Delta x f'(x) + \alpha\Delta x = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ ∴ $f(x)$ 在 x 点处可微且 $dy = f'(x)\Delta x$

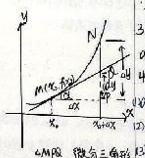
2. 可微与可导的关系

定理 $y=f(x)$ 可导 ⇔ $y=f(x)$ 可微，且 $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$

注：$dy = f'(x)dx$ — 乘法运算

∵ $dx = \Delta x \neq 0$　$f'(x) = \frac{dy}{dx}$ — 除法运算

3. 微分的几何意义



ΔMPQ 微分三角形

$\Delta y = dy + o(\Delta x)$

$NQ = o(\Delta x)$

$PQ = \Delta x \tan\alpha = \Delta x k$

$= f'(x)\Delta x$

$= f'(x)dx$

$= dy$

$dy = f'(x)dx$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 x 处的切线增量

4. 微分运算

(1) $d[f(x) \pm g(x)] = [f(x) \pm g(x)]'dx = [f'(x) \pm g'(x)]dx = df(x) \pm dg(x)$

(2) $d[f(x)g(x)] = (fg)'dx = (f'g + fg')dx = fdg + gdf$

(3) $d[\frac{f(x)}{g(x)}] = (\frac{f}{g})'dx = \frac{f'g - fg'}{g^2}dx = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{[g(x)]^2}$

5. 微分形式的不变性

设 $y=f(u)$ 可微，(1) 若 u 是自变量，则 $dy = f'(u)du$

(2) 若 $u=g(x)$ 可微，则 $f(g(x))$ 可微 且 $df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)dx = f'(g(x))dg(x) = f'(u)du$

注：当 u 是自变量，$\Delta u = du$，而当 u 是中间变量时，一般 $\Delta u \neq du$，$\Delta u = du + o(\Delta x)$ 当 u 是关于

例1：设 $y = e^{\sin\ln\arctan x}$，求 y'

解 $dy = e^{\sin\ln\arctan x} d\sin\ln\arctan x = e^{\sin\ln\arctan x} \cos\ln\arctan x \, d\ln\arctan x$
$= e^{\sin\ln\arctan x} \cos\ln\arctan x \frac{1}{\arctan x} d\arctan x = e^{\sin\ln\arctan x} \cos\ln\arctan x \frac{1}{\arctan x} \frac{1}{1+x^2} dx$

例2. 设 $y = e^{\sin x}$，求 $\frac{dy}{d\cos x} = -\frac{e^{\sin x}}{\tan x}$

例3：$d\sin x^2 = (\quad) d\sqrt{x}$　$4x\sqrt{x}\cos x^2$

例4. 设 $f(x)$ 对任何实数 x_1，x_2 满足：$f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2)$ 且 $f'(0)=1$，证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导

证：令 $x_1 = x_2 = 0$，$f(0) = f(0)f(0)$ ⇒ $f(0)=0$ 或 1

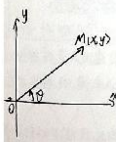
(1) 当 $f(0)=0$，$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$，∴ $f'(x) = 0$（舍去）

(2) 当 $f(0)=1$，$\forall x \in \mathbb{R}$，$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x}$
$= f(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f(x)f'(0) = f(x)$

补充内容：

1. 极坐标

在直角坐标平面上建立一个新的坐标系，原点称为极点，正向 x 轴称为极轴，也叫极坐标轴，点 M 的极坐标为 (r, θ)，$r = |OM|$，θ 是极轴绕极点逆时针旋转到与 OM 重合时转过的角度。r - 极径　θ - 极角



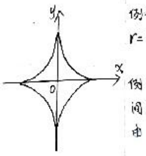
2. 极坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & r \geq 0 \\ y = r\sin\theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

3. 直角坐标曲线与极坐标曲线转换

(1) $F(x,y)=0$ 是曲线直角坐标方程 $\Rightarrow F(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$

(2) $r=f(\theta)$ 是曲线的极坐标方程 $\Rightarrow \begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$



例如：$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow r=|a|$

$r=1-\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} x=(1-\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ $\quad x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}-x$

例1：求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 上光滑点处切线介于两坐标轴间的长度。a

由 $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

令 $X=x^{\frac{1}{3}}$ $\quad Y=y^{\frac{1}{3}}$ 则 $X^2+Y^2=(a^{\frac{1}{3}})^2$

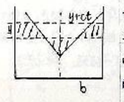
$\therefore \begin{cases} X=a^{\frac{1}{3}}\cos\theta \\ Y=a^{\frac{1}{3}}\sin\theta \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cos\theta \\ y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\sin\theta \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

例2：求三叶玫瑰线 $r=a\sin3\theta$，在 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 对应点处的切线方程

解：曲线在 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 这一点处的直角坐标为 $\begin{cases} x=a\sin3\theta\cos\theta\big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ y=a\sin3\theta\sin\theta\big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}a \end{cases}$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\left(\frac{a\sin3\theta\sin\theta}{a\sin3\theta\cos\theta}\right)'=\frac{3\cos3\theta\sin\theta+\sin3\theta\cos\theta}{3\cos3\theta\cos\theta-\sin3\theta\sin\theta}$

$\therefore y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$ $\quad\therefore$ 所求切线方程为 $y-\frac{1}{2}a=-\sqrt{3}(x-\frac{\sqrt{3}}{2}a)$ 即 $y=-\sqrt{3}x+2a$



例3：设有一个顶角为90°的倒圆锥体，以速度 c 匀速沉入盛有部分水的半径为 b 的圆柱形容器中，求圆锥体被水浸没 a 米深时，圆柱形容器水面上升的速度。

解：设 t 表示时间，$t=0$ 时圆锥体顶点恰好在水平面上，经过 t 时刻，水平面上升的高度为 y 米，则

$\frac{1}{3}\pi(y+ct)^3=\pi b^2y \Rightarrow \pi(y+ct)^2(y'+c)=\pi b^2y'$

令 $y+ct=a$ 代入得 $y'|_{y+ct=a}=\frac{a^2c}{b^2-a^2}$

例4：若 $f'(x)$ 存在，则正确的是（ ）ABC

连续性也会有变 (C)

(A) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数

(B) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数

(C) 若 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数 $f(x+T)=f(x)$

(D) 若 $f(x)$ 是有界函数，则 $f'(x)$ 也是有界函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ 无界

例5：设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且 $f(0)\ne0$，$f'(0)\ne0$，又 $af(x)+bf(2x)-f(0)=o(x)$，求 a，b。

解：$\lim\limits_{x\to0}(af(x)+bf(2x)-f(0))=0 \Rightarrow af(0)+bf(0)-f(0)=0 \Rightarrow a+b=1$

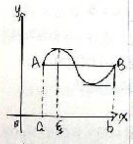
$\lim\limits_{x\to0}\frac{af(x)+bf(2x)-f(0)}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\left[a\frac{f(x)-f(0)}{x}+2b\frac{f(2x)-f(0)}{2x}+\frac{af(0)+bf(0)-f(0)}{x}\right]$

$=af'(0)+2bf'(0)=0 \Rightarrow a+2b=0$

$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

第四章 微分中值定理

§4.1 中值定理

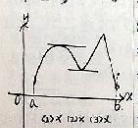


1. 罗尔定理

定理1：设 $f(x)$ 满足：(1) $f(x)\in C[a,b]$，(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，(3) $f(a)=f(b)$

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$ 或方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内必有根

注：①②③是充分条件，不是必要条件



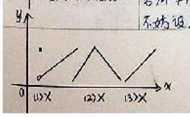
定义：设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，若 $f(x)\ge f(x_0)$ ($f(x)\le f(x_0)$) 则称 $f(x_0)$ 是极小(大)值，称 x_0 是极小值(大值)点。

证明：$\because f(x)\in C[a,b]$ $\quad\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m

若 $M=m$ 则 $f(x)=M$ 从而 $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$

若 $M\ne m$，$\because f(a)=f(b)$，$\therefore$ 最大值和最小值至少有一个在 (a,b) 内取得

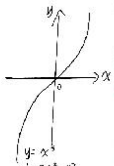
不妨设 $M\ne f(a)$ 则 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $M=f(\xi)$ 又由(2)知 $f'(\xi)$ 存在



$f'_+(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi^+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ (极限的保号性)

$f'_-(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi^-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$

又 $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi) \Rightarrow f'(\xi) = 0$



$y = x^3$

$y' = 3x^2 \geq 0$

2.费马引理

定理：若 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极值且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$

费马大定理：$x^n + y^n = z^n$ $n>2$ 时该方程无正整数解

称导数为0的点为

极值嫌疑点、驻点

涉及方程有根的方法：

零点原理

罗尔定理

费马引理

例1：设 $C_1, C_2, \cdots C_n$ 为任意 n 个实数，证明三角方程 $C_1\cos x + C_2\cos 2x + \cdots + C_n\cos nx = 0$ 在 $(0,\pi)$ 内必有根

证明：令 $f(x) = C_1\cos x + C_2\cos 2x + \cdots + C_n\cos nx$，$x \in (0,\pi)$

$F(x) = C_1\sin x + \frac{C_2}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{C_n}{n}\sin nx$，$x \in [0,\pi]$ 则 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可导

$F(0) = F(\pi) = 0$ 由罗尔定理知，方程 $f(x) = C_1\cos x + C_2\cos 2x + \cdots + C_n\cos nx = 0$ 在 $(0,\pi)$ 内必有根

例2：设 $f(x)$ $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$g''(x) \neq 0$，$f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$，证明至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

证明：令 $F(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$F(a) = F(b) = 0$，由罗尔定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $F'(\xi) = 0$ 即 $f(\xi)g''(\xi) - f''(\xi)g(\xi) = 0$

反复使用3次罗尔定理

$\because g''(x) \neq 0$ $\therefore g''(\xi) \neq 0$ $\therefore f(\xi) = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)} g(\xi)$ 下证 $g(\xi) \neq 0$

极易漏证 $g(\xi) \neq 0$ ☆ 用反证法 若 $g(\xi) = 0$ 则

$g(x)$ 在 $[a,\xi]$ 和 $[\xi,b]$ 上分别满足罗尔定理，所以 $\exists \xi_1 \in (a,\xi)$，$\xi_2 \in (\xi,b)$ 使 $g'(\xi_1) = 0$，$g'(\xi_2) = 0$，又 $\because g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理 $\therefore \exists \xi_3 \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (a,b)$ 使 $g''(\xi_3) = 0$ 这与 $g''(x) \neq 0$，$x \in (a,b)$ 矛盾 $\therefore g(\xi) \neq 0$ $\therefore \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

构造辅助函数时

例2加一项减一项

例3乘某一因子

例3：设 $f(x) \in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导且 $f(x) \neq 0$，$f(a) = f(b) = 0$

证明：$\exists$ 一点 $\xi \in (a,b)$，使 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = 1$

证明：令 $F(x) = e^{-x}f(x)$，$\because F(a) = F(b) = 0$ $\therefore$ 由罗尔定理得 $\exists \xi \in (a,b)$，$F'(\xi) = 0$

即 $e^{-\xi}f'(\xi) - e^{-\xi}f(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = f(\xi) \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = 1$

例4：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a) = f(b) = 0$，令 $F(x) = (x-a)f(x)$

找到满足(3)的点

证明：$\exists \xi \in (a,b)$ 使 $F''(\xi) = 0$

证明：$F'(x) = f(x) + (x-a)f'(x)$ $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导 $F'(a) = 0$ $\because F(a) = F(b) = 0$

$\because F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理 $\therefore \exists c \in (a,b)$ 使 $F'(c) = 0$

又 $\because F'(x)$ 在 $[a,c]$ 上满足罗尔定理 $\therefore \exists \xi \in (a,c) \subseteq (a,b)$ 使 $F''(\xi) = 0$

费马引理使用 ☆

例5：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b) < 0$ 证明 $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = 0$

证明：不妨设 $f'_+(a) > 0$，$f'_-(b) < 0$

$0 < f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow \exists x_1 \in (a,b)$ 使得 $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(a)$

$\therefore f(a)$ 不是最大值

$0 > f'_-(b) = \lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \Rightarrow \exists x_2 \in (a,b)$ 使得 $\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b} < 0 \Rightarrow f(x_2) > f(b)$

$\therefore f(b)$ 不是最大值

又 $\because f(x) \in C[a,b]$ $\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 $M = f(\xi)$，$\xi \in (a,b)$

又 $\because f'(\xi)$ 存在，$f(\xi)$ 是极值 由费马引理有 $f'(\xi) = 0$

导数不连续零点原理也适用

注：闭区间上~~的导函数~~满足介值原理，无论其是否连续

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且 $f'(a) \neq f'(b)$，不妨设 $f'(a) < f'(b)$，则对 $f'(a) < u < f'(b)$，存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = u$

运用例5结论证

证：令 $F(x) = f(x) - ux$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$F'(a)F'(b) = (f'(a)-u)(f'(b)-u) <$

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$ 使 $F'(\xi) = 0$ 即 $f'(\xi) = u$

3.拉格朗日中值定理（微分中值、有限增量定理）

变分法创始人

优化，找最值

最佳函数、曲线

例6：设 $f(x)$ 满足：在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明：令 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k$，令 $F(x) = f(x) - kx$

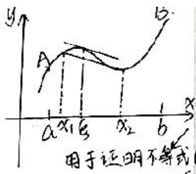
$F(a) = f(a) - a\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} = F(b)$ 由罗尔定理 $\exists \xi \in (a,b)$ 使

$F'(\xi) = 0$ 即 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

令 $x_0 = a$ $x_0 + \Delta x = b$ $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(\xi)$

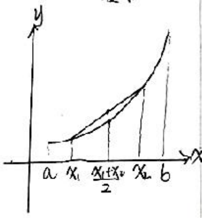
$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x = f'(\xi)dx$ $\Delta y = dy|_{x=x_0} + o(\Delta x)$

ξ 介于 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间



用于证明不等式

转换为$f'(\xi)$



拉格朗日中值定理的一般形式：

设$f(x)$在(a,b)内可导，$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi)$ $\xi \in (x_1,x_2) \subseteq (a,b)$

例1：证明：$\sin x < x$，$0<x<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\sin x - 0}{x-0} = \cos\xi < 1$，$0<\xi<x<\frac{\pi}{2}$ $\therefore \sin x < x$

例2：证明：$\frac{1}{1+n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

证明：$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{\ln(1+n)-\ln n}{1+n-n} = (\ln x)'|_{x=\xi} = \frac{1}{\xi}$ $n<\xi<n+1$

$\therefore \frac{1}{1+n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

例3：设$f(x)$在(a,b)内有二阶导数，且$f''(x)>0$，证明：$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ 有$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$

证：不妨设$x_1<x_2$，$[f(x_2)-f(\frac{x_1+x_2}{2})]-[f(\frac{x_1+x_2}{2})-f(x_1)]$

$= f'(\xi_2)\frac{x_2-x_1}{2} - f'(\xi_1)\frac{x_2-x_1}{2} = \frac{1}{2}(x_2-x_1)[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]$

$= \frac{1}{2}(x_2-x_1)f''(\xi_3)(\xi_2-\xi_1)$ $x_1<\xi_1<\frac{x_1+x_2}{2}$ $\frac{x_1+x_2}{2}<\xi_2<x_2$ $\xi_1<\xi_3<\xi_2$

>0

例4：设$f(x)$在(a,b)内可导且无界，证明$f'(x)$在(a,b)内也无界

分析：$|f'(\xi)| = \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| > M$

$\Rightarrow \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| > \frac{|f(x_2)|-|f(x_1)|}{b-a} > M$

证明：$\forall M>0$，取定$x_0 \in (a,b)$，$\because f(x)$在(a,b)内无界，$\therefore \exists x_1 \in (a,b)$使

$|f(x_1)| > |f(x_0)| + M(b-a)$ 则有$\frac{|f(x_1)|-|f(x_0)|}{b-a} > M$

$\therefore \left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right| > \frac{|f(x_1)|-|f(x_0)|}{b-a} > M$ $\therefore \exists \xi \in (a,b)$使$|f'(\xi)| = \left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right| > M$

即$f'(x)$在(a,b)内也无界

求证 $f'(x)$在(a,b)内有界 $\Rightarrow f(x)$在(a,b)内有界

证：设$f'(x)$在(a,b)内有界，即$\exists M>0$，$\forall x \in (a,b)$有$|f'(x)| \le M$

$\forall x \in (a,b)$，取定$x_0 \in (a,b)$

$|f(x)| = |f(x)-f(x_0)+f(x_0)| \le |f(x)-f(x_0)| + |f(x_0)|$

$= |f'(\xi)(x-x_0)| + |f(x_0)| \le M(b-a) + |f(x_0)|$ $\therefore f(x)$在(a,b)内有界

4.拉格朗日中值定理推论：

证明恒等式

推论1：$f'(x)=0$，$\forall x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow f(x)=C$，C为常数

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，$x_1 \ne x_2$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi) = 0$

理解为求导运算的逆运算

推论2：$f'(x)=g'(x)$ $\forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+C$，C为常数

证明：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

C是一个固定的常数

取定$x_0 \in (a,b)$

$f(x_0)-g(x_0)=C$

证：$(\sin^2 x+\cos^2 x)'=0 \Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x = C$ 令$x=0$ 代入得$C=1$

拉格朗日中值定理

推论3：$f'(x)>0(<0)$，$\forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$单增(单减)

例5：证明：$\arctan\frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(n+1) - \arctan n$

证明：$\varphi'(x) = (\arctan\frac{1}{x^2+x+1})' = \frac{1}{1+(x^2+x+1)^{-2}} \cdot (-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2})$

$= -\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}$

$\psi'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}$

$\therefore \varphi(x) = \psi(x) + C$ 令$x=0$ 则$C=\varphi(0)-\psi(0)=0$ $\therefore \varphi(x)=\psi(x)$

从而$\varphi(n)=\psi(n)$ 即$\arctan\frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(n+1) - \arctan n$

参数方程下的拉格朗日中值定理

证明洛必达法则

5.柯西中值定理

定理4.设$f(x)$，$g(x)$满足(1)在$[a,b]$上连续，(2)在(a,b)内可导 (3)$g'(x) \ne 0$ 则至少存在一点$\xi \in (a,b)$使$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

几何意义：拉格朗日中值定理的参数函数形式

证：令$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = k$，$F(x)=f(x)-kg(x)$

$F(a) = f(a) - g(a)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} = F(b)$

$\therefore$由罗尔定理，$\exists \xi \in (a,b)$ 使$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)-kg'(\xi)=0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

§4.2 洛比达法则

1.极限中常见的不定式（7种）

$f(x)$，$g(x)$趋和但不等和

(1) $f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$，则$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$为$\frac{0}{0}$型

(2) $f(x)\to\infty$，$g(x)\to\infty$，则$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$为$\frac{\infty}{\infty}$型

(3) $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$, 则 $\lim f(x)\cdot g(x)$ 为"$0\cdot\infty$"型

(4) $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同号, 则 $\lim(f(x)-g(x))$"$\infty-\infty$"型

(5) $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$, 则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为"1^∞"型

(6) $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$, 则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为"0^0"型

(7) $f(x)\to\infty$, $g(x)\to 0$, 则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为"∞^0"型

2.洛比达法则

定理. 设 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$, 且 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞, 则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞, 则称之为洛比达法则

证明(1)设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞.

补充定义: 令 $f(x_0)=g(x_0)=0$ $\therefore f(x)g(x)$ 都在 x_0 点连续

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\overset{\text{柯西}}{=}\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\text{ 或 }\infty$$

特殊(子极限) — 一般(极限)

注: 洛比达法则只能求有(极限), 不能求无(极限)

例. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2$　$I=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\to$ 极限不存在

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to 0}\frac{[f(\frac{1}{t})]'_t}{[g(\frac{1}{t})]'_t}=\lim_{t\to 0}\frac{(-\frac{1}{t^2})f'(\frac{1}{t})}{(-\frac{1}{t^2})g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(3) $\lim f(x)=\infty$, $\lim g(x)=\infty$

例1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$

例2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$ 令 $t=\frac{1}{x}$

例3. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2x)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-(\cos x-x\sin x)}{3x^2}=\frac{2}{3}$

例4. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))=\frac{1}{2}$

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}$ 令 $t=\frac{1}{x}$

注: "1^∞, 0^0, ∞^0" 利用换底公式 $a=e^{\ln a}$ 将其变成不定式 $e^{\frac{0}{0}}$ 或 $e^{\frac{\infty}{\infty}}$ 型

例5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{3^x+5^x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{3^x+5^x}{2}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3^x+5^x}(3^x\ln 3+5^x\ln 5)}$

$=e^{\ln\sqrt{15}}=\sqrt{15}$

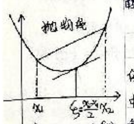
例6. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1$

例7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3\sqrt[3]{x^3+x}-4\sqrt[4]{x^4+2x}+5\sqrt[5]{x^5-x})$

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-3\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-4\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^3}}+5\sqrt[5]{1-\frac{1}{x^4}}}{\frac{1}{x}}$

$t=\frac{1}{x}$ $=\lim\limits_{t\to 0^+}(2-3\sqrt{1+t}-4\sqrt{1+2t}+5\sqrt{1-t})/t$

$=\lim\limits_{t\to 0^+}[-3\cdot\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}-2(1+2t)^{-\frac{1}{2}}2+\frac{5}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(-1)]=-8$

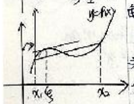


例8: 求抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的中值点 ξ

解. $f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$　ξ 介于 x_1,x_2 之间

$a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=(2a\xi+b)(x_1-x_2)$

$\Rightarrow a(x_1+x_2)+b=2a\xi+b\Rightarrow\xi=\frac{x_1+x_2}{2}$



一般曲线

$\frac{1}{2}=\lim\limits_{x_2\to x_1}\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}$

$\Delta x f'(x_0)+\alpha\Delta x=f(x+\Delta x)-f(x_0)$

注意运用导数定义 $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ 同阶/高阶无穷小

例9: 设 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上二阶可导, 且 $f''(0)\neq 0$, 由拉格朗日中值定理, $\exists\xi\in(0,x)$ 使 $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$, 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$

证明: $\lim\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}=f''(0)$

$\Rightarrow\frac{f'(\xi)-f'(0)}{x}=\frac{\xi}{x}f''(0)+\frac{\xi}{x}\alpha$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}f''(0)+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}\alpha=f''(0)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$

$\because f''(0)\neq 0$ $\therefore\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$

例10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2+bx+1})$ $\infty-\infty$ 提出无穷小因子, 转换形式 $a=25$ $b=-20$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\boxed{5-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{5-\sqrt{t^2+bt+a}}{t}$

例11: 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内可导, 则不正确的是(　)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ $\exists$, 则 $f'(x)$ 在 x_0 点连续

(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不 $\exists$, 则 x_0 是 $f'(x)$ 的第一类间断点

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不 $\exists$, 则 x_0 是 $f'(x)$ 的第二类间断点

(D) 若∃此邻域内两点 x_1, x_2 使 $f(x_1)f(x_2)<0$，则∃此邻域内一点 ξ 使 $f(\xi)=0$

(A) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xlongequal{洛必达} \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 此结论

(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不∃，x_0 是 $f'(x)$ 的间断点，若 x_0 是第一类间断点

则 $f'(x_0-0)$ 和 $f'(x_0+0)$ 都∃

左导数 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xlongequal{洛必达} \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)=f'(x_0-0)$

右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xlongequal{洛必达} \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=f'(x_0+0)$

$\therefore f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0) \Rightarrow f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$

§4.3 泰勒公式

1. 多项式 $H_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$

$a_0=H(0)$ $a_1=H'(0)$ $H''(0)=2a_2$ $\cdots$ $H^{(n)}(0)=n!a_n$

$\therefore H_n(x)=H_n(0)+H_n'(0)x+\frac{H_n''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{H^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$f(x)\approx P_n(x)$ 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点有 n 阶导

$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有 n 阶导 令 $t=x-x_0$

$f(x)=f(t+x_0)\xlongequal{\triangle} g(t)$ 则 $g(t)$ 在 $t=0$ 点有 n 阶导，$f'(x_0)=g'(0)$

$f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(0)$ $g(0)+g'(0)t+\frac{g''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n$

$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$n=1$ 时

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R_1(x)$

$\Rightarrow \Delta y=dy|_{x=x_0}+o(\Delta x)$

$R_1(x)=o(x-x_0)$

$n=2$ 时

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+R_2(x)$

$\Rightarrow R_2(x)=o((x-x_0)^2)$

$\Rightarrow R_n(x)=o((x-x_0)^n)$

2. 泰勒公式

设 $f(x)$ 在 x_0 点有 n 阶导，称多项式

$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

为 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶泰勒多项式

称 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点处的泰勒公式余项

此时 $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$ $R_n^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)$ $(k>n)$

定理1：设 $f(x)$ 在 x_0 点有 n 阶导数，则 $f(x)$ 在 x_0 点处的 n 阶泰勒公式余项

$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$，即

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

称之为带皮亚诺余项的泰勒公式

证明：$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\xlongequal{(n-1)次洛}\cdots=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdots2(x-x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}$

$=\frac{1}{n!}R_n^{(n)}(x_0)=0$

拉格朗日中值定理的高阶形式

定理2：(泰勒中值定理) 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有 $(n+1)$ 阶导数，则 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶泰勒公式余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x, x_0 之间，此时

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

称之为带拉格朗日余项的泰勒公式

证明：令 $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$

$\frac{R_n(x)}{g(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\xlongequal{柯西}\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{g'(\xi_1)-g'(x_0)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}\xlongequal{n次柯西}\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(\xi_n)-g^{(n)}(x_0)}\xlongequal{柯西}$

$\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

当 $x_0=0$ 时 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

称之为麦克劳林公式 ξ 介于 $0, x$ 之间，$0<\frac{\xi}{x}=\theta<1$

$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to0$ ∃$M>0$，使 $|f^{(n+1)}(x)|\le M$

3. 常见的泰勒公式

(1) $f(x)=e^x$ $f^{(n)}(x)=e^x$ $f^{(n)}(0)=e^0=1$ $R_n(x)=\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}$

$\therefore e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ $0<\theta<1$

$\therefore e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$

$|R_n(1)|=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$

(例)：利用 e^x 的麦克劳林公式计算 e 的值，使其误差不超过 10^{-5}

$\frac{3}{(n+1)!}\le10^{-5}$ $n\ge8$

证明 e 为无理数

先假设 e 为有理数

若 $e=\frac{p}{q}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$ $\quad 0<\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<1 \ (n\geq 2)$

$n!\,\frac{p}{q}=(\cdots 整数)+\frac{e^{\theta}}{n+1}$ 矛盾

(2) $f(x)=\sin x$

$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$ $\quad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n}{2}\pi=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^m, & n=2m+1\end{cases}$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\frac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+3)!}x^{2m+3}$

$f^{(2m+3)}(\xi)=\sin(\xi+\frac{2m+3}{2}\pi)=\sin((m+1)\pi+\frac{\pi}{2}+\xi)=(-1)^{m+1}\sin(\frac{\pi}{2}+\xi)$ $=(-1)^{m+1}\cos\xi$

(3) $f(x)=\cos x$ $\qquad f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^m, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$

$f^{(n)}(x)=\cos^{(n)}x=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+\frac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$

$\cos^{(2m+2)}x=\sin^{(2m+3)}x$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

$\alpha=n$ 牛顿二项式的推广 ←

$f(0)=1$ $\quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, $\quad 0<\theta<1$

$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$\alpha=-1$ 得

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}(1+\theta x)^{-n-2}x^{n+1}$

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad |x|<1$

(5) $f(x)=\ln(1+x)$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

$f^{(k)}(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k-1)}=(-1)(-2)\cdots(-(k-1))(1+x)^{-k}$

$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k=\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\frac{(-1)^n(1+\theta x)^{-(n+1)}}{(n+1)}x^{n+1}$

例2 当 $x\to 0$ 时, 问 $f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^x+2\sin x$ 是 $\cos x-1$ 的几阶无穷小 $\frac{3}{2}$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\Rightarrow \cos x-1=-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\Rightarrow \cos x-1\sim -\frac{1}{2}x^2$

$f(x)=1-x+\frac{1}{2}x^2-(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3))+2(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))$

$=-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\sim -\frac{1}{2}x^3$

泰勒→拉格朗日中值定理 ←

例3 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续的三阶导数, 且 $f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$, 证明: $\exists$ 一点 $\xi\in(-1,1)$ 使 $f'''(\xi)=3$

证明. $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$

令 $x=1$, 有 $f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}$, $0<\xi_1<1$ ①

令 $x=-1$, 有 $f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!}$, $0>\xi_2>-1$ ②

①-② 得 $1=\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]\Rightarrow 3=\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$

$\because f'''(x)\in C_{[-1,1]}$ 由连续函数的介值原理 $\exists\xi\in[\xi_2,\xi_1]\subseteq(-1,1)$

使 $f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]=3$

例4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$, 又 $M=f(c)>0$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, 证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)\leq\frac{-8M}{(b-a)^2}$

证明: 将 $f(x)$ 在 $x=c$ 点展成泰勒公式

$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-c)^2$

又 $\because f(c)=M$ 是最大值, $\therefore f(c)$ 是极值

又 $\because f'(c)\exists$, 由费马原理 有 $f'(c)=0$

$\therefore x=a$ $\quad 0=f(a)=M+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(a-c)^2$

$x=b$ $\quad 0=f(b)=M+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(b-c)^2$

$\Rightarrow\begin{cases}f''(\xi_1)=\frac{-2M}{(a-c)^2}=\frac{-8M}{[2(a-c)]^2}\leq\frac{-8M}{(b-a)^2}\Leftrightarrow c\leq\frac{a+b}{2}\\ f''(\xi_2)=\frac{-2M}{(b-c)^2}=\frac{-8M}{[2(b-c)]^2}\leq\frac{-8M}{(b-a)^2}\Leftrightarrow c\geq\frac{a+b}{2}\end{cases}$

§4.4 极值与最值

1. 函数的单调性

定理1. 设 $f(x)\uparrow I(\downarrow I)$ 且 $f'(x)$ 存在, 则 $f'(x)\geq 0\ (\leq 0)$

$\uparrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$

定理2. 若 $f(x)\in C\langle a,b\rangle$ 且 $f(x)$ 在 $\boxed{(a,b)}$ 内可导, 当 $f'(x)>0\ (<0)$ 则 $f(x)\uparrow\langle a,b\rangle\ (\downarrow\langle a,b\rangle)$

$f'(x)\begin{smallmatrix}>0\\<0\end{smallmatrix}$ 严格单调

$f'(x)\begin{smallmatrix}\geq 0\\ \leq 0\end{smallmatrix}$ 不严格单调

证明：$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，不妨设 $x_1<x_2$，由拉格朗日中值定理

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)>0 \quad \exists \xi \in (x_1, x_2) \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x)\uparrow (a,b)$

注. $(a,b]$ $[a,b]$

例1：求 $f(x)=x^3-3x+5$ 的单调区间

解. $f'(x) = 3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$ 定义域 $(-\infty,+\infty)$

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

例2：证明 $(1+\frac{1}{x})^x \uparrow (0,+\infty)$

证明：$[(1+\frac{1}{x})^x]' = (1+\frac{1}{x})^x \cdot (x\ln(1+\frac{1}{x}))'$

$= (1+\frac{1}{x})^x (\ln(1+\frac{1}{x}) + x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}))$

$= (1+\frac{1}{x})^x (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}) >0$

令 $f(x)=\ln x \quad \ln(1+\frac{1}{x})-\ln 1 = f'(\xi)\frac{1}{x} = \frac{1}{\xi x} \quad 1<\xi<1+\frac{1}{x}$

$x<\xi x< x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1}<\frac{1}{\xi x}<\frac{1}{x} \quad \therefore (1+\frac{1}{x})^x\uparrow(0,+\infty)$

例3：设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，$x\in[0,+\infty)$ 证明 $\frac{f(x)}{x}\downarrow(0,+\infty)$

证明. $(\frac{f(x)}{x})' = \frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$ 令 $g(x)=f'(x)x-f(x)$，$x\in[0,+\infty)$

$g'(x)=f''(x)x<0$，当 $x>0$

又 $\because g(x)$ 在 $x=0$ 点连续 $\therefore g(x)\downarrow[0,+\infty)$

$\therefore$ 当 $x>0$ 有 $g(x)<g(0)=0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时 $(\frac{f(x)}{x})'<0$ 从而 $\frac{f(x)}{x}\downarrow(0,+\infty)$

例4：设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$

证明：令 $f(x)=x\ln a-a\ln x$，$x\in[a,+\infty)$

$f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}>0 \Rightarrow f(x)\uparrow[a,+\infty)$

$\therefore$ 当 $x>a$，有 $f(x)>f(a)=0 \Rightarrow x\ln a>a\ln x$

令 $x=b$ 有 $b\ln a-a\ln b>0 \Rightarrow a^b>b^a$

例5：求方程 $(x^2-2x)e^x+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}=0$ 实根个数

解 令 $f(x)=(x^2-2x)e^x+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}$

$f'(x)=(x^2-2)e^x=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

① 当 $x\in(-\infty,-\sqrt{2})$ 时，$f'(x)>0$，$\Rightarrow f(x)\uparrow(-\infty,-\sqrt{2}]$

$f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}>0 \quad f(-\sqrt{2})>0 \quad \therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{2})$ 上无根

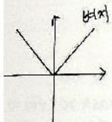
② 当 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 时，$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\downarrow[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

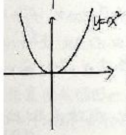
$f(\sqrt{2})<0 \quad f(-\sqrt{2})>0 \quad \therefore f(x)$ 有且仅有一个根

③ 当 $x\in(\sqrt{2},+\infty)$ $f'(x)>0$ $f(x)\uparrow[\sqrt{2},+\infty)$

$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \quad \therefore f(x)$ 有且仅有一个根

综上所述，方程有两个根





2 函数的极值

定理1. 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续且在 x_0 点的去心邻域内可导

(1) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小值

(2) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)<0$ 则 $f(x_0)$ 是极大值

证明：(1) $x\in(x_0-\delta,x_0)$ $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\downarrow(x_0-\delta,x_0)$

又 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\therefore f(x)\downarrow(x_0-\delta,x_0]$ 类似 $f(x)\uparrow(x_0,x_0+\delta)$

例1. 求 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 的极值

解 定义域 $(-\infty,+\infty)$ $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}2x=\frac{2}{3}\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(0\ \pm1)$ 导数不存在

$f(x)$ 是偶函数，$f'(x)$ 是奇函数

列表

x	0	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	不存	$+$	0	$-$	不存	$-$
$f(x)$	极小	$\uparrow$	极大	$\downarrow$	不是	$\uparrow$

$\therefore$ 极大值 $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=4^{\frac{1}{3}}$ $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=4^{\frac{1}{3}}$ 极小值 $f(0)=1$

定理2. 若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq0$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极值，当 $f''(x_0)>0$ 时，是极小

注：当 $f''(x_0)<0$ 时，是极大值

证：若 $f''(x_0)>0$，$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$

由极限的保序性，$\exists\ \mathring{U}(x_0,\delta)\ni x$，有 $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$

当 $x>x_0$ 时，有 $f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$　当 $x<x_0$ 时，有 $f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

$\therefore f(x_0)$ 是极小值

注：若 $f''(x_0)=0$，x_0 不一定是极值点　e.g. $y=x^3$　$y=x^4$

例2：求 $f(x)=e^x-1-x$ 的极值

解 $f'(x)=e^x-1=0\Rightarrow x=0$　$f''(x)=e^x$　$f''(0)=1>0$

$\therefore f(0)=0$ 是极小值

例3：求 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值

阶数高时考虑使用泰勒公式

解 定义域是 $(-\infty,+\infty)$　$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x=0\Rightarrow x=0$

$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2\cos x=2-2\cos x\geqslant 0$　$f''(0)=0$

$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x$　$f'''(0)=0$　$f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$　$f^{(4)}(0)=4$

$f^{(4)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'''(x)-f'''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'''(x)}{x}>0$　$\exists\ \mathring{U}(0,\delta)\ni x$，使 $\dfrac{f'''(x)}{x}>0$

当 $x>0\Rightarrow f'''(x)>0\Rightarrow f''(x)\uparrow$　$f''(x)>f''(0)=0\Rightarrow f'(x)\uparrow\Rightarrow f'(x)>f'(0)=0$

$\Rightarrow f(x)\uparrow$

当 $x<0\Rightarrow f'''(x)<0\Rightarrow f''(x)\downarrow$　$f''(x)>f''(0)=0\Rightarrow f'(x)\uparrow\Rightarrow f'(x)<f'(0)=0$

$\Rightarrow f(x)\downarrow$

$\therefore f(0)=4$ 是极小值

法二：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3+\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)$

$\Rightarrow f(x)-f(0)=\dfrac{1}{3!}x^4+o(x^4)>0$　$\therefore f(0)=4$ 是极小值

3. 函数的最值

(1) 区间上连续函数的最值

设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(x)$ 在 (a,b) 上有有限个极值嫌疑点 $x_1\ x_2\cdots x_k$

则 $f(x)$ 的最值在 $f(x_1)$、$f(x_2)\cdots f(x_k)$ $f(a)$ $f(b)$ 中找

例1：求 $f(x)=(x^2-2x)e^x$ 的最值

解 易见 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$　$f'(x)=(x^2-2)e^x=0$　$x=\pm\sqrt{2}$

$f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$　$f(-\sqrt{2})=(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}>0$　$f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}<0$

$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\therefore f(x)$ 有最小值 $f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$，无最大值

(2) 若 $f(x)\in C(a,b)$ 有且仅有一个极大(小)值，则此极值是最大(小)值

例2：设有一工厂要加工一批无盖的圆柱形罐头盒，其容积为 V，问半径与高满足什么关系最省材料

解 设半径为 x，高为 $\dfrac{V}{\pi x^2}$，

$y=\pi x^2+2\pi x\dfrac{V}{\pi x^2}=\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

$y'=2\pi x-\dfrac{2V}{x^2}=0\Rightarrow x=\left(\dfrac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$　$y''=2\pi+\dfrac{4V}{x^3}>0$

$\therefore x=\left(\dfrac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ 是唯一的极小值点，从而为最小值点，此时

$\dfrac{\text{半径}}{\text{高}}=\dfrac{x}{\frac{V}{\pi x^2}}=\dfrac{\pi x^3}{V}=\dfrac{V}{V}=1:1$

§4.5 函数作图

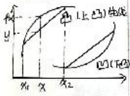
1. 函数曲线凹凸性

这是曲线的凹凸性，非函数的凹凸性

定义1：设 $f(x)\in C(a,b)$，$\forall x_1\ x_2\in(a,b)$ 若满足：

$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$　$(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$

则称曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是凸（凹）的



定义2：设 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续，若曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性在 x_0 点的左右邻域发生改变，则称 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

判断：$f(x)$ 在 $x=0$ 点有三阶导数且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$，则 $f(0)$ 为极值。(√)

$y-f(x_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)]$

分析：① $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow{\text{洛}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'''(x)-f'''(0)}{6x}=\dfrac{1}{6}f'''(0)$

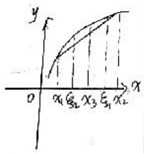
$f(0)=0=f'(0)=f''(0)$

$y=f(x_1)+\lambda[f(x_2)-f(x_1)]$　由凸曲线定义：$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\geqslant(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$

$f(\underbrace{(1-\lambda)x_1+\lambda x_2}_{x})\geqslant(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$

极值点为 x 轴上的点，但拐点为曲线上的点

e.g. $y=x^3$ 拐点 $(0,0)$



不妨设 $x_1 < x_2$ $x_3 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$

$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) - f(x_3) = \lambda(f(x_2) - f(x_3)) + \lambda f(x_3) - f(x_3) + (1-\lambda)f(x_1)$

$= \lambda(f(x_2) - f(x_3)) + (1-\lambda)(f(x_1) - f(x_3))$

$\xlongequal{\text{一阶可导}} \lambda f'(\xi_1)(x_2 - x_3) + (1-\lambda)f'(\xi_2)(x_1 - x_3)$

$= \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)f'(\xi_1) - f'(\xi_2)(1-\lambda)\lambda(x_2 - x_1)$

$= \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)]$

$\xlongequal{\text{二阶可导}} \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)\ f''(\xi)(\xi_1 - \xi_2)$ ≤ 0 (凸) $\Leftarrow f''(x) \leq 0$

≥ 0 (凹) $\Leftarrow f''(x) \geq 0$

定理1：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数，若 $f''(x) \leq 0$ (≥ 0)，则曲线 $y=f(x)$ 是凸(凹)的，称 (a,b) 为其凸(凹)区间

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 点连续，且在 x_0 点的去心邻域二阶导存在，若 $f''(x)$ 在 x_0 点的左右邻域内异号，则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

费马引理推出 ← 注：在(2)的条件下，若 $f''(x_0)$ ∃，则 $f''(x_0) = 0$

$f''(x_0) = 0$：不一定是拐点 eg. $y = x^4$ $y''(0) = 0$ 但 $(0,0)$ 不是拐点

例1：求 $y = x^4 - 2x^3 + 3x + 1$ 的凹凸区间及拐点

解：定义域：$(-\infty, +\infty)$ $y' = 4x^3 - 6x^2 + 3$ $y'' = 12x^2 - 12x = 0$ $\Rightarrow x = 0$ 或 1

列表

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	−	0	+
y	凹	1	凸	3	凹

∴ $(0,1)$ 和 $(1,3)$ 是拐点

例2：设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点有三阶导数且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = 1$，则 (C)

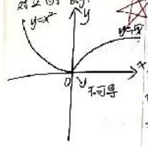
(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0, f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点 (D) $f(0)$ 不是极值 $(0,0)$ 不是拐点

$1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} \xlongequal{\text{洛}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3x^2} \xlongequal{\text{洛}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{6x} = \frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \frac{1}{6}f'''(0)$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$

拐点与极值点并非对应的 eg.



$6 = f'''(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x} > 0 \Rightarrow \exists\ \mathring{U}(0,\delta)$ 使 $\frac{f''(x)}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x<0 & f''(x)<0 & f'(x)\downarrow \\ x>0 & f''(x)>0 & f'(x)\uparrow \end{cases} \Rightarrow f'$

例3：设 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$，而 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $(n \geq 3)$ 证明：① 当 n 为偶数时，$f(x_0)$ 是极值，$f^{(n)}(x_0) > 0$，(<0) 是极小(大)值而 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点，② 当 n 为奇数时，$(x_0, f(x_0))$ 是拐点，而 $f(x_0)$ 不是极值

证：① $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{主部}} + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{次部}}$

当 n 为偶数时 若 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 则 $f(x) > f(x_0)$，从而 $f(x_0)$ 是极小值

<0 则 $f(x) < f(x_0)$ 从而 $f(x_0)$ 是极大值

当 n 为奇数时，$(x-x_0)^n$ 可正可负，从而 $f(x) - f(x_0)$ 可正可负 所以 $f(x_0)$ 不是极值

② $f''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + o((x-x_0)^{n-2})$

$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$

当 n 为偶数时，$f''(x)$ 在 x_0 的邻域内不变号，∴ $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点

当 n 为奇数时，$f''(x)$ 在 x_0 的左右邻域内异号 ∴ $(x_0, f(x_0))$ 是拐点

2.渐近线

设有曲线 Γ 和直线 l，当曲线 Γ 的一端远离坐标原点时，曲线 Γ 和直线 l 无限接近 则称直线 l 是曲线 Γ 的一条渐近线

(a) 垂直渐近线

eg. $y = \ln x$ $y = \tan x$ $y = \frac{1}{1-x}$ ← 直线 $x = C$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线 ⇔ $x = C$ 是 $f(x)$ 的间断点或区间端点 且 $\lim\limits_{x\to C^+} f(x) = \infty$ ($x\to C^-$)

孤立一个点

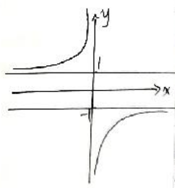
(b) 一般渐近线

直线 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条渐近线 ⇔ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - ax - b) = 0$ 此时

$a = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}$ 且 $b = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - ax)$

$f(x) - ax - b = 0 + \alpha$ ∴ $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha = 0$ $a = \frac{f(x) - b - \alpha}{x}$ $\Rightarrow a = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b+\alpha}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$



例1：求曲线 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$ 的所有渐近线

解：定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+e^x}{1-e^x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1+e^x}{1-e^x}=+\infty$ ∴ $x=0$ 是垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{(1-e^x)x}=\lim\frac{e^{-x}+1}{(e^{-x}-1)x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=-1$

∴ $y=-1$ 是水平渐近线

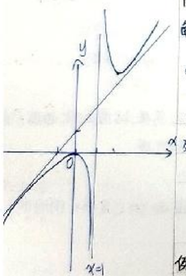
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{(1-e^x)x}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=1$ ∴ $y=1$ 是水平渐近线

3. 分析作图法（描点）

(1) 定义域 (2) $f'(x)=0$ 及不∃的点

(3) $f''(x)=0$ 及不∃的点 (4) 渐近线及渐进方向

(5) 列表画描图形（加周期性，奇偶性）



例2：作函数 $y=\frac{x^2}{x-1}$ 的图形

解：定义域 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ $y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$，$x=0$ 或 2，$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$ ∴ $x=1$ 是垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=1$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$

∴ $y=x+1$ 是一条渐近线

列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	−	0	+
y''	−		−	+		+
y	↗	极大值 0	↘	↘	极小值 4	↗

例3：作曲线 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$ 的图形

解：定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y'=\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$ $y''=\frac{2e^x(e^x+1)}{(1-e^x)^3}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+e^x}{1-e^x}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1+e^x}{1-e^x}=+\infty$ ∴ $x=0$ 是垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x(1-e^x)}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{x(1-e^x)}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=1$

∴ $y=\pm1$ 是水平渐近线

例4：作函数 $y=xe^x$ 的图形

解：定义域 $(-\infty,+\infty)$ $y'=(x+1)e^x=0 \Rightarrow x=-1$ $y''=(x+2)e^x=0 \Rightarrow x=-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=0$ ∴ $y=0$ 是水平渐近线

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
y'	−	−	−	0	+
y''	−	0	+	+	+
y	↘	拐点	↘	极小	↗

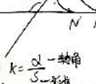
§4.6 曲率

1. 曲线长

简单、连续、可度（$\lim\limits_{M'\to M}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}=1$）曲线

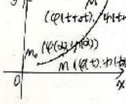
曲线方程：参数曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 函数曲线 $y=f(x)$ 极坐标曲线 $r=r(\theta)$

曲线长函数 S



设曲线 l：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$，是简单连续可度曲线，以曲线左端点 M_0

曲率 $k=\frac{\alpha}{S}$ — 转角 / — 弧长



$(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ 为定点，$t\in[\alpha,\beta]$，得到 l 上另一点 $(\varphi(t),\psi(t))$，设 $S=\overset{\frown}{M_0M}$，易见

S 是 t 的函数，记为 $S=S(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$，$S(t)\uparrow$

$S'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}\overset{\text{限制}}{=\!=}\lim\limits_{\Delta t\to0^+,0^-}\frac{\overset{\frown}{M_0M'}-\overset{\frown}{M_0M}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0^+,0^-}\frac{-\overset{\frown}{MM'}}{-\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0^+,0^-}\frac{-\overline{MM'}}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to0^+,0^-}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{-\Delta t}\;\frac{x=\varphi(t)}{\underset{\text{可导}}{y=\psi(t)}}\;\lim\limits_{\Delta t\to0^+,0^-}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$

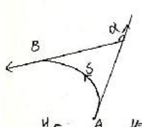
结论：若 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 都可导，则曲线长函数 $S=S(t)$ 也可导，且

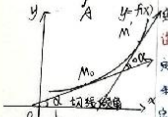
$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$（规定 $dt>0$，有 $ds>0$）

称上式为曲线 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 的弧微分

几何意义：$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$

$\begin{cases}y=f(x)\\x=x\end{cases}$ $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ $dx>0$ $ds>0$





倾角函数 $\alpha=\alpha(x)$

$k=\lim\limits_{M'\to M_0}\dfrac{\Delta\alpha}{\widehat{M_0M'}}$

金工实习

车 铣 刨 刨

磨

极坐标曲线 $r=r(\theta)$ $\quad ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta$

$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$ $\quad =\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta \quad d\theta>0,\ ds>0$

2.曲率

定义1. 设有一光滑曲线段 $\overset{\frown}{AB}$，A是始点，由A到B，A点的切线与B点的切线的转角为α，$\overset{\frown}{AB}$的长度为s，规定 $k=\frac{\alpha}{s}$，为曲线段$\overset{\frown}{AB}$的曲率

注：直线的曲率为0 半径为R的圆的曲率为$\frac{1}{R}$

定义2. 设曲线 $y=f(x)$处处有切线，则其切线倾角又是关于x的一个函数，称之为$y=f(x)$的倾角函数，记为$\alpha=\alpha(x)$，易见$\alpha(x)=\arctan y'$

定义3. 设曲线在点(x,y)附近光滑，若极限 $\lim\limits_{\Delta s\to0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 存在，则称此极限为曲线在(x,y)点处曲率，记为 $k=\lim\limits_{\Delta s\to0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$

$$\lim_{\Delta x\to0}\left|\frac{\Delta\alpha/\Delta x}{\Delta s/\Delta x}\right|=\left|\frac{\alpha'(x)}{s'(x)}\right|=\left|\frac{1}{1+y'^2}\cdot y''\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac32}}$$

结论：若 $y=f(x)$有二阶导数，则点(x,y)处曲率存在，且$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac32}}$ —曲

例1：求半径为R的圆的曲率

解：设⊙的方程为 $x^2+y^2=R^2$

$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$

$2+2(y'^2+yy'')=0 \quad 1+\frac{x^2}{y^2}+yy''=0 \quad y''=-\frac{R^2}{y^3}$

代入 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac32}}=\frac{1}{R}$

例2：求曲线$y=\ln x$上曲率最大的点

解：$y'=\frac{1}{x}\quad y''=-\frac{1}{x^2}$

$k(x)=\dfrac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac32}}=\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac32}}$

$k'(x)=\dfrac{(1+x^2)^{\frac32}-x\cdot\frac32(1+x^2)^{\frac12}\cdot2x}{(1+x^2)^3}=\dfrac{-2x^2+1}{(1+x^2)^{\frac52}}=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt2}{2}$或$-\frac{\sqrt2}{2}$(舍去)

当 $x\in(0,\frac{\sqrt2}{2})$，$k'(x)>0$，$k(x)\uparrow$ 当$x>\frac{\sqrt2}{2}$ $k'(x)<0$ $k(x)\downarrow$

∴当 $x=\frac{\sqrt2}{2}$时 $k(\frac{\sqrt2}{2})=\frac{2\sqrt3}{9}$ 是极大值，是最大值

3.曲率圆

曲线的分类

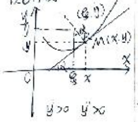
① $y'>0\quad y''>0$

② $y'>0\quad y''<0$

③ $y'<0\quad y''>0$

④ $y'<0\quad y''<0$

以①为例



$y'>0\quad y''>0$

定义. 设有曲线Γ，$M_0\in\Gamma$，又有一个⊙O 若满足以下三条：

① 曲线Γ与⊙O在M_0点相切． ② 在M_0点处曲线Γ与⊙O有相同的凹向

③ Γ在M_0点处的曲率等于⊙O的半径倒数，称⊙O为曲线Γ在M_0点处的曲率圆，此⊙O的半径称为M_0点的曲率半径，⊙O心称为M_0点处的曲率中心。

若Γ上每一点都有曲率圆并且曲率中心又形成一条曲线L，称L为Γ的渐屈线，Γ称为L的渐开线

曲率圆的确定(半径，曲率中心)

$x-\xi=R\sin\alpha\quad \eta-y=R\cos\alpha\quad R=\frac{1}{k}=\frac{(1+y'^2)^{\frac32}}{y''}\quad \tan\alpha=y'>0$

$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\xi=x-R\sin\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}\\ \eta=y+R\cos\alpha=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$$ —曲率中心公式

例1：求$y=x^2$在点(1,1)处的曲率圆

解. $y'=2x\quad y''=2\quad y'|_{(1,1)}=2\quad R_{(1,1)}=\frac{1}{k}=\frac{(1+y'^2)^{\frac32}}{|y''|}=\frac{5}{2}\sqrt5$

设曲率中心(ξ,η)

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}=-4\\ \eta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}=\dfrac72\end{cases}$$

∴所求的曲率圆为 $(x+4)^2+(y-\frac72)^2=\frac{125}{4}$

例2：求曲线 $\begin{cases}x=a(t\sin t+\cos t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$的渐屈线方程

解. $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(\sin t+t\cos t-\sin t)}=\tan t$

$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{1}{\cos^2t}\cdot\frac{1}{at\cos t}=\frac{1}{at\cos^3t}$

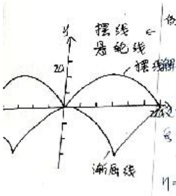
设渐屈线坐标为(ξ,η)

$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=a(t\sin t+\cos t)-at\cos^3t\cdot\tan t(1+\tan^2t)=a\cos t$

$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=a(\sin t-t\cos t)+at\cos^3t(1+\tan^2t)=a\sin t$

∴ $\xi^2+\eta^2=a^2$，所求渐屈线为$\xi^2+\eta^2=a^2$，是圆

摆线
悬轮线



例3: 求曲线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 的渐屈线 $(a>0)$

解: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$

$y'' = \left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)' / a(1-\cos t) = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)} = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$

渐屈线坐标为 (ξ, η)

$\xi = x - (1+y'^2)y'/y'' = a(t-\sin t) - \left[1+\frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right]\frac{\sin t}{1-\cos t} / \frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$

$= a(t+\sin t)$

$\eta = y + (1+y'^2)/y'' = a(1-\cos t) + \left[1+\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)^2\right] \cdot [-a(1-\cos t)^2]$

$= a(\cos t - 1)$

令 $t = \pi + \theta$　$\sin t = -\sin\theta$　$\cos t = -\cos\theta$

$\Rightarrow \begin{cases} \xi = a(\pi+\theta-\sin\theta) \\ \eta = a(-1-\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi - a\pi = a(\theta-\sin\theta) \\ \eta + 2a = a(1-\cos\theta) \end{cases}$

第五章　不定积分

§5.1 原函数与不定积分

1. 原函数

定义1: 若在区间 I 上有 $F'(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 比如 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数, $\sin x + C$ 还是 $\cos x$ 的原函数

若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 则其原函数有无穷多个. $F(x)+C$ (C 是任意常数) 都是 $f(x)$ 的原函数. 且 $f(x)$ 的所有原函数都在 $F(x)+C$ 中

定理: 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x)+C$ (C 是任意常数) 是 $f(x)$ 的所有原函数的统一表达式。

包括复数

证: 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $\varphi'(x) = f(x)$, 又 $F'(x) = f(x)$

$\therefore \varphi'(x) = F'(x) \Rightarrow \exists C$, 使 $\varphi(x) = F(x) + C$

2. 不定积分

2种理解
1. 一般性代表
2. 集合表达

定义2. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数, 则称 $f(x)$ 在 I 上的所有原函数的统一表达式(的集合) $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 的不定积分. 记为 $F(x)+C = \int f(x)dx$. "$\int$" — 积分号 (表示连续的求和). "$f(x)$" — 被积函数　"x" — 积分变量　"$f(x)dx$" — 被积表达式　"C" — 积分常数

Σ: 离散的求和
$\int$ 来源于 sum

3. 性质与简单计算

(1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$　　$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

(2) $\int f'(x)dx = f(x)+C$　　$\int df(x) = f(x)+C$

(3) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

(3)(4) 线性性质

$\int 1dx = x + C$
$\Downarrow$
$\int df(x) = f(x) + C$
函数求导得证

不是所有函数都有不定积分, 导函数无第二类间断点

4. 原函数的存在性

(1) 连续函数一定有原函数

(2) 含有第Ⅰ类间断点的函数, 没有原函数

含有第Ⅱ类间断点的函数, 可能有原函数

e.g. $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$　$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不∃

$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^c \end{cases}$

5. 不定积分的基本公式

(1) $\int 0\,dx = C$　(2) $\int 1\,dx = x + C$　(3) $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ $(\mu \neq -1)$

(4) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C = \begin{cases} \ln x + C, & x > 0 \\ \ln(-x) + C, & x < 0 \end{cases}$

(5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$　(6) $\int e^x dx = e^x + C$

(7) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$　(8) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(9) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$　(10) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$　　$= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$

(12) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C'$

直接积分法

例1：设 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geq 1 \\ x, & x<1 \end{cases}$ 求 $\int f(x)dx$

解 $\int f(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4+C_1, & x\geq 1 \\ \frac{1}{2}x^2+C_2, & x<1 \end{cases}$　　$\int f(x)dx$ 连续 $\Rightarrow \frac{1}{4}+C_1=\frac{1}{2}+C_2$ $\Rightarrow C_1=\frac{1}{4}+C_2$

$\therefore \int f(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}+C, & x\geq 1 \\ \frac{1}{2}x^2+C, & x<1 \end{cases}$

加一项减一项

例2. $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

解 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int (\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx$

$= -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

$1+\tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$1+\cot^2 x = \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1-2\sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

例3: $\int (\sqrt{x}-1)(x+1)dx$

解. 原式 $= \int (x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} - 1)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C$

例4. $\int \tan^2 x\, dx$

解 原式 $= \int (\tan^2 x + 1 - 1)dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + C$

例5. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

解. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}x + C$

§5.2 第一换元积分法

复合函数求导法 →

定理1：设 $F(u)$ 可导，且 $F'(u)=f(u)$，$u=g(x)$ 也可导，则

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x) = F(g(x))+C$

证：由复合函数求导，有

$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$

$\therefore \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))+C$

$\because F'(u)=f(u)$ $\therefore \int f(u)du = F(u)+C$ 令 $u=g(x)$

有 $\int f(g(x))dg(x) = F(g(x))+C$

$\therefore \boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x)} = F(g(x))+C$

第一换元积分公式，也叫凑微分法

例1: $\int \sin(3x+5)dx$

解 原式 $= \frac{1}{3}\int \sin(3x+5)d(3x+5) = -\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C$

$\therefore$ 若 $F'(x)=f(x)$ 则 $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

例2: $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

解 原式 $= \int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}dx = \int \ln^2 x\, d\ln x = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$

例3: $\int a^{\arctan x}/1+x^2\, dx$

解. 原式 $= \int a^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}dx = \int a^{\arctan x}d\arctan x = \frac{a^{\arctan x}}{\ln a}+C$

2. 显示第一换元积分形：若 $F'(x)=f(x)$ 则

$\int \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int f(\ln x)d\ln x = F(\ln x)+C$

$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d\arcsin x = F(\arcsin x)+C$

$\int \frac{f(\arccos x)}{-\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arccos x)d\arccos x = F(\arccos x)+C$

$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx = \int f(\arctan x)d\arctan x = F(\arctan x)+C$

$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+e^x}d(e^x+1) = \ln(e^x+1)+C$

3. 四个积分基本公式

(13) $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x|+C$

(14) $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x|+C$

(15) $\int \csc x\, dx = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx \overset{t=\cos x}{=} \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x - 1}$

$= \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)} = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1})dt = \frac{1}{2}\ln|\frac{t-1}{t+1}|+C = \frac{1}{2}\ln|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}|+C$

$= \ln|\frac{1-\cos x}{\sin x}|+C = \ln|\frac{1}{\sin x} - \cot x|+C = \ln|\csc x - \cot x|+C$

(16) $\int \sec x\, dx = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}dx = \ln|\frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} - \cot(x+\frac{\pi}{2})|$

$+C = \ln|\frac{1}{\cos x} + \tan x|+C = \ln|\sec x + \tan x|+C$

(15) 法二：$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\tan\frac{x}{2}}dx = \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln|\tan\frac{x}{2}|+C$

4常见的三角函数积分

例1: $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$

解 原式 $= \int \sin^2 x \cos^2 x\, d\sin x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\, d\sin x = \int (\sin^2 x - \sin^4 x)\, d\sin x$

$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$，若m，n中至少有一个是奇数时，不妨设 $n=2k+1$，则

$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k\, d\sin x$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$　　$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

例2: $\int \sin^4 x\, dx$

解 原式 $= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$

$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x)\, dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$

$= \frac{1}{4}(x - \sin 2x) + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

例3: $\int \tan^3 x\, dx$

解 原式 $= \int \tan x(\sec^2 x - 1)\, dx = \int \tan x\, d\tan x - \int \tan x\, dx$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

$\int \tan^n x\, dx$ 或 $\int \cot^n x\, dx\ (n \geq 2)$ 利用 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$　$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

$\int \tan^n x\, dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx$

例4: $\int \frac{1}{\sin x \cos^2 x}\, dx$

解 原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{1}{\sin x}\, dx = -\int \frac{1}{\cos^2 x}\, d\cos x + \int \frac{1}{\sin x}\, dx$

$= \frac{1}{\cos x} + \ln|\csc x - \cot x| + C$　　$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$ 分子 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

例5: $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x}\, dx$

解 原式 $= \int \frac{1}{4\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sec^2 x}{4\tan^2 x + 1}\, dx = \int \frac{\frac{1}{2}d2\tan x}{1+(2\tan x)^2}$

$= \frac{1}{2}\arctan(2\tan x) + C$

$\int \frac{1}{a + b\sin^2 x}\, dx$ 或 $\int \frac{dx}{a + b\cos^2 x}$ 将 $a = (\sin^2 x + \cos^2 x)a$ 代入

5第一换元的技巧

例1: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx$

解 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+x^2+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}} - \int \frac{2dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$

例2: $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

解 原式 $= \int \frac{dx}{(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3} = \int \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x}\, dx$

$= \int \frac{1}{(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 + \sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x} = \int \frac{d\frac{1}{2}\tan 2x}{1+\left(\frac{1}{2}\tan 2x\right)^2}$

$= \arctan\left(\frac{1}{2}\tan 2x\right) + C$

例3: $\int \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}\, dx\ (a, b \neq 0)$

解 原式 $= \frac{1}{-b-\frac{a^2}{b}}\int \frac{(a\cos x - b\sin x) - \frac{a}{b}(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x}\, dx$

$= \frac{-b}{a^2+b^2}\left(\ln|a\sin x + b\cos x| - \frac{a}{b}x\right) + C$

例4: $\int \frac{1}{\sin x + \tan x}\, dx = t$

解 原式 $= \int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}\, dx = \int \frac{1+\cos x - 1}{\sin x(1+\cos x)}\, dx = \int \frac{1}{\sin x}\, dx - \int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\, dx$

$\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\, dx = \int \frac{1-\cos x+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}\, dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)}\, dx + t$

则 原式 $t = \int \frac{1}{\sin x}\, dx - \int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)}\, dx - t$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\sin x}\, dx - \int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)}\, dx\right)$

$\int \frac{1-\cos x\, dx}{\sin x(1+\cos x)} = \int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\, dx = -\int \frac{d(\cos x+1)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x} + C$

法二: 原式 $= \int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}\, dx = \int \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin x \cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}\, dx$

$= \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sin x}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos^3\frac{x}{2}}\, d\frac{x}{2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x}\, dx + \int \frac{1}{2\cos^3\frac{x}{2}}\, d\cos\frac{x}{2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x}\, dx + \frac{1}{2}\frac{\cos^{-2}\frac{x}{2}}{-2} = \frac{1}{2}\left(\ln|\csc x - \cot x| - \frac{1}{1+\cos x}\right) + C$

例5: $\int \frac{x\cos x - \sin x}{(x+\sin x)^2}\, dx$　　$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

解 原式 $= \int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \Big/ \left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int d\left(\frac{\sin x}{x}+1\right) \Big/ \left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

$= -\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} + C$

$= -\frac{x}{x+\sin x} + C.$

§5.3 分部积分法

$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow$

$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx = f(x)g(x) + C \Rightarrow$

$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$ —— 分部积分公式

或 $\int g(x)\,df(x) = f(x)g(x) - \int f(x)\,dg(x)$

注：在此公式中，将被积表达式拆成两个因子 $g(x)$ 与 $df(x)$ 的乘积，要使 $f(x)$ 的原函数"好"求，$g(x)$ 的导数 $g'(x)$ 相对简单

I. 典型的分部积分形

例1：$\int \ln^2 x\,dx$

解 原式 $= x\ln^2 x - \int x\,d\ln^2 x = x\ln^2 x - \int 2\ln x\,dx$

$= x\ln^2 x - 2(x\ln x - \int x\,d\ln x)$

$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

(1) $\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - \int x\,d\ln^n x = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx$

例2. $\int \arctan x\,dx$

解 原式 $= x\arctan x - \int x\,d\arctan x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

(2) $\int \arcsin x\,dx$，$\int \arccos x\,dx$，$\int \arctan x\,dx$，$\int \operatorname{arccot} x\,dx$

例3. $\int x^2 \arcsin x\,dx$

解 原式 $= \int \arcsin x\,d\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}x^3\arcsin x - \frac{1}{3}\int x^3\,d\arcsin x$

$= \frac{1}{3}x^3\arcsin x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\int x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2) = \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$

$= \frac{1}{2}\int (\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\,d(1-x^2)$

$= \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$

(3) $\int$ 正整数幂函数 × 反三角函数 dx

例4. $\int x^2\ln x\,dx = \int \ln x\,d\frac{1}{3}x^3$

解 原式 $= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

(4) $\int$ 正整数幂函数 × 对数函数 dx

例6：$\int x\cos x\,dx$

解 原式 $= \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin + \cos x + C$

(6) $\int$ 正整数幂函数 × 正(余)弦函数 · dx

例5：$\int e^x \sin x\,dx$

解 原式 $= \int \sin x\,de^x = \sin x \cdot e^x - \int e^x\,d\sin x = \sin x \cdot e^x - \int e^x \cos x\,dx$

$= \sin x \cdot e^x - (e^x\cos x - \int e^x\,d\cos x) = \sin x\,e^x - (e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx)$

∴ 原式 $= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

(5) $\int$ 指数函数 × 正(余)弦函数 dx

例7：$\int x e^x\,dx$

解 原式 $= \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C$.

(7) $\int$ 正整数幂函数 × 指数函数 dx

例8：$\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$

解 原式 $= \int \frac{1}{\cos x}\,d\tan x = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \tan x \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x}$

∴ 原式 $= \frac{1}{2}(\frac{\tan x}{\cos x} + \int \frac{dx}{\cos x}) = \frac{1}{2}(\frac{\tan x}{\cos x} + \ln|\sec x + \tan x|) + C$

法二：原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}dx = \int \tan^2 x \sec x\,dx + \int \frac{1}{\cos x}dx$

$= \int \tan x\,d\sec x + \int \frac{1}{\cos x}dx = \tan x\sec x - \int \sec x \sec^2 x\,dx + \int \frac{1}{\cos x}dx$

∴ 原式 $= \frac{1}{2}(\tan x\sec x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ 或 $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ $(n \geq 3)$ 用分部积分公式变成 $\int \frac{1}{\cos^{n-2} x}d\tan x$，$\int \frac{-1}{\sin^{n-2} x}d\cot x$，再变成方程，移项解之

$\int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int \frac{1}{\cos^{2m-2} x}\,d\tan x$

$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{d\tan x}{\cos^{n-2} x} = \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - \int \tan x\,(n-2)\cos^{1-n} x \sin x\,dx$

$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} - \int \tan x\,(n-2)\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} - (n-2)\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x}\,dx$

$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$

$\therefore I_n = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} + (n-2)I_{n-2}\right) \quad I_1 = \int \frac{1}{\cos x}dx \quad I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$

例9. $I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}dx \quad (n \geq 2)$

解 $I_1 = \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$I_n = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} - \int x\,(-n)\frac{1}{(a^2+x^2)^{n+1}}\,2x\,dx$

$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}\,dx$

$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$

$\therefore I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^n} + (2n-1)I_n\right]$

罗尔定理
|
求抽象函数积分常用

2 一般分部积分形

例1: $\int [f''(x)g(x) - f(x)g''(x)]dx$

解 原式 $= \int g(x)\,d f'(x) - \int f(x)\,dg'(x)$

$= f'(x)g(x) - \int f'(x)g'(x)dx - f(x)g'(x) + \int g'(x)f'(x)dx$

$= f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + C$

(1) 含有抽象函数的积分往往用分部积分法

例2: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 在 (a,b) 内 $f(x) \neq 0$, 且 $f(a) = f(a)$, $f(b) = f(b)$

证明: $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} = 1$

不同类函数积分 — 分部
同类函数积分 — 第一

证明: 设 $F(x) = g(x)[f'(x) - f(x)]$, 则

$F(x) = \int g(x)[f''(x) - f(x)]dx = \int g(x)\,d f'(x) - \int g(x)f(x)dx$

$= f'(x)g(x) - \int f'(x)g'(x)dx - \int g(x)f(x)dx$

$= f'(x)g(x) - \int g'(x)\,d f(x) - \int g(x)f(x)dx$

$= f'(x)g(x) - [g'(x)f(x) - \int f(x)g''(x)dx] - \int f(x)g(x)dx$

$= f'(x)g(x) - g'(x)f(x) + \int (f(x)g''(x) - f(x)g(x))dx$

令 $g''(x) = g(x)$ 即 $g(x) = e^x$ 或 e^{-x} 不妨取 $g(x) = e^x$ 则 $F(x) = e^x(f'(x) - f(x))$

(2) 不同类函数乘积的积分往往用分部积分法, 除了 $\int \ln x \frac{1}{x} dx$ $\int \arctan x$

$\frac{1}{1+x^2}dx$

例1: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$ 整体

解 原式 $= -\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$

$= -\int \arcsin x\,d\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\,d\arcsin x$

$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$

例2: $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\arctan x\,dx$

解 原式 $= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)\arctan x\,dx$

$= \int \arctan x\,d\left(-\frac{1}{x}\right) - \int \frac{1}{x^2+1}\arctan x\,dx$

$= -\frac{1}{x}\arctan x - \int -\frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\arctan^2 x$

而 $\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) +$

$\therefore$ 原式 $= -\frac{1}{x}\arctan x - \frac{1}{2}\arctan^2 x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

例3: $\int \underbrace{x\arctan x}_{f'(x)}\ln(1+x^2)dx$

解 原式 $= \int \ln(1+x^2)\,d f(x)$

$f(x) = \int x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$

$\therefore$ 原式 $= f(x)\ln(1+x^2) - \int f(x)\,d\ln(1+x^2)$

而 $\int f(x)\,d\ln(1+x^2) = \int f(x)\frac{2x}{1+x^2}dx = \int x\arctan x\,dx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$

$= f(x) - (x - \arctan x) + C$

$\therefore$ 原式 $= f(x)\ln(1+x^2) - f(x) + x - \arctan x + C$

$= \left(\frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x\right)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{3}{2}\arctan x + \frac{3}{2}x + C$

例4: 设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 互为反函数, 且 $F'(x) = f(x)$, 求 $\int g(x)dx$

解 设 $y = g(x)$, $x = f(y)$, $g'(x) = \frac{dy}{dx}$

$\int g(x)dx = xg(x) - \int x\,g'(x)dx = xg(x) - \int f(y)dy = xg(x) - F(y) + C$

$= xg(x) - F(g(x)) + C$

3."不存在"型的积分也往往用分部积分法

例如：$\frac{\sin x}{x}$, e^{x^2}, $\sqrt{1+x^3}$, $e^x \tan x$, $\frac{e^x}{\cos x}$, …

例1: $\int (\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln|x|) dx$

解 原式 $= \int \frac{\sin x}{x} dx + \int \ln|x| d\sin x$

$= \int \frac{\sin x}{x} dx + \sin x \ln|x| - \int \sin x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \sin x \ln|x|$

例2: $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx$

解 原式 $= \int e^{2x} (\tan^2 x + 1 + 2\tan x) dx = \int e^{2x} (\sec^2 x + 2\tan x) dx$

$= \int e^{2x} d\tan x + 2\int e^{2x} \tan x dx$

$= e^{2x} \tan x - 2\int \tan x e^{2x} dx + 2\int e^{2x} \tan x dx = e^{2x} \tan x + C$

§5.4 第二换元积分法

方法：$\int f(x) dx \xlongequal{令x=g(t)} \int f(g(t)) g'(t) dt = G(t) + C = G(g^{-1}(x)) + C$

要求 $g(t)$单调可导，称此等式为第二换元积分公式

证：$t = g^{-1}(x)$ $x = g(t)$

$[G(g^{-1}(x))]'_x = G'(t) \frac{dt}{dx} = f(g(t)) \cdot g'(t) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = f(g(t)) = f(x)$

第一换元：$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int f(g(t)) dg(t) = \int f(x) dx = F(x) + C$

$= F(g(t)) + C$

1.典型的第二换元积分

(1) $\int f(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$, $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

例1: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

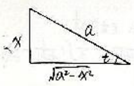
解 原式 $\xlongequal{x=t^6} \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1} dt$

$= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}) dt = 6(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln|t+1|) + C$

$= 2\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln|x^{\frac{1}{6}} + 1| + C$

(2) $\int f(\sqrt{Ax^2+Bx+C}) dx$

将 $Ax^2 + Bx + C$ 配方 $A(x + \frac{B}{2A})^2 + C - \frac{B^2}{4A}$



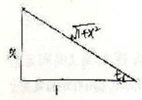
辅助图

① $\int f(\sqrt{a^2-x^2}) dx$ 令 $x = a\sin t$

例2: $\int \sqrt{1-x^2} dx$ 令 $x = \sin t$

解 原式 $= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C$

$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$



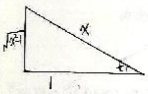
② $\int f(\sqrt{a^2+x^2}) dx$ 令 $x = a\tan t$

例3: $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

解 原式 $\xlongequal{令x=\tan t} \int \frac{\tan^2 t}{\sec^3 t} \sec^2 t dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt$

$= \int (\frac{1}{\cos t} - \cos t) dt = \ln|\frac{1}{\cos t} - \tan t| - \sin t + C$

$= \ln|\sqrt{1+x^2} - x| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

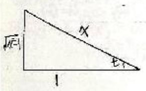


③ $\int f(\sqrt{x^2-a^2}) dx$ 令 $x = a\sec t$ 或 $a\csc t$

例4: $\int \frac{1}{(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}} dx$

解 原式 $\xlongequal{x=\sec t} \int \frac{\sec t \tan t}{(\frac{2}{\cos^2 t} - 1)\tan t} dt = \int \frac{1}{\frac{2}{\cos t} - \cos t} dt = \int \frac{\cos t dt}{1+\sin^2 t}$

$= \arctan(\sin t) + C = \arctan \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$



例5: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$

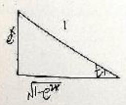
解 原式 $\xlongequal{x=\sec t} \int \frac{\sec t \tan t}{\tan t} dt = \ln|\sec t + \tan t| + C$

$= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

$(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

☆ 第(17)个基本公式 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

2.第二换元的思路——去掉复杂运算



例1: $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$

令 $t = \arcsin e^x$ $\sin t = e^x$

解 原式 $= \int \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int t d(-\csc t) = -\csc t \cdot t + \int \csc t dt$

$= -t\csc t + \ln|\csc t - \cot t| + C$

$= -e^{-x}\arcsin e^x + \ln|e^{-x} - \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}| + C$

可先分部后第二换元计算积分

$= -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \ln|1-\sqrt{1-e^{2x}}| - x + C$

例2. $\int \frac{dx}{(2x+x^4)\sqrt{1+x^3}}$ 令 $\sqrt{1+x^3}=t \Rightarrow x=(t^2-1)^{\frac{1}{3}}$

解 原式 $= \int \frac{\frac{1}{3}(t^2-1)^{-\frac{2}{3}}2t\,dt}{(t^2+1)\,t\,(t^2-1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{1}{3}\int (\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2+1})$

$= \frac{1}{3}\int [\frac{1}{2}(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) - \frac{1}{t^2+1}]\,dt$

$= \frac{1}{6}\ln|\frac{t-1}{t+1}| - \frac{1}{3}\arctan t + C$

3 有理函数的积分

(1) 有理函数及其分类

有理函数：自变量 x 经过有限次的有理运算（四则运算）组成的函数，记为 $R(x)$，易见 $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$，其中 $P_m(x)$、$Q_n(x)$ 分别是关于 x 的 m 次、n 次多项式。若 $m \geq (<) n$，称 $R(x)$ 为假（真）分式

如 $\frac{x}{x^2+1}$ —真分式　$\frac{x^3+1}{x+2}$、多项式都是假分式

(2) 有理函数的分解

定理1：假分式 = 多项式 + 真分式

定理2：若多项式 $Q_n(x)$ 在实数范围内的分解式为：$(x+a_1)^{k_1}\cdots(x+a_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}$（其中 $p_i^2-4q_i<0$ $(i=\overline{1,r})$），则真分式 $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x+a_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x+a_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{x+a_1} + \cdots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{B_{l_1}x+C_{l_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots$

(3) 最简分式积分

① $\int \frac{A}{(x+a)^n}dx = \begin{cases} A\ln|x+a|, & n=1 \\ A\frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1}, & n\geq 2 \end{cases}$

② $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx$　$p^2-4q<0$

$x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4} = t^2+a^2$

$Bx+C = B(t-\frac{p}{2})+C = Bt+\underbrace{C-\frac{p}{2}B}_{N}$

$I_n = \int \frac{Bt+N}{(t^2+a^2)^n}dt$

$I_1 = \frac{B}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{N}{a}\arctan\frac{t}{a} + C$

$I_n = \frac{B}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-n+1}}{-n+1} + \int \frac{N}{(t^2+a^2)^n}dt$

注：有理函数的原函数是初等函数。

例1：$\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

解：$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

$x = A(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2$

$= x^3(B+C) + x^2(A+B+2C+D) + x(B+2D+C) + A+B+D$

$\Rightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ B+2D+C=1 \\ A+B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=\frac{1}{2} \\ C=0 \\ B=0 \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$　原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x+1)^2-(x^2+1)}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

$= \frac{1}{2}\int (\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2})dx$

$= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2(x+1)} + C$

例2：$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

解：原式 $= \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1}dx = \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$

$= \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{x^2}{x^6+1}dx = \arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3 + C$

例3：$\int \frac{dx}{x^4+1}$

解：原式 $= \int \frac{\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}-(1-\frac{1}{x^2})}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$　令 $u = x+\frac{1}{x}$　$\int \frac{du}{u^2-2}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}$　$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int (\frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{u+\sqrt{2}})du$

$\ln|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}| + C$

4. 三角函数有理式的积分

$\sin x$、$\cos x$ 经过有限次的有理运算得到的表达式，称之为三角函数有理式，记为 $R(\sin x, \cos x)$。

万能变换：设 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}(1-\tan^2\frac{x}{2}) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$x = 2\arctan t$　$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$ — t 的有理函数积分

例4. $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

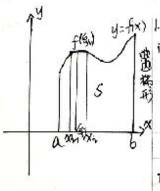
解 原式 $\xlongequal{\text{令} t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} \cdot dt = \int \frac{t^2+2t+1}{2t} dt$

$= \frac{1}{2}\ln|t| + t + \frac{1}{4}t^2 + C$

$= \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}| + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C$

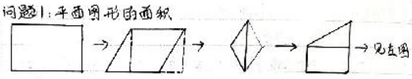
第六章 定积分

§6.1 定积分的概念与性质



1.典型问题

问题1：平面图形的面积



$S: \begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

方法：(1) 将区间$[a,b]$任意分成n个小子区间，$[x_{i-1}, x_i]$，$i=\overline{1,n}$

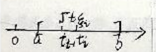
(2) $f(\xi_i)\Delta x_i$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

(4) $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to S$ $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$

$\lambda = 0 \Rightarrow n \to \infty$

问题2：变速直线运动的路程S $v(t)$ $t\in[a,b]$



方法：(1)分割：$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$

(2)作乘积：$v(\xi_i)\Delta t_i$ $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$，$i=\overline{1,n}$

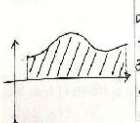
(3)求和：$\sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \approx S$

(4)取极限，$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}$，当$\lambda\to 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \to S$

2.积分定义

定义：设$f(x)$在$[a,b]$上有定义，(1) 任取$[a,b]$的一个分划，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$；(2) 任取一个点$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$i=\overline{1,n}$ (3)求和：$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (4)若无论$[a,b]$的分划如何，ξ_i的选取如何，和式极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$总是存在且相等，$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，则称此极限为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分，也称$f(x)$在$[a,b]$上可积。记为$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$ "$\int$"积分号，"a"积分下限，"b"积分上限，"$[a,b]$"积分区间，"$f(x)dx$"被积表达式，"$f(x)$"被积函数，"dx"积分变量x的微分（点x的长度微元）

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ← 不同于 一般极限



3.定积分的意义

(1) $\int_a^b f(x)dx$ 表示曲边梯形面积的代数和 eg. $\int_0^{2\pi}\sin x\,dx = 0$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

(2) $\int_a^b f(x)dx$ 表示变速直线运动（$f(x)$-速度）在时间段$[a,b]$所走的路程的代数和

(3) $\int_a^b f(x)dx$ 表示力的大小为$f(x)$，方向指向x轴的正方向，将质点从a点移动到b点所做的功

4.定积分的性质

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

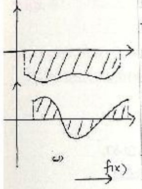
(2) $\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx$ (线性性质)

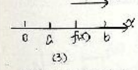
(3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(4) $\int_a^b dx = b-a$

(5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (有向性)

以上为计算性质





(3)

(6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(7) $f(x)\le g(x)$ $a<b$，有$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

(8) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ $(a<b)$

(9) $m \le f(x) \le M$，则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ $(a<b)$

以上为不等式性质

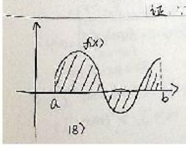
定积分只与积分区间及被积函数的函数关系有关，与积分变量记号无关。定义与不定积分有很大不同。

积分上限与下限无所谓谁大谁小均可。

(10) 定积分中值定理：设$f(x)\in C[a,b]$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

—积分中值公式

证 $\because f(x)\in C[a,b]$，$\therefore f(x)$在$[a,b]$上有最大值M和最小值m



(8)

数学意义：将有限数的平均值推广至无穷多数的平均值
物理意义：变速直线运动的平均速度

即 $m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$，由介值原理，

$\exists \xi \in [a,b]$，使 $\underline{f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

§6.2 定积分定理

1.定积分存在的必要条件

定理1：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

注：① 有界不一定可积 eg. $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$ $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\begin{cases}b-a, & \xi_i\in Q\\ 0, & \xi_i\in Q^c\end{cases}$

② 无界必不可积

2.定积分存在的充分条件 则 $\int_a^b D(x)dx$ 不$\exists$

定理2：若 $f(x)$ 满足下列条件之：(1) $f(x)\in C[a,b]$，(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且有有限个间断点，(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

3.微积分基本定理

(1) 变限积分函数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，称 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$，

$\psi(x)=\int_x^b f(t)dt$，$x\in[a,b]$

为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的变上限（下限）积分函数

(2) 微积分基本定理第一部分 — 微分部分

变上限积分函数是连续函数的一个原函数

定理3：若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导且 $\varphi'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$

证明：$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt]$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt \xlongequal[\text{定理}]{\text{定积分中值}} \lim_{\Delta x}\frac{1}{\Delta x}f(\xi)\Delta x$ ξ 介于 x, $x+\Delta x$ 之间

$\Delta x\to 0$ 时 $\xi\to x$ $f(\xi)\to f(x)$ $=f(x)$

注：① 若 $f(x)$ 连续 $(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$ $(\int_x^b f(t)dt)'=(-\int_b^x f(t)dt)'=-f(x)$

② 若 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)$ 可导，$(\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt)'=f(\varphi(x))\varphi'(x)$

令 $u=\varphi(x)$ $\frac{d}{du}(\int_a^u f(t)dt)\frac{du}{dx}=f(u)\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$

$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt$

$=\int_{\psi(x)}^{a}f(t)dt+\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt$

$=-f(\psi(x))\psi'(x)+f(\varphi(x))\varphi'(x)$

③ 变限积分函数导数公式：$\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ 都存在，$f(x)$ 连续

$(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt)'=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$

例1：设 $y^y+e^x=x+\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}dt$，求 y'

解：$y^y(y\ln y)'+e^x=1+\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot 3x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x$

$\therefore y^y(y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}y')+e^x=1+\frac{3\sin x^3}{x}-\frac{2\sin x^2}{x}$

即 $y'=(1+\frac{3\sin x^3-2\sin x^2}{x}-e^x)/[y^y(\ln y+1)]$

例2：设 $f(x)\in C[0,1]$，证明 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $\xi f(\xi)-\int_\xi^1 f(x)dx=0$

证明：$\int[xf(x)+\int_1^x f(t)dt]dx$

$=\int xf(x)dx+x\int_1^x f(t)dt-\int x\,d(\int_1^x f(t)dt)$

$=\int xf(x)dx+x\int_1^x f(t)dt-\int xf(x)dx$

$=x\int_1^x f(t)dt+C$

$\therefore$ 取 $F(x)=x\int_1^x f(t)dt$ 有 $F(0)=F(1)$ 且 $f(x)\in C[0,1]$ 故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导

由罗尔定理可得 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $\xi f(\xi)-\int_\xi^1 f(x)dx=0$

(3) 微积分基本定理第二部分 — 积分部分 — 牛顿-莱布尼兹公式

定理4：设 $f(x)\in C[a,b]$，$F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$

证明：$(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$ $\therefore \int_a^x f(t)dt=F(x)+C$

令 $x=a$ 则 $C=-F(a)$，令 $x=b$，有 $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

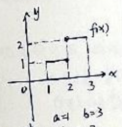
例1：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则（D）

(A) $\exists\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

(B) $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导，且 $\varphi'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$

(C) $(\int_a^b f(x)dx)^2\le\int_a^b f^2(x)dx$

(D) $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续



$a=1$ $b=3$

A: $\int_a^b f(x)dx=3$

$f(\xi)=\frac{\int_1^3 f(x)dx}{3-1}=\frac{3}{2}$

B: $\varphi(x)=\int_1^x f(t)dt$

$=\begin{cases}x-1, & 1\le x\le 2\\ 2x-3, & 2<x\le 3\end{cases}$

$\varphi'(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le 2\\ 2, & 2<x\le 3\end{cases}$

$\varphi(x)$ 在 $x=2$ 处不可导

C: $(\int_0^\pi \sin x\,dx)^2>\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$

$(\int_0^1 x\,dx)^2<\int_0^1 x^2dx$

证明：$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}(\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt)=\lim_{\Delta x\to 0}\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$

$\because f(x)$ 可积 $\therefore \exists M>0$ 使 $|f(x)|\le M$，$x\in[a,b]$

$0\le|\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt|\le M|\Delta x|\to 0$ $\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi=0$（两边夹挤）

运用定积分性质(8)

注. ① $f(x)\in C[a,b]$ 则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导

② $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt \in C[a,b]$

例2. 正确的是 (C)

定积分∃ $\Leftarrow\!\!\not\Rightarrow$ 不定积分∃

$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $f(x)$ 可能有第一类间断点

(B) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $f(x)$ 可能无界

(C) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

(D) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

§6.3. 定积分的计算

1. 用牛顿·莱布尼兹公式: $\int_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_a^b$ $(f(x)\in C[a,b])$

例1: $\int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^1 = 0$

例2. $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}\,dx$

解. 原式 $= \int_0^\pi |\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}|\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx$

$= 2(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2(-\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= -4$

2. 定积分的第一换元与分部积分公式

(1) 第一换元公式: $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\Big|_a^b$

例3: $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

解. 原式 $= \int_0^1 \frac{d\frac{1}{2}x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

(2) 分部积分公式: $\int_a^b g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)dg(x)$

例4. $\int_0^\pi e^x \sin x\,dx$

解. 原式 $= e^x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x d\sin x = -\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$

$= -\int_0^\pi \cos x\,de^x = -(e^x\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x d\cos x) = -(-e^\pi-1)+\int_0^\pi e^x\sin x dx$

∴ 原式 $= \frac{1}{2}(e^\pi+1)$

例5: 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$, 求 $\int_0^1 x f(x)dx$

解. 原式 $= \int_0^1 f(x)d\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 dx^2 = \frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$

(3) 定积分的第二换元公式

定理1: (第二换元公式) 设 $f(x)\in C[a,b]$, 令 $x=g(t)$ 满足:

(i) $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$

(ii) $g(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ (或 $[\beta,\alpha]$) 上连续

(iii) 当 $t\in[\alpha,\beta]$, (或 $[\beta,\alpha]$) 时, $g(t)\in[a,b]$

换元要换限

则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$

结论1: 设 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数, 当 $f(x)$ 是奇(偶)函数时有

$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ $\left(\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx\right)$

拆限+换元 ⟶ 证. $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

结论1中 $f(x)$ 为可积函数仍然正确

$= \int_a^0 f(-t)d(-t) + \int_0^a f(x)dx$

$= \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx$

$= \int_0^a (f(x)+f(-x))dx$

结论2中 $f(x)$ 为可积函数仍然正确

结论2: 若 $f(x)$ 是以T为周期的连续函数则 $\int_a^{a+T}f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

证. $\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T}$ $x-T=t$

$\int_a^0 f(x)dx + \int_T^{a+T}f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^a f(t+T)dt = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(t)dt = 0$

观察积分限, 拆限 例1: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}dx$

解. 原式 $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1+e^x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^x}dx$

令 $x=-t$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 t}{1+e^{-t}}dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^x}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^x}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

两次拆限换元 例2: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$

解. 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$ 令 $\frac{\pi}{2}-x=t$

转为线

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\cos t\,d(t)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin x + \ln\cos x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\frac{1}{2}\sin 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dx$

令$2x=t$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\ln\sin t\,dt - \frac{\pi}{4}\ln 2$

∴原式 $= -\frac{\pi}{2}\ln 2$

例3：正确的是（　）已知 $f(x)$ 连续且 $F'(x)=f(x)$

(A) 当 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 是奇函数　$f(x)=0$　$F(x)=C$

(B) 当 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 是偶函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数，则 $F(x)$ 是周期函数　$(\sin x)'=\cos x$　$(x+\sin x)'=1+\cos x$

(D) 当 $f(x)$ 是无界函数，则 $F(x)$ 是无界函数　$F(x)=\sin\frac{1}{x}$

拆限．换元　(B) $f(-x)=-f(x)$　$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$

$F(-x)=\int_a^{-x} f(-t)d(-t)+C = \int_a^x + \int_x^{-x} + C = F(x)+\int_x^{-x} f(u)$

§6.4 广义积分

1. 无穷区间上的广义积分

$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt \in C[a,+\infty) \leftarrow$ 定义：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ $[-\infty,b]$ 上的任何有限子区间上都可积，称极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分，若此极限存在，则称此广义积分收敛或存在，否则，称此广义积分发散或不存在。$\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt$ 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ $(\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt = \int_{-\infty}^b f(x)dx)$

若 $F'(x)=f(x)$ 且 $f(x)$ 连续，则

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty}(F(x)-F(a)) = \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$

$= F(+\infty)-F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$

$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^b$

例1：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

解：原式 $= \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

例2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

解：原式 $= \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

$= \arctan x\Big|_{-\infty}^0 + \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \pi$

注意．两不同变限函数趋向不同，若一个函数极限不存在，则其极限和差均不存在，当且仅当两函数极限都存在，则极限存在。

注：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

例3：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx$　$(0<\beta<1)$

解：原式 $= \int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)} \overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=} \int_1^0 \frac{t^2\cdot t^\beta}{(t^2+1)(t^\beta+1)}\cdot(-\frac{1}{t^2})dt = \int_0^1\frac{t^\beta}{(t^2+1)(t^\beta+1)}dt$

∴原式 $= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt \in C[a,b]$，$\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)=\varphi(b)=\int_a^b f(t)dt$

考虑：$\varphi(x)$ 在 b 点不连续，$\varphi(x)$ 在 $\mathring{U}(b)$，但 $\varphi(b)$ 不∃，则 $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)$ 可能∃可能不∃

2. 瑕积分

$\varphi(x)\in C[a,b)$　$\psi(x)=\int_x^b f(t)dt \in C(a,b]$

定义2：设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ $(a,b]$ 的任何闭子区间上可积，$f(x)$ 在 b a 点的左 右 邻域内无界，称 $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$ 为瑕积分，称 $x=b$ 为瑕点。

$\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$　$x=a$

若此极限存在，则称此瑕积分收敛或存在，否则称其发散或不∃。

记为 $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$ 若 $F'(x)=f(x)$ 且 $f(x)$ 连续则 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b^-}$

$\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$　$(\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^b)$

例1：$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解：原式 $= \arcsin x\Big|_0^{1^-} = \frac{\pi}{2}$

例2：$\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$

解：原式 $= \ln|x|\Big|_{-1}^1 = 0$　(X)

原式 $= \int_{-1}^0\frac{1}{x}dx + \int_0^1\frac{1}{x}dx$

$\int_{-1}^0\frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_{-1}^{0^-} = -\infty$ 不∃　$\int_0^1\frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_{0^+}^1 = +\infty$ 不∃

∴ $\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$ 不∃

注：瑕点 $c\in(a,b)$，$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ 且右端两个瑕积分都存在 ⇒ 左端积分∃

3.定积分求极限

公式：$\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]}{n}$

利用此公式求"无穷和""无穷积"的数列极限

例1: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$

例2: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]}$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]}$

$=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$

例3: 设$f(x)\in C[0,1]$且$f(x)>0$

证明 $\ln\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1\ln f(x)dx$

证: $\ln\int_0^1 f(x)dx=\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]$

$\int_0^1\ln f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln f(\frac{1}{n})+\ln f(\frac{2}{n})+\cdots+\ln f(\frac{n}{n})]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}$

①均值不等式:

$x_i>0,\ i=\overline{1,n}$

$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

② $x_n\geq y_n\Rightarrow\lim x_n\geq\lim y_n$

由均值不等式得 $\ln\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]\geq\ln\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}$

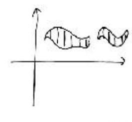
由极限的保序性得 $\ln\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1\ln f(x)dx$

§6.5.定积分的应用

1.微元法

设S满足: ①S具有可加性 ②∃闭区间$[a,b]$与S对应 ③$\forall x\in[a,b]$点区间$[x,x+dx]$所对应的S的分量(微元)dS等于$f(x)$在点区间$[x,x+dx]$上的值$f(x)$乘以点区间的长度dx: $dS=f(x)dx$ 则 $S=\int_a^b f(x)dx$

2.求平面图形面积



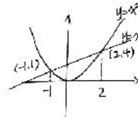
(1)函数曲线所围图形面积

(a) X-型域S的面积

$S:\begin{cases}a\leq x\leq b\\ g(x)\leq y\leq f(x)\end{cases}$ —X-型域 $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$

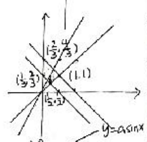
(b) Y-型域S的面积

$S:\begin{cases}a\leq y\leq b\\ g(y)\leq x\leq f(y)\end{cases}$ —Y-型域 $S=\int_a^b[f(y)-g(y)]dy$



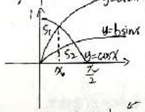
例1: 求由曲线 $y=x^2$, $y=x+2$ 所围图形面积

解 $S=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=\frac{9}{2}$

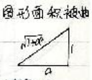


例2: 求由直线 $y=x$, $y=2x$, $x+y=1$, $x+y=2$ 所围图形面积

解 $S=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}[2x-(1-x)]dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}(2x-x)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(2-x-x)dx=\frac{1}{4}$



例3: 由曲线 $y=\cos x$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 间部分与两坐标轴所围图形面积被曲线 $y=a\sin x$, $y=b\sin x$ $(a>b>0)$ 分成三等分, 求a, b



解 $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$ $S_1=\frac{1}{3}$ $a\sin x_0=\cos x_0$ $\tan x_0=\frac{1}{a}$

$S_1=\int_0^{x_0}(\cos x-a\sin x)dx=(\sin x+a\cos x)\Big|_0^{x_0}=\sin x_0+a\cos x_0-a$

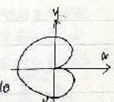
$=\sqrt{1+a^2}-a=\frac{1}{3}$ $\sqrt{1+a^2}+a=3$ $\therefore a=\frac{4}{3}$ 类似地 $b=\frac{5}{12}$

(2)极坐标曲线所围图形面积

扇形域S: $\begin{cases}\alpha\leq\theta\leq\beta\\ g(\theta)\leq r\leq f(\theta)\end{cases}$

$S:\begin{cases}a\leq r\leq b\\ g(r)\leq\theta\leq f(r)\end{cases}$

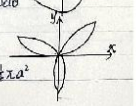
由微元法, 有 $S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[f^2(\theta)-g^2(\theta)]d\theta$



例1: 求心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$ 所围图形的面积

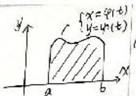
解 $S=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1-\cos\theta)^2d\theta=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)d\theta$

$=a^2\int_0^{\pi}(1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}-2\cos\theta)d\theta=\frac{3}{2}\pi a^2$



例2: 求曲线 $r=a\sin 3\theta\ (a>0)$ 所围图形面积

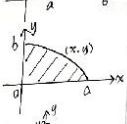
解 $S=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}a^2\sin^2 3\theta d\theta=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 6\theta}{2}d\theta=\frac{1}{4}\pi a^2$



(3) 参数曲线所围图形面积

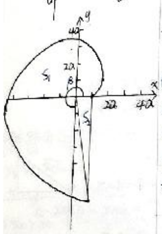
由一条参数曲线所围曲边梯形 $S:\begin{cases}a\le x\le b\\ 0\le y\le y(x)\end{cases}$ 的面积

$S=\int_a^b y(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\psi(t)\,d\varphi(t)$ 其中 $y(x)$ 为参数曲线 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$



例1: 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积

解: $\begin{cases}x=a\cos\theta & \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ y=b\sin\theta\end{cases}$ $S=4\int_0^a y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin\theta\, d(a\cos\theta)=\pi ab$



例2: 求曲线 $\begin{cases}x=a(t\sin t+\cos t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 所围图形的面积 及直线 $x=a(y\le 0)$

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\tan t$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y_t)'}{x'_t}=\frac{1}{at\cos^3 t}$

$y'=0$ $t=0,\pi,2\pi$ y'' 不∃ $t=0,\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$

$t=0$ $(a,0)$ $t=\frac{\pi}{2}$ $(\frac{\pi}{2}a, a)$ $t=\pi$ $(-a,\pi a)$ $t=\frac{3}{2}\pi$ $(-\frac{3}{2}\pi a,-a)$

$t=2\pi$ $(a,-2\pi a)$

$\begin{cases}x=r\cos\theta \Rightarrow r^2=x^2+y^2\\ y=r\sin\theta \quad \theta=\tan\frac{y}{x}\end{cases}$

如图 $S=S_1+S_2$ $S_2=\frac{1}{2}a\cdot 2\pi a=\pi a^2$

$S_1=\int_0^\beta \frac{1}{2}r^2d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a^2(1+t^2)\frac{t^2}{1+t^2}dt$

$=\frac{4}{3}\pi^3a^2$

$d\theta=\frac{d}{dt}dt=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'x-xy'}{x^2}=\frac{t^2}{1+t^2}dt$

$\therefore S=S_1+S_2=\frac{4}{3}\pi^3a^2+\pi a^2$

3. 平面曲线的弧长

(1) 函数曲线 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ 弧微分 $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$, 要求 $dx>0$ 则曲线长

$S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

(2) 参数曲线 $\begin{cases}x=\varphi(t), t\in[\alpha,\beta]\\ y=\psi(t)\end{cases}$, $ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$, $dt>0$, 则

$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

(3) 极坐标曲线 $r=r(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$, 则 $ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$, $d\theta>0$, 则

$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$

例1: 半径为R的圆的周长

解 如图, $x^2+y^2=R^2$, $\begin{cases}x=R\cos\theta, & \theta\in[0,2\pi]\\ y=R\sin\theta\end{cases}$

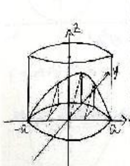
$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_\theta'^2+y_\theta'^2}d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2}d\theta=2\pi R$

例2: 求 $r=a(1-\cos\theta)$ 的长度 $(a>0)$

解: $S=\int_0^{2\pi}\sqrt{[a(1-\cos\theta)]^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta$

$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=4a(-\cos\frac{\theta}{2})\Big|_0^{2\pi}=8a$

4. 横截面已知的空间体体积

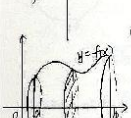


例1: 设有正椭圆柱体, 底面在xOy平面上, 其方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$, 用过Ox轴且与xOy平面成30°的平面去截此柱体得到一多形体, 求该多形体体积

解 如图 $V=2\int_0^a\frac{1}{2}y\cdot y\tan\frac{\pi}{6}dx=\int_0^a\frac{\sqrt{3}}{3}y^2dx=\int_0^a\frac{\sqrt{3}}{3}(1-\frac{x^2}{a^2})b^2dx$

$=\frac{2}{9}\sqrt{3}ab^2$

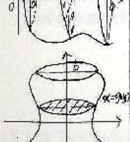
5. 旋转体的体积



① 曲边梯形 $\begin{cases}a\le x\le b\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$ 绕x轴旋转一周得到的旋转体体积

$V=\int_a^b\pi f^2(x)dx$

② $\begin{cases}a\le y\le b\\ 0\le x\le g(y)\end{cases}$ $V=\int_a^b\pi g^2(y)dy$



例1: 求由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形分别绕两个坐标轴旋转形成的体积

解 ① 绕x轴旋转 $V=2\int_0^a\pi y^2dx=2\int_0^a\pi(1-\frac{x^2}{a^2})b^2dx=\frac{4}{3}\pi ab^2$

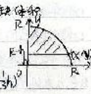
② 绕y轴旋转 $V=2\int_0^b\pi x^2dy=2\int_0^b\pi(1-\frac{y^2}{b^2})a^2dy=\frac{4}{3}\pi a^2b$

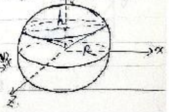
例2: 求半径为R, 高为h的球缺体积

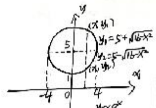
解 如图, $V=\int_{R-h}^R\pi x^2dy$

$=\int_{R-h}^R\pi(R^2-y^2)dy$

$=\pi(R^2y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{R-h}^R=\pi h^2(R-\frac{1}{3}h)$





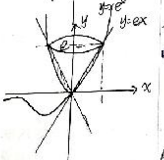


例3. 求由曲线 $x^2+(y-5)^2=16$ 所围成图形绕 x 轴旋转形成的体积

解. 如图. $V=2\left[\int_0^4 \pi y_1^2 dx-\int_0^4 \pi y_2^2 dx\right]$

$$=2\int_0^4 \pi\, 20\sqrt{16-x^2}\,dx=40\pi\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx=40\pi\times\frac{1}{4}\pi 4^2=160\pi^2$$

$$\underline{\underline{x=4\sin t}}\ 40\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-16\sin^2 t}\,d(4\sin t)$$



例4. 求由曲线 $y=xe^x$ 直线 $y=ex$ 所围图形绕 y 轴旋转形成的体积

解. 如图 $xe^x=ex \Rightarrow x=0,1$

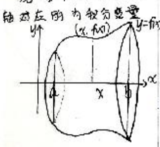
$V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2 e=\frac{\pi}{3}e$

$V_2=\int_0^e \pi x^2 dy=\int_0^e \pi x^2 d(xe^x)=\int_0^e \pi x^2(x+1)e^x dx$

$=\int_0^1 \pi(x^3+x^2)de^x=\pi(4-e)$

6.旋转体的侧面积

绕哪个轴转则该轴对应的为积分变量



曲边梯形 $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周形成的旋转体侧面积

$S=\int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+y'^2}\,dx$

例1: 半径为R的球面面积

解 $S=2\int_0^R 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\int_0^R 2\pi\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx$

$=4\pi\int_0^R\sqrt{R^2}\,dx=4\pi R^2$

球冠的表面积. $S=\int_{R-h}^R 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{R-h}^R\sqrt{R^2}\,dx=2\pi Rh$

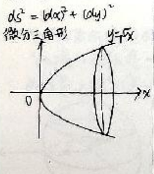
$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$ds^2=(dx)^2+(dy)^2$

微分三角形

例2: 求曲线 $y=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$ 绕 x 轴旋转形成的旋转曲面面积

解. $S=\int_0^1 2\pi\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$



7. 定积分在物理方面的应用

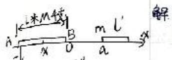
(1) 质点间引力: $F=k\frac{m_1m_2}{r^2}$

(2)(平面)小薄片: $F=\rho_水 ghS=ghS$

(3) $W=FS$

例1: 设有一条长l米质量为M千克的均匀细杆AB, 在AB的延长线上距B点. a米处有一个质量为m千克的质点, 求细杆AB对质点m的引力F.

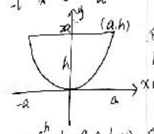
(3) 力系数 $k>0$)



解 $F\leftrightarrow[-l,0]$ $\forall x\in[-l,0]$, $[x,x+dx]$

$F=\int_{-l}^0 k\frac{M}{l}dx\cdot m\frac{1}{(a-x)^2}=\frac{kMm}{l}\frac{1}{a-x}\Big|_{-l}^0=\frac{kMm}{a(a+l)}$

$\int_a^{a+l'}F_x=\frac{kM\frac{m}{l'}dx}{x(x+l)}$



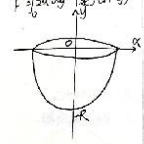
例2: 设水库有一抛物线型的闸门(如图), 闸门的上沿宽2a米, 高为h米, 让水库蓄满水, 求此闸门所承受的水压力F ($\rho_水=1$)

解. 如图, $y=bx^2$, $x=a$, $y=h$ 代入 $\Rightarrow b=\frac{h}{a^2}$ $\therefore y=\frac{h}{a^2}x$

$F=\int_0^h 2g(h-y)\sqrt{\frac{a^2y}{h}}\,dy=\frac{8}{15}agh^2$

$F=\int_0^h 2x\,dy\cdot\rho_水 g(h-y)$

例3: 设有一个半径为R的半球形碗(如图), 盛满水, 将此容器中水全部抽出所做的功. ($\rho_水=1$)



解. 如图所示, 由微元法, 有 $W=\int_{-R}^0 \pi x^2 dy\,\rho_水 g(0-y)=\pi g\int_{-R}^0 x^2(-y)\,dy$

$=\pi g\int_{-R}^0 (R^2-y^2)(-y)\,dy=\frac{\pi}{4}gR^4$

第七章 微分方程

§7.1 基本概念

(1) 常微分方程: 含有未知函数导数或微分的等式

(2) 微分方程的阶: 方程中未知函数的最高阶数

(3) 微分方程的解:

(4) 通解

(5) 奇解: 不包含在通解中的解

(6) 定解条件(初始条件) n阶方程满足的n个条件: $y|_{x=x_0}=y_0$, $y'|_{x=x_0}=y_1$, ..., $y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1}$ 称为定解条件

"计算方法" 数值解法

(7) 特解: 通解中通过定解条件得到的解

(8) 解的存在性、唯一性稳定性

§7.2 一阶微分方程

1.可分离变量方程：

称 $y'=p(x)q(y)$ （$p(x)$是关于x的已知函数，$q(y)$是关于y的已知函数）为可分离变量方程

解法：可分离变量法

$\frac{dy}{dx}=p(x)q(y)$ $\quad \frac{dy}{q(y)}=p(x)dx \quad (q(y)\neq 0)$

$\Rightarrow \int\frac{dy}{q(y)}=\int p(x)dx+C$ （这里$\int\frac{dy}{q(y)}$ $\int p(x)dx$都只表示一个原函数）

方程的通解

例1：求方程 $yy'+x=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解

解 $y\cdot\frac{dy}{dx}+x=0 \Rightarrow ydy=-xdx \Rightarrow \int ydy=\int -xdx+C$

$\Rightarrow$ 通解为 $\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C$ 代入 $y|_{x=1}=0$ 得 $C=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 特解为 $x^2+y^2=1$

例2：求解方程 $yy'=\sqrt{1-y^2}$

解 $y\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx \ (y\neq\pm 1) \Rightarrow \int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=\int dx+C$

$-\sqrt{1-y^2}=x+C \Rightarrow (x+C)^2+y^2=1 \quad (x+C\leq 0)$ $\quad y=\pm 1$是奇解

2.方程的变量代换

(1)齐次方程 $y'=f(\frac{y}{x})$，$f(\frac{y}{x})$—齐次函数 已知

解法：令 $\frac{y}{x}=u$，$\Rightarrow y=ux$，$\Rightarrow y'=u+xu'=f(u)$

$\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=f(u)$ $\quad \frac{du}{f(u)-u}=\frac{1}{x}dx$

例1：解方程 $\frac{x+y}{x-y}=y'$

解 令 $\frac{y}{x}=u$，$\Rightarrow y=ux \Rightarrow y'=u+xu'=\frac{1+u}{1-u}$

$xu'=\frac{1+u}{1-u}-u=\frac{1+u^2}{1-u}$ $\quad \Rightarrow \arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+C$

$\int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac{1}{x}dx+C$

通解 ← 即 $\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(1+\frac{y^2}{x^2})=\ln|x|+C$

例2：求与曲线簇 $x^2+y^2=2Cx$ 正交的曲线簇

解 $(\frac{x^2+y^2}{x})'_x=(2C)'_x \quad \Rightarrow y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}$

设两簇曲线的交点为(x,y)，所求曲线簇在点(x,y)处满足 $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

令 $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=xu \Rightarrow y'=u+xu' \Rightarrow u+xu'=\frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow xu'=\frac{u+u^3}{1-u^2}$

$\int\frac{1+u^2-2u^2}{u+u^3}du=\int\frac{1}{x}dx+C' \Rightarrow \int(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2})du=\ln|x|+C' \Rightarrow$

$\ln|u|-\ln(1+u^2)=\ln|x|+C' \Rightarrow \ln\frac{|u|}{1+u^2}=\ln|x|+C'$

$\Rightarrow \frac{u}{1+u^2}=x\cdot(\pm e^{C'})=x\cdot C_1 \ (C_1\neq 0)$

$\Rightarrow \frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=C_1x \Rightarrow \frac{xy}{x^2+y^2}=C_1x \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{C_1}y=C_2y$

(2) 线性分式方程 $y'=f(\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2})$

① 当 $C_1=C_2$，为齐次方程

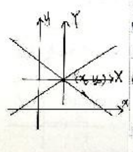
② 当 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\lambda$ $\quad y'=f(\frac{\lambda(A_2x+B_2y)+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}) \xlongequal{u=A_2x+B_2y} f(\frac{\lambda u+C_1}{u+C_2}) \quad u'=A_2+B_2y'$

$\Rightarrow \frac{u'-A_2}{B_2}=f(\frac{\lambda u+C_1}{u+C_2})$ — 可分离变量

例1：$y'=\frac{x-y+1}{x-y}$

解 令 $u=x-y \Rightarrow u'=1-y' \Rightarrow y'=1-u'=\frac{u+1}{u}=1+\frac{1}{u} \Rightarrow -u'=\frac{1}{u}$

$\Rightarrow \int udu=\int(-1)dx+C \Rightarrow \frac{1}{2}u^2=-x+C \Rightarrow \frac{1}{2}(x-y)^2=-x+C$ — 通解



③ 当 $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ 令 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=x_0\\y=y_0\end{cases}$

令 $\begin{cases}x=X+x_0\\y=Y+y_0\end{cases}$ $\quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(Y+y_0)}{d(X+x_0)}=\frac{dY}{dX}=f(\frac{A_1X+B_1Y}{A_2X+B_2Y})$ $\quad$ 令 $u=\frac{Y}{X}$

例2.解方程 $y'=\frac{y+2}{x+y-1}$

解：令 $\begin{cases}y+2=0\\x+y-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-2\\x=3\end{cases}$ 令 $\begin{cases}x=X+3\\y=Y-2\end{cases}$ 则原方程变为 $\frac{dY}{dX}=\frac{Y}{X+Y}=\frac{\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$

令 $u=\frac{Y}{X} \Rightarrow Y=uX$ $\quad \frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX}=\frac{u}{1+u} \Rightarrow X\frac{du}{dX}=\frac{u}{1+u}-u=\frac{-u^2}{1+u}$

$\therefore \int\frac{1+u}{u^2}du=\int-\frac{1}{X}dX+C' \Rightarrow -\frac{1}{u}+\ln|u|=-\ln|X|+C'$

$\therefore \ln|u|+\ln|X|=\frac{1}{u}+C' \Rightarrow |uX|=e^{\frac{1}{u}}e^{C'} \Rightarrow uX=e^{\frac{1}{u}}(\pm e^{C'})$

$\Rightarrow Y=e^{\frac{X}{Y}}\cdot C \ (C\neq 0) \Rightarrow y+2=e^{\frac{x-3}{y+2}}\cdot C \ (C\neq 0)$

$\because y=-2$是方程的解 $\therefore$ 通解为 $y+2=e^{\frac{x-3}{y+2}}C$，C为任意常数

$y' = (x+y)^2$ 令 $u=x+y \Rightarrow u' = 1+y' = 1+u^2 \Rightarrow u'-1 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1+u^2$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+u^2} du = \int dx + c' \Rightarrow \arctan u = x + c'$

$\Rightarrow \arctan(x+y) = x + c'$

3.一阶线性微分方程

定义：称 $y' = p(x)y + q(x)$ 为一阶线性微分方程，其中 $p(x)$、$q(x)$ 为 x 的已知函数，称 $q(x)$ 为方程的非齐次项、自由项。若 $q(x) \neq 0$ ($\equiv 0$) 称此方程为一阶线性非齐次（齐次）微分方程。

(1) 齐次方程通解公式

$y' = p(x)y \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int p(x)dx + c' \Rightarrow \ln|y| = \int p(x)dx + c'$

$|y| = e^{\int p(x)dx} \cdot e^{c'} \Rightarrow y = e^{\int p(x)dx} \cdot (\pm e^{c'}) = C \cdot e^{\int p(x)dx}$ $(C \neq 0)$

此处仅需求出 $p(x)$ 的一个原函数 ← $\because y=0$ 也是方程解 $\therefore y = C \cdot e^{\int p(x)dx}$，$C$ 为任意常数

例1. 解方程 $xy' = y$

解. $y' = \frac{1}{x} y \Rightarrow y = Ce^{\int \frac{1}{x}dx} = Ce^{\ln|x|} = C|x|$ × 在 $x=0$ 点不可导

故 $= Ce^{\ln x} = Cx$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c' \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c' = |y| = |x| \cdot e^{c'}$

$\Rightarrow y = x(\pm e^{c'}) = Cx$

注：在通解公式中 $e^{\int p(x)dx} = e^{\ln f(x)}$，$f(x)$ 不打绝对值

(2) 非齐次的通解公式 $y' = p(x)y + q(x)$

$\int \frac{1}{y} dy = \int p(x)dx + \int \frac{q(x)}{y} dx + c'$

$\ln|y| = \int p(x)dx + \int \frac{q(x)}{y} dx + c'$

$y = e^{\int p(x)dx} \boxed{e^{\int \frac{q(x)}{y}dx} \cdot C} = \boxed{u} e^{\int p(x)dx}$

解法：常数变易法 令 $y = u \cdot e^{\int p(x)dx}$，$u = u(x)$

$y' = u' \cdot e^{\int p(x)dx} + ue^{\int p(x)dx} p(x) = p(x) u \cdot e^{\int p(x)dx} + q(x)$

$u' = e^{-\int p(x)dx} \cdot q(x) \Rightarrow u = \int q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + C$

一阶线性微分方程的通解公式 ← $\therefore y = (C + \int q(x) e^{-\int p(x)dx} dx) e^{\int p(x)dx}$ —通解公式

$= y_1 + y_2$

$y_1 = Ce^{\int p(x)dx}$ 齐次通解

类比线代 ←

$y_2 = \int q(x) e^{-\int p(x)dx} dx \, e^{\int p(x)dx}$ 非齐次特解

例1：求 $xy' = y + x^2e^x$ 满足 $y|_{x=1} = 0$ 的解

解. $y' = \frac{1}{x} y + xe^x$

$y = (C + \int xe^x e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx) e^{\int \frac{1}{x}dx}$

$= (C + \int xe^x \frac{1}{x} dx) x = (C + e^x) x$

将 $x=1$ $y=0$ 代入得 $C = -e$ 即 $y = (e^x - e)x$

例2. 解方程 $(x - y^2e^y)y' = y$

不适合分离变量也不是典型可尝试将 x 看作函数 y 看作自变量或者换元转化

解. $x - y^2e^y = y\frac{dx}{dy} = x' \cdot y \Rightarrow x' = \frac{1}{y}x - ye^y$ $p(y) = \frac{1}{y}$ $q(y) = -ye^y$

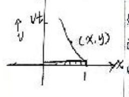
$x = (C + \int -ye^y e^{-\int \frac{1}{y}dy} dy) e^{\int \frac{1}{y}dy}$

$= (C - e^y) y$

$y' = p(x)y + y^\lambda q(x)$ $(\lambda \neq 0, 1)$

方程的应用见反面 ←

例1：一个儿童用一米长的竹杆拉一个玩具，起始时，儿童在 (0,0) 处，玩具在 (1,0) 处，现在儿童以匀速 v 沿 y 轴正向行走，问玩具所运行的轨迹如何？



解：如图 设 $t=0$ 为初始状态，经过时间 t，儿童运行到 $(0, vt)$ 处，玩具在 (x,y) 处，有 $(y-vt)^2 + x^2 = 1$ ①

过 x y 点切线 $Y - y = y'(X-x)$ 代入 $(0, vt)$ 得 $vt - y = y'(-x)$ ② 令 $x = \sin t$

② 代入 ① 中有 $y'^2x^2 + x^2 = 1$ 且 $y|_{x=1} = 0 \Rightarrow y' = -\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$ $(0 < x \leq 1)$ $y = \int -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$

$= -\cos t - \ln|\csc t - \cot t| + C$

4.贝努利方程：$y' = p(x)y + y^\lambda q(x)$ $(\lambda \neq 0, 1)$ 代入 $t = \arcsin t$ $y|_{x=1} = 0$ $C = 0$

$y^{-\lambda} y' = y^{-\lambda} p(x) y + q(x) = y^{1-\lambda} p(x) + q(x)$ 令 $y^{1-\lambda} = u \Rightarrow (1-\lambda) y^{-\lambda} y' = u'$

$\Rightarrow \frac{u'}{1-\lambda} = p(x)u + q(x) \Rightarrow u' = (1-\lambda)p(x)u + (1-\lambda)q(x)$

通解公式— $\therefore y^{1-\lambda} = u = (C + \int (1-\lambda) q(x) e^{-\int (1-\lambda)p(x)dx} dx) e^{\int (1-\lambda)p(x)dx}$

例3. 解方程：$xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$ $p(x) = \frac{4}{x}$ $q(x) = x$ $\lambda = \frac{1}{2}$

解. $y^{\frac{1}{2}} = (C + \int \frac{1}{2} x e^{-\int \frac{1}{2}\frac{4}{x}dx} dx) e^{\int \frac{1}{2}\frac{4}{x}dx}$

$= (C + \int \frac{1}{2} x \cdot e^{-2\ln x} dx) \cdot x^2$

$= (C + \frac{1}{2}\ln|x|) x^2$

$yx' = 4x + y^2\sqrt{x}$ $x' = \frac{4}{y}x + y\sqrt{x}$ $p(y) = \frac{4}{y}$ $q(y) = y$ $\lambda = \frac{1}{2}$

§7.3 三种可降阶的高阶方程

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型方程　　$y^{(3)}=x$

$$y=\underbrace{\iint\cdots\int}_{n} f(x)\,(dx)^n + C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2}+\cdots+C_1x+C_0$$

2. $F(x, y^{(n)}, y^{(n+1)})=0$ 型方程

解法：令 $y^{(n+1)}=u$，$y^{(n)}=u'$，则方程变为 $F(x, u', u)=0$

若此方程可解，则原方程可解

例1：求方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=3$ 的解

解 设 $u=y'$，$u'=y''$，原方程变为 $(1+x^2)u'=2xu \Rightarrow u'=\frac{2x}{1+x^2}u$

$u=Ce^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}=C(1+x^2)$　代入 $u|_{x=0}=3$ 得 $C=3$

$\therefore y'=u=3(1+x^2)$　$\therefore y=x^3+3x+C'$ 代入 $y|_{x=0}=1$ 得 $C'=1$

$\therefore y=x^3+3x+1$

3. $F(y, y', y'')=0$ 型方程

设 $y'=u$，$u=u(y)$，$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}$

方程变为 $F(y, u, u\frac{du}{dy})=0$

例2：求方程 $yy''=1+(y')^2$ 满足 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$ 的解。

解 设 $u=y'$，$y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}$，原方程变为

$y\cdot u\cdot\frac{du}{dy}=1+u^2 \Rightarrow \int\frac{u}{1+u^2}du=\int\frac{1}{y}dy+C' \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|y|+C' \Rightarrow \sqrt{1+u^2}=|y|\cdot e^{C'}=y\cdot(\pm e^{C'})$

$\sqrt{1+u^2}=y\cdot C''$　代入 $u|_{y=1}=0$ 得 $C''=1$

$\therefore \sqrt{1+u^2}=y \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2}=y \Rightarrow y'=\pm\sqrt{y^2-1}$

$\Rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}dy=\int\pm dx+C \Rightarrow \ln|y+\sqrt{y^2-1}|=\pm x+C$

$\Rightarrow |y+\sqrt{y^2-1}|=e^{\pm x}\cdot e^C \Rightarrow y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}\cdot C_0$　代入 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_0=1$

$\therefore y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}$　$y-\sqrt{y^2-1}=e^{\mp x}$（分子有理化）

$\therefore y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

例2：飞机着陆时，为减少滑行距离，立即打开机尾减速伞，经测试，此伞形成的阻力大小与滑行速度成正比，比例系数 $k=6\times10^6$。今有一架重9000kg的飞机，着陆时的水平速度为700km/h。若不计较飞机与地面摩擦力，求飞机最长滑行多少米？

解 由牛顿第二定律：t-时间　s-滑行距离，$t=0$ 为初始状态

$9000\frac{d^2s}{dt^2}=-6\times10^6\frac{ds}{dt}$ 且 $s|_{t=0}=0$，$v=\frac{ds}{dt}$　$v|_{t=0}=700$

令 $v=\frac{ds}{dt}$，则方程变为 $9000\frac{dv}{dt}=-6\times10^6 v$ 且 $v|_{t=0}=700$

$v=C\cdot e^{\int\frac{-6\times10^6}{9000}dt}=Ce^{-\frac{2000}{3}t}$　将 $v|_{t=0}=700$ 代入 $C=700$

$\therefore v=700\cdot e^{-\frac{2000}{3}t} \Rightarrow s=\int v\,dt=\int 700e^{-\frac{2000}{3}t}dt=-\frac{21}{20}e^{-\frac{2000}{3}t}+C'$

将 $s|_{t=0}=0$ 代入得 $C'=\frac{21}{20}$　$\therefore s=\frac{21}{20}-\frac{21}{20}e^{-\frac{2000}{3}t}$

$\lim\limits_{t\to+\infty}s=\frac{21}{20}=1.05$（公里）

例3：有一个装有进出两个水嘴的圆柱形容器，盛有50%浓度的酒精水溶液 bL，现同时打开两个水嘴，它们的速度均为 a L/min，而进水嘴流进10%浓度的酒精水溶液。问经过多长时间，容器中酒精水溶液浓度变为20%？

解：t-时间　$y(t)$-t时刻容器中的浓度，给 t 一个增量 Δt

$\Delta y=\frac{[y(t)b+a\Delta t\cdot10\%-y(t)a\Delta t]}{b}-y(t)$

$\therefore \Delta y=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{10}\Delta t-\frac{a}{b}y(t)\Delta t$

$\Rightarrow y'=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{10}-\frac{a}{b}y(t)$　且 $y|_{t=0}=50\%$

$y=0.4e^{-\frac{a}{b}t}+0.1=0.2 \Rightarrow t=\frac{b}{a}\ln4$

§7.4 n阶线性微分方程及其通解的结构

一、n阶线性微分方程

型如：$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=f(x)$　(1)

称(1)为n阶线性微分方程，当 $f(x)=0$ 时，称(1)为n阶线性齐次方程，

当 $f(x)\neq0$ 时，称(1)为n阶线性非齐次微分方程，令 $L\triangleq\frac{d^n}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$

$L(y)=f(x)$　(1)

$L(y)=0$　(2)

福昕扫描王快速指南

欢迎使用福昕扫描王安卓 APP！ 体验 OCR 文字识别功能，将图片转换成文字内容，满足您的日常工作学习的需要，赶紧看看怎么使用吧！

1.添加文件

1）首页从相册导入图片文件

2）使用手机相机拍照，导入图片文件

2.文字识别

1）单张图片识别

预览图片文档，可旋转图片、调整图片亮度、颜色、对比度，点击“文字识别”按钮进行识别，点击“复制文本”拷贝文本内容，可重复查看识别结果；

2）多张图片识别

添加多张图片到文档详细页，点击“文字识别”按钮，对文档内的所有文件进行识别，点击“复制”拷贝文本内容，可重复查看识别结果。

3.如何与我们取得联系？

加入用户QQ交流群与我们取得联系，QQ群号码：587813807

第一章 函数

一、实数集 $\mathbb{R}$

①完备性 $(+,-,\times,\div)$

②有序性：$\forall a,b\in\mathbb{R}$，要么 $a<b$，要么 $a>b$，要么 $a=b$

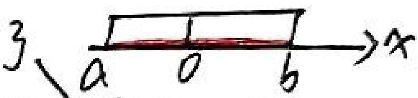
③阿基米德性：$\forall c>0$，$\exists$ 正整数 n，使 $n>c$

④稠密性：$\forall a,b\in\mathbb{R}$，$\frac{a+b}{2}$

⑤实数 $\longleftrightarrow$ 数轴上的点 一一对应　$\forall$ 实数 $a \longleftrightarrow$ 点 a

二、常见的数集

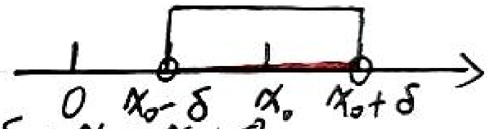
① $\forall a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$，开区间 $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$



闭区间 $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$ 〉有限区间

半开半闭区间 $(a,b]$，$[a,b)$

$(-\infty,+\infty)$ — 无穷区间



②邻域：设 $\delta>0$，x_0 点的 δ 邻域是 $\{x\in\mathbb{R}\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$

记为 $U(x_0,\delta)=U_\delta(x_0)$

x_0 点的去心邻域是 $\{x\in\mathbb{R}\mid x_0-\delta<x<x_0\}\cup\{x\in\mathbb{R}\mid x_0<x<x_0+\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\mathring{U}_\delta(x_0)$

③有(无)界集

定义：设 $D\subseteq\mathbb{R}$，若 $\exists$ 实数 $M>0$（或者 $\exists a,b\in\mathbb{R}$）使 $\forall x\in D$，有 $|x|\le M$，$(a\le x\le b)$ 则称 D 为有界集（a 为 D 的下界，b 为 D 的上界）。否则，称 D 为无界集，即 $\forall M>0$，$\exists x_0\in D$，使 $|x_0|>M$

确界公理 若数集 D 有上(下)界，则必有最小(大)上(下)界，称为 D 的上(下)确界，记为 $\sup D$ $(\inf D)$

确界的鉴别：$A=\sup D \Leftrightarrow \forall x\in D$，有 $x\le A$

$\forall \varepsilon>0$ $\exists x_0\in D$，使 $x_0>A-\varepsilon$

$A=\inf D \Leftrightarrow \forall x\in D$，有 $x\ge A$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists x_0\in D$，使 $x_0<A+\varepsilon$

三. 函数

定义：设在某一问题中，有两个变量 x, y，若对变量 x 所取的每一个数通过一个规律（对应法则）f，总有唯一的一个变量 y 与之对应，这时我们称 y 为 x 的一元函数，简记为 $y=f(x)$，称 x 为自变量，y 为因变量

注：定义域 $\begin{cases}\text{实际定义域：} S=\pi r^2 \ (r>0) \\ \text{自然定义域：函数 } y=\pi r^2 \ r\in\mathbb{R}\end{cases}$

对应规律（函数关系）$\begin{cases}\text{具体的对应规律：公式法、列表法} \\ \text{抽象的对应规律：图形法}\end{cases}$

2. 常见的函数形式 (10)

<1> 数列 $\{a_n\}$：$a_n=f(n)$ —— 整标函数

<2> 基本初等函数 (6)

常量函数 $y=C$ 　指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$ 　幂函数

对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$

三角函数 $\sin x$ $\cos x$, $\tan x$ $\cot x$ 　图象见 P_{13}

反三角函数 $y=\arcsin x$ 　$x\in[-1,1]$, $y\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y=\arccos x$ 　$x\in[-1,1]$, $y\in[0,\pi]$

$y=\arctan x$, 　$x\in\mathbb{R}$ 　$y\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$y=\mathrm{arccot}\, x$, 　$x\in\mathbb{R}$ 　$y\in(0,\pi)$

<3> 初等函数：由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合

<4> 反函数

<5> 复合函数：$y=f(t)$, $t=g(x) \to f(g(x))$

<6> 参数函数：$\begin{cases}x=\varphi(t), t\in T \\ y=\psi(t)\end{cases}$ 　$y=\psi(\varphi^{-1}(x))$

<7> 隐函数：$x^2+y^2=1 \to y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 显函数

狄利克雷函数

<8> 分段函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$　取整函数：$y=[x]=n, n\le x<n+1$

$n=0,\pm1,\pm2\cdots$

3.计算函数值及函数值的表示

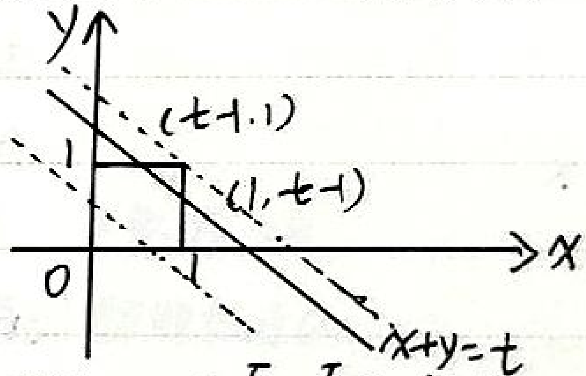
自变量—点　因变量—函数值

比如求 $y=f(x)$ 在 x_0 点的函数值 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$

4.函数图形

例1：设平面上有一正方形D，$0\le x\le1$，$0\le y\le1$，又有直线 l：$x+y=t\ (-\infty<t<+\infty)$，$S(t)$ 表示正方形D在直线 l 左下方的面积，求 $S(t)$ 的表达式

解：$S(t)=\begin{cases}1, & t\ge2\\ 1-\frac{1}{2}(2-t)^2, & 1<t<2\\ \frac{1}{2}t^2, & 0<t\le1\\ 0, & t\le0\end{cases}$　注意分类



例2：设 $f(x)$ 满足 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，求 $f(x)$

解：将 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x\ \cdots(1)$ 中 x 换成 $-x$

得 $f(1-\sin x)-3f(1+\sin x)=-8x\ \cdots(2)$

解(1)(2)得 $f(1-\sin x)=-2x$

令 $1-\sin x=t$，$0\le t\le2$，则 $x=\arcsin(1-t)$

$\therefore f(t)=-2\arcsin(1-t)$ 从而有 $f(x)=-2\arcsin(1-x)$，$0\le x\le2$

例3：设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\ge0\\ \sin x, & x<0\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}x^3, & x\le1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$　求 $f(g(x))$

解：$f(g(x))=\begin{cases}2^{g(x)}, & g(x)\ge0\\ \sin g(x), & g(x)<0\end{cases}=\begin{cases}2^{x^3}, & x\le1 且 x^3\ge0\\ 2^{\ln x}, & x>1 且 \ln x\ge0\\ \sin x^3, & x\le1 且 x^3<0\\ \sin(\ln x), & x>1 且 \ln x<0\end{cases}=\begin{cases}2^{x^3}, & 0\le x\le1\\ 2^{\ln x}, & x>1\\ \sin x^3, & x<0\end{cases}$

注意答题时的条理性，勿跳步骤

第二章 极限与连续

§2.1. 极限的概念

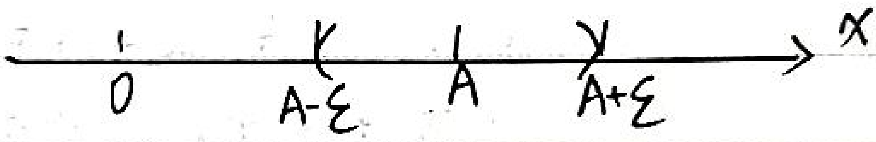
1.数列极限：已知数列$\{x_n\}$，当n无限增大时，对应的项x_n与某一实数A无限接近，则称实数A为数列$\{x_n\}$的极限

"$\varepsilon-N$"定义：已知数列$\{x_n\}$，$A\in R$，若$\forall\varepsilon>0$，∃正整数N，当$n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$(5)，则称数列$\{x_n\}$收敛，(有极限)，称A为数列$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，或$x_n\to A$，当$n\to\infty$

注：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$（正整数集，不包括0）当$n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$

注：(1) ε贵在小，(2) N贵在存在　　至多有$x_1, x_2, \cdots x_N \notin U(A,\varepsilon)$

(3) 几何表示



改变数列前面有限个项并不影响数列的收敛。

2.发散数列：没有极限的数列 e.g. $(-1)^n$

例1：用定义验证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证：分析，$\forall\varepsilon>0$，找N，当$n>N$时，有$|\frac{1}{n}-0|<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$

$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，当$n>N$时，有$n>[\frac{1}{\varepsilon}]$，$\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow|\frac{1}{n}-0|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

例2：用定义验证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

分析：$\forall\varepsilon>0$，$|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1$

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdots 1}\le\frac{2n^{\frac{1}{2}}+n-2}{n}=\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+1<1+\varepsilon$$

取$N=[\frac{4}{\varepsilon^2}]$，当$n>N$时 有$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

例3：下列哪些描述可作a是数列$\{x_n\}$极限的定义 (1.2.3.4)

(1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当$n\ge N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，有$n>N$时，有$|x_n-a|\le\varepsilon$

(3) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，有$n>N$时，有$|x_n-a|<k\varepsilon$，k为正常数

(4) $\forall m\in\mathbb{N}$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-a|<\frac{1}{m}$

(1) $\Rightarrow$ (5) 显然

(5) $\Rightarrow$ (1) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N'=N+1$, 当 $n\geq N'>N$, 有 $|x_n-a|<\varepsilon$

(5) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (5) $\forall\varepsilon'>0$, 取 $\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{2}$, 由 (2) 可知 $\exists N$ 当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|\leq\varepsilon<\varepsilon'$

(5) $\Rightarrow$ (3) 显然. (5) $\Rightarrow$ (4) 显然

3. 子数列的概念

已知数列 $\{x_n\}$, $x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$

子数列 $\{x_{n_k}\}$, $x_2, x_8, x_{15}, x_{27}\cdots$

n_k 是表示 x_{n_k} 这一项在 $\{x_n\}$ 中是第 n_k 项

k 是表示 x_{n_k} 这一项在 $\{x_{n_k}\}$ 中是第 k 项 显然 $n_k\geq k$

4. 定理: 数列收敛于 $a\Leftrightarrow$ 它的所有子数列都收敛于 a

证: $\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$ 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-a|<\varepsilon$

取 $N'=N+1$, 当 $k>N'$ 时, $n_k\geq k>N'=N+1$, $\Rightarrow n_k>N$

$\therefore$ 有 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$, $\therefore\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$

<1> 判定数列发散 e.g. $\{(-1)^n\}$ $\{\sin\frac{n}{2}\pi\}$

<2> 判定数列收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$

§2.2 函数的极限

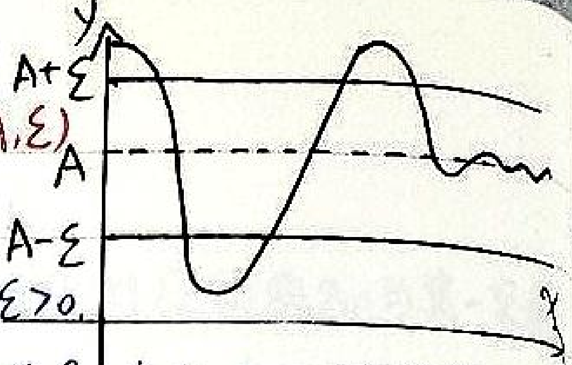
一. 函数的自变量趋于无穷大时的极限

(1) 函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限

定义1: 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有定义, A 为常数, 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 当 $x>X$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$, 当 $x\to+\infty$

注：$\forall U(A,\varepsilon)$，$\exists X>0$，使 $f((X,+\infty))\subseteq U(A,\varepsilon)$

几何表示



定义2：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上有定义，A为常数，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$，当 $x\to-\infty$。

定义3：设 $f(x)$ 在 $|x|>a$ 上有定义，A为常数，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ $(x\to\infty)$

定理1：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

例：$f(x)=\frac{1}{x}$　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$　$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

二. 函数自变量趋于有限值时的极限(函数在一点处的极限)

设 $f(x)$，自变量 x 无限接近 x_0，且 $x\neq x_0$，若 $f(x)$ 无限接近常数A，则称A为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限

定义4：$(\varepsilon-\delta)$ 设 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义，A为常数，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为 $f(x)$（当 $x\to x_0$ 时）在 x_0 点的极限

记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$，当 $x\to x_0$ 时

注：$\forall U(A,\varepsilon)$，$\exists \mathring{U}(x_0,\delta)$，使 $f(\mathring{U}(x_0,\delta))\subseteq U(A,\varepsilon)$

定义5：若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$.

定义6：若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$

左、右极限统称为单侧极限

定理　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

例1：用定义验证 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$。

分析：$\forall\varepsilon>0$，找 δ，$0<|x-x_0|<\delta$，$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$

$|\sin x-\sin x_0|<|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}|\le 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\le|x-x_0|<\delta\le\varepsilon$

证：$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|\sin x-\sin x_0|=|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}|$ $\le|x-x_0|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ $\therefore\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

例2：用定义验证$\lim\limits_{x\to1}x^2=1$

分析：$\forall\varepsilon>0$，找δ，$0<|x-1|<\delta$，$|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|<\delta|x+1|=\delta|x-1+2|$ $\le\delta||x-1|+2|<\delta^2+2\delta<3\delta\le\varepsilon$ $0<\delta<1$ $\Rightarrow$取$\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{3},1\}$

法二：$\forall\varepsilon>0$ 不设设$0<|x-1|<1\Rightarrow0<x<2$且$x\ne1$，$1<1+x<3$ 取$\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{3}\}$，$|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|<3|x-1|<\varepsilon$

结论：由极限定义可得几个极限定式：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ $0<a<1$

(3) 若$f(x)$是基本初等函数且$f(x)$在x_0有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

§2.3 极限的性质与计算

1.极限的性质

定理1（唯一性）若一个数列（或函数）有极限，则极限唯一

证：设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 反证法 又设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$，且$A\ne B$，不妨设$B<A$

取$\varepsilon=\frac{A-B}{2}$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\exists N_1\in N$，当$n>N_1$时有$|x_n-A|<\varepsilon\Rightarrow x_n>A-\varepsilon=\frac{A+B}{2}$ ①

又由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$，$\exists N_2\in N$，当$n>N_2$时有$|x_n-B|<\varepsilon\Rightarrow x_n<B+\varepsilon=\frac{A+B}{2}$ ②

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时①②同时成立从而$x_n<\frac{A+B}{2}<x_n$ 矛盾

所以假设不成立，$A=B$

定理2（有界性）

1) 若数列$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$有界，即$\exists M>0$，使$|x_n|\le M$

2) 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 则$\exists X>0$，使$|x|>X$时，$f(x)$有界，即$\exists M>0$，使$|f(x)|\le M$，$\forall x\in(X,+\infty)\cup(-\infty,-X)$

3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 则$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时 $f(x)$有界，即$\exists M>0$，使$|f(x)|\le M$，比

$\in \mathring{U}(x_0,\delta)$

注：数列是整体有界，函数是局部有界

定理3：（保序性）设 $\lim x_n = A$，$\lim y_n = B$，则

(1) 若 $A>B$，则 $\exists N$，使 $n>N$ 时，有 $x_n > y_n$ ＞逆否命题

证明 (2) 若 $\exists N$，使 $n>N$ 时有 $x_n \geq y_n$，则 $A \geq B$ 　　保号性

证：(1)（类似唯一性证明）取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$，由 $\lim x_n = A$ 得 $|x_n - A| < \varepsilon$ 即 $x_n > \frac{A+B}{2}$ 由 $\lim y_n = B$ 得 $|y_n - B| < \varepsilon$ 即 $y_n < \frac{A+B}{2}$ $\therefore y_n < \frac{A+B}{2} < x_n$

2. 极限的四则运算与复合运算

定理4：设 $\lim x_n = A$，$\lim y_n = B$，则 $\lim(x_n \pm y_n) = A \pm B$，$\lim x_n y_n = AB$

前提：极限存在

$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$ $(B \neq 0, y_n \neq 0)$

证：$\forall \varepsilon > 0$ 由 $\lim x_n = A$ $\exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$

由 $\lim y_n = B$ $\exists N_2$ 当 $n > N_2$ 时 有 $|y_n - B| < \varepsilon$，且 $\exists M$ 使 $|y_n| \leq M$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 当 $n > N$ 时，有 $|x_n y_n - AB| = |(x_n - A)y_n + A(y_n - B)| < \varepsilon|y_n| + |A|\varepsilon \leq (M+|A|)\varepsilon = \varepsilon'$ $\therefore \lim x_n y_n = AB$

定理5：设 $f(g(x))$ 为 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的复合函数，且满足：

(1) $f(g(x))$ 在 x_0 的去心邻域内有定义　　eg. $y=f(u)=\sqrt{u}$　$u=\sin x - 1$

(2) $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$

(3) $g(x) \neq u_0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$

则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = A = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$

证：$\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，$\exists \eta > 0$，当 $0 < |u - u_0| < \eta$，有 $|f(u) - A| < \varepsilon$

对上述的 $\eta > 0$，由 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$，$\exists \delta_1 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时有 $|g(x) - u_0| < \eta$ 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_0\}$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$

$\therefore$ 有 $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$，$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = A$

结论：(1) 指、幂、对数、三角、反三角运算可以交换次序（和极限）（极限存在）

若f是基本初等函数，$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A = \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$

(2) 若$f(x)$是初等函数，且$f(x)$在x_0的邻域内有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ／定式 ＼不定式

e.g. $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$ $u=g(x)=0$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = \lim\limits_{u\to 0} f(0) = -1$

$\lim\limits_{u\to 0} f(u) = 1$

初等函数① 极限问题

例1: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{2}{3}$ （运用极限的四则运算）

例2: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1} = \dfrac{3}{2}$

例3: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \dfrac{1}{2}$

例4: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(p-1)(q^n-1)+b(q-1)(p^n-1)}{a(p-1)(q^{n+1}-1)+b(q-1)(p^{n+1}-1)}$ $(a>0, b>0, p>0, p\neq 1, q>0, q\neq 1)$

解 (1) $0<p<1$, $0<q<1$ 原式$=1$

(2) $0<p<1$, $q>1$ 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(p-1)(1-\frac{1}{q^n})+b(q-1)(\frac{p^n}{q^n}-\frac{1}{q^n})}{a(p-1)(q-\frac{1}{q^n})+b(q-1)(\frac{p^{n+1}}{q^n}-\frac{1}{q^n})} = q$

(3) $p>1$, $0<q<1$ 原式$=p$

(4) $p>1$, $q>1$ $\begin{cases}p=q & \text{原式}=p\\ p>q & \text{原式}=p\\ p<q & \text{原式}=q\end{cases}$

② 例5: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2^3-1)(3^3-1)\cdots(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\cdots(n^3+1)}$ 无穷积／和问题

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1)\cdots(n-1)(n^2+n+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(3^2-3+1)\cdots(n+1)(n^2-n+1)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!\,(n^2+n+1)}{\frac{1}{2}(n+1)!\,(2^2-2+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n(n+1)}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{3} = \dfrac{2}{3}$

③ 例6: 设$x_1=2$, $x_{n+1}=x_n^2-nx_n+1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$ 猜证 数归法 递推

§24 收敛准则

1. 收敛准则I

定理1（两边夹挤准则）

若从某项以后有 $y_n\le x_n\le z_n$（若从某一时刻后有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$）且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ （$\lim g(x) = A = \lim h(x)$），则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ （$\lim f(x) = A$）

证: 设$\exists N_1$，当$n>N_1$时，有 $y_n\le x_n\le z_n$.

$\forall \varepsilon>0, \exists N_2$. 当 $n>N_2$ 时, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, 有 $A-\varepsilon < y_n < A+\varepsilon$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ $\exists N_3$, 当 $n>N_3$ 时, 有 $A-\varepsilon < z_n < A+\varepsilon$

取 $N=\max\{N_1, N_2, N_3\}$, 当 $n>N$ 时, 有 $A-\varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < A+\varepsilon$,

即 $|x_n - A| < \varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

例1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$ $\quad 0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{3}{n} < \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{3}{n}$

例2: $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$ ☆

$4 = (4^n)^{\frac{1}{n}} < (2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} < (3\times 4^n)^{\frac{1}{n}}$

例3: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}$

解: 设 $a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{a_n(2n+1)}$

$\Rightarrow a_n^2 < \frac{1}{2n+1}$

均值不等式

$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

简单不等式

$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$

☆ 例4: $\lim\limits_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$

解: $1 \le (n!)^{\frac{1}{n^2}} = (1^{\frac{1}{n}}\cdot 2^{\frac{1}{n}}\cdot 3^{\frac{1}{n}}\cdots n^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} \le \frac{1+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n} \le \frac{n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{n} = n^{\frac{1}{n}}$

$= \sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdots 1} \le \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n}\to 1$ $\quad\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$

法二: $(n!)^{\frac{1}{n^2}} \le (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n]{n}$

2 收敛准则 II

定理2 (单调有界准则) 单调 有界数列 必收敛.

定义1: 若数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 \le (\ge) x_2 \le (\ge) x_3 \le (\ge) x_4 \le (\ge) \cdots \le (\ge) x_n \le (\ge) \cdots$ 则称数列 $\{x_n\}$ 是单调上升(下降)的, 单调上升, 单调下降数列统称为单调数列

证: 设数列 $\{x_n\}\uparrow$ 有界, $\Rightarrow \{x_n\}$ 有上确界, 记为 $A=\sup x_n$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 使 $x_N > A-\varepsilon$, 当 $n>N$ 时, $A+\varepsilon > A \ge x_n \ge x_N > A-\varepsilon$

即 $|x_n - A| < \varepsilon$, $\therefore \lim x_n = A$

类似可证 若 $\{x_n\}\downarrow$ 有界, 则 $\lim x_n = \inf x_n$

注: ① 一般先证单调性再证有界性

② 作差 $x_{n+1} - x_n \ge 0 \uparrow$ $(\le 0 \downarrow)$

作比 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1 \uparrow$ $(\le 1 \downarrow)$

③若已证$\{x_n\}\uparrow$，$x_1 \le x_n \le \lim x_n$

若已证$\{x_n\}\downarrow$，$x_1 \ge x_n \ge \lim x_n$

例1：设$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{9}{x_n})$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解：$\because x_1>0$ $x_n>0$ $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{9}{x_n})\ge\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{9}=3$ $(n\ge1)$

$\therefore \frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{9}{x_n^2})\le 1$ $(n\ge2)$ $\therefore \{x_n\}\downarrow$

又$\because 3\le x_n\le x_2$ 由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在记为A

$\lim x_{n+1}=\lim\frac{1}{2}(x_n+\frac{9}{x_n})$ $\therefore A=\frac{1}{2}(A+\frac{9}{A})$ $\therefore A=3$或-3(舍去)

$\because x_n>0$ $\therefore \lim x_n\ge\lim 0=0$ 即$A\ge0$

例2：设$x_1=a>0$，$x_{n+1}=\sqrt{b+x_n}$，求$\lim x_n$ $(b>0)$

解：$x_{n+1}-x_n=\sqrt{b+x_n}-\sqrt{b+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{b+x_n}+\sqrt{b+x_{n-1}}}$

$\therefore x_{n+1}-x_n$与x_n-x_{n-1}同号，从而与x_2-x_1同号，且$\{x_n\}$单调

$x_2-x_1=\sqrt{b+a}-a=\frac{b+a-a^2}{\sqrt{b+a}+a}$

<1> $b+a-a^2=0$ $\Rightarrow a=\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$或$\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$(舍去)

此时$x_n=a$ $\forall n\in\mathbb{N}$，$\therefore \lim x_n=a$

<2> $b+a-a^2<0$时$\{x_n\}\downarrow$ 此时$a>\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$或$a<\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$(舍去)

又$0<x_n\le x_1$ 由单调有界准则知 $\lim x_n\exists$ 记为A，$\therefore \lim x_{n+1}=\lim\sqrt{x_n+b}$

$\Rightarrow A=\sqrt{b+A}\Rightarrow A=\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$或$A=\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$(舍去)

<3> $b+a-a^2>0$时$\{x_n\}\uparrow$ 此时$\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 又$\because a>0$

$\therefore 0<a<\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 下证$x_n\le\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 用数归法证之

当$n=1$，$x_1=a<\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$

设$n=k$时，$x_k\le\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 则

当$n=k+1$时，$x_{k+1}=\sqrt{b+x_k}\le\sqrt{b+\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}}=\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$

$\therefore \{x_n\}$有界且$\uparrow$

由单调有界准则知 $\lim x_n\exists$ 记为A．$\therefore \lim x_{n+1}=\lim\sqrt{x_n+b}$

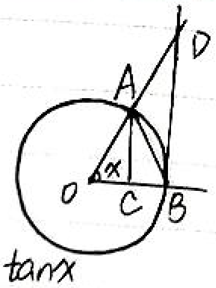
$\Rightarrow A=\sqrt{b+A}\Rightarrow A=\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$或$A=\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$(舍去)

①有理式 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$ 　无理式 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

②三角运算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\sin t}$

③对数运算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$

§2.5 两个重要极限



1重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

证：不妨设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，如图所示，取单位⊙O

$S_{\triangle AOB}<S_{扇形AOB}<S_{\triangle DOB}$ 即 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$

$\Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

又∵ $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ 都是偶函数 ∴ $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 且 $x\neq0)$

$\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$ 由两边夹挤准则 有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

推论：① $\lim\limits_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$ （$\square\to0$且$\square\neq0$）

② $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$ 　③ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ 　④ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1$

牛顿二项式定理

$(a+b)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}C_n^r a^{n-r}b^r$

$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

eg. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\arctan2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}\cdot\frac{2x}{\arctan2x}=\frac{3}{2}$

2重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

证明：① $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

$a_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\frac{1}{n})^3+\cdots+(\frac{1}{n})^n$

$a_{n+1}=1+(n+1)\frac{1}{n+1}+\frac{(n+1)n}{2!}(\frac{1}{n+1})^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}(\frac{1}{n+1})^3+\cdots+\frac{(n+1)n\cdots}{n!}(\frac{1}{n+1})^n+\frac{(n+1)n\cdots(n+1-n)}{(n+1)!}(\frac{1}{n+1})^{n+1} \Rightarrow a_n<a_{n+1}$

$\therefore \{a_n\}\uparrow \quad 2=a_1\le a_n$

$a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$

由单调有界准则知，$\lim a_n$ 存在，记为e，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

② $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

不妨设 $x>0$, $n=[x]$, $n\le x<n+1$, $1+\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}+1\le\frac{1}{n}+1$

由 $1+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{x}\geq 1+\frac{1}{n+1}$　$n+1>x\geq n$ 得

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{x})^{x}>(1+\frac{1}{n+1})^{n}$$

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1}=(1+\frac{1}{n})^{n}(1+\frac{1}{n})\to e\ (n\to+\infty)$$

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}(1+\frac{1}{n+1})^{-1}\to e\ (n\to+\infty)$$

由两边夹挤准则可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

③ $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}\overset{x=-t}{=\!=\!=}\lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t-1})^{t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}\cdot(1+\frac{1}{t-1})\to e$$

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$　即 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

推论：$\lim\limits_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e\ (\square\to0$ 且 $\square\neq0)$　$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

例1：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$

例2：$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=\ln a$

$e=\lim\limits_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}$ 可简化"1^{∞}"型的极限计算

例3：$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x+b})^{x}\ (a\neq b)$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a-b}{x+b})^{\frac{x+b}{a-b}\cdot\frac{a-b}{x+b}\cdot x}=e^{a-b}$$

例4：$\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x-\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos x(1-\cos x)}\cdot\cos x(1-\cos x)\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x\to0}\cos x(1-\cos x)\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\cos x\, 2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}2\cdot(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

例5：$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^{n}(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}})^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}})^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n}$

$=e^{4}$　$\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n=\frac{2\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot2=4$

§26 两种量

1. 概念

定义1：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$）则称 $\{x_n\}$（或 $f(x)$）是自变量给定趋向下的无穷小量

注：常量0是无穷小量，无穷小量常用字母α, β, γ表示

定义2：设有数列$\{x_n\}$（或函数$f(x)$），$\forall M>0$，若$\exists N\in\mathbb{N}$（$\exists\delta>0$或$\exists X>0$）当$n>N$（$0<|x-x_0|<\delta$或$|x|>X$）时，有$|x_n|>M$（或$|f(x)|>M$），则称数列$\{x_n\}$（或函数$f(x)$）是在自变量给定趋向下的无穷大量，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$（或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）

注：无穷大量是无界函数，反之不成立。

例如 $f(x)=x\sin x$　　$x_n'=2n\pi+\frac{\pi}{2}$　$f(x_n')=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty\ (n\to\infty)$

　　　　　　　　　　$x_n''=n\pi$　　　$f(x_n'')=0$

非0无穷小的倒数是无穷大

2. 无穷小的性质

性质1：有限个无穷小的和、积仍是无穷小

　　无限个无穷小的和、积不一定是无穷小

反例：$\{x_n^1\}$　$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

$\{x_n^2\}$　$1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

$\{x_n^3\}$　$1, 1, 3^2, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

……

$\{x_n^k\}$　$1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots, k^{k-1}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^1 x_n^2 x_n^3 x_n^4\cdots)=1$

性质2：有界量与无穷小之积仍是无穷小

证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　$|y_n|\le M$，$\forall n\in\mathbb{N}$，$M>0$，证$\lim x_ny_n=0$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当$n>N$时$|x_n|<\varepsilon$，$\therefore |x_ny_n|\le\varepsilon M$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$

$\lim x_n=A$　$\lim y_n=B$　若$A=B$则$\lim x_n=\lim y_n$　$\lim(x_n-y_n)=0$

$\Leftrightarrow x_n-y_n=\alpha$，$\Leftrightarrow x_n=y_n+\alpha$

性质3：$\lim x_n=\lim y_n$（$\lim f(x)=\lim g(x)$）$\Leftrightarrow x_n=y_n+\alpha$（$f(x)=g(x)+\alpha$），$\alpha$是无

穷小量.

例: 已知$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$, $f(x)$是已知函数, 求常数a和b

解: $f(x)-ax=b+\alpha$ $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha=0$ $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-b-\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

3. 无穷小的阶

定义1: 设$\alpha.\beta$为自变量相同趋向下的无穷小,

(1) 若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, 称$\alpha$是$\beta$的高阶无穷小, 记为$\alpha=o(\beta)$

(2) 若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$, 称$\alpha$是$\beta$的低阶无穷小.

(3) 若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=C\neq0$, 称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小, (记为$\alpha=O(\beta)$)

(4) 若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, 称$\alpha$与$\beta$是等价无穷小, 记为$\alpha\sim\beta$

(5) 若$\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=C\neq0$, 称$\alpha$是$\beta$的$k$阶无穷小 $(k>0)$

e.g. $\lim\frac{\gamma}{\beta^m}=C'\neq0$ $k>m$. $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha}{\beta^k}\cdot\frac{\beta^k}{\beta^m}\cdot\frac{\beta^m}{\gamma}\to0$

注: $0<k<1$, α是β的低阶无穷小 $k>1$, α是β的高阶无穷小

$k=1$, α与β是同阶无穷小.

e.g. 注意分母不为0 $\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}\ (x\to0)\sim x\sin\frac{1}{x}\ (x\to0)$ ×

定理1: $\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\alpha-\beta=o(\alpha)$ (或 $\alpha-\beta=o(\beta)$)

证: $\Rightarrow$ $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=1-\frac{\beta}{\alpha}\to0$ $\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1\to0\right)$

$\Leftarrow$ $\alpha-\beta=o(\alpha)\Rightarrow\alpha=\beta+o(\alpha)\Rightarrow1=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\Rightarrow1=\lim\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow\beta\sim\alpha$

定义2: 若$\alpha\sim\beta$, 则称β是α的主(要)部(分), $\alpha-\beta$是α的次(要)部(分)

主部不唯一, 次部不唯一

定理2: 若$\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$,

则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ (等价无穷小代换定理)

注: 在极限运算过程中, 分子或分母中的乘法运算中无穷小因子可用其等价无穷小代换

即 $\lim\frac{\alpha f(x)}{\beta g(x)}=\lim\frac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}$ e.g. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0$ $\sin x\sim x+x^2$

$\lim\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\neq\lim\frac{\alpha'-\gamma'}{\beta'}$

4. 常见的等价无穷小

二元关系:

1. 反身性

e.g. $\alpha\sim\alpha\Leftrightarrow\lim\frac{\alpha}{\alpha}=1$

2. 对称性

$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\beta\sim\alpha$

3. 传递性

$\alpha\sim\beta,\ \beta\sim\gamma\Leftrightarrow\alpha\sim\gamma$

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\to1$

思考题

无穷小量 $\alpha.\beta$

$\alpha\pm\beta$ $\alpha\cdot\beta$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 (x\to 0)$

牛顿二项式

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

↓推广

$(n+1)^\beta = (1+n)^\beta = \sum_{r=0}^{\beta} C_\beta^r n^r$

$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$C_\beta^r = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-r+1)}{r!}$

$\square \sim \sin\square \sim \arcsin\square \sim \tan\square \sim \arctan\square \sim e^{\square}-1 \sim \ln(1+\square) \sim \frac{(1+\square)^\alpha-1}{\alpha}$

$(\square\to 0$ 且 $\square\neq 0)$

证: $\lim \frac{(1+\square)^\alpha-1}{\alpha\square} = \lim \frac{e^{\alpha\ln(1+\square)}-1}{\alpha\square} = \lim \frac{\alpha\ln(1+\square)}{\alpha\square} = 1$

$(1+\square)^\alpha-1 \sim \alpha\square \quad (\square\to 0) \qquad \tan x-\sin x \sim \frac{1}{2}x^3 \ (x\to 0)$

例1: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{2x-1}\cdot\sin\frac{5}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{2x-1}\cdot\frac{5}{x} = \frac{15}{2}$

例2: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\, 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}$

例3: 当 $n\to\infty$ 时, $(1+\frac{a}{n^2})^{\frac{1}{3}}-1 \sim 1-\cos\frac{1}{n}$, 求 a

解 $(1+\frac{a}{n^2})^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{n^2}\ (n\to\infty) \quad 1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\ (n\to\infty)$

$\lim \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{n^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}} = 1 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

例4: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\beta-n^\beta}$ $(\beta>0,\ \alpha,\beta$ 都是常数$)$

原式 $= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-\beta}}{(1+\frac{1}{n})^\beta-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-\beta}}{\frac{1}{n}\cdot\beta} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta}$

$\alpha-\beta+1>0$ 原式 $=+\infty \quad \alpha-\beta+1=0$ 原式 $=\frac{1}{\beta} \quad \alpha-\beta+1<0$ 原式$=0$

法二: $(n+1)^\beta = n^\beta+\beta\cdot n^{\beta-1}+\frac{1}{2!}\beta(\beta-1)n^{\beta-2}+\cdots$

原式 $= \lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\beta\cdot n^{\beta-1}+\frac{1}{2!}\beta(\beta-1)n^{\beta-2}+\cdots} =$

例5: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x} \qquad \sin\frac{\tan x-\sin x}{2}\sim\frac{\tan x-\sin x}{2}\sim\frac{1}{4}x^3 (x\to 0)$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan\tan x-\sin\tan x}{\tan x-\sin x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\tan^3 x}{\frac{1}{2}x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{2\cos\frac{\tan x+\sin x}{2}\sin\frac{\tan x-\sin x}{2}}{\frac{1}{2}x^3}$

$= 1+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{\tan x-\sin x}{2}}{\frac{1}{2}x^3} = 2$

§2.7 函数的连续性

1. 连续的概念

定义1: 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 任取此邻域内一点 $x\neq x_0$ 称差 $x-x_0=\Delta x$ 为 x_0 点的一个增量 $(x=x_0+\Delta x)$, 相应的函数差 $f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$, 称为 x_0 点对应的函数增量

注：Δx 可正可负，但 $\Delta x \neq 0$，而 Δy 可以等于0

定义2：设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续，称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点

注：连续的"ε-δ"定义：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

定义3：若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续

左、右连续统称为单侧连续（有时也称连续 e.g $f(x)$，$x \in [a,b)$）

注：① 当 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点左连续且右连续

② 当 $f(x)$ 在包含 x_0 点的单侧邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点单侧连续

定义4：若 $f(x)$ 在点集 I 上每一点都连续，则称 $f(x)$ 是 I 上的连续函数，记为 $f(x) \in C_I$

若 $I=\langle a,b\rangle$（$[a,b]$，(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$），则 $f(x)$ 的图形是一条连续的曲线

注：函数图形断开：① 自变量断开了 ② 函数不连续

2. 间断点及其类型

定义5：设 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义，若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点

第Ⅰ类间断点：若 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 都存在，但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$（跳跃）；或 $f(x_0-0)=f(x_0+0) \neq f(x_0)$（可去）；或 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 但 $f(x)$ 在 x_0 点无定义

第Ⅱ类间断点：不是第Ⅰ类间断点的间断点，即左右极限至少有一个不存在的间断点。

例1. ① $f(x)=\begin{cases} 2, & x \geq 1 \\ 1, & x<1 \end{cases}$ $\quad f(1-0)=1 \quad f(1+0)=2$

$\therefore x=1$ 是第Ⅰ类跳跃间断点

② $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\quad x=1$ 是第Ⅰ类可去间断点

③ $f(x)=\frac{1}{x}$ $f(0+0)=+\infty$ $f(0-0)=-\infty$ ∴ $x=0$ 是第Ⅱ类无穷间断点.

④ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

$x\to0^+$ $x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $f(x_n')=1$ $x_n''=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$, $f(x_n'')=-1$

$x_n'''=\frac{1}{n\pi}$ $f(x_n''')=0$ ∴ $x=0$ 是第Ⅱ类震荡间断点

定义5′: 若 $f(x)$ 在含 x_0 在内的单侧邻域内有定义, 而 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。此时, 若 $f(x)$ 在 x_0 点的单侧极限存在, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第Ⅰ类间断点, 否则, 称 x_0 是 $f(x)$ 的第Ⅱ类间断点.

例: ① $y=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$ $f(0+0)=-\infty$ ∴ $x=0$ 是第Ⅱ类无穷间断点.

② $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(1,3]\\ 2, & x=1\end{cases}$ $f(1+0)=1\neq f(1)$ ∴ $x=1$ 是第Ⅰ类间断点.

e.g. $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$, $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, 既不连续又不间断

3. 连续函数的性质

极限的四则复合运算→ <1> 连续函数的四则运算与复合仍是连续函数

<2> 连续函数的反函数仍是连续函数

<3> 初等函数在其有定义的区间上连续

例1. $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & |x|\le1\\ e^{\frac{1}{x+1}}, & |x|>1\end{cases}$ 连续性、间断点分类

解 ∵ $f(x)$ 是 $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$ 上的初等函数

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续

$f(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1^-}e^{\frac{1}{x+1}}=0$ $f(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1^+}(x^3+1)=0$ $\lim\limits_{x\to-1}=0=f(-1)$ ∴ $x=-1$ 点连续

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}x^3+1=2$ $f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x+1}}=e^{\frac{1}{2}}$ ∴ $x=1$ 是第Ⅰ类跳跃间断点

综上, $f(x)$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续

☆例2. 设 $f(x)$ 对任意实数 x_1, x_2 总有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 证明 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$

证明: 令 $x_1=x_2=0$, $f(0+0)=f(0)f(0) \Rightarrow f(0)=0$或1

(1) 当 $f(0)=0$, $\forall x\in \mathbb{R}$, $f(x+0)=f(x)f(0)=0$ ∴ $f(x)=0$

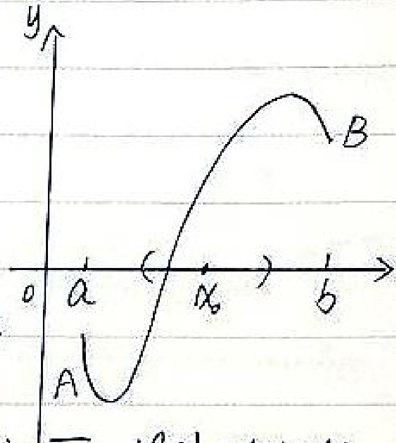
(2) 当 $f(0)=1$, $\forall x\in \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0)f(\Delta x)-f(x_0)]=f(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(\Delta x)-1]$

∵ $f(x)$在$x=0$点连续 ∴ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(0+\Delta x)-f(0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(\Delta x)-1]=0$

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$ ∴ $f(x)$在x_0点连续

由x_0的任意性可知, $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续



4.闭区间上连续函数的两个原理

定理1: 若$f(x)\in C[a,b]$ 则$f(x)$必有界

正面证明:
有限覆盖定理

找$M>0$, $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)|\le M$

∵ $f(x)$在x_0点连续 取定$\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\forall x\in[a,b]$, $\exists \delta_x$

$M_{x_0}=\frac{1}{2}+|f(x_0)|$ 有 $|f(x)|\le M_{x_0}$ $x\in U(x_0,\delta_{x_0})$

$\max\{M_{x_i}\}=M$ $\forall x\in[a,b]\subset\cup U(x_i,\delta_{x_i})$ $i=\overline{1,n}$ $|f(x)|\le M_i\le M$

用反证法, 设$f(x)$在$[a,b]$上无界

将$[a,b]$二等分, $[a,b]=[a,\frac{a+b}{2}]\cup[\frac{a+b}{2},b]$, 则$f(x)$至少在其中一个区间上无界, 记为$[a_1,b_1]$, 即$f(x)$在$[a_1,b_1]$上无界, 再将$[a_1,b_1]$二等分, $[a_1,b_1]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]\cup[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ $f(x)$至少在其中一个区间上无界, 记为$[a_2,b_2]$…如此下去, 得到一列

闭区间$[a_n,b_n]$ $n=1,2,3\cdots$ ① $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ ② 数列$\{a_n\}\uparrow$ 数列$\{b_n\}\downarrow$

③ $a\le a_n<b_n\le b$ ∴ 由单调有界准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$都存在

$\lim(b_n-a_n)=\lim\frac{b-a}{2^n}=0$ ∴ $\lim a_n=\lim b_n=\xi\in[a,b]$ ∴ $f(x)$在ξ点连续

取$\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\exists\delta>0$, 当$|x-\xi|<\delta$, $|f(x)-f(\xi)|<\frac{1}{2}$ ⇒ $|f(x)|\le|f(\xi)|+\frac{1}{2}$

∵ $\lim a_n=\xi$, 对上述$\delta>0$, $\exists N_1$, 当$n>N_1$时有$|a_n-\xi|<\delta$ ⇒ $\xi-\delta<a_n<\xi$

$\lim b_n=\xi$, $\exists N_2$, 当$n>N_2$时有$|b_n-\xi|<\delta$ ⇒ $\xi<b_n<\xi+\delta$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$, 当$n>N$时, 有$\xi-\delta<a_n<b_n<\xi+\delta$ ⇒

$\forall x\in[a_n,b_n]\subset U(\xi,\delta)$ $|f(x)|\le|f(\xi)|+\frac{1}{2}$ ⇒ $f(x)$在$[a_n,b_n]$上有界 $(n>N)$

这与$f(x)$在$[a_n, b_n]$上无界矛盾 ∴假设不成立 ∴$f(x)$在$[a,b]$上有界

注: 函数有界 $\nRightarrow$ 有最值 e.g. $g(x)=x,\ x\in(0,2)$ $|g(x)|<2$

定理2: 若$f(x)\in C[a,b]$ 则$f(x)$有最大值和最小值 (最值原理)

最小值自己证明

证: 用反证法 由Th1, $f(x)$有界 $\Rightarrow$ $f(x)$有上确界$M=\sup f(x),\ x\in[a,b]$

即$f(x)\le M$, 若$f(x)<M$, $M-f(x)>0$ $\forall x\in[a,b]$

令$g(x)=\frac{1}{M-f(x)}\in C[a,b]$, $g(x)$有界 $\Rightarrow g(x)$有上确界$K>0$, $g(x)<K$

$\Rightarrow \frac{1}{M-f(x)}<K \Rightarrow \frac{1}{K}<M-f(x) \Rightarrow f(x)<M-\frac{1}{K}$ 这与M是$f(x)$的上确界矛盾

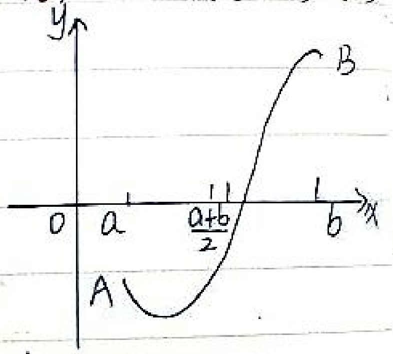
∴$\exists x_0\in[a,b]$使$f(x_0)=M$, 即$f(x)$在$[a,b]$上有最大值. 类似可证$f(x)$在$[a,b]$上有最小值

定义1: 设$f(x)$在点集I上有界, 若$\forall x\in I$, $\exists \xi\in I$, 使$f(x)\le f(\xi)$ ($f(x)\ge f(\xi)$)

则称$f(\xi)$是$f(x)$在I上的最大(小)值

定理3: (零点原理) 设$f(x)\in C[a,b]$ 且$f(a)f(b)<0$, 则至少存在一点$\xi\in(a,b)$

使$f(\xi)=0$



证: 不妨设$f(a)<0$, $f(b)>0$, 取$[a,b]$的中点$\frac{a+b}{2}$

若$f(\frac{a+b}{2})=0$ 则$\xi=\frac{a+b}{2}$; 若$f(\frac{a+b}{2})\ne0$

<1>若$f(\frac{a+b}{2})>0$, 令$[a_1,b_1]=[a,\frac{a+b}{2}]$

$f(\frac{a+b}{2})<0$, 令$[a_1,b_1]=[\frac{a+b}{2},b]$

取$[a_1,b_1]$的中点$\frac{a_1+b_1}{2}$, 若$f(\frac{a_1+b_1}{2})=0$ 则$\xi=\frac{a_1+b_1}{2}$ $f(a_1)<0$ $f(b_1)>0$

若$f(\frac{a_1+b_1}{2})\ne0$, 重复步骤<1>得到区间$[a_2,b_2]$ 且$f(a_2)<0$ $f(b_2)>0$

如此下去, 得一列闭区间$[a_n,b_n]$ $(n=1,2,3\cdots)$ 满足:

① $f(a_n)<0$ $f(b_n)>0$ ② $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ ③ $\{a_n\}\uparrow$ $\{b_n\}\downarrow$

④ $[a,b]\supseteq[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots$

$\lim a_n$和$\lim b_n$都$\exists$ $\lim(b_n-a_n)=\lim\frac{b-a}{2^n}=0$ ∴$\lim a_n=\lim b_n=\xi\in[a,b]$

$a\le a_n<b_n\le b$ ∴$f(x)$在ξ点连续 $\lim f(a_n)=\lim f(b_n)=f(\xi)$

又$\lim f(a_n)\le0$ $\lim f(b_n)\ge0$ ∴ $f(\xi)=0$

定理4: (介值原理) 设$f(x)\in C\langle a,b\rangle$, $x_1, x_2\in\langle a,b\rangle$ 满足: $f(x_1)<\mu<f(x_2)$

将开区间转闭区间的方法
① 缩小区间
② 补充定义

则至少$\exists$一点 $\xi \in \langle a,b \rangle$, 使 $f(\xi)=\mu$

证: 令 $g(x)=f(x)-\mu$ 则 $g(x)\in C[x_1,x_2]$ 不妨令 $x_1<x_2$ $g(x_1)g(x_2)<0$ 由零点原理 $\exists \xi \in [x_1,x_2] \subseteq \langle a,b \rangle$, 使 $g(\xi)=0$ 即 $f(\xi)-\mu=0$ $\therefore f(\xi)=\mu$

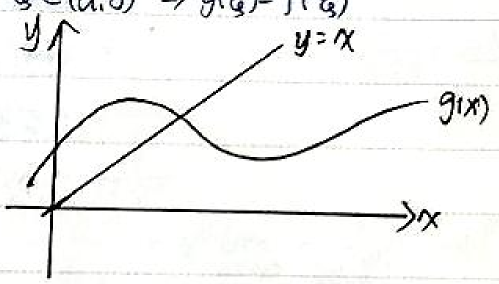
例1: 设 $f(x)\in C(a,b)$ 且 $f(a+0)=f(b-0)=A$, 又存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)\geq A$ 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值

证明: 令 $g(x)=\begin{cases} A, & x=a,b \\ f(x), & x\in(a,b) \end{cases}$ 则 $g(x)\in C[a,b]$ 由最值原理 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 $M=g(\xi)$ $\xi\in[a,b]$

①若 $M=g(\xi)>f(c)\geq A=g(a)=g(b)$ $\Rightarrow \xi\neq a,b$ $\xi\in(a,b)$ $\Rightarrow g(\xi)=f(\xi)$

$\therefore f(x)$ 在 ξ 点有最大值 M

② $M=f(c)$, $f(x)$ 在 c 点取最大值 M



迭代法

$F(x)=0$ 解方程 $\Rightarrow g(x)=x$

$\forall$取 $x_0\in\mathbb{R}$ 若 $g(x_0)=x_0$ 得解 若 $g(x_0)\neq x_0$ 令 $x_1=g(x_0)$ 若 $g(x_1)=x_1$ 得解

若 $g(x_1)\neq x_1$ 令 $x_2=g(x_1)$

例2: 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $f(a)>a$, $f(b)<b$, 则必存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=\xi$

(不动点原理)

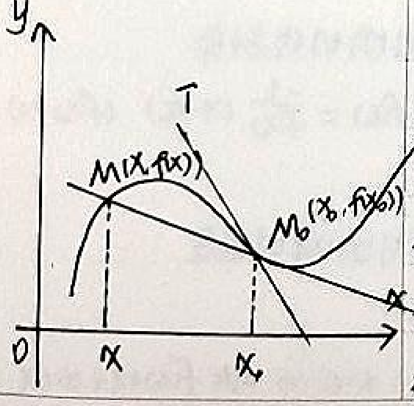
证明: 令 $g(x)=f(x)-x$ 则 $g(a)=f(a)-a>0$ $g(b)=f(b)-b<0$ $\therefore g(a)g(b)<0$

$g(x)\in C[a,b]$ 由零点原理 $\exists\xi\in[a,b]$ 使 $g(\xi)=0$ 即 $f(\xi)-\xi=0$ $\therefore f(\xi)=\xi$

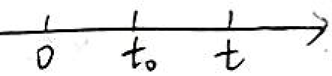
第三章 导数与微分

1.实际问题

问题1: 曲线的切线(斜率)问题



如图所示, 设 $y=f(x)$ 为一曲线, $M_0(x_0,f(x_0))$ 为曲线上一点, 过 M_0 点作曲线任意一条割线 MM_0, $M(x,f(x))$, 割线斜率 $k(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则规定此极限为 $y=f(x)$ 在 M_0 点的切线斜率



问题2：变速直线运动的速度问题

$S=S(t)$ $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{1}{2}g(t+t_0)$

导数定义

定义1：设$y=f(x)$在x_0点的邻域内有定义，给x_0一个增量Δx，相应地有一个函数增量$\Delta y=f(\Delta x+x_0)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ 若极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称$y=f(x)$在$x_0$点可导，称此极限为$y=f(x)$在$x_0$点的导数(微商)

记为$y'|_{x=x_0}=f'(x_0)=\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$

定义2：若$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，称之为$f(x)$在$x_0$点的右导数，记为$y'_+|_{x=x_0}=f'_+(x_0)$；若$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，称之为$f(x)$在$x_0$点的左导数，记为$y'_-|_{x=x_0}=f'_-(x_0)$，左、右导数统称为单侧导数

可见，当$f(x)$在x_0的邻域内有定义，$f(x)$在x_0点可导 $\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

当$f(x)$在x_0的单侧邻域有定义，$f(x)$在x_0点可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0点的单侧导数存在

比如$f(x)$，$x\in[a,b]$，此时$f(x)$在a点可导，指的是$f'(a)=f'_+(a)$

例1：若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0+x^2)-f(x_0)}{x^2}$存在，此极限值$=f'(x_0)$ (×)

若$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]$存在，此极限值$=f'(x_0)$ (×)

定义3：设$f(x)$在点集I上每一点都可导，则其导数又构成I上的一个新的函数，称之为$f(x)$在I上的导(函)数，记为$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$，若$I=[a,b]$，则$f'(a)=f'_+(a)$，$f'(b)=f'_-(b)$

3.导数的意义

(1) $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在$(x_0,f(x_0))$点处的切线斜率

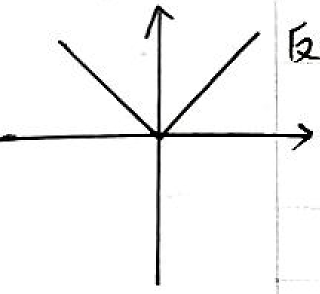
切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ 法线方程 $y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ $(f'(x_0)\neq 0)$

注：若$f'(x_0)=0$，切线$y=f(x_0)$，法线$x=x_0$

(2) $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)$是变速直线运动$y=f(x)$在x_0时刻的瞬时速度

4.与连续的关系 可导$\Rightarrow$连续，反之不成立

若$f'(x_0)\exists$，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0\Rightarrow\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$



$\because \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Rightarrow f(x)$在$x_0$点连续

反例 $y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$ $\quad f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases} 1, & f'_+(0) \\ -1, & f'_-(0) \end{cases}$ $\therefore f'(0)$不$\exists$

§3.2 导数基本公式和导数四则运算

1.导数公式

(1) $(C)'=0$ (2) $(x)'=1$ (3) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ (4) $(a^x)'=a^x\ln a$

(5) $(e^x)'=e^x$ (6) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ (7) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ (8) $(\sin x)'=\cos x$

(9) $(\cos x)'=-\sin x$ (10) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ (11) $(\cot x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

(12) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (13) $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ (15) $(\operatorname{arccot} x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$

证: (3) $(x^{\alpha})'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1}{\Delta x}=x^{\alpha}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1}$

(4) $(a^x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x\ln a}-1}{\Delta x}$

$=a^x\lim\dfrac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$

(12) $(\arcsin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x}{\Delta x}$

令 $y=\arcsin x$, $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\Delta y=\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x=\arcsin(x+\Delta x)-y$ $\quad x+\Delta x=\sin(y+\Delta y)\Rightarrow \Delta x=\sin(y+\Delta y)-\sin y$,

$(\arcsin x)'=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta y}{\sin(y+\Delta y)-\sin y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{\Delta y}}=\dfrac{1}{(\sin y)'}=\dfrac{1}{\cos y}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.导数的四则运算法则

定理: 设$f(x)$, $g(x)$可导, 则 (1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

(2) $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (3) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ $(g(x)\neq 0)$

证: (2) $[f(x)g(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\cdot\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

$=g(x)f'(x)+f(x)g'(x)$

14) $[kf(x)]' = kf'(x)$　　15) $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

16) $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = f_1'f_2\cdots f_n + f_1f_2'\cdots f_n + \cdots + f_1f_2\cdots f_{n-1}f_n'$

例1：设 $y = x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$，求 $y'|_{x=0}$　　$100!$

§3.3 复合函数求导法及其它

1.复合函数求导公式

定理：设 $y=f(u)$ 可导，$u=g(x)$ 可导，且 $f(g(x))$ 在 x 的邻域内有定义，则 $y=f(g(x))$ 可导，且 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 即 $[f(g(x))]' = f'(u)\cdot g'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

注：① $y=u^{\frac{3}{2}}$，$u=g(x)=\sin x-1$　$y=f(g(x))=(\sin x-1)^{\frac{3}{2}}$，$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$

② $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}$　(×)

证明：$y=f(u)$ 可导，$f'(u) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)+\alpha$，$\lim_{\Delta u\to 0}\alpha = 0$

$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha\cdot\Delta u$　(*)　$(\Delta u\neq 0)$

$\begin{cases}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta u} - f'(u), & (\Delta u\neq 0)\\ 补充\ \alpha=0, & \Delta u=0\end{cases}$

规定：当 $\Delta u=0$ 时令 $\alpha=0$，此时(*)的左端

$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u) = 0$　(*)的右端 $=0$　∴当 $\Delta u=0$ 时，(*)式也成立

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0} f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta u\to 0}\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$

注 $\{f\{g[\varphi(x)]\}\}' = f'\{g[\varphi(x)]\}g'[\varphi(x)]\varphi'(x)$

例1：$y=e^{\sin\ln^2 x}$，求 $y' = e^{\sin\ln^2 x}\cos\ln^2 x\ 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$

例2：设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

公式 $[\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$

例3：$y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arcsin x^2$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{3}{2}\pi$

2.反函数求导公式

设 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为反函数

$(y)_y' = [f(x)]_y' \Rightarrow 1 = f'(x)\frac{dx}{dy} = f'(x)g'(y)$

从而有当 $y=f(x)$ 可导且 $f'(x)\neq 0$，有 $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ 一互为倒数关系

例4：求 $(\arctan x)'$

3. 参数函数求导公式

设 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$

方法：对 $x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$ 的两端同时关于 x 求导

$(x)'_x=(\varphi(t))'_x$
$(y)'_x=(\psi(t))'_x$ $\Rightarrow \begin{cases} 1=\varphi'(t)\frac{dt}{dx} \\ \frac{dy}{dx}=\psi'(t)\frac{dt}{dx} \end{cases}$ 消去 $\frac{dt}{dx}$ 得公式 $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，这里 $\Rightarrow$ 要求 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 都存在且 $\varphi'(t)\neq 0$

$(y)'_x=(\psi(t))'_x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\psi'(t)\frac{dt}{dx}=\psi'(t)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

公式：$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

例5：设 $x=\ln(1+t^2)$，$y=t^3+3t+1$，求 $\frac{dy}{dt}=\frac{3(t^2+1)^2}{2t}$

4. 隐函数求导方法

设 $x^2+xy+y^3=\sin(xy^2)$ 确定了一个隐函数，$y=y(x)$，求 y'

方法：将 $y=y(x)$ 代入方程，得到恒等式：$x^2+xy(x)+y^3(x)=\sin(xy^2(x))$

再对此等式左、右两端同时关于 x 求导

$2x+y(x)+xy'(x)+3y^2(x)y'(x)=\cos(xy^2(x))(y^2(x)+x2y(x)y'(x))$

$\therefore y'(x)=\frac{y^2(x)\cos(xy^2(x))-2x-y(x)}{x+3y^2(x)-2xy(x)\cos(xy^2(x))}$

$\therefore y_x=\frac{y^2\cos(xy^2)-2x-4y}{x+3y^2-2xy\cos(xy^2)}$ 一复合函数

例6：设 $xe^{\sin y}=e^y$ 确定了一个隐函数，$y=y(x)$，求 $y'=\frac{1}{x(1-\cos y)}$

5. 幂指函数求导公式

$(f(x)^{g(x)})'=(e^{g(x)\ln f(x)})'=f(x)^{g(x)}(g(x)\ln f(x))'$

例7：$(x^x)'=x^x(\ln x+1)$

注：$[f(x)]'=f(x)(\ln f(x))'$ — 用此公式，当 $f(x)$ 中因子多时，含根号时，乘除变加减，此公式中，$f(x)<0$ 也没关系

例8：设 $y=\sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x^3+1)(x^5+1)}{(x+1)(x^2+x+1)(x^4-1)}}$，求 $y'=\frac{3x^6-5x^4-2x}{5(x^2-1)(x^5+1)}\sqrt[5]{\frac{x^5+1}{x^2-1}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

§3.4 高阶导数

1. 高阶导数

定义：设 $y=f(x)$ 在 I 上可导，且在 I 上的导函数 $y'=f'(x)$ 还可导，则称 $y'=f'(x)$ 的导函数为 $y=f(x)$ 的二阶导(函)数，记为 $y''=f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}=\frac{d^2y}{dx^2}$

若 $y''=f''(x)$ 还可导，则称其导函数为 $y=f(x)$ 的三阶导(函)数，记为 $y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x}$ …如此下去，可以定义 $y=f(x)$ 的 n 阶导(函)数，记为 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$，$n=1,2,3\cdots$，$y^{(0)}=y$，$y^{(1)}=y'$，$y^{(2)}=y''$，$y^{(3)}=y'''$

例1：设 $f(x)$，$g(x)$ 互为反函数，且 $f(x)$ 有二阶导，而 $f'(x)\neq 0$，求 $g''(x)$

解：设 $y=g(x)$ $x=f(y)$ $y'=g'(x)=\frac{1}{f'(y)}$

$y''_x=g''(x)=\frac{d}{dx}(g'(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(y)}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(y)}\right)\frac{dy}{dx}=-\frac{f''(y)}{[f'(y)]^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}=-\frac{f''(y)}{[f'(y)]^3}$

$=-\frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}$ $y'''_x=\frac{d}{dx}(y'')=\frac{d}{dy}(y'')\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{f''(y)}{[f'(y)]^3}\right)'_y\frac{1}{f'(y)}$

后作业

例2：设 $xe^{\sin y}=e^y$ 确定了一个隐函数 $y=y(x)$，求 y''

$y'=\frac{1}{x(1-\cos y)}$ $y''=-\frac{1-\cos y+x\sin y\,y'}{x^2(1-\cos y)^2}=-\frac{1-\cos y+\frac{\sin y}{1-\cos y}}{x^2(1-\cos y)^2}$

$=-\frac{(1-\cos y)^2+\sin y}{x^2(1-\cos y)^3}$

例3：设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=t^2-2t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(t^2-2t)'}{(\arctan t)'}=(2t-2)(t^2+1)$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=$

$(6t^2-4t+2)(t^2+1)$

例4：$(f[g(x)])''$

$(f[g(x)])''=(f'[g(x)]g'(x))'=f''[g(x)][g'(x)]^2+f'[g(x)]g''(x)$

2. 高阶导数公式

用数学归纳法可证如下高阶导数公式：

(1) $[f(x)\pm g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$ (2) $[kf(x)]^{(n)}=kf^{(n)}(x)$

(3) $[f(x)g(x)]^{(n)}=f^{(n)}\cdot g+nf^{(n-1)}g'+\frac{n(n-1)}{2!}f^{(n-2)}g''+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}f^{(n-3)}g'''+\cdots$

$+C_n^r f^{(n-r)} \cdot g^{(r)} + \cdots + f \cdot g^{(n)}$ — 莱布尼兹公式

线性函数复合 — (4) $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$

下面给出基本初等函数的高阶导数公式

(5) $(C)^{(n)} = 0 \ (n=1,2,3\cdots)$

(6) $(x^\alpha)^n = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(7) $(\frac{1}{x})^n = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$

(8) $(a^x)^n = a^x(\ln a)^n$

(9) $(e^x)^n = e^x$

(10) $(\ln x)^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

(11) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\frac{n}{2}\pi)$

$(\sin ax)^n = a^n \sin(ax+\frac{n}{2}\pi)$

(12) $(\cos x)^n = \cos(x+\frac{n}{2}\pi)$

例1：设 $y=\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$，求 $y^{(n)}$ 用积化和差公式

解 $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)\sin 2x = \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin 6x + \sin(-2x))$

$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x$

$\therefore y^{(n)} = \frac{1}{4}\cdot 4^n \sin(4x+\frac{n}{2}\pi) - \frac{1}{4}\cdot 6^n \sin(6x+\frac{n}{2}\pi) + \frac{1}{4}\cdot 2^n \sin(2x+\frac{n}{2}\pi)$

例2：设 $y=(1+x^2)e^x$，求 $y^{(n)}$

解 $y^{(n)} = (e^x)^n(1+x^2) + (e^x)^{n-1}\cdot n(1+x^2)' + (e^x)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\cdot(1+x^2)''$

$= (1+x^2)e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x$

例3：设 $y=e^x\cos\sqrt{3}x$，求 $y^{(n)}$ 找规律 用 $a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi)$

$y' = 2e^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{\pi}{3})$ 猜 $y^{(n)} = 2^n e^x \cos(\sqrt{3}x+\frac{n}{3}\pi)$ 用数归法证

§3.5 微分

1. 微分概念

定义1：设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，给 x_0 点一个增量 Δx，相应的函数增量 Δy 满足：$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = k\Delta x + o(\Delta x)$，（$k$ 是一个常数），则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微(分)，记为 $dy|_{x=x_0} = k\Delta x$

注：$dy|_{x=x_0} = k\Delta x$ 是关于 Δx 的一个线性函数（k 是和 $f(x)$ 和 x_0 有关 $k=f'(x_0)$）

当$\Delta x\to 0$，有$dy\to 0$ 从而$\Delta y=dy+o(\Delta x)\to 0$（可微⇒连续）

当$k\neq 0$ $dy=k\Delta x\neq 0$，$\frac{\Delta y}{dy}=1+\frac{o(\Delta x)}{k\Delta x}\to 1$ $(\Delta x\to 0)$

$\Rightarrow \Delta y\sim dy$ ∴ dy是Δy的线性主部

定义2：设$y=f(x)$在点集I上的每一点都可微，则其微分又构成I上一个新的函数，称之为$y=f(x)$在I上的微分（函数），记为$dy=k(x)\Delta x$（$k(x)$是关于x的函数）

直线$y=ax+b$ $dy=a\Delta x$ （$\Delta y=a\Delta x+0$，$\Rightarrow a\Delta x=dy$）

特别地，取直线 $y=x$ $dx=\Delta x$

所以 $dy=k(x)\Delta x=k(x)dx$

若$y=f(x)$可微 $\Delta y=dy+o(\Delta x)=k(x)\Delta x+o(\Delta x)$，$\Rightarrow k(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$

$\Rightarrow k(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，∵ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\exists$，从而$f'(x)$存在 且$f'(x)=k(x)$，∴

可微 ⇒ 可导且$f'(x)=k(x)$

反之，若$f'(x)$存在，则$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，从而$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$

$\Rightarrow \Delta y=\Delta x f'(x)+\alpha\Delta x=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$ ∴$f(x)$在x点处可微且$dy=f'(x)\Delta x$

2. 可微与可导的关系

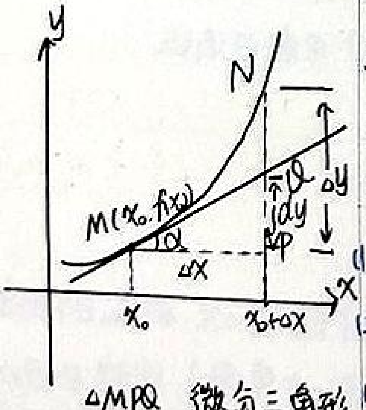
定理 $y=f(x)$可导 ⇔ $y=f(x)$可微，且$dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$

注：$dy=f'(x)dx$ — 乘法运算

∵ $dx=\Delta x\neq 0$ $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ — 除法运算

3. 微分的几何意义

$dy=f'(x)dx$是曲线$y=f(x)$在x处的切线增量



△MPQ 微分三角形

$\Delta y=dy+o(\Delta x)$

$NQ=o(\Delta x)$

$PQ=\Delta x\tan\alpha=\Delta x k$

$=f'(x)\Delta x$

$=f'(x)dx$

$=dy$

4. 微分运算

(1) $d[f(x)\pm g(x)]=[f(x)\pm g(x)]'dx=[f'(x)\pm g'(x)]dx=df(x)\pm dg(x)$

(2) $d[f(x)g(x)]=(fg)'dx=(f'g+fg')dx=fdg+gdf$

(3) $d[\frac{f(x)}{g(x)}]=(\frac{f}{g})'dx=\frac{f'g-fg'}{g^2}dx=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{[g(x)]^2}$

5. 微分形式的不变性

设$y=f(u)$可微：(1)若u是自变量，则$dy=f'(u)du$

(2) 若 $u=g(x)$ 可微，则 $f(g(x))$ 可微 且 $df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)dx = f'(g(x))dg(x) = f'(u)du$

注：当 u 是自变量，$du=\Delta u$，而当 u 是中间变量时，一般 $\Delta u \neq du$，$\Delta u = du + o(\Delta x)$ 当 u 是关于

例1：设 $y = e^{\sin\ln\arctan x}$，求 y'

解：$dy = e^{\sin\ln\arctan x} d\sin\ln\arctan x = e^{\sin\ln\arctan x}\cos\ln\arctan x \, d\ln\arctan x$
$= e^{\sin\ln\arctan x}\cos\ln\arctan x \frac{1}{\arctan x} d\arctan x = e^{\sin\ln\arctan x}\cos\ln\arctan x \frac{1}{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}dx$

例2：设 $y = e^{\sin x}$，求 $\frac{dy}{d\cos x} = -\frac{e^{\sin x}}{\tan x}$

例3：$d\sin x^2 = (\quad)dx \quad 4x\sqrt{x}\cos^2 x$

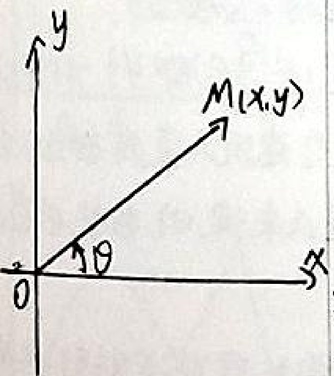
例4：设 $f(x)$ 对任何实数 x_1, x_2 满足：$f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2)$ 且 $f'(0)=1$，证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导

证：令 $x_1 = x_2 = 0$，$f(0) = f(0)f(0) \Rightarrow f(0)=0$ 或 1

(1) 当 $f(0)=0$，$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$，$\therefore f'(x)=0$（舍去）

(2) 当 $f(0)=1$，$\forall x \in \mathbb{R}$，$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$
$= f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x} = f(x)f'(0) = f(x)$

补充内容：



1. 极坐标

在直角坐标平面上建立一个新的坐标系，原点称为极点，正向 x 轴称为极轴，也叫极坐标轴，点 M 的极坐标为 (r, θ)，$r = |\vec{OM}|$，θ 是极轴绕极点逆时针旋转到与 $\vec{OM}$ 重合时转过的角度　r - 极径　θ - 极角

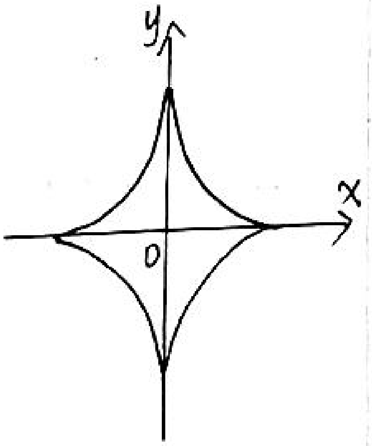
2. 极坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & r \geq 0 \\ y = r\sin\theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

3. 直角坐标曲线与极坐标曲线转换

〈1〉 $F(x,y)=0$ 是曲线直角坐标方程 $\Rightarrow F(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$

〈2〉 $r=f(\theta)$ 是曲线的极坐标方程 $\Rightarrow \begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$



例如: $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow r=|a|$

$r=1-\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} x=(1-\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ $\quad x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}-x$

例1: 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 上光滑点处切线介于两坐标轴间的长度。a

由 $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$, $0\le\theta<2\pi$

令 $X=x^{\frac{1}{3}}$ $Y=y^{\frac{1}{3}}$ 则 $X^2+Y^2=(a^{\frac{1}{3}})^2$

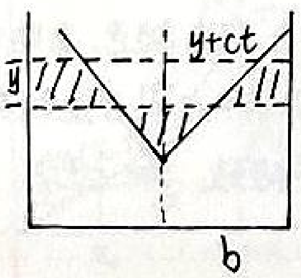
$\therefore \begin{cases} X=a^{\frac{1}{3}}\cos\theta \\ Y=a^{\frac{1}{3}}\sin\theta \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cos\theta \\ y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\sin\theta \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$, $0\le\theta<2\pi$

例2: 求三叶玫瑰线 $r=a\sin3\theta$, 在 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 对应点处的切线方程

解: 曲线在 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 这一点处的直角坐标为 $\begin{cases} x=a\sin3\theta\cos\theta\big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ y=a\sin3\theta\sin\theta\big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}a \end{cases}$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{(a\sin3\theta\sin\theta)'}{(a\sin3\theta\cos\theta)'}=\frac{3\cos3\theta\sin\theta+\sin3\theta\cos\theta}{3\cos3\theta\cos\theta-\sin3\theta\sin\theta}$

$\therefore y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$ $\therefore$ 所求切线方程为 $y-\frac{1}{2}a=-\sqrt{3}(x-\frac{\sqrt{3}}{2}a)$ 即 $y=-\sqrt{3}x+2a$



例3: 设有一个顶角为90°的倒圆锥体, 以速度c匀速沉入盛有部分水的半径为b的圆柱形容皿中, 求圆锥体被水浸没a米深时, 圆柱形容皿水面上升的速度。

解: 设t表示时间, $t=0$时圆锥体顶点刚好在水平面上, 经过t时刻, 水平面上升的高度为y米, 则

$\frac{1}{3}\pi(y+ct)^3=\pi b^2y \Rightarrow \pi(y+ct)^2(y+ct)'=\pi b^2y'$

令 $y+ct=a$ 代入得 $y'|_{y+ct=a}=\frac{a^2c}{b^2-a^2}$

例4: 若 $f'(x)$ 存在,则正确的是( ) ABC

连续性也会有变化

(A)若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f'(x)$ 是偶函数

(B)若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f'(x)$ 是奇函数

(C)若 $f(x)$ 是周期函数,则 $f'(x)$ 也是周期函数 $f(x+T)=f(x)$

(D)若 $f(x)$ 是有界函数,则 $f'(x)$ 也是有界函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ 无界

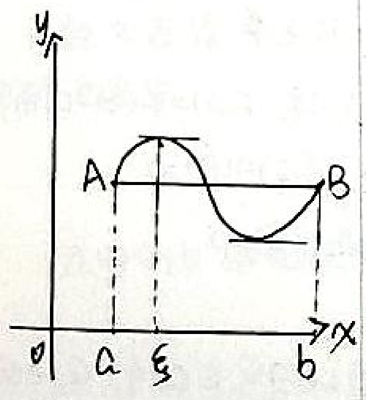
例5: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导,且 $f(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$, 又 $af(x)+bf(2x)-f(0)=o(x)$, 求 a, b.

解: $\lim\limits_{x\to 0}(af(x)+bf(2x)-f(0))=0 \Rightarrow af(0)+bf(0)-f(0)=0 \Rightarrow a+b=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{af(x)+bf(2x)-f(0)}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left[a\frac{f(x)-f(0)}{x}+2b\frac{f(2x)-f(0)}{2x}+\frac{af(0)+bf(0)-f(0)}{x}\right.$

$=af'(0)+2bf'(0)=0 \Rightarrow a+2b=0$

$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$



第四章 微分中值定理

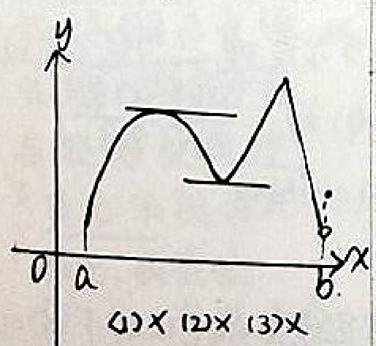
§4.1 中值定理

1.罗尔定理

定理1: 设 $f(x)$ 满足: (1) $f(x)\in C[a,b]$, (2) $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, (3) $f(a)=f(b)$

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$ 或方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内必有根

注: ①②③是充分条件,不是必要条件



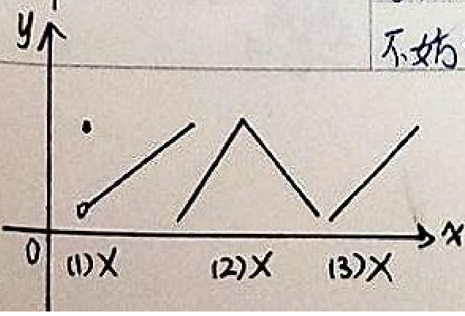
定义: 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义,若 $f(x)\geq f(x_0)$ ($f(x)\leq f(x_0)$) 则称 $f(x_0)$ 是极小(大)值,称 x_0 是极小值(大值)点.

证明: $\because f(x)\in C[a,b]$, $\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m

若 $M=m$ 则 $f(x)=M$ 从而 $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$

若 $M\neq m$, $\because f(a)=f(b)$, $\therefore$ 最大值和最小值至少有一个在 (a,b) 内取得

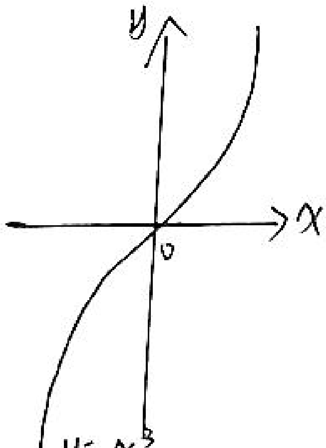
不妨设 $M\neq f(a)$, 则 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $M=f(\xi)$ 又由(2)知 $f'(\xi)$ 存在



$f'_-(\xi)=\lim\limits_{x\to\xi^-}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geq 0$ (极限的保序性)

$f'_+(\xi)=\lim\limits_{x\to\xi^+}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leq 0$

又∵ $f'_-(\xi)=f'_+(\xi)=f'(\xi)\Rightarrow f'(\xi)=0$



$y=x^3$

$y'=3x^2$ 啶

称导数为0的点为极值嫌疑点、驻点、

涉及方程有根的方法:

零点原理

罗尔定理

费马引理

2 费马引理

定理: 若 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极值且 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f'(x_0)=0$

费马大定理: $x^n+y^n=z^n$ $n>2$ 时该方程无正整数解

例1: 设 $C_1, C_2, \cdots C_n$ 为任意 n 个实数, 证明三角方程 $C_1\cos x+C_2\cos 2x+\cdots+C_n\cos nx=0$ 在 $(0,\pi)$ 内必有根

证明: 令 $f(x)=C_1\cos x+C_2\cos 2x+\cdots+C_n\cos nx$, $x\in[0,\pi]$

$F(x)=C_1\sin x+\frac{C_2}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{C_n}{n}\sin nx$, $x\in[0,\pi]$ 则 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可导

$F(0)=F(\pi)=0$ 由罗尔定理知, 方程 $f(x)=C_1\cos x+C_2\cos 2x+\cdots+C_n\cos nx=0$ 在 $(0,\pi)$ 内必有根

例2: 设 $f(x)$ $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数, $g''(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

证明: 令 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $F(a)=F(b)=0$, 由罗尔定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$ 即 $f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$

反复使用3次罗尔定理

∵ $g''(x)\neq 0$ ∴ $g''(\xi)\neq 0$ ∴ $f(\xi)=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}g(\xi)$ 下证 $g(\xi)\neq 0$

极易漏证 $g(\xi)\neq 0$

用反证法 若 $g(\xi)=0$, 则

$g(x)$ 在 $[a,\xi]$ 和 $[\xi,b]$ 上分别满足罗尔定理, 所以 $\exists\xi_1\in(a,\xi)$, $\xi_2\in(\xi,b)$ 使 $g'(\xi_1)=0$, $g'(\xi_2)=0$, 又∵ $g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理 ∴ $\exists\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(a,b)$ 使 $g''(\xi_3)=0$ 这与 $g''(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$ 矛盾 ∴ $g(\xi)\neq 0$ ∴ $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

构造辅助函数时

例2加一项减一项

例3乘某一因子

例3: 设 $f(x)\in C[a,b]$, 在 (a,b) 内可导且 $f(x)\neq 0$, 而 $f(a)=f(b)=0$,

证明: $\exists$ 一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=1$

证明: 令 $F(x)=e^{-x}f(x)$, ∵ $F(a)=F(b)=0$ ∴ 由罗尔定理有 $\exists\xi\in(a,b)$, $F'(\xi)=0$

即 $e^{-\xi}F'(\xi)-e^{-\xi}F(\xi)=0\Rightarrow F(\xi)=F'(\xi)\Rightarrow\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=1$

找到满足(3)的点

例4：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，令 $F(x)=(x-a)f(x)$

证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F''(\xi)=0$

证明：$F'(x)=f(x)+(x-a)f'(x)$，$F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导 $F'(a)=0$ $\because F(a)=F(b)=0$

$\because F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理，$\therefore\exists c\in(a,b)$ 使 $F'(c)=0$

又 $\because F'(x)$ 在 $[a,c]$ 上满足罗尔定理，$\therefore\exists\xi\in(a,c)\subseteq(a,b)$ 使 $F''(\xi)=0$

费马引理使用

例5：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$ 证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$

证明：不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$

$$0<f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow\exists x_1\in(a,b)\text{使得}\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0\Rightarrow f(x_1)>f(a)$$

$\therefore f(a)$ 不是最大值

$$0>f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\Rightarrow\exists x_2\in(a,b)\text{使得}\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}<0\Rightarrow f(x_2)>f(b)$$

$\therefore f(b)$ 不是最大值

又 $\because f(x)\in C[a,b]$ $\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 $M=f(\xi)$，$\xi\in(a,b)$

又 $\because f'(\xi)$ 存在，$f(\xi)$ 是极值 由费马引理有 $f'(\xi)=0$

导数不连续零点原理也适用

注：闭区间上可导函数满足介值原理，无论其是否连续

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且 $f'(a)\neq f'(b)$，不妨设 $f'(a)<f'(b)$，则对 $f'(a)<u<f'(b)$，存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=u$

运用例5结论证

证：令 $F(x)=f(x)-ux$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$F'(a)F'(b)=(f'(a)-u)(f'(b)-u)<0$

$\therefore\exists\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=u$

3. 拉格朗日中值定理（微分中值、有限增量定理）

变分法创始人

优化，找最值

最佳函数、曲线

例6：设 $f(x)$ 满足：在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明：令 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$，令 $F(x)=f(x)-kx$

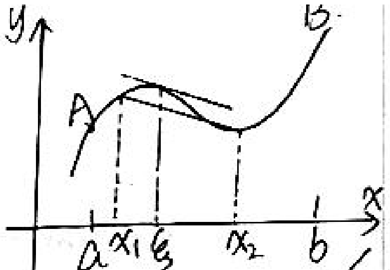
$F(a)=f(a)-a\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=F(b)$ 由罗尔定理 $\exists\xi\in(a,b)$ 使

$F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

令 $x_0=a$ $x_0+\Delta x=b$ $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(\xi)$

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x=f'(\xi)dx$ $\Delta y=dy|_{x=x_0}+o(\Delta x)$

ξ 介于 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间



用于证明不等式

转换为$f'(\xi)$

拉格朗日中值定理的一般形式：

设$f(x)$在(a,b)内可导，$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi)$ $\xi \in (x_1,x_2) \subseteq (a,b)$

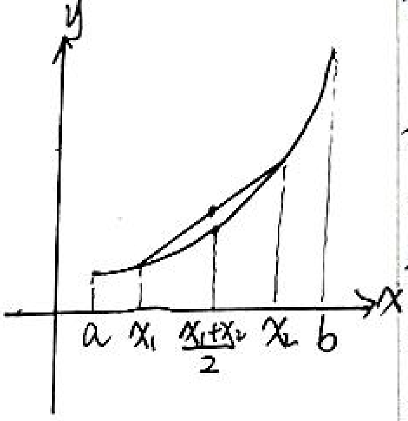
例1：证明：$\sin x < x$，$0<x<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\sin x - 0}{x-0} = \cos\xi < 1$，$0<\xi<x<\frac{\pi}{2}$ $\therefore \sin x < x$

例2：证明：$\frac{1}{1+n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

证明：$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{\ln(1+n)-\ln n}{1+n-n} = (\ln x)'|_{x=\xi} = \frac{1}{\xi}$ $n<\xi<n+1$

$\therefore \frac{1}{1+n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$



例3：设$f(x)$在(a,b)内有二阶导数，且$f''(x)>0$，证明：$\forall x_1,x_2\in(a,b)$有$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$

证：不妨设$x_1<x_2$. $[f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})] - [f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)]$

$= f'(\xi_2)\frac{x_2-x_1}{2} - f'(\xi_1)\frac{x_2-x_1}{2} = \frac{1}{2}(x_2-x_1)[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]$

$= \frac{1}{2}(x_2-x_1)f''(\xi_3)(\xi_2-\xi_1)$ $x_1<\xi_1<\frac{x_1+x_2}{2}$ $\frac{x_1+x_2}{2}<\xi_2<x_2$ $\xi_1<\xi_3<\xi_2$

>0

例4：设$f(x)$在(a,b)内可导且无界，证明$f(x)$在(a,b)内也无界

分析：$|f'(\xi)| = \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| > M$

$\Rightarrow \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| > \frac{|f(x_2)|-|f(x_1)|}{b-a} > M$

证明：$\forall M>0$，取定$x_0\in(a,b)$，$\because f(x)$在(a,b)内无界，$\therefore \exists x_1\in(a,b)$使

$|f(x_1)| > |f(x_0)| + M(b-a)$ 则有$\frac{|f(x_1)|-|f(x_0)|}{b-a} > M$

$\therefore \left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right| > \frac{|f(x_1)|-|f(x_0)|}{b-a} > M$ $\therefore \exists\xi\in(a,b)$使$|f'(\xi)| = \left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right| > M$

即$f(x)$在(a,b)内也无界

或证 $f'(x)$在(a,b)内有界 $\Rightarrow$ $f(x)$在(a,b)内有界

证：设$f'(x)$在(a,b)内有界，即$\exists M>0$，$\forall x\in(a,b)$有$|f'(x)|\le M$

$\forall x\in(a,b)$，取定$x_0\in(a,b)$

$|f(x)| = |f(x)-f(x_0)+f(x_0)| \le |f(x)-f(x_0)| + |f(x_0)|$

$= |f'(\xi)(x-x_0)| + |f(x_0)| \le M(b-a) + |f(x_0)|$ $\therefore f(x)$在(a,b)内有界

4.拉格朗日中值定理推论:

推论1: $f'(x)=0,\ \forall x\in(a,b)$ $\Leftrightarrow f(x)=C$, C为常数

证明恒等式

$\forall x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1\neq x_2$, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)=0$

理解为求导运算的逆运算

推论2: $f'(x)=g'(x),\ \forall x\in(a,b)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+C$, C为常数

C是一个固定的常数

固定 $x_0\in(a,b)$

$f(x_0)-g(x_0)=C$.

证明: $\sin^2x+\cos^2x=1$

证: $(\sin^2x+\cos^2x)'=0\Rightarrow\sin^2x+\cos^2x=C$ 令 $x=0$ 代入得 $C=1$

推论3: $f'(x)>0(<0),\ \forall x\in(a,b)\Rightarrow f(x)$单增(单减)

拉格朗日中值定理

例5: 证明: $\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan(n+1)-\arctan n$

证明: $\varphi'(x)=(\arctan\frac{1}{x^2+x+1})'=\frac{1}{1+(x^2+x+1)^{-2}}\cdot\left(-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\right)$

$$=-\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}$$

$$\psi'(x)=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}=-\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}$$

$\therefore\ \varphi(x)=\psi(x)+C$ 令 $x=0$ 则 $C=\varphi(0)-\psi(0)=0$ $\therefore\varphi(x)=\psi(x)$

从而 $\varphi(n)=\psi(n)$ 即 $\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan(n+1)-\arctan n$

参数方程下的拉格朗日中值定理

证明洛必达法则

5.柯西中值定理

定理4: 设 $f(x),g(x)$ 满足: (1)在 $[a,b]$ 上连续, (2)在 (a,b) 内可导 (3) $g'(x)\neq0$ 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

几何意义: 拉格朗日中值定理的参数函数形式

证: 令 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=k$, $F(x)=f(x)-kg(x)$,

$$F(a)=f(a)-g(a)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}=F(b)$$

$\therefore$由罗尔定理, $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)-kg'(\xi)=0\Rightarrow\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

§4.2 洛比达法则

1 极限中有型的不定式(7种)

$f(x),g(x)$ 趋和但不等和

(1) $f(x)\to0$, $g(x)\to0$, 则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 为"$\frac{0}{0}$"型

(2) $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$, 则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 为"$\frac{\infty}{\infty}$"型

(3) $f(x)\to 0,\ g(x)\to\infty$，则 $\lim f(x)g(x)$ 为"$0\cdot\infty$"型

(4) $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同号，则 $\lim(f(x)-g(x))$"$\infty-\infty$"型

(5) $f(x)\to 1,\ g(x)\to\infty$，则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为"1^{∞}"型

(6) $f(x)\to 0,\ g(x)\to 0$，则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为"0^{0}"型

(7) $f(x)\to\infty,\ g(x)\to 0$，则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为"∞^{0}"型

2.洛比达法则

定理：设 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$，且 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞，则称之为洛比达法则

证明(1)设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞.

补充定义：令 $f(x_0)=g(x_0)=0$　$\therefore f(x),g(x)$ 都在 x_0 点连续

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\overset{柯西}{=}\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A或\infty$$

特殊(子极限) 一般(极限)

注：洛比达法则只能求有(极限)，不能求无(极限)

例：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2$　$I=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\to$ 极限不存在

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to 0}\frac{[f(\frac{1}{t})]'_t}{[g(\frac{1}{t})]'_t}=\lim_{t\to 0}\frac{(-\frac{1}{t^2})f'(\frac{1}{t})}{(-\frac{1}{t^2})g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(3) $\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$

例1：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$

例2：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$ 令 $t=\frac{1}{x}$

例3：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-(\cos x-x\sin x)}{3x^2}=\frac{2}{3}$

例4：$\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))=\frac{1}{2}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}$　令 $t=\frac{1}{x}$

注："1^{∞}，0^{0}，∞^{0}"利用换底公式 $a=e^{\ln a}$ 将其变成不定式 $e^{\frac{0}{0}}$ 或 $e^{\frac{\infty}{\infty}}$ 型

例5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{3^x+5^x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{3^x+5^x}{2}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3^x+5^x}(3^x\ln3+5^x\ln5)}$
$=e^{\ln\sqrt{15}}=\sqrt{15}$

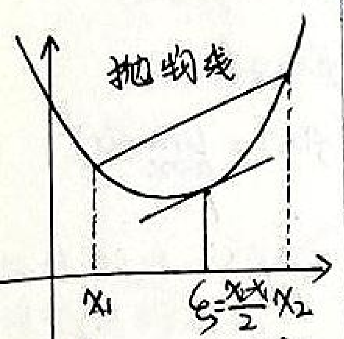
例6: $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1$

例7: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3\sqrt{x^2+x}-4\sqrt{x^2+2x}+5\sqrt{x^2-x})$

解.原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-3\sqrt{1+\frac{1}{x}}-4\sqrt{1+\frac{2}{x}}+5\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$

$\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to0^+}(2-3\sqrt{1+t}-4\sqrt{1+2t}+5\sqrt{1-t})/t$

$=\lim\limits_{t\to0^+}\left[-3\cdot\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}-2(1+2t)^{-\frac{1}{2}}2+\frac{5}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(-1)\right]=-8$

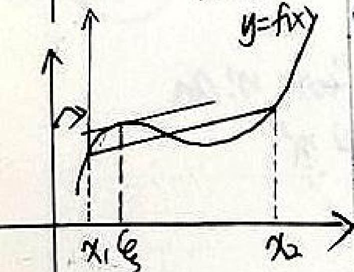


例8: 求抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的中值点 ξ

解. $f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$ ξ 介于 x_1,x_2 之间

$a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=(2a\xi+b)(x_1-x_2)$

$\Rightarrow a(x_1+x_2)+b=2a\xi+b\Rightarrow\xi=\frac{x_1+x_2}{2}$



一般曲线

$\frac{1}{2}=\lim\limits_{x_2\to x_1}\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi}{x}$

例9: 设 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上二阶可导,且 $f''(0)\neq0$. 由拉格朗日中值定理,$\exists\,\xi\in(0,x)$ 使 $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$,证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$

证明: $\lim\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}=f''(0)$

$\Rightarrow\frac{f'(\xi)\overset{\xi\to0}{-}f'(0)}{x}=\frac{\xi}{x}f''(0)+\frac{\xi}{x}\alpha$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi}{x}f''(0)+\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi}{x}\alpha=f''(0)\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi}{x}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$

$\because f''(0)\neq0\quad\therefore\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$

$\Delta x f'(x_0)+\alpha\Delta x=f(x+\Delta x)-f(x_0)$

注意运用导数定义

$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$

同阶/高阶无穷小

例10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2+bx+1})$ $\infty-\infty$ 提出无穷小因子,转换形式 $a=25$ $b=-20$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\boxed{\left[5-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{5-\sqrt{t^2+bt+a}}{t}$

例11: 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内可导,则不正确的是( )

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)\,\exists$,则 $f'(x)$ 在 x_0 点连续

(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不 $\exists$,则 x_0 是 $f'(x)$ 的第一类间断点

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不 $\exists$,则 x_0 是 $f'(x)$ 的第二类间断点

(D) 若∃比邻域内两点 x_1, x_2 使 $f(x_1)f(x_2)<0$，则∃比邻域内一点 ξ 使 $f(\xi)=0$

(A) $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{洛必达}{=\!=} \lim_{x\to x_0} f'(x)$ 　记结论

(B) 若 $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ 不∃，x_0 是 $f'(x)$ 的间断点，若 x_0 是第一类间断点

则 $f'(x_0-0)$ 和 $f'(x_0+0)$ 都∃

左导数 $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{洛比达}{=\!=} \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f'(x_0-0)$

右导数 $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{洛比达}{=\!=} \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = f'(x_0+0)$

$\therefore f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Rightarrow f'(x_0-0) = f'(x_0+0) = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$

§4.3 泰勒公式

1 多项式 $H_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

$a_0 = H(0)$ 　$a_1 = H'(0)$ 　$H''(0) = 2a_2$ 　$\cdots$ 　$H^{(n)}(0) = n!\,a_n$

$\therefore H_n(x) = H_n(0) + H_n'(0)x + \frac{H_n''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{H^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$f(x) \approx P_n(x)$ 　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点有 n 阶导

$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有 n 阶导，令 $t = x-x_0$

$f(x) = f(t+x_0) \overset{\triangle}{=\!=} g(t)$ 　则 $g(t)$ 在 $t=0$ 点有 n 阶导，$f'(x_0) = g'(0)$

$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(0)$ 　　$g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n$

$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$n=1$ 时

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x)$ ←

$\Rightarrow \Delta y = dy|_{x=x_0} + o(\Delta x)$

$R_1(x) = o(x-x_0)$

$n=2$ 时

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + R_2(x)$

$\Rightarrow R_2(x) = o((x-x_0)^2)$

$\Rightarrow R_n(x) = o((x-x_0)^n)$

2. 泰勒公式

设 $f(x)$ 在 x_0 点有 n 阶导，称多项式

$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

为 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶泰勒多项式

称 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点处的泰勒公式余项

此时 $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ 　$R_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ 　$(k>n)$

拉格朗日中值定理的高阶形式

定理1：设 $f(x)$ 在 x_0 点有 n 阶导数，则 $f(x)$ 在 x_0 点处的 n 阶泰勒公式余项 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

称之为带皮亚诺余项的泰勒公式

证明：$R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\overset{(n-1)\text{次洛}}{=}\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdots2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x-x_0)}$$
$$=\frac{1}{n!}R_n^{(n)}(x_0)=0$$

定理2：（泰勒中值定理）设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有 $(n+1)$ 阶导数则 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶泰勒公式余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x, x_0 之间，此时

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

称之为带拉格朗日余项的泰勒公式

证明：令 $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$

$$\frac{R_n(x)}{g(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\overset{\text{柯西}}{=}\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{g'(\xi_1)-g'(x_0)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}\overset{n\text{次柯西}}{=}\frac{R_n^{(n)}(\xi_{n-1})-R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(\xi_{n-1})-g^{(n)}(x_0)}\overset{\text{柯西}}{=}$$
$$\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

当 $x_0=0$ 时 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

称之为麦克劳林公式　ξ 介于 $0, x$ 之间，$0<\frac{\xi}{x}=\theta<1$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to0\qquad \exists M>0, 使 |f^{(n+1)}(x)|\le M$$

3.常见的泰勒公式

(1) $f(x)=e^x$　$f^{(n)}(x)=e^x$　$f^{(n)}(0)=e^0=1$　$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$

$\therefore e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$，$0<\theta<1$

$\therefore e=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$

$|R_n(1)|=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$

例1：利用 e^x 的麦克劳林公式计算 e 的值，使其误差不超过 10^{-5}

$\frac{3}{(n+1)!}<10^{-5}$　$n\ge8$

证明 e 为无理数

$\alpha=n$ 牛顿二项式的推广

$\alpha=-1$ 得

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}(1+\theta x)^{-n-2}x^{n+1}$

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad |x|<1$

先假设 e 为有理数

若 $e=\frac{p}{q}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$ $\quad 0<\frac{e^\theta}{(n+1)!}<1 \quad (n\geq 2)$

$n!\frac{p}{q}=(\cdots\text{整数})+\frac{e^\theta}{n+1}$ 矛盾

(2) $f(x)=\sin x$

$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$ $\quad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n}{2}\pi=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^m, & n=2m+1\end{cases}$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\frac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+3)!}x^{2m+3}$

$f^{(2m+3)}(\xi)=\sin(\xi+\frac{2m+3}{2}\pi)=\sin((m+1)\pi+\frac{\pi}{2}+\xi)=(-1)^{m+1}\sin(\frac{\pi}{2}+\xi)$

(3) $f(x)=\cos x$ $\quad f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^m, & n=2m\\ 0, & n=2m-1\end{cases}$

$f^{(n)}(x)=\cos^{(n)}x=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+\frac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$

$\cos^{(2m+2)}x=\sin^{(2m+3)}x$

(4) $f(x)=(1+x)^\alpha$

$f(0)=1$ $\quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, $\quad 0<\theta<1$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

(5) $f(x)=\ln(1+x)$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

$f^{(k)}(x)=(\frac{1}{1+x})^{(k-1)}=(-1)(-2)\cdots(-(k-1))(1+x)^{-k}$

$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k=\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\frac{(-1)^n(1+\theta x)^{-(n+1)}}{(n+1)}x^{n+1}$

例2：当 $x\to 0$ 时，问 $f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^x+2\sin x$ 是 $\cos x-1$ 的几阶无穷小 $\frac{3}{2}$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\Rightarrow\cos x-1=-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\Rightarrow\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$

$f(x)=1-x+\frac{1}{2}x^2-(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3))+2(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))$

$=-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\sim-\frac{1}{2}x^3$

高阶→泰勒中值定理 ←

例3. 设$f(x)$在$[-1,1]$上有连续的三阶导数,且$f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$, 证明: ∃一点$\xi \in (-1,1)$使$f'''(\xi)=3$

证明. $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$

令$x=1$, 有 $f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}$, $0<\xi_1<1$ ①

令$x=-1$, 有 $f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!}$, $0>\xi_2>-1$ ②

①-②得 $1=\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)] \Rightarrow 3=\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$

$=(-1)^{m+1}\cos\xi$

$\because f'''(x)\in C_{[-1,1]}$ 由连续函数的介值原理, $\exists\xi\in[\xi_2,\xi_1]\subseteq[-1,1]$

使 $f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)]=3$

例4. 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数,且$f(a)=f(b)=0$. 又$M=f(c)>0$是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值, 证明$\exists\xi\in(a,b)$使$f''(\xi)\le\frac{-8M}{(b-a)^2}$

证明: 将$f(x)$在$x=c$点展成泰勒公式

$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)^2+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-c)^2$

又$\because f(c)=M$是最大值, $\therefore f(c)$是极值

又$\because f'(c)$∃. 由费马原理 有 $f'(c)=0$

$\therefore x=a$ $\quad 0=f(a)=M+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(a-c)^2$

$x=b$ $\quad 0=f(b)=M+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(b-c)^2$

$$\Rightarrow\begin{cases} f''(\xi_1)=\frac{-2M}{(a-c)^2}=\frac{-8M}{[2(a-c)]^2}\le\frac{-8M}{(b-a)^2} \Leftrightarrow c\le\frac{a+b}{2} \\ f''(\xi_2)=\frac{-2M}{(b-c)^2}=\frac{-8M}{[2(b-c)]^2}\le\frac{-8M}{(b-a)^2} \Leftrightarrow c\ge\frac{a+b}{2}\end{cases}$$

§4.4. 极值与最值

1.函数的单调性

定理1: 设$f(x)\uparrow I$ $(\downarrow I)$ 且$f'(x)$存在, 则$f'(x)\ge0$ (≤0)

$\uparrow f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge0$

$f'(x)\gtrless0$ 严格单调

$f'(x)\geqq0$ / $\leqq0$ 不严格单调

定理2: 若$f(x)\in C\langle a,b\rangle$且$f(x)$在$\boxed{(a,b)}$内可导, 当$f'(x)>0$ (<0)则$f(x)\uparrow\langle a,b\rangle$ $(\downarrow\langle a,b\rangle)$

证明：$\forall x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$，不妨设 $x_1<x_2$，由拉格朗日中值定理

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)>0 \quad \exists \xi \in (x_1,x_2) \Rightarrow f(x_2)>f(x_1) \Rightarrow f(x)\uparrow \langle a,b\rangle$

注：$(a,b]$ $[a,b]$

例1：求 $f(x)=x^3-3x+5$ 的单调区间

解：$f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$　定义域 $(-\infty,+\infty)$

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

例2：证明 $(1+\frac{1}{x})^x \uparrow (0,+\infty)$

证明：$[(1+\frac{1}{x})^x]' = (1+\frac{1}{x})^x \cdot (x\ln(1+\frac{1}{x}))'$

$= (1+\frac{1}{x})^x (\ln(1+\frac{1}{x}) + x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}))$

$= (1+\frac{1}{x})^x (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}) > 0$

令 $f(x)=\ln x$　$\ln(1+\frac{1}{x})-\ln 1 = f'(\xi)\frac{1}{x} = \frac{1}{\xi x}$，$1<\xi<1+\frac{1}{x}$

$x<\xi x<x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1}<\frac{1}{\xi x}<\frac{1}{x}$　$\therefore (1+\frac{1}{x})^x \uparrow (0,+\infty)$

例3：设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，$x\in[0,+\infty)$ 证明 $\frac{f(x)}{x}\downarrow(0,+\infty)$

证明：$(\frac{f(x)}{x})' = \frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$　令 $g(x)=f'(x)x-f(x)$，$x\in[0,+\infty)$

$g'(x)=f''(x)x<0$，当 $x>0$

又$\because g(x)$ 在 $x=0$ 点连续　$\therefore g(x)\downarrow[0,+\infty)$

$\therefore$ 当 $x>0$ 有 $g(x)<g(0)=0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时 $(\frac{f(x)}{x})'<0$ 从而 $\frac{f(x)}{x}\downarrow(0,+\infty)$

例4：设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$

证明：令 $f(x)=x\ln a-a\ln x$，$x\in[a,+\infty)$

$f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}>0 \Rightarrow f(x)\uparrow[a,+\infty)$

$\therefore$ 当 $x>a$，有 $f(x)>f(a)=0 \Rightarrow x\ln a>a\ln x$

令 $x=b$ 有 $b\ln a-a\ln b>0 \Rightarrow a^b>b^a$

例5: 求方程 $(x^2-2x)e^x+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}=0$ 实根个数

解 令 $f(x)=(x^2-2x)e^x+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}$

$f'(x)=(x^2-2)e^x=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

① 当 $x\in(-\infty,-\sqrt{2})$ 时, $f'(x)>0$, $\Rightarrow f(x)\uparrow(-\infty,-\sqrt{2}]$

$f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}>0$ $f(-\sqrt{2})>0$ ∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{2})$ 上无根

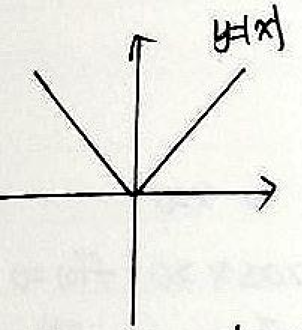
② 当 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 时, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\downarrow[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

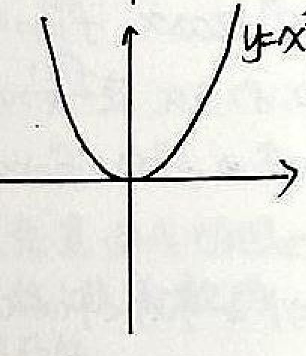
$f(\sqrt{2})<0$ $f(-\sqrt{2})>0$ ∴ $f(x)$ 有且仅有一个根

③ 当 $x\in(\sqrt{2},+\infty)$ $f'(x)>0$ $f(x)\uparrow[\sqrt{2},+\infty)$

$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ∴ $f(x)$ 有且仅有一个根

综上所述,方程有两个根





2 函数的极值

定理1: 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续且在 x_0 点的去心邻域内可导

(1) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)<0$, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f'(x)>0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值

(2) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)>0$, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)<0$ 则 $f(x_0)$ 是极大值

证明: (1) $x\in(x_0-\delta,x_0)$ $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\downarrow(x_0-\delta,x_0)$

又 $f(x)$ 在 x_0 点连续 ∴ $f(x)\downarrow(x_0-\delta,x_0]$ 类似 $f(x)\uparrow[x_0,x_0+\delta)$

例1: 求 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 的极值

解 定义域 $(-\infty,+\infty)$ $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(0\ \pm1)$ 导数不存在

$f(x)$ 是偶函数, $f'(x)$ 是奇函数

列表

x	0	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	不∃	$+$	0	$-$	不∃	$-$
$f(x)$	极小	↑	极大	↓	不是	↑

∴ 极大值 $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=4^{\frac{1}{3}}$ $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=4^{\frac{1}{3}}$ 极小值 $f(0)=1$

定理2: 若 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq0$, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极值, 当 $f''(x_0)>0$ 时, 是极小

值，当 $f''(x_0)<0$ 时，是极大值

证：若 $f''(x_0)>0$，$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$

由极限的保序性，$\exists\ \mathring{U}(x_0,\delta)\ \exists x$，有 $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$

当 $x>x_0$ 时，有 $f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$　当 $x<x_0$ 时，有 $f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

$\therefore f(x_0)$ 是极小值

注：若 $f''(x_0)=0$，x_0 不一定是极值点. e.g. $y=x^3$　$y=x^4$

例2：求 $f(x)=e^x-1-x$ 的极值

解 $f'(x)=e^x-1=0\Rightarrow x=0$　$f''(x)=e^x$　$f''(0)=1>0$

$\therefore f(0)=0$ 是极小值

例3：求 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值

解 定义域是 $(-\infty,+\infty)$　$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x=0\Rightarrow x=0$

$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x\geqslant 2\sqrt{e^x e^{-x}}-2\cos x=2-2\cos x\geqslant 0$　$f''(0)=0$

$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x$　$f'''(0)=0$　$f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$　$f^{(4)}(0)=4$

$f^{(4)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'''(x)-f'''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{x}>0$　$\exists\ \mathring{U}(0,\delta)\ \exists x$，使 $\frac{f'''(x)}{x}>0$

当 $x>0\Rightarrow f'''(x)>0\Rightarrow f''(x)\uparrow$　$f''(x)>f''(0)=0\Rightarrow f'(x)\uparrow\Rightarrow f'(x)>f'(0)=0$

$\Rightarrow f(x)\uparrow$

当 $x<0\Rightarrow f'''(x)<0\Rightarrow f''(x)\downarrow$　$f''(x)>f''(0)=0\Rightarrow f'(x)\uparrow\Rightarrow f'(x)<f'(0)=0$

$\Rightarrow f(x)\downarrow$

$\therefore f(0)=4$ 是极小值

阶数高时考虑使用泰勒公式

法二：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)$

$\Rightarrow f(x)-f(0)=\frac{1}{3!}x^4+o(x^4)>0$　$\therefore f(0)=4$ 是极小值

3. 函数的最值

(1) 区间上连续函数的最值

设 $f(x)\in C\langle a,b\rangle$ 且 $f(x)$ 在 $\langle a,b\rangle$ 上有有限个极值嫌疑点，$x_1\ x_2\cdots x_k$

则 $f(x)$ 的最值在 $f(x_1)$，$f(x_2)\cdots f(x_k)$ $f(a)$ $f(b)$ 中找

例1: 求 $f(x)=(x^2-2x)e^x$ 的最值

解 易见 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$ $f'(x)=(x^2-2)e^x=0$ $x=\pm\sqrt{2}$

$f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $f(-\sqrt{2})=(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}>0$ $f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}<0$

$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

∴ $f(x)$ 有最小值 $f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$, 无最大值

(2) 若 $f(x)\in C(a,b)$ 有且仅有一个极大(小)值,则此极值是最大(小)值

例2: 设有一工厂要加工一批无盖的圆柱形罐头盒,其容积为V,问半径与高满足什么关系最省料

解: 设半径为 x, 高为 $\frac{V}{\pi x^2}$.

$y=\pi x^2+2\pi x\frac{V}{\pi x^2}=\pi x^2+\frac{2V}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

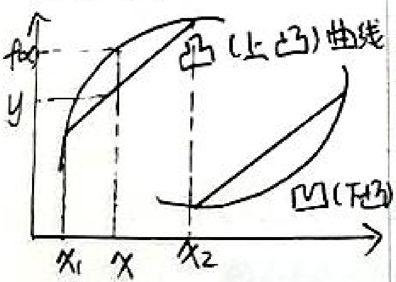
$y'=2\pi x-\frac{2V}{x^2}=0 \Rightarrow x=(\frac{V}{\pi})^{\frac{1}{3}}$ $y''=2\pi+\frac{4V}{x^3}>0$

∴ $x=(\frac{V}{\pi})^{\frac{1}{3}}$ 是唯一的极小值点,从而为最小值点,此时

$\frac{半径}{高}=\frac{x}{\frac{V}{\pi x^2}}=\frac{\pi x^3}{V}=\frac{V}{V}=1:1$

§4.5 函数作图

注意是曲线的凹凸性,非函数的凹凸性



1. 函数曲线凹凸性

定义1: 设 $f(x)\in C(a,b)$, $\forall x_1, x_2\in(a,b)$ 若满足:

$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\underset{(\le)}{\ge}(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$ $(0\le\lambda\le1)$

则称曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是凸(凹)的

定义2: 设 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续,若曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性在 x_0 点的左右邻域发生改变,则称 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

判断: $f(x)$ 在 $x=0$ 点有三阶导数且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=1$, 则 $f(0)$ 为极值 (√)

$y-f(x_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$

分析: ① $f'''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f''(0)}{6x}=\frac{1}{6}f''(0)$

$=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)]$

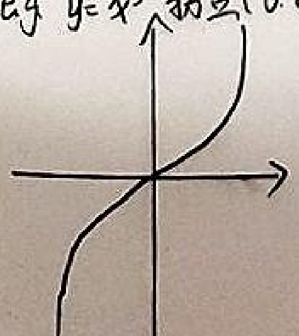
$f(0)=0=f'(0)=f''(0)$

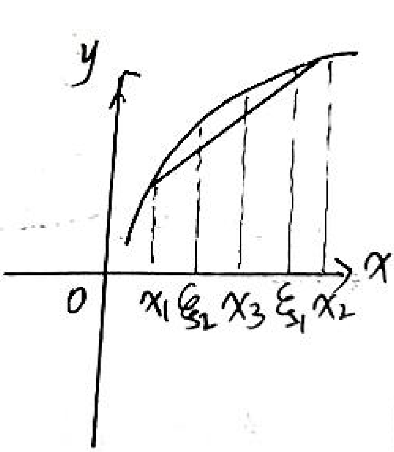
$y=f(x_1)+\lambda[f(x_2)-f(x_1)]$ 由凸曲线定义: $f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\ge(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$

$\underbrace{f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)}_{x}\ge(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$

极值点为x轴上的点,但拐点为曲线上的点.

eg $y=x^3$ 拐点 $(0,0)$





不妨设 $x_1<x_2$ $\quad x_3=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)-f(x_3)=\lambda(f(x_2)-f(x_3))+\lambda f(x_3)-f(x_3)+(1-\lambda)f(x_1)$$

$$=\lambda(f(x_2)-f(x_3))+(1-\lambda)(f(x_1)-f(x_3))$$

$$\xlongequal{\text{一阶可导}}\lambda f'(\xi_1)(x_2-x_3)+(1-\lambda)f'(\xi_2)(x_1-x_3)$$

$$=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)f'(\xi_1)-f'(\xi_2)(1-\lambda)\lambda(x_2-x_1)$$

$$=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]$$

$$\xlongequal{\text{二阶可导}}\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)\,f''(\xi)(\xi_1-\xi_2)\ \le 0\ (\text{凸}) \Leftarrow f''(x)\le 0$$

$$\ge 0\ (\text{凹}) \Leftarrow f''(x)\ge 0$$

定理1：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数，若 $f''(x)\le 0\ (\ge 0)$，则曲线 $y=f(x)$ 是凸(凹)的，称 (a,b) 为其凸(凹)区间

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 点连续，且在 x_0 点的去心邻域二阶导存在，若 $f''(x)$ 在 x_0 点的左右邻域内异号，则 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

费马引理推出 ← 注：在(2)的条件下，若 $f''(x_0)\exists$，则 $f''(x_0)=0$

$f''(x_0)=0$，不一定是拐点. e.g. $y=x^4$ $\quad y''(0)=0$ 但 $(0,0)$ 不是拐点

例1：求 $y=x^4-2x^3+3x+1$ 的凹凸区间及拐点.

解：定义域：$(-\infty,+\infty)$ $\quad y'=4x^3-6x^2+3$ $\quad y''=12x^2-12x=0$ $\Rightarrow x=0$ 或 1

列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凹	1	凸	3	凹

$\therefore (0,1)$ 和 $(1,3)$ 是拐点.

例2：设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点有三阶导数且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=1$，则(C)

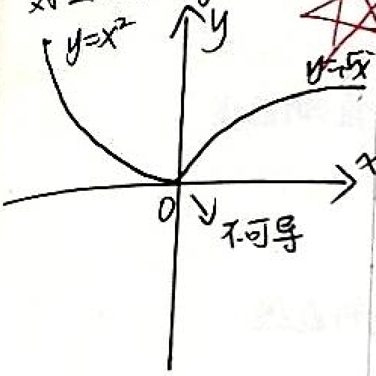
(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 $\qquad$ (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点. $\qquad$ (D) $f(0)$ 不是极值 $(0,0)$ 不是拐点.

$$1=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{3x^2}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\frac{1}{6}f'''(0)$$

$f(0)=f'(0)=f''(0)=0$

拐点与极值点并非对立的 eg.



★ $b = f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} > 0 \Rightarrow \exists\ \mathring{U}(0,\delta)$ 使 $\frac{f(x)}{x}>0$, $\Rightarrow \begin{cases} x<0 & f(x)<0 \quad f(x)\downarrow \\ x>0 & f(x)>0 \quad f(x)\uparrow \end{cases} \Rightarrow f\uparrow$

例3: 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 而 $f^{(n)}(x_0) \neq 0\ (n \geq 3)$ 证明: ①当 n 为偶数时, $f(x_0)$ 是极值, $f^{(n)}(x_0)>0$, (<0) 是极小(大)值而 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点. ②当 n 为奇数时, $(x_0, f(x_0))$ 是拐点, 而 $f(x_0)$ 不是极值

证: ① $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

$f(x) - f(x_0) = \overset{主部}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} + \overset{次部}{o((x-x_0)^n)}$

当 n 为偶数时 若 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 则 $f(x) > f(x_0)$, 从而 $f(x_0)$ 是极小值

<0 则 $f(x) < f(x_0)$ 从而 $f(x_0)$ 是极大值

当 n 为奇数时, $(x-x_0)^n$ 可正可负, 从而 $f(x)-f(x_0)$ 可正可负所以 $f(x_0)$ 不是极值

② $f''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + o((x-x_0)^{n-2})$

$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$

当 n 为偶数时, $f''(x)$ 在 x_0 的邻域内不变号, ∴ $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点

当 n 为奇数时, $f''(x)$ 在 x_0 的左右邻域内异号 ∴ $(x_0, f(x_0))$ 是拐点

2.渐近线

设有曲线 Γ 和直线 l, 当曲线 Γ 的一端远离坐标原点时, 曲线 Γ 和直线 l 无限接近则称直线 l 是曲线 Γ 的一条渐近线

(a)垂直渐近线

eg. $y=\ln x$ $y=\tan x$ ← $y=\frac{1}{1-x}$

抓住一个点

直线 $x=C$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线 $\Leftrightarrow$ $x=C$ 是 $f(x)$ 的间断点或区间端点 且 $\lim\limits_{x\to C^+ (x\to C^-)} f(x) = \infty$

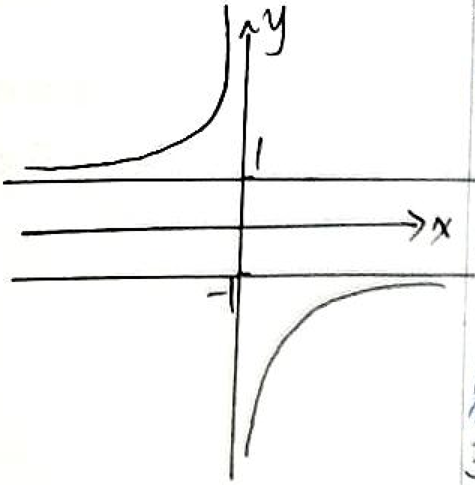
(b)一般渐近线

直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x)-ax-b) = 0$ 此时

$a = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}$ 且 $b = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x)-ax)$

$f(x)-ax-b = 0+\alpha$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha = 0$ $\quad a = \frac{f(x)-b-\alpha}{x}$ $\quad \Rightarrow a = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b+\alpha}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$



例1: 求曲线 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$ 的所有渐近线

解: 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+e^x}{1-e^x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1+e^x}{1-e^x}=+\infty$ ∴ $x=0$ 是垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{(1-e^x)x}=\lim\frac{e^{-x}+1}{(e^{-x}-1)x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=-1$

∴ $y=-1$ 是水平渐近线

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{(1-e^x)x}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=1$ ∴ $y=1$ 是水平渐近线

3. 分析作图法(描点)

(1) 定义域 (2) $f'(x)=0$ 及不∃的点

(3) $f''(x)=0$ 及不∃的点 (4) 渐近线及渐进方向

(5) 列表再描图形(加周期性, 奇偶性)

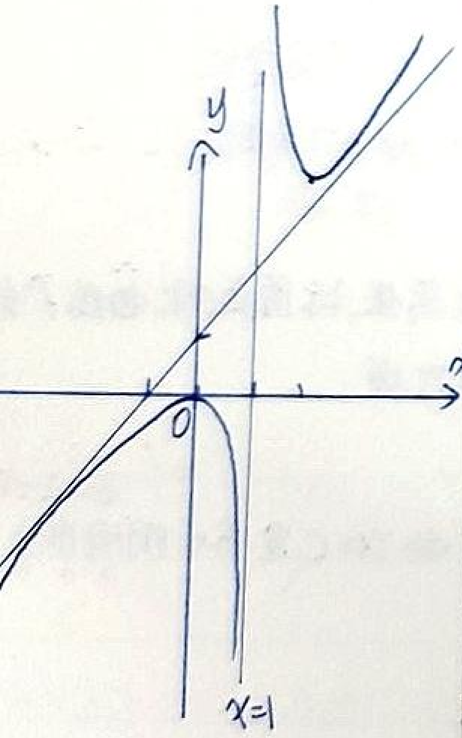
例2: 作函数 $y=\frac{x^2}{x-1}$ 的图形 $x=0$ 或 2

解: 定义域 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ $y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$ $y''=\frac{2}{(x-1)^3}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$ ∴ $x=1$ 是垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=1$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2}{x-1}-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$

∴ $y=x+1$ 是一条渐近线



列表

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	−	0	+
y''	−		−	+		+
y	↗	极大值 0	↘	↘	极小值 4	↗

例3: 作曲线 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$ 的图形

解: 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y'=\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$ $y''=\frac{2e^x(e^x+1)}{(1-e^x)^3}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+e^x}{1-e^x}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1+e^x}{1-e^x}=+\infty$ ∴ $x=0$ 是垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x(1-e^x)}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{x(1-e^x)}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=1$

∴ $y=\pm1$ 是水平渐近线

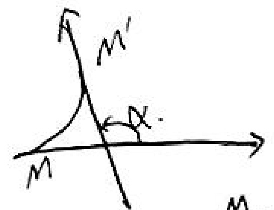
例4: 作函数 $y=xe^x$ 的图形

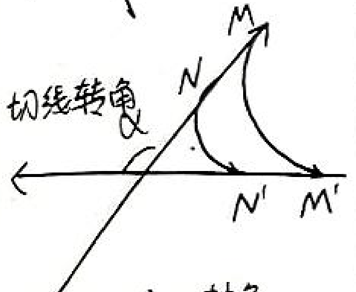
解: 定义域 $(-\infty,+\infty)$ $y'=(x+1)e^x=0 \Rightarrow x=-1$ $y''=(x+2)e^x=0 \Rightarrow x=-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=0$ $\therefore y=0$ 是水平渐近线

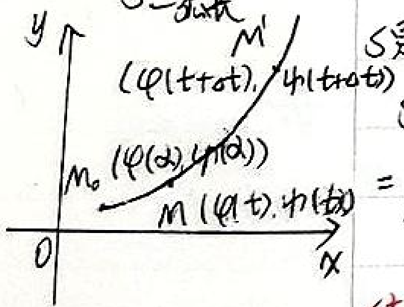
x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	拐点	↘	极小	↗

§4.6 曲率





曲率 $k=\frac{\alpha}{S}$ —转角 —弧长



1.曲线长

简单、连续、可度 ($\lim\limits_{M'\to M}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}=1$) 曲线

曲线方程: 参数曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 函数曲线 $y=f(x)$ 极坐标曲线 $r=r(\theta)$

曲线长函数 S

设曲线 l: $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$. 是简单连续可度曲线, 以曲线左端点 M_0 $(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ 为定点, $t\in[\alpha,\beta]$, 得到 l 上另一点 $(\varphi(t),\psi(t))$, 设 $S=\overset{\frown}{M_0M}$, 易见 S 是 t 的函数, 记为 $S=S(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $S(t)\uparrow$

$$S'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}\ \underset{\Delta t>0}{\overset{\text{限制}}{=}}\ \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\overset{\frown}{M_0M'}-\overset{\frown}{M_0M}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t}\ \overset{x=\varphi(t)}{\underset{y=\psi(t)\ \text{可导}}{=}}\ \lim_{\Delta t\to 0^+}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$$

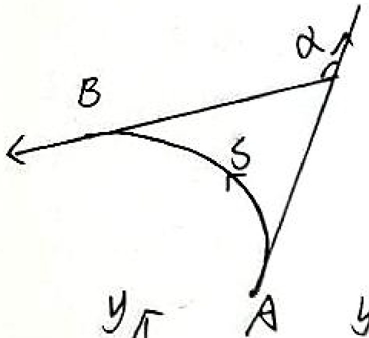
结论: 若 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, 都可导, 则曲线长函数 $S=S(t)$ 也可导, 且

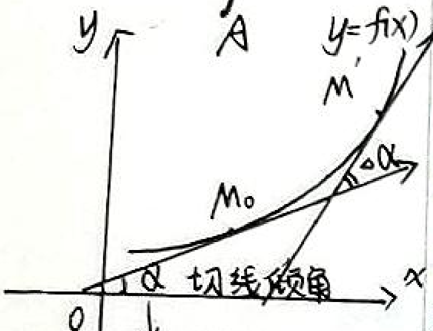
$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$ (规定 $dt>0$, 有 $ds>0$)

称上式为曲线 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 的弧微分

几何意义: $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$

$\begin{cases}y=f(x)\\x=x\end{cases}$ $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ $dx>0$ $ds>0$





倾角函数 $\alpha=\alpha(x)$

$k=\lim\limits_{M'\to M_0}\frac{\Delta\alpha}{\widehat{M_0M'}}$

金工实习

车 铣 钳 刨

圆

极坐标曲线 $r=r(\theta)$ $\quad ds=\sqrt{x'^2+y^2}\,d\theta$

$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$ $\quad =\sqrt{r^2(\theta)+r'(\theta)^2}\,d\theta \quad d\theta>0,\ ds>0$

2.曲率

定义1：设有一光滑曲线段 $\widehat{AB}$，A是始点，由A到B，A点的切线与B点的切线的转角为 α，$\widehat{AB}$ 的长度为 S，规定 $K=\frac{\alpha}{S}$，为曲线段 $\widehat{AB}$ 的曲率

注：直线的曲率为0　半径为R的圆的曲率为 $\frac{1}{R}$

定义2：设曲线 $y=f(x)$ 处处有切线，则其切线倾角又是关于 x 的一个函数，称之为 $y=f(x)$ 的倾角函数，记为 $\alpha=\alpha(x)$，易见 $\alpha(x)=\arctan y'$

定义3：设曲线在点 (x,y) 附近光滑，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 存在，则称此极限为曲线在 (x,y) 点处曲率，记为 $K=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha/\Delta x}{\Delta s/\Delta x}\right|=\left|\frac{\alpha'(x)}{s'(x)}\right|=\left|\frac{1}{1+y'^2}\cdot y''\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

结论：若 $y=f(x)$ 有二阶导数，则点 (x,y) 处曲率存在，且 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ —曲

例1：求半径为R的圆的曲率

解：设圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$

$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$

$2+2(y'^2+yy'')=0 \quad 1+\frac{x^2}{y^2}+yy''=0 \quad y''=-\frac{R^2}{y^3}$

代入 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{R}$

例2：求曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点

解：$y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$

$k(x)=\frac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$k'(x)=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-x\cdot\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(1+x^2)^3}=\frac{-2x^2+1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）

当 $x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$k'(x)>0$，$k(x)\uparrow$　当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ $k'(x)<0$ $k(x)\downarrow$

$\therefore$ 当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $k(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 是极大值，是最大值

3.曲率圆

曲线的分类

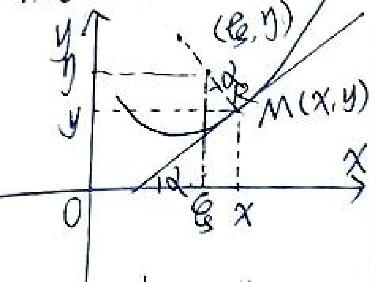
① $y'>0 \quad y''>0$

② $y'>0 \quad y''<0$

③ $y'<0 \quad y''>0$

④ $y'<0 \quad y''<0$

以①为例



$y'>0 \quad y''>0$

定义：设有曲线Γ，$M_0\in\Gamma$，又有一个$\odot O$，若满足以下三条：

①曲线Γ与$\odot O$在M_0点相切，　②在M_0点处曲线Γ与$\odot O$有相同的凹向

③Γ在M_0点处的曲率等于$\odot O$的半径倒数 称$\odot O$为曲线Γ在M_0点处的曲率圆，

此$\odot$的半径称为M_0点的曲率半径，$\odot$心称为M_0点处的曲率中心。

若Γ上每一点都有曲率圆并且曲率中心又形成一条曲线L，称L为Γ的渐屈线

Γ称为L的渐开线

曲率圆的确定（半径、曲率中心）

$$x-\xi=R\sin\alpha \qquad \eta-y=R\cos\alpha \qquad R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \qquad \tan\alpha=y'>0$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\xi=x-R\sin\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}\\ \eta=y+R\cos\alpha=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$$ —曲率中心公式

例1：求$y=x^2$在点$(1,1)$处的曲率圆

解：$y'=2x \quad y''=2 \quad y'|_{(1,1)}=2 \quad R_{(1,1)}=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{5}{2}\sqrt{5}$

设曲率中心(ξ,η)

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}=-4\\ \eta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}=\dfrac{7}{2}\end{cases}$$

$\therefore$所求的曲率圆为 $(x+4)^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{125}{4}$

例2：求曲线$\begin{cases}x=a(t\sin t+\cos t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$的渐屈线方程

解：$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y_t}{x_t}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(\sin t+t\cos t-\sin t)}=\tan t$

$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{at\cos t}=\frac{1}{at\cos^3 t}$

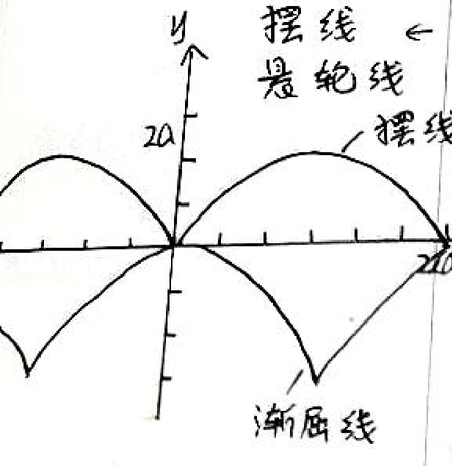
设渐屈线坐标为(ξ,η)

$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=a(t\sin t+\cos t)-at\cos^3 t\cdot\tan t(1+\tan^2 t)=a\cos t$

$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=a(\sin t-t\cos t)+at\cos^3 t(1+\tan^2 t)=a\sin t$

$\therefore \xi^2+\eta^2=a^2$，所求渐屈线为$\xi^2+\eta^2=a^2$，是圆

例3: 求曲线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 的渐屈线 $(a>0)$



解: $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

$y''=\left(\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right)'/a(1-\cos t)=\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2\,a(1-\cos t)}=\dfrac{-1}{a(1-\cos t)^2}$

设渐屈线坐标为 (ξ,η)

$\xi=x-(1+y'^2)y'/y''=a(t-\sin t)-\left[1+\dfrac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right]\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\Big/\dfrac{-1}{a(1-\cos t)^2}$

$=a(t+\sin t)$

$\eta=y+(1+y'^2)/y''=a(1-\cos t)+\left[1+\left(\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right)^2\right]\cdot[-a(1-\cos t)^2]$

$=a(\cos t-1)$

令 $t=\pi+\theta$ $\quad\sin t=-\sin\theta\quad\cos t=-\cos\theta$

$\Rightarrow\begin{cases}\xi=a(\pi+\theta-\sin\theta)\\ \eta=a(-1-\cos\theta)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi-a\pi=a(\theta-\sin\theta)\\ \eta+2a=a(1-\cos\theta)\end{cases}$

第五章 不定积分

§5.1. 原函数与不定积分

1. 原函数

定义1: 若在区间 I 上有 $F'(x)=f(x)$, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 比如 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数, $\sin x+C$ 还是 $\cos x$ 的原函数

若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 则其原函数有无穷多个. $F(x)+C$ (C 是任意常数) 都是 $f(x)$ 的原函数, 且 $f(x)$ 的所有原函数都在 $F(x)+C$ 中

定理: 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x)+C$ (C 是任意常数) 是 $f(x)$ 的所有原函数的统一表达式。
包括复数

证: 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $\varphi'(x)=f(x)$, 又 $F'(x)=f(x)$

$\therefore \varphi'(x)=F'(x)\Rightarrow\exists C$, 使 $\varphi(x)=F(x)+C$

2. 不定积分

2种理解
1. 一般性代表
2. 集合表达

定义2：若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，则称 $f(x)$ 在 I 上的所有原函数的统一表达式(的集合) $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $F(x)+C=\int f(x)dx$，"$\int$"—积分号(表示连续的求和)，"$f(x)$"—被积函数 "x"—积分变量 "$f(x)dx$"—被积表达式 "C"—积分常数

Σ：离散的求和
$\int$ 来源于 sum

3. 性质与简单计算

(1) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$　　$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

(2) $\int f'(x)dx=f(x)+C$　　$\int df(x)=f(x)+C$

(3) $\int [f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
(4) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$
} 线性性质

$\int 1dx=x+C$
$\Downarrow$
$\int df(x)=f(x)+C$
两边求导得证

不是所有函数都有不定积分，导函数无第I类间断点。

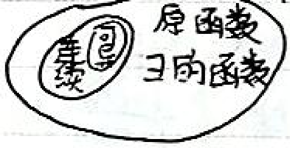
4. 原函数的存在性

(1) 连续函数一定有原函数

(2) 含有第I类间断点的函数，没有原函数
含有第II类间断点的函数，可能有原函数

e.g. $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　　$F'(x)=f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不∃

$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$



5. 不定积分的基本公式

(1) $\int 0\,dx=C$　　(2) $\int 1\,dx=x+C$　　(3) $\int x^u dx=\frac{x^{u+1}}{u+1}+C\ (u\neq -1)$

(4) $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C=\begin{cases}\ln x+C, & x>0\\ \ln(-x)+C, & x<0\end{cases}$

(5) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$　　(6) $\int e^x dx=e^x+C$

(7) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$　　(8) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

(9) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$　　(10) $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$
$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$　　$=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$

(12) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\text{arc}\cot x + C'$

例1：设 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$ 求 $\int f(x) dx$

直接积分法

解 $\int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + C_1, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_2, & x < 1 \end{cases}$ $\int f(x) dx$ 连续 $\Rightarrow \frac{1}{4} + C_1 = \frac{1}{2} + C_2$

$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{4} + C_2$

$\therefore \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4} + C, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C, & x < 1 \end{cases}$

加一项减一项

例2. $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$

解 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}) dx$

$= -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$

例3：$\int (\sqrt{x} - 1)(x+1) dx$

解 原式 $= \int (x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} - 1) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C$

例4. $\int \tan^2 x \, dx$

解 原式 $= \int (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$

例5. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

解 $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}x + C$

§5.2 第一换元积分法

复合函数求导法 →

定理1：设 $F(u)$ 可导，且 $F'(u) = f(u)$，$u = g(x)$ 也可导，则

$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(g(x)) dg(x) = F(g(x)) + C$

证：由复合函数求导，有

$[F(g(x))]' = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x)$

$\therefore \int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$

$\because F'(u) = f(u)$ $\therefore \int f(u) du = F(u) + C$ 令 $u = g(x)$

有 $\int f(g(x))\,dg(x) = F(g(x))+C$，

$\therefore \boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(g(x))\,dg(x)} = F(g(x))+C$

第一换元积分公式，也叫凑微分法

例1：$\int \sin(3x+5)\,dx$

解：原式 $=\frac{1}{3}\int \sin(3x+5)\,d(3x+5) = -\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C$

$\therefore$ 若 $F'(x)=f(x)$ 则 $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

例2：$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

解：原式 $= \int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int \ln^2 x\,d\ln x = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$

例3：$\int a^{\arctan x}/1+x^2\,dx$

解：原式 $= \int a^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \int a^{\arctan x}\,d\arctan x = \frac{a^{\arctan x}}{\ln a}+C$

2.显示第一换元积分形：若 $F'(x)=f(x)$ 则

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}\,dx = \int f(\ln x)\,d\ln x = F(\ln x)+C$$

$$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int f(\arcsin x)\,d\arcsin x = F(\arcsin x)+C.$$

$$\int \frac{f(\arccos x)}{-\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int f(\arccos x)\,d\arccos x = F(\arccos x)+C$$

$$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\,dx = \int f(\arctan x)\,d\arctan x = F(\arctan x)+C$$

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+e^x}\,d(e^x+1) = \ln(e^x+1)+C$$

3.四个积分基本公式

(13) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x|+C$

(14) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x|+C$

(15) $\int \csc x\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \overset{t=\cos x}{=} \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x-1}$

$= \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$

$= \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+C = \ln\left|\frac{1}{\sin x}-\cot x\right|+C = \ln|\csc x-\cot x|+C$

(16) $\int \sec x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}\,dx = \ln\left|\frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}-\cot(x+\frac{\pi}{2})\right|$

$+C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right|+C = \ln|\sec x+\tan x|+C$

(15) 法二：$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln|\tan\frac{x}{2}|+C$

4.常见的三角函数积分

例1: $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

解 原式 $= \int \sin^2 x \cos^2 x \, d\sin x = \int \sin^2 x (1-\sin^2 x) \, d\sin x = \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \, d\sin x$

$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$，若 m，n 中至少有一个是奇数时，不妨设 $n=2k+1$，则

$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k \, d\sin x$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$　　$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

例2: $\int \sin^4 x \, dx$

解 原式 $= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$

$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x) \, dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$

$= \frac{1}{4}(x - \sin 2x) + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

例3: $\int \tan^3 x \, dx$

解 原式 $= \int \tan x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \tan x \, d\tan x - \int \tan x \, dx$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

$\int \tan^n x \, dx$ 或 $\int \cot^n x \, dx$ $(n \geq 2)$ 利用 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$　$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

$\int \tan^n x \, dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx$

例4: $\int \frac{1}{\sin x \cos^2 x} dx$

解 原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin x} dx = -\int \frac{1}{\cos^2 x} d\cos x + \int \frac{1}{\sin x} dx$

$= \frac{1}{\cos x} + \ln|\csc x - \cot x| + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ 分子 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

例5: $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x} dx$

解 原式 $= \int \frac{1}{4\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{4\tan^2 x + 1} dx = \int \frac{\frac{1}{2} d2\tan x}{1+(2\tan x)^2}$

$= \frac{1}{2}\arctan x(2\tan x) + C$

$\int \frac{1}{a+b\sin^2 x} dx$ 或 $\int \frac{dx}{a+b\cos^2 x}$ 将 $a = (\sin^2 x + \cos^2 x)a$ 代入

5 第一换元的技巧

例1: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

解 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{d(2x+x^2+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}} - \int \frac{2dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\right)$

例2: $\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$

解 原式 $= \int \frac{dx}{(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3} = \int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$= \int \frac{1}{(\sin^2 x-\cos^2 x)^2+\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 2x+\frac{1}{4}\sin^2 2x} = \int \frac{d\frac{1}{2}\tan 2x}{1+(\frac{1}{2}\tan 2x)^2}$

$= \arctan(\frac{1}{2}\tan 2x)+C$

例3: $\int \frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx \ (a, b\neq 0)$

解: 原式 $= \frac{1}{-b-\frac{a^2}{b}}\int \frac{(a\cos x-b\sin x)-\frac{a}{b}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}dx$

$= \frac{-b}{a^2+b^2}\left(\ln|a\sin x+b\cos x|-\frac{a}{b}x\right)+C$

例4: $\int \frac{1}{\sin x+\tan x}dx = t.$

解 原式 $= \int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{1+\cos x-1}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{1}{\sin x}dx - \int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}dx$

$\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{1-\cos x+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx + t$

则 原式 $t = \int \frac{1}{\sin x}dx - \int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx - t$

∴ 原式 $= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\sin x}dx - \int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx\right)$

$\int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx = -\int \frac{d(\cos x+1)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}+C$

法二: 原式 $= \int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$= \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sin x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos^3\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x}dx + \int \frac{1}{2\cos^3\frac{x}{2}}d\cos\frac{x}{2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x}dx + \frac{1}{2}\frac{\cos^{-2}\frac{x}{2}}{-2} = \frac{1}{2}\left(\ln|\csc x-\cot x| - \frac{1}{1+\cos x}\right)+C$

例5: $\int \frac{x\cos x-\sin x}{(x+\sin x)^2}dx \qquad \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

解 原式 $= \int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\Big/\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int d\left(\frac{\sin x}{x}+1\right)\Big/\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

$= -\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}+C$

$= -\frac{x}{x+\sin x}+C.$

§5.3. 分部积分法

$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow$

$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx = f(x)g(x) + C \Rightarrow$

$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ —— 分部积分公式

或 $\int g(x)df(x) = f(x)g(x) - \int f(x)dg(x)$

注：在此公式中，将被积表达式拆成两个因子$g(x)$与$df(x)$的乘积，要使$f(x)$的原函数"好"求，$g(x)$的导数$g'(x)$相对简单

1.典型的分部积分形

例1：$\int \ln^2 x\,dx$

解 原式 $= x\ln^2 x - \int x\,d\ln^2 x = x\ln^2 x - \int 2\ln x\,dx$

$= x\ln^2 x - 2(x\ln x - \int x\,d\ln x)$

$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

(1) $\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - \int x\,d\ln^n x = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx$

例2：$\int \arctan x\,dx$

解 原式 $= x\arctan x - \int x\,d\arctan x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

(2) $\int \arcsin x\,dx$，$\int \arccos x\,dx$，$\int \arctan x\,dx$，$\int \operatorname{arccot} x\,dx$

例3：$\int x^2 \arcsin x\,dx$

解 原式 $= \int \arcsin x\,d\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \frac{1}{3}\int x^3\,d\arcsin x$

$= \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\int x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2) = \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$

$= \frac{1}{2}\int (\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})d(1-x^2)$

$= \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$

(3) $\int$正整数幂函数×反三角函数dx

例4：$\int x^2 \ln x\,dx = \int \ln x\,d\frac{1}{3}x^3$

解 原式 $= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

(4) $\int$ 正整数幂函数 $\times$ 对数函数 dx

例6: $\int x\cos x\,dx$

解 原式 $= \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin + \cos x + C$

(6) $\int$ 正整数幂函数 $\times$ 正(余)弦函数 $\cdot dx$

例5: $\int e^x \sin x\,dx$

解 原式 $= \int \sin x\,de^x = \sin x\cdot e^x - \int e^x d\sin x = \sin x\cdot e^x - \int e^x\cos x\,dx$

$= \sin x\cdot e^x - (e^x\cos x - \int e^x d\cos x) = \sin x\,e^x - (e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx)$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

(5) $\int$ 指数函数 $\times$ 正(余)弦函数 dx

例7: $\int xe^x dx$

解 原式 $= \int x\,de^x = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C.$

(7) $\int$ 正整数幂函数 $\times$ 指数函数 dx

例8: $\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$

解 原式 $= \int \frac{1}{\cos x}d\tan x = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \tan x \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x}$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}(\frac{\tan x}{\cos x} + \int\frac{dx}{\cos x}) = \frac{1}{2}(\frac{\tan x}{\cos x} + \ln|\sec x + \tan x|) + C$

法二: 原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}dx = \int \tan^2 x\sec x\,dx + \int \frac{1}{\cos x}dx$

$= \int \tan x\,d\sec x + \int \frac{1}{\cos x}dx = \tan x\sec x - \int \sec x\sec^2 x\,dx +$

$\int \frac{1}{\cos x}dx$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}(\tan x\sec x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ 或 $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ $(n \geq 3)$ 用分部积分公式变成 $\int \frac{1}{\cos^{n-2}x}d\tan x$. $\int \frac{-1}{\sin^{n-2}x}d\cot x$, 再变成方程, 移项解之

$\int \frac{dx}{\cos^{2m+2}x} = \int \frac{1}{\cos^{2m}x}d\tan x$

$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{d\tan x}{\cos^{n-2}x} = \frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} - \int \tan x\,(n-2)\cos^{1-n}x\,\sin x\,dx$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} - \int \tan x\,(n-2)\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}dx = \frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} - (n-2)\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x}dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

$$\therefore I_n = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} + (n-2)I_{n-2}\right) \quad I_1 = \int \frac{1}{\cos x}dx \quad I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

例9: $I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}dx \quad (n \geq 2)$

解 $I_1 = \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$$I_n = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} - \int x(-n)\frac{1}{(a^2+x^2)^{n+1}}2x\,dx$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

$$\therefore I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^n} + (2n-1)I_n\right]$$

罗尔定理
|

2 一般分部积分形

求抽象函数—
积分常用

例1: $\int [f''(x)g(x) - f(x)g''(x)]dx$

解 原式 $= \int g(x)\,d f'(x) - \int f(x)\,d g'(x)$

$$= f'(x)g(x) - \int f'(x)g'(x)dx - f(x)g'(x) + \int g'(x)f'(x)dx$$

$$= f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + C$$

(1) 含有抽象函数的积分往往用分部积分法

例2: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 在 (a,b) 内 $f(x) \neq 0$, 且 $f(a)=f(a)$, $f(b)=f(b)$

证明: $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} = 1$

证明: 设 $F(x) = g(x)[f'(x) - f(x)]$, 则

不同类函数积分—分部
同类函数积分—第一

$$F(x) = \int g(x)[f''(x) - f(x)]dx = \int g(x)\,d f'(x) - \int g(x)f(x)dx$$

$$= f'(x)g(x) - \int f'(x)g'(x)dx - \int g(x)f(x)dx$$

$$= f'(x)g(x) - \int g'(x)\,d f(x) - \int g(x)f(x)dx$$

$$= f'(x)g(x) - [g'(x)f(x) - \int f(x)g''(x)dx] - \int f(x)g(x)dx$$

$$= f'(x)g(x) - g'(x)f(x) + \int (f(x)g''(x) - f(x)g(x))dx$$

令 $g''(x) = g(x)$ 即 $g(x) = e^x$ 或 e^{-x} 不妨取 $g(x) = e^x$ 则 $F(x) = e^x(f'(x) - f(x))$

(2) 不同类函数乘积的积分往往用分部积分法, 除了 $\int \ln x \frac{1}{x}dx$, $\int \arctan$…

$\frac{1}{1+x^2}dx$

例1: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \, dx$ 整体

解 原式 $= -\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \, dx$

$= -\int \arcsin x \, d\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \, d\arcsin x$

$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$

例2: $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} \arctan x \, dx$

解 原式 $= \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}) \arctan x \, dx$

$= \int \arctan x \, d(-\frac{1}{x}) - \int \frac{1}{x^2+1} \arctan x \, dx$

$= -\frac{1}{x}\arctan x - \int \frac{-1}{x} \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{2}\arctan^2 x$

而 $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}) dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) +$

$\therefore$ 原式 $= -\frac{1}{x}\arctan x - \frac{1}{2}\arctan^2 x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

例3: $\int \underbrace{x\arctan x}_{f(x)} \ln(1+x^2) dx$

解 原式 $= \int \ln(1+x^2) \, d f(x)$

$f(x) = \int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$

$\therefore$ 原式 $= f(x)\ln(1+x^2) - \int f(x) \, d\ln(1+x^2)$

而 $\int f(x) \, d\ln(1+x^2) = \int f(x) \frac{2x}{1+x^2} dx = \int x\arctan x \, dx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx$

$= f(x) - (x - \arctan x) + C$

$\therefore$ 原式 $= f(x)\ln(1+x^2) - f(x) + x - \arctan x + C$

$= (\frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{3}{2}\arctan x + \frac{3}{2}x + C$

例4: 设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 互为反函数 且 $F'(x) = f(x)$, 求 $\int g(x) dx$

解 设 $y = g(x)$, $x = f(y)$, $g'(x) = \frac{dy}{dx}$

$\int g(x) dx = xg(x) - \int x g'(x) dx = xg(x) - \int f(y) dy = xg(x) - F(y) + C$

$=xg(x)-F(g(x))+C$

3."不存在"形的积分也往往用分部积分法

例如：$\frac{\sin x}{x}$，e^{x^2}，$\sqrt{1+x^3}$，$e^x\tan x$，$\frac{e^x}{\cos x}$，…

例1：$\int(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln|x|)dx$

解 原式$=\int\frac{\sin x}{x}dx+\int\ln|x|d\sin x$

$=\int\frac{\sin x}{x}dx+\sin x\ln|x|-\int\sin x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=\sin x\ln|x|$

例2：$\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx$

解 原式$=\int e^{2x}(\tan^2x+1+2\tan x)dx=\int e^{2x}(\sec^2x+2\tan x)dx$

$=\int e^{2x}d\tan x+2\int e^{2x}\tan x\,dx$

$=e^{2x}\tan x-2\int\tan x\,e^{2x}dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx+C=e^{2x}\tan x+C$

§5.4 第二换元积分法

方法：$\int f(x)dx\xlongequal{令x=g(t)}\int f(g(t))g'(t)dt=G(t)+C=G(g^{-1}(x))+C$

要求$g(t)$单调可导，称此等式为第二换元积分公式

证：$t=g^{-1}(x)$ $x=g(t)$

$[G(g^{-1}(x))]'_x=G'(t)\frac{dt}{dx}=f(g(t))\cdot g'(t)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=f(g(t))=f(x)$

第一换元：$\int f(g(t))\cdot g'(t)dt=\int f(g(t))dg(t)=\int f(x)dx=F(x)+C$

$=F(g(t))+C$

1.典型的第二换元积分

(1) $\int f(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$，$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

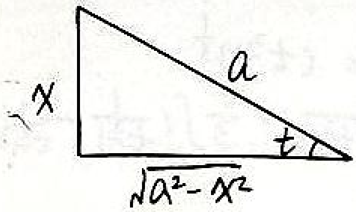
例1：求$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

解 原式$\xlongequal{x=t^6}\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt$

$=6\int(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt=6(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|)+C$

$=2\sqrt{x}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-6\ln|x^{\frac{1}{6}}+1|+C$

(2) $\int f(\sqrt{Ax^2+Bx+C})dx$



变换图

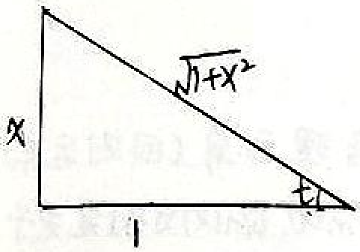
将 Ax^2+Bx+C 配方 $A(x+\frac{B}{2A})^2+C-\frac{B^2}{4A}$

① $\int f(\sqrt{a^2-x^2})dx$ 令 $x=a\sin t$

例2: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ 令 $x=\sin t$

解 原式 $=\int \cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos2t}{2}dt=\frac12(t+\frac12\sin2t)+C$

$=\frac12\arcsin x+\frac12 x\sqrt{1-x^2}+C$



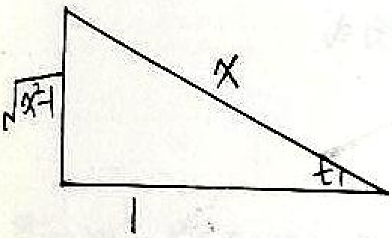
② $\int f(\sqrt{a^2+x^2})dx$ 令 $x=a\tan t$

例3: $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac32}}dx$

解 原式 $\xlongequal{令x=\tan t}\int\frac{\tan^2t}{\sec^3t}\sec^2t\,dt=\int\frac{\sin^2t}{\cos t}dt$

$=\int(\frac{1}{\cos t}-\cos t)dt=\ln|\frac{1}{\cos t}-\tan t|-\sin t+C$

$=\ln|\sqrt{1+x^2}-x|-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

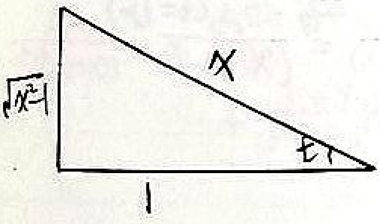


③ $\int f(\sqrt{x^2-a^2})dx$ 令 $x=a\sec t$ 或 $a\csc t$

例4: $\int\frac{1}{(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}}dx$

解 原式 $\xlongequal{x=\sec t}\int\frac{\sec t\tan t}{(\frac{2}{\cos^2t}-1)\tan t}dt=\int\frac{1}{\frac{2}{\cos t}-\cos t}dt=\int\frac{\cos t\,dt}{1+\sin^2t}$

$=\arctan(\sin t)+C=\arctan\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$



例5: $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$　　$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C$

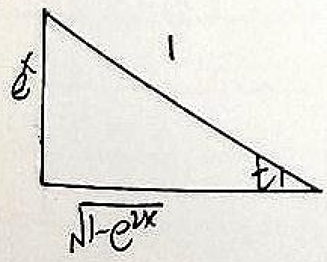
解 原式 $\xlongequal{x=\sec t}\int\frac{\sec t\tan t}{\tan t}dt=\ln|\sec t+\tan t|+C$

$=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$

$(\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$

☆第(17)个基本公式 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

2.第二换元的思路——去掉复杂运算



例1: $\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$

令 $t=\arcsin e^x$　$\sin t=e^x$

解 原式 $=\int\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}dt=\int t\,d(-\csc t)=-\csc t\cdot t+\int\csc t\,dt$

$=-t\csc t+\ln|\csc t-\cot t|+C$

$=-e^{-x}\arcsin e^x+\ln|e^{-x}-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}|+C$

可先分部后第二换元计算积分

$$= -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \ln\left|1-\sqrt{1-e^{2x}}\right| - x + C$$

例2: $\int \frac{dx}{(2x+x^4)\sqrt{1+x^3}}$ 令 $\sqrt{1+x^3}=t \Rightarrow x=(t^2-1)^{\frac{1}{3}}$

解 原式 $= \int \frac{\frac{1}{3}(t^2-1)^{-\frac{2}{3}}2t\,dt}{(t^2+1)\,t\,(t^2-1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$

$= \frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)-\frac{1}{t^2+1}\right]dt$

$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{3}\arctan t + C$

3 有理函数的积分

(1) 有理函数及其分类

有理函数：自变量 x 经过有限次的有理运算（四则运算）组成的函数，记为 $R(x)$，易见 $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$，其中 $P_m(x)$、$Q_n(x)$ 分别是关于 x 的 m 次、n 次多项式。若 $m \geq (<) n$，称 $R(x)$ 为假（真）分式

如 $\frac{x}{x^2+1}$ 一真分式　　$\frac{x^3+1}{x+2}$、多项式都是假分式

(2) 有理函数的分解

定理1：假分式 = 多项式 + 真分式

定理2：若多项式 $Q_n(x)$ 在实数范围内的分解式为：$(x+a_1)^{k_1}\cdots(x+a_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}$（其中 $p_i^2-4q_i<0$ $(i=\overline{1,r})$），则真分式 $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x+a_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x+a_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{x+a_1} + \cdots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{B_{l_1}x+C_{l_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots$

(3) 最简分式积分

① $\int \frac{A}{(x+a)^n}dx = \begin{cases} A\ln|x+a|, & n=1 \\ A\frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1}, & n\geq 2 \end{cases}$

② $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx$　$p^2-4q<0$

$x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4} = t^2+a^2$

$Bx+C = B(t-\frac{p}{2})+C = Bt+\underbrace{C-\frac{p}{2}B}_{N}$

$I_n = \int \frac{Bt+N}{(t^2+a^2)^n}dt$

$I_1 = \frac{B}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{N}{a}\arctan\frac{t}{a} + C$

$I_n = \frac{B}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-n+1}}{-n+1} + \int \frac{N}{(t^2+a^2)^n}dt$

注：有理函数的原函数是初等函数

例1：$\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

解. $\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

$x = A(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2$

$= x^3(B+C) + x^2(A+B+2C+D) + x(B+2D+C) + A+B+D$

$\Rightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ B+2D+C=1 \\ A+B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=\frac{1}{2} \\ C=0 \\ B=0 \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$

原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x+1)^2-(x^2+1)}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2(x+1)} + C$

例2：$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

解. 原式 $= \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1}dx = \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$

$= \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{x^2}{x^6+1}dx = \arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3 + C$

例3：$\int \frac{dx}{x^4+1}$

解. 原式 $= \int \frac{\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}-(1-\frac{1}{x^2})}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C$

令 $u = x+\frac{1}{x}$　$\int \frac{du}{u^2-2}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)du$

4. 三角函数有理式的积分

$\sin x$, $\cos x$ 经过有限次的有理运算得到的表达式，称之为三角函数有理式，记为 $R(\sin x, \cos x)$.

万能变换：设 $t = \tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}(1-\tan^2\frac{x}{2}) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$x = 2\arctan t$　$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$ —— t的有理函数积分

例4：$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

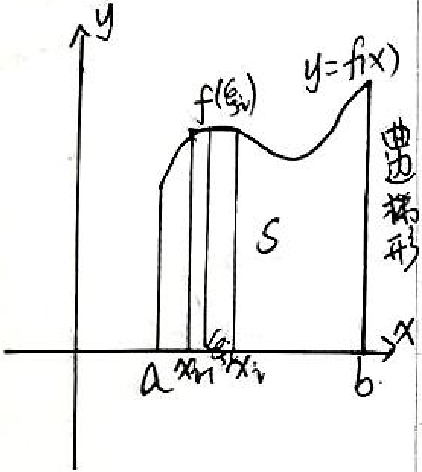
解：原式 $\xlongequal{\text{令}t=\tan\frac{x}{2}}\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}\cdot dt=\int\frac{t^2+2t+1}{2t}dt$

$=\frac{1}{2}\ln|t|+t+\frac{1}{4}t^2+C$

$=\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C$

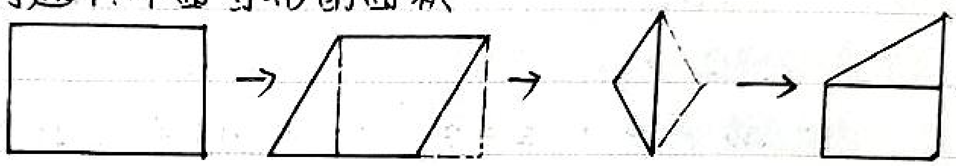
第六章 定积分

§6.1 定积分的概念与性质



1.典型问题

问题1：平面图形的面积


→见左图

$S:\begin{cases}a\le x\le b\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

方法：(1) 将区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个小子区间，$[x_{i-1},x_i]$，$i=\overline{1,n}$

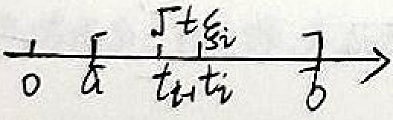
(2) $f(\xi_i)\Delta x_i$　$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

(3) $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

(4) $\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\to S$　$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$

$\lambda=0\Rightarrow n\to\infty$

问题2：变速直线运动的路程 S　$v(t)$　$t\in[a,b]$



方法：(1) 分割：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$

(2) 作乘积：$v(\xi_i)\Delta t_i$　$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，$i=\overline{1,n}$

(3) 求和：$\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i\approx S$

(4) 取极限，$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}$，当 $\lambda\to0$，$\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i\to S$

2.积分定义

定义：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，(1) 任取 $[a,b]$ 的一个分划，$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$；(2) 任取一个点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$，$\Delta x_i=x_i$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ← 不同于 一般极限

$x_{i-1}, i=1\sim n$ (3) 求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (4) 若无论 $[a,b]$ 的分划如何，ξ_i 的选取如何，和式极限 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 总是存在且相等，$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$，则称此极限为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，也称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。记为 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$ "$\int$" 积分号，"a" 积分下限，"b" 积分上限，"$[a,b]$" 积分区间，"$f(x)dx$" 被积表达式，"$f(x)$" 被积函数，"dx" 积分变量 x 的微分。(点 x 的长度微元)

3. 定积分的意义

(1) $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示曲边梯形面积的代数和 e.g. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$ $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x\,dx$

(2) $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示变速直线运动 ($f(x)$-速度) 在时间段 $[a,b]$ 所走的路程的代数和

(3) $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示力的大小为 $f(x)$，方向指向 x 轴的正方向，将质点从 a 点移动到 b 点所做的功

4. 定积分的性质

(1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

(2) $\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \pm \beta \int_a^b g(x)\,dx$ (线性性质)

(3) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(4) $\int_a^b dx = b-a$

(5) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (有向性)

(6) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(1)–(6) 计算性质

(7) $f(x) \le g(x)$，$a<b$，有 $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

(8) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ $(a<b)$

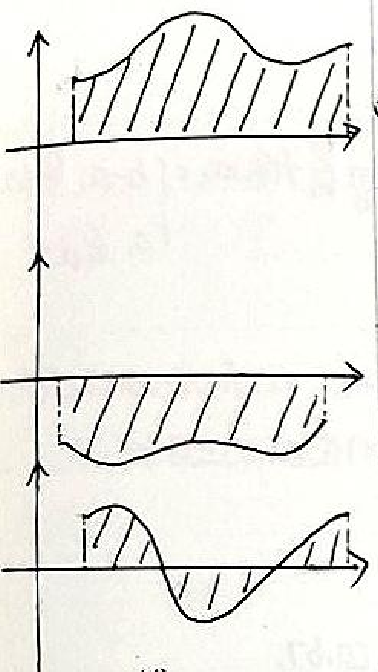
(9) $m \le f(x) \le M$，则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$ $(a<b)$

(7)–(9) 不等式性质

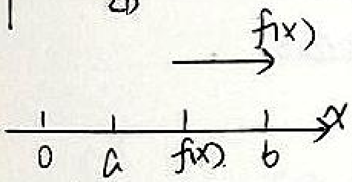
(10) 定积分中值定理：设 $f(x) \in C[a,b]$，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

——积分中值公式

证：$\because f(x) \in C[a,b]$，$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m



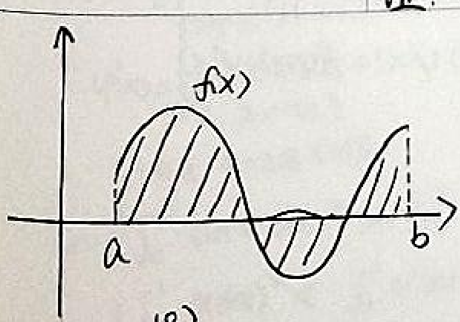
(1)



(3)

定积分只与积分区间及被积函数的函数关系有关，与积分变量记号无关，这点与不定积分有很大不同。

积分上限与下限无所谓谁大谁小皆可。



(8)

数学意义：将有限数的平均值推广至无穷多数的平均值
物理意义：变速直线运动的平均速度

即 $m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$，由介值原理，

$\exists \xi \in [a,b]$，使 $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

§6.2 定积分定理

1.定积分存在的必要条件

定理1：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

注：①有界不一定可积 e.g. $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$ $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\begin{cases}b-a, & \xi_i\in Q\\ 0, & \xi_i\in Q^c\end{cases}$

②无界必不可积

则 $\int_a^b D(x)dx$ 不$\exists$

2.定积分存在的充分条件

定理2：若 $f(x)$ 满足下列条件之：(1) $f(x)\in C[a,b]$，(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且有有限个间断点，(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

3.微积分基本定理

(1) 变限积分函数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，称 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$，

$\psi(x)=\int_x^b f(t)dt$，$x\in[a,b]$

为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的变上限（下限）积分函数

(2) 微积分基本定理第一部分 — 微分部分

变上限积分函数是连续函数的一个原函数

定理3：若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导且 $\varphi'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$

证明：$\varphi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt \xlongequal{\text{定积分中值定理}} \lim\limits_{\Delta x}\frac{1}{\Delta x}f(\xi)\Delta x$ ξ介于x, $x+\Delta x$之间

$\Delta x\to 0$ $\xi\to x$ $f(\xi)\to f(x)$ $=f(x)$

注：①若 $f(x)$ 连续 $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$ $\left(\int_x^b f(t)dt\right)'=\left(-\int_b^x f(t)dt\right)'=-f(x)$

②若 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)$ 可导，$\left(\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt\right)'=f(\varphi(x))\varphi'(x)$

令 $u=\varphi(x)$ $\frac{d}{du}\left(\int_a^x f(t)dt\right)\frac{du}{dx}=f(u)\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$

$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt$

$= \int_{\psi(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\,dt$

$= -f(\psi(x))\psi'(x) + f(\varphi(x))\varphi'(x)$

③变限积分函数导数公式：$\varphi'(x)$, $\psi'(x)$都存在，$f(x)$连续

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right)' = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

例1：设 $y^y + e^x = x + \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t}\,dt$，求 y'

解. $y^y(y\ln y)' + e^x = 1 + \frac{\sin x^3}{x^3}\cdot 3x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x$

$\therefore\ y^y(y'\ln y + y\cdot\frac{1}{y}y') + e^x = 1 + \frac{3\sin x^3}{x} - \frac{2\sin x^2}{x}$

即 $y' = \left(1 + \frac{3\sin x^3 - 2\sin x^2}{x} - e^x\right)/[y^y(\ln y + 1)]$

例2：设 $f(x)\in C[0,1]$，证明 $\exists \xi\in(0,1)$ 使 $\xi f(\xi) - \int_\xi^1 f(x)\,dx = 0$

证明：$\int [x f(x) + \int_1^x f(t)\,dt]\,dx$

$= \int x f(x)\,dx + x\int_1^x f(t)\,dt - \int x\,d(\int_1^x f(t)\,dt)$

$= \int x f(x)\,dx + x\int_1^x f(t)\,dt - \int x f(x)\,dx$

$= x\int_1^x f(t)\,dt + C$

$\therefore$ 取 $F(x) = x\int_1^x f(t)\,dt$ 有 $F(0) = F(1)$ 且 $f(x)\in C[0,1]$ 故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导

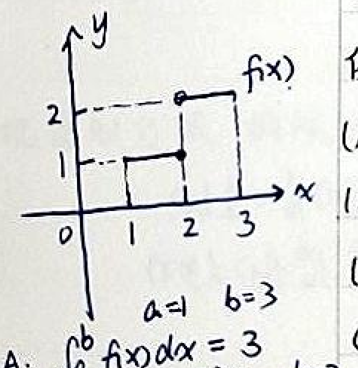
由罗尔定理可得 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $\xi f(\xi) - \int_\xi^1 f(x)\,dx = 0$

(3) 微积分基本定理第二部分 — 积分部分 — 牛顿-莱布尼兹公式

定理4：设 $f(x)\in C[a,b]$，$F'(x) = f(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

证明：$(\int_a^x f(t)\,dt)' = f(x)$ $\therefore \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$

令 $x=a$ 则 $C = -F(a)$，令 $x=b$，有 $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$



$a=1$ $b=3$

A: $\int_a^b f(x)\,dx = 3$

$f(\xi) = \frac{\int_1^3 f(x)\,dx}{3-1} = \frac{3}{2}$

B: $\varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \begin{cases} x-1, & 1\le x\le 2 \\ 2x-3, & 2<x\le 3\end{cases}$

$\varphi'(x) = \begin{cases} 1, & 1\le x\le 2 \\ 2, & 2<x\le 3\end{cases}$

$\varphi(x)$ 在 $x=2$ 处不可导

C: $(\int_0^\pi \sin x\,dx)^2 > \int_0^\pi \sin^2 x\,dx$

$(\int_0^1 x\,dx)^2 < \int_0^1 x^2\,dx$

例1：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则（D）

(A) $\exists\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

(B) $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 可导，且 $\varphi'(x) = f(x)$，$x\in[a,b]$

(C) $(\int_a^b f(x)\,dx)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx$

(D) $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上连续

证明：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$

$\because f(x)$ 可积 $\therefore \exists M>0$ 使 $|f(x)|\le M$，$x\in[a,b]$

$0 \le \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \le M|\Delta x| \to 0$ $\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi = 0$（两边夹挤）

运用定积分性质(8)

注：① $f(x)\in C[a,b]$ 则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导

② $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt \in C[a,b]$

定积分∃ $\not\Leftrightarrow$ 不定积分∃

$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ←

例2. 正确的是（C）

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $f(x)$ 可能有第一类间断点

(B) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $f(x)$ 可能无界

(C) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

(D) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

§6.3. 定积分的计算

1. 用牛顿·莱布尼兹公式：$\int_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_a^b \quad (f(x)\in C[a,b])$

例1：$\int_{-1}^{1} x^5 dx = \frac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1}=0$

例2：$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$

解. 原式 $=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx$

$=2(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2(-\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=-4$

2. 定积分的第一换元与分部积分公式

(1) 第一换元公式：$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\Big|_a^b$

例3：$\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

解. 原式 $=\int_0^1\frac{d\frac{1}{2}x^2}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

(2) 分部积分公式：$\int_a^b g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)dg(x)$

例4. $\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$

解. 原式 $=e^x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x d\sin x=-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$

$=-\int_0^{\pi}\cos x\,de^x=-(e^x\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x d\cos x)=-(-e^{\pi}-1)+\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$

∴原式 $=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$

例5：设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^1 x f(x)dx$

解 原式 $=\int_0^1 f(x)d\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2\,dx^2=\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1)$

(3) 定积分的第二换元公式

定理1：(第二换元公式) 设 $f(x)\in C[a,b]$，令 $x=g(t)$ 满足：

(i) $g(\alpha)=a,\ g(\beta)=b$

(ii) $g(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ (或 $[\beta,\alpha]$) 上连续

(iii) 当 $t\in[\alpha,\beta]$，(或 $[\beta,\alpha]$) 时，$g(t)\in[a,b]$

换元要换限　则 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$

结论1：设 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数，当 $f(x)$ 是奇(偶)函数时有

$\int_{-a}^a f(x)dx=0\quad(\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx)$

拆限+换元 →　证：$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

结论1中 $f(x)$ 为可积函数仍然正确

$=\int_a^0 f(-t)d(-t)+\int_0^a f(x)dx$

$=\int_0^a f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx$

$=\int_0^a(f(x)+f(-x))dx$

结论2中 $f(x)$ 为可积函数仍然正确　结论2：若 $f(x)$ 是以T为周期的连续函数，则 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

证：$\int_a^{a+T}=\underline{\int_a^0}+\int_0^T+\underline{\int_T^{a+T}}\qquad x-T=t$

$\int_a^0 f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(t+T)dt=\underbrace{-\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(t)dt}_{=0}$

观察积分限，拆限　例1：$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^x}dx$

解 原式 $=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\frac{\cos^2x}{1+e^x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^x}dx$

令 $x=-t$　$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2t}{1+e^{-t}}dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

两次拆限.换元　例2：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$

解方程　解 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$　令 $\frac{\pi}{2}-x=t$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\cos t(-dt)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin x + \ln\cos x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\frac{1}{2}\sin 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dx$

令 $2x=t$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\ln\sin t\,dt - \frac{\pi}{4}\ln 2$

∴ 原式 $= -\frac{\pi}{2}\ln 2$

例3：正确的是（　）已知 $f(x)$ 连续且 $F'(x)=f(x)$

(A) 当 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 是奇函数　$f(x)=0$　$F(x)=C$

(B) 当 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 是偶函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数，则 $F(x)$ 是周期函数　$(\sin x)'=\cos x$　$(x+\sin x)'=1+\cos x$

(D) 当 $f(x)$ 是无界函数，则 $F(x)$ 是无界函数　$F(x)=\sin\frac{1}{x}$

拆限，换元　(B) $f(-x)=-f(x)$　$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$

$F(-x)=\int_a^{-x} f(-t)d(-t)+C = \int_a^x + \int_x^{-x} + C = F(x)+\int_{-x}^{x} f(x)dt$

§6.4 广义积分

1. 无穷区间上的广义积分

$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt \in C[a,+\infty)$ ← 定义：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ $[-\infty, b]$ 上的任何有限子区间上都可积，称极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分，若此极限存在，则称此广义积分 $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt$ 收敛或存在；否则，称此广义积分发散或不存在。记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ （$\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt = \int_{-\infty}^b f(x)dx$）

若 $F'(x)=f(x)$ 且 $f(x)$ 连续，则

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty}(F(x)-F(a)) = \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$

$= F(+\infty)-F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$

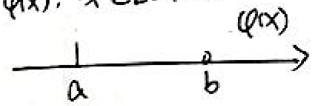
$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^b$

例1：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

解 原式 $= \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

注意: 两不同变限函数趋向不同, 有一个函数极限不存在则其极限和差均不存在, 当且仅当两函数极限都存在, 则极限存在。

$\varphi(x),\ x\in[a,b)$



+C

例2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

解: 原式 $=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\arctan x\big|_{-\infty}^{0}+\arctan x\big|_{0}^{+\infty}=\pi$

注: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$

例3: $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx \quad (0<\beta<1)$

解: 原式 $=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int_1^0\frac{t^2\cdot t^\beta}{(t^2+1)(t^\beta+1)}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^1\frac{t^\beta}{(t^2+1)(t^\beta+1)}dt$

∴原式 $=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

$f(x)$在$[a,b]$上可积, $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt\in C[a,b]$, $\lim_{x\to b}\varphi(x)=\varphi(b)=\int_a^b f(t)dt$

考虑: $\varphi(x)$在b点不连续, $\varphi(x)$在$\mathring{U}(b)$, 但$\varphi(b)$不∃, 则$\lim_{x\to b}\varphi(x)$可能∃可能不∃

2. 瑕积分 $\varphi(x)\in C[a,b)$ $\psi(x)=\int_x^b f(t)dt\in C(a,b]$

定义2: 设$f(x)$在$[a,b)$ $(a,b]$的任何闭子区间上可积, $f(x)$在b (a) 点的左 (右) 邻域内无界, 称 $\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$ 为瑕积分, 称$x=b$为瑕点。

$\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$ $x=a$

若此极限存在, 则称此瑕积分收敛或存在, 否则称其发散或不∃。

记为 $\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$ 若$F'(x)=f(x)$且$f(x)$连续则$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^{b^-}$

$\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$ $\left(\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_{a^+}^{b}\right)$

例1: $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解: 原式 $=\arcsin x\big|_0^{1^-}=\frac{\pi}{2}$

例2: $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$

解: 原式 $=\ln|x|\big|_{-1}^{1}=0$ (×)

原式 $=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx+\int_0^1\frac{1}{x}dx$

$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\big|_{-1}^{0^-}=-\infty$ 不∃ $\int_0^1\frac{1}{x}dx=\ln|x|\big|_{0^+}^{1}=+\infty$ 不∃

∴ $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ 不∃

注: 瑕点$c\in(a,b)$, $\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$ 且右端两个瑕积分都存在⇒左端积分∃

3.定积分求极限

公式：$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]}{n}$

利用此公式求"无穷和""无穷积"的数列极限

例1：$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$

解 原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$

例2：$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$

解 原式 $=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]}$

$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]}$

$=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=e^{2\ln2-1}=\frac{4}{e}$

例3：设 $f(x)\in C[0,1]$ 且 $f(x)>0$

证明：$\ln\int_0^1 f(x)dx\geqslant\int_0^1\ln f(x)dx$

证：$\ln\int_0^1 f(x)dx=\ln\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]$

$=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]$

$\int_0^1\ln f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln f(\frac{1}{n})+\ln f(\frac{2}{n})+\cdots+\ln f(\frac{n}{n})]$

$=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}$

由均值不等式得 $\ln\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]\geqslant\ln\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}$

由极限的保序性得 $\ln\int_0^1 f(x)dx\geqslant\int_0^1\ln f(x)dx$

①均值不等式：

$x_i>0,\ i=\overline{1,n}$

$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

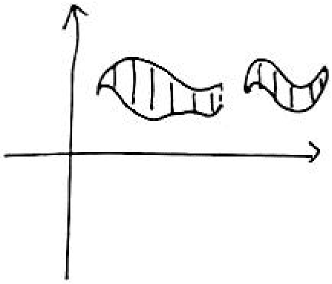
② $x_n\geqslant y_n\Rightarrow\lim x_n\geqslant\lim y_n$

§6.5.定积分的应用

1.微元法

设S满足：①S具有可加性 ②∃闭区间$[a,b]$与S对应 ③$\forall x\in[a,b]$，点区间$[x,x+dx]$所对应的S的分量(微元)ds等于$f(x)$在点区间$[x,x+dx]$上的值$f(x)$乘以点区间的长度dx：$ds=f(x)dx$ 则 $S=\int_a^b f(x)dx$

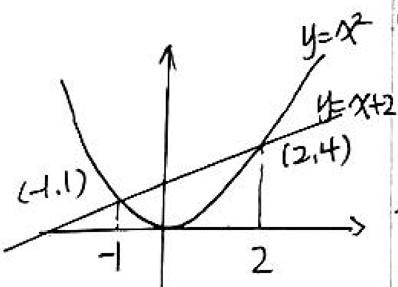
2.求平面图形面积



(1) 函数曲线所围图形面积

(a) X-型域 S 的面积

$S:\begin{cases} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le f(x) \end{cases}$ —x-型域 $S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

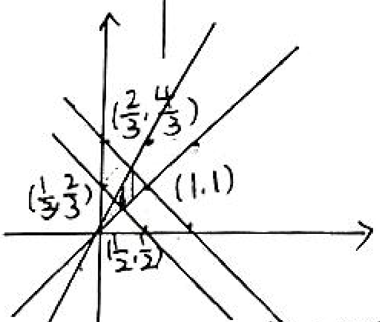


(b) y-型域 S 的面积

$S:\begin{cases} a \le y \le b \\ g(y) \le x \le f(y) \end{cases}$ —y-型域 $S=\int_a^b [f(y)-g(y)]dy$

例1: 求由曲线 $y=x^2$, $y=x+2$ 所围图形面积

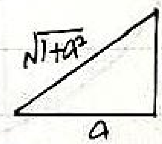
解 $S=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=\frac{9}{2}$



例2: 求由直线 $y=x$, $y=2x$, $x+y=1$, $x+y=2$ 所围图形面积

解 $S=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}[2x-(1-x)]dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}(2x-x)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(2-x-x)dx=\frac{1}{4}$

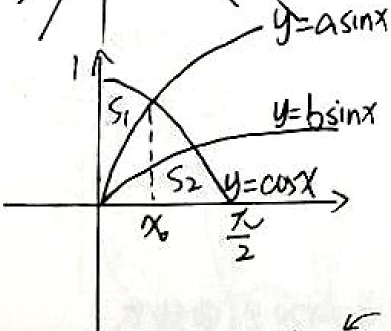
例3: 由曲线 $y=\cos x$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 间部分与两坐标轴所围图形面积被曲线 $y=a\sin x$, $y=b\sin x$ $(a>b>0)$ 分成三等分, 求 a,b



解: $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$ $S_1=\frac{1}{3}$ $a\sin x_0=\cos x_0$ $\tan x_0=\frac{1}{a}$

$S_1=\int_0^{x_0}(\cos x-a\sin x)dx=(\sin x+a\cos x)\Big|_0^{x_0}=\sin x_0+a\cos x_0-a$

$=\sqrt{1+a^2}-a=\frac{1}{3}$ $\sqrt{1+a^2}+a=3$ $\therefore a=\frac{4}{3}$ 类似地 $b=\frac{5}{12}$

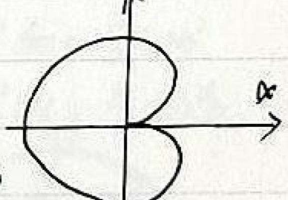


(2) 极坐标曲线所围图形面积

扇形域 $S:\begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ g(\theta) \le r \le f(\theta) \end{cases}$

$S:\begin{cases} a \le r \le b \\ g(r) \le \theta \le f(r) \end{cases}$

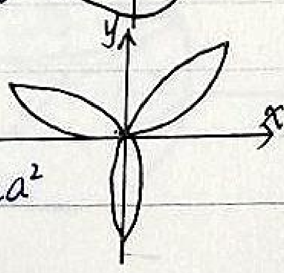
由微元法, 有 $S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[f^2(\theta)-g^2(\theta)]d\theta$



例1: 求心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$ 所围图形的面积

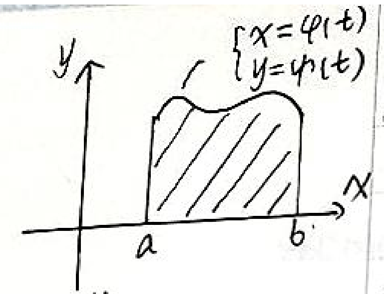
解 $S=2\int_0^\pi \frac{1}{2}a^2(1-\cos\theta)^2d\theta=a^2\int_0^\pi(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)d\theta$

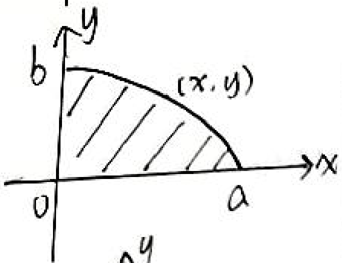
$=a^2\int_0^\pi(1+\frac{1+\cos2\theta}{2}-2\cos\theta)d\theta=\frac{3}{2}\pi a^2$

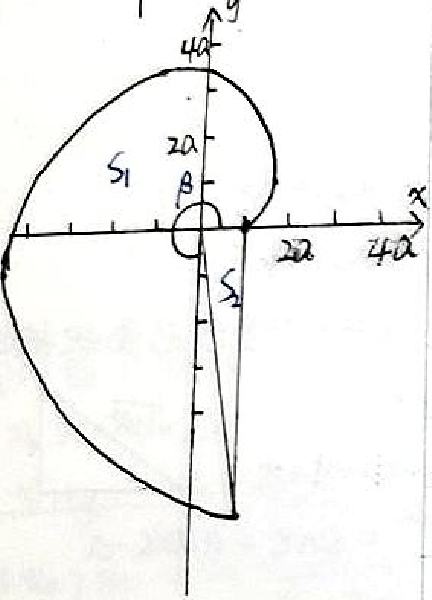


例2: 求曲线 $r=a\sin3\theta\ (a>0)$ 所围图形面积

解: $S=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}a^2\sin^2 3\theta\,d\theta=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos6\theta}{2}d\theta=\frac{1}{4}\pi a^2$







(3) 参数曲线所围图形面积

由一条参数曲线所围曲边梯形 S：$\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le y(x) \end{cases}$ 的面积，

$S=\int_a^b y(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\psi(t)\,d\varphi(t)$ 其中 $y(x)$ 为参数曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

例1：求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积

解：$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$S=4\int_0^a y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin\theta\, d(a\cos\theta)=\pi ab$

例2：求曲线 $\begin{cases} x=a(t\sin t+\cos t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 及直线 $x=a\,(y\le 0)$ 所围图形的面积

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\tan t$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_t)'}{x'_t}=\frac{1}{at\cos^3t}$

$y'=0$ $t=0,\pi,2\pi$ y'' 不∃ $t=0,\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$

$t=0\ (a,0)$ $t=\frac{\pi}{2}\ (\frac{\pi}{2}a)$ $t=\pi\ (-a,\pi a)$ $t=\frac{3}{2}\pi\ (-\frac{3}{2}\pi a,-a)$

$t=2\pi\ (a,-2\pi a)$

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}\Rightarrow r^2=x^2+y^2$ $\theta=\tan\frac{y}{x}$

如图 $S=S_1+S_2$ $S_2=\frac{1}{2}a\cdot 2\pi a=\pi a^2$

$S_1=\int_0^\beta\frac{1}{2}r^2d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a^2(1+t^2)\frac{t^2}{1+t^2}dt$

$=\frac{4}{3}\pi^3a^2$

$d\theta=\frac{d}{dt}dt$
$=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'_tx-xy'}{x^2}$
$=\frac{t^2}{1+t^2}dt$

$\therefore S=S_1+S_2=\frac{4}{3}\pi^3a^2+\pi a^2$

3. 平面曲线的弧长

(1) 函数曲线 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ 弧微分 $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$，要求 $dx>0$ 则曲线长

$S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

(2) 参数曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$，$dt>0$，则

$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

(3) 极坐标曲线 $r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$，则 $ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$，$d\theta>0$，则

$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$

例1: 半径为R的圆的周长

解 如图, $x^2+y^2=R^2$, $\begin{cases} x=R\cos\theta, & \theta\in[0,2\pi] \\ y=R\sin\theta \end{cases}$

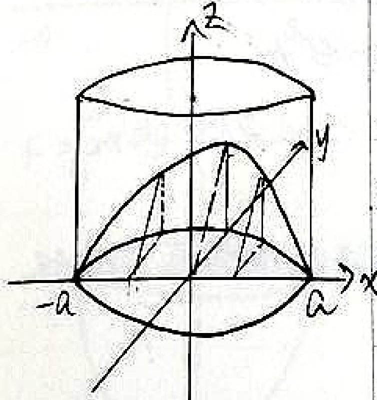
$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_\theta'^2+y_\theta'^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2}\,d\theta=2\pi R$$

例2: 求 $r=a(1-\cos\theta)$ 的长度, $(a>0)$

解: $S=\int_0^{2\pi}\sqrt{[a(1-\cos\theta)]^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta$

$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=4a(-\cos\frac{\theta}{2})\Big|_0^{2\pi}=8a$

4. 横截面已知的空间体体积

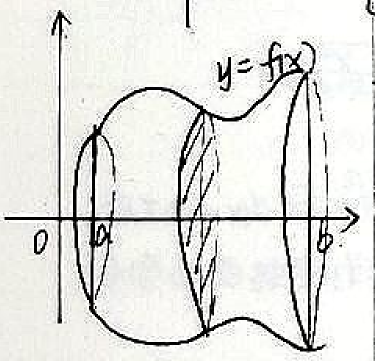


例1: 设有正椭圆柱体, 底面座落在xoy平面上, 其方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1$, 用过ox轴且与xoy平面成30°的平面去截此柱体得到一弓形体, 求该弓形体体积

解 如图 $V=2\int_0^a\frac{1}{2}y\cdot y\tan\frac{\pi}{6}dx=\int_0^a\frac{\sqrt{3}}{3}y^2dx=\int_0^a\frac{\sqrt{3}}{3}(1-\frac{x^2}{a^2})b^2dx$

$=\frac{2}{9}\sqrt{3}ab^2$

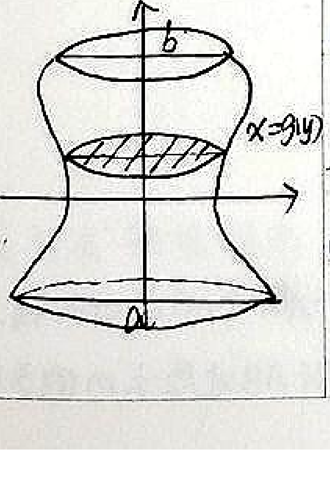
5. 旋转体的体积



①由曲边梯形 $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$ 绕x轴旋转一周得到的旋转体体积

$$V=\int_a^b\pi f(x)^2dx$$

② $\begin{cases} a\le y\le b \\ 0\le x\le g(y)\end{cases}$ $\quad V=\int_a^b\pi g(y)^2dy$

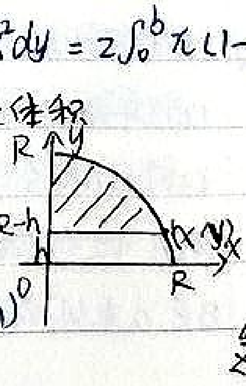


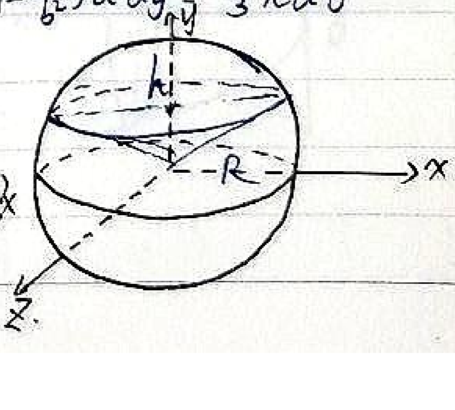
例1: 求由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形分别绕两个坐标轴旋转形成的体积

解 ①绕x轴旋转 $V=2\int_0^a\pi y^2dx=2\int_0^a\pi(1-\frac{x^2}{a^2})b^2dx=\frac{4}{3}\pi ab^2$

②绕y轴旋转 $V=2\int_0^b\pi x^2dy=2\int_0^b\pi(1-\frac{y^2}{b^2})a^2dy=\frac{4}{3}\pi a^2b$

例2: 求半径为R、高为h的球缺体积

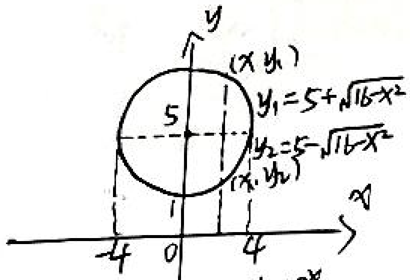




解:如图, $V=\int_{R-h}^R\pi x^2dy$

$=\int_{R-h}^R\pi(R^2-y^2)dy$

$=\pi(R^2y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{R-h}^R=\pi h^2(R-\frac{1}{3}h)$

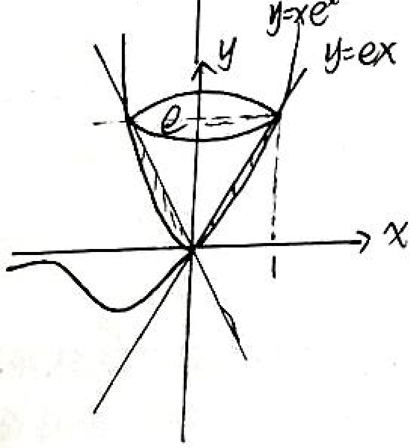


例3: 求由曲线 $x^2+(y-5)^2=16$ 所围成图形绕x轴旋转形成的体积

解: 如图. $V=2[\int_0^4 \pi y_1^2dx-\int_0^4\pi y_2^2 dx]$

$=2\int_0^4 \pi 20\sqrt{16-x^2}dx = 40\pi\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx = 40\pi\times\frac{1}{4}\pi 4^2 = 160\pi^2$

$\underline{x=4\sin t}$ $40\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-16\sin^2 t}\, d(4\sin t)$



例4: 求由曲线 $y=xe^x$ 直线 $y=ex$ 所围图形绕y轴旋转形成的体积

解: 如图 $xe^x=ex \Rightarrow x=0,1$

$V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2 e=\frac{\pi}{3}e$

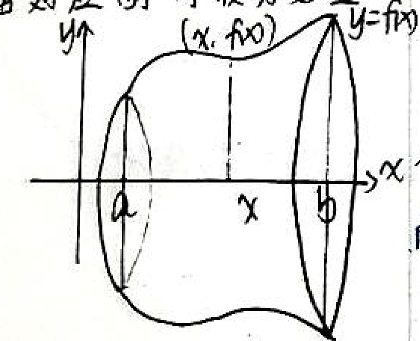
$V_2=\int_0^e\pi x^2dy=\int_0^e\pi x^2 d(xe^x)=\int_0^e \pi x^2(x+1)e^x dx$

$=\int_0^1\pi(x^3+x^2)de^x=\pi(4-e)$

6.旋转体的侧面积

绕哪个轴转则该轴对应的为积分变量

曲边梯形 $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$ 绕x轴旋转一周形成的旋转体侧面积



$S=\int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+y'^2}dx$

例1: 半径为R的球面面积

解 $S=2\int_0^R 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\int_0^R 2\pi\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx$

$=4\pi\int_0^R\sqrt{R^2}dx=4\pi R^2$

球冠的表面积: $S=\int_{R-h}^R 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_{R-h}^R\sqrt{R^2}dx=2\pi Rh$

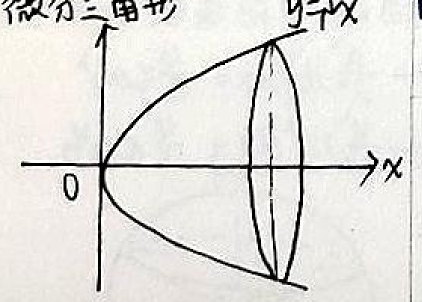
$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$

$ds^2=(dx)^2+(dy)^2$

微分三角形

例2: 求曲线 $y=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$ 绕x轴旋转形成的旋转曲面面积

解 $S=\int_0^1 2\pi\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{2\sqrt{x}})^2}dx=\frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$



7.定积分在物理方面的应用

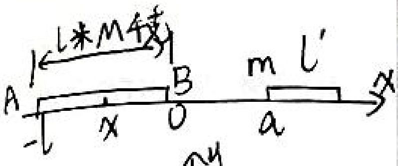
(1) 质点间引力: $F=k\frac{m_1m_2}{r^2}$

(2) (平面) 小薄片: $F=\rho_{水} ghS=ghS$

(3) $W=FS$

例1: 设有一条长l米质量为M千克的均匀细杆AB, 在AB的延长线上距B点a米处有一个质量为m千克的质点, 求细杆AB对质点m的引力F.

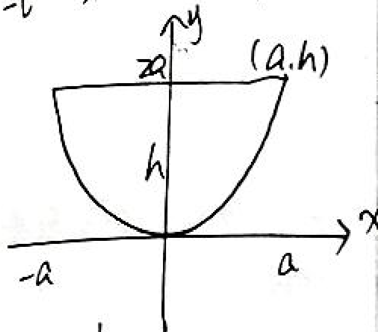
(3) 力系数 $k>0$)



解 $F \leftrightarrow [-l, 0]$ $\forall x \in [-l, 0]$, $[x, x+dx]$

$$F = \int_{-l}^{0} k \frac{M}{l} dx \cdot m \frac{1}{(a-x)^2} = \frac{kMm}{l} \frac{1}{a-x} \Big|_{-l}^{0} = \frac{kMm}{a(a+l)}$$

$$\int_a^{a+l'} F_x = \frac{kM\,dx}{x(x+l)}$$

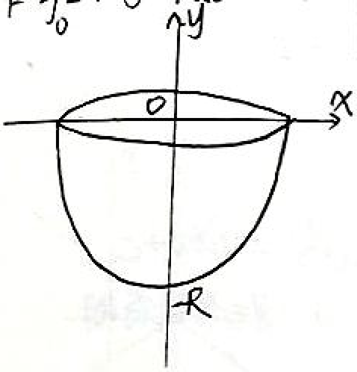


例2: 设水库有一抛物线型的闸门(如图), 闸门的上沿宽 $2a$ 米, 高为 h 米, 让水库蓄满水, 求此闸门所承受的水压力 F ($\rho_水=1$)

解 如图, $y = bx^2$, $x = a, y = h$ 代入 $\Rightarrow b = \frac{h}{a^2}$ $\therefore y = \frac{h}{a^2}x$

$$F = \int_0^h 2g(h-y)\sqrt{\frac{a^2y}{h}}\,dy = \frac{8}{15}agh^2$$

$$F = \int_0^h 2x\,dy \cdot \rho_水 g(h-y)$$



例3: 设有一个半径为 R 的半球形面(如图), 盛满水, 将此容器中水全部抽出所做的功。($\rho_水=1$)

解 如图所示, 由微元法, 有 $W = \int_{-R}^{0} \pi x^2 dy\, \rho_水 g(0-y) = \pi g \int_{-R}^{0} x^2(-y)dy$

$$= \pi g \int_{-R}^{0} (R^2 - y^2)(-y)dy = \frac{\pi}{4} g R^4$$

第七章 微分方程

§7.1 基本概念

(1) 微分方程: 含有未知函数导数或微分的等式

(2) 微分方程的阶: 方程中未知函数的最高阶数

(3) 微分方程的解:

(4) 通解

(5) 奇解: 不包含在通解中的解

(6) 定解条件(初始条件) n 阶方程满足的 n 个条件: $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y_1$, …, $y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{n-1}$ 称为定解条件

(7) 特解: 通解中通过定解条件得到的解

"计算方法" 数值解法

(8) 解的存在性、唯一性、稳定性

§7.2. 一阶微分方程

1.可分离变量方程：

称 $y'=p(x)q(y)$ （$p(x)$是关于x的已知函数，$q(y)$是关于y的已知函数）

为可分离变量方程

解法：可分离变量法

$\frac{dy}{dx}=p(x)q(y)$ $\frac{dy}{q(y)}=p(x)dx$ $(q(y)\neq 0)$

$\Rightarrow \int\frac{dy}{q(y)}=\int p(x)dx+C$ （这里$\int\frac{dy}{q(y)}$，$\int p(x)dx$都只表示一个原函数）

方程的通解

例1：求方程 $yy'+x=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解

解：$y\cdot\frac{dy}{dx}+x=0 \Rightarrow ydy=-xdx \Rightarrow \int ydy=\int -xdx+C$

$\Rightarrow$ 通解为 $\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C$ 代入 $y|_{x=1}=0$ 得 $C=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 特解为 $x^2+y^2=1$

例2：求解方程 $yy'=\sqrt{1-y^2}$

解：$y\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=dx$ $(y\neq\pm1)$ $\Rightarrow \int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=\int dx+C$

$-\sqrt{1-y^2}=x+C \Rightarrow (x+C)^2+y^2=1$ $(x+C\leq 0)$ $y=\pm1$是奇解

2.方程的变量代换　　已知

(1) 齐次方程 ~ $y'=f(\frac{y}{x})$，$f(\frac{y}{x})$ — 齐次函数

解法：令 $\frac{y}{x}=u$，$\Rightarrow y=ux$，$\Rightarrow y'=u+xu'=f(u)$

$\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=f(u)$ $\frac{du}{f(u)-u}=\frac{1}{x}dx$

例1：解方程 $\frac{x+y}{x-y}=y'$

解：令 $\frac{y}{x}=u$，$\Rightarrow y=ux \Rightarrow$ $y'=u+xu'=\frac{1+u}{1-u}$

$$\begin{cases} xu'=\frac{1+u}{1-u}-u=\frac{1+u^2}{1-u} \\ \int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac{1}{x}dx+C \end{cases} \Rightarrow \arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+C$$

通解 ← 即 $\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(1+\frac{y^2}{x^2})=\ln|x|+C$

例2：求与曲线簇 $x^2+y^2=2Cx$，正交的曲线簇

解：$(\frac{x^2+y^2}{x})'_x=(2C)'_x \Rightarrow y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}$

设两簇曲线的交点为(x,y)，所求曲线簇在点(x,y)处满足 $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

令 $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=xu \Rightarrow y'=u+xu' \Rightarrow u+xu'=\frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow xu'=\frac{u+u^3}{1-u^2}$

$\int\frac{1+u^2-2u^2}{u+u^3}du=\int\frac{1}{x}dx+c' \Rightarrow \int(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2})du=\ln|x|+c' \Rightarrow$

$\ln|u|-\ln(1+u^2)=\ln|x|+c' \Rightarrow \ln\frac{|u|}{1+u^2}=\ln|x|+c'$

$\Rightarrow \frac{u}{1+u^2}=x\cdot(\pm e^{c'})=x\cdot C_1\ (C_1\neq0)$

$\Rightarrow \frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=C_1x \Rightarrow \frac{xy}{x^2+y^2}=C_1x \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{C_1}y=C_2y$

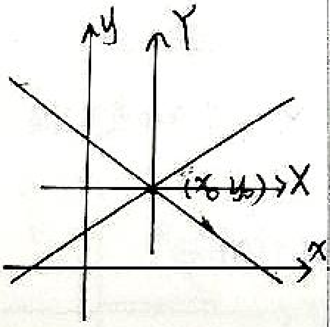
(2) 线性分式方程: $y'=f(\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2})$

① 当 $C_1=C_2$，为齐次方程

② 当 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\lambda$，$y'=f(\frac{\lambda(A_2x+B_2y)+C_1}{A_2x+B_2y+C_2})\xlongequal{u=A_2x+B_1y}f(\frac{\lambda u+C_1}{u+C_2})$ $u'=A_2+B_2y'$

$\Rightarrow \frac{u'-A_2}{B_2}=f(\frac{\lambda u+C_1}{u+C_2})$ —可分离变量

例1: $y'=\frac{x-y+1}{x-y}$



解 令 $u=x-y \Rightarrow u'=1-y' \Rightarrow y'=1-u'=\frac{u+1}{u}=1+\frac{1}{u} \Rightarrow -u'=\frac{1}{u}$

$\Rightarrow \int u\,du=\int(-1)dx+c \Rightarrow \frac{1}{2}u^2=-x+c \Rightarrow \frac{1}{2}(x-y)^2=-x+c$ —通解

③ 当 $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$，令 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=x_0\\y=y_0\end{cases}$

令 $\begin{cases}x=X+x_0\\y=Y+y_0\end{cases}$ $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(Y+y_0)}{d(X+x_0)}=\frac{dY}{dX}=f(\frac{A_1X+B_1Y}{A_2X+B_2Y})$ 令 $u=\frac{Y}{X}$

例2. 解方程 $y'=\frac{y+2}{x+y-1}$

解: 令 $\begin{cases}y+2=0\\x+y-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-2\\x=3\end{cases}$ 令 $\begin{cases}x=X+3\\y=Y-2\end{cases}$ 则原方程变为 $\frac{dY}{dX}=\frac{Y}{X+Y}=\frac{\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$

令 $u=\frac{Y}{X} \Rightarrow Y=uX$ $\frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX}=\frac{u}{1+u} \Rightarrow X\frac{du}{dX}=\frac{u}{1+u}-u=\frac{-u^2}{1+u}$

$\therefore \int\frac{1+u}{u^2}du=\int-\frac{1}{X}dX+c' \Rightarrow -\frac{1}{u}+\ln|u|=-\ln|X|+c'$

$\therefore \ln|u|+\ln|X|=\frac{1}{u}+c' \Rightarrow |uX|=e^{\frac{1}{u}}\cdot e^{c'} \Rightarrow uX=e^{\frac{1}{u}}\cdot(\pm e^{c'})$

$\Rightarrow Y=e^{\frac{X}{Y}}\cdot C\ (C\neq0) \Rightarrow y+2=e^{\frac{x-3}{y+2}}\cdot C\ (C\neq0)$

$\because y=-2$ 是方程的解 $\therefore$ 通解为 $y+2=e^{\frac{x-3}{y+2}}\cdot C$，$C$为任意常数

$y' = (x+y)^2$ 令 $u=x+y \Rightarrow u' = 1+y' = 1+u^2 \Rightarrow u'-1 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1+u^2$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+u^2} du = \int dx + c' \Rightarrow \arctan u = x + c'$

$\Rightarrow \arctan(x+y) = x + c'$

3.一阶线性微分方程

定义：称 $y' = p(x)y + q(x)$ 为一阶线性微分方程，其中 $p(x)$，$q(x)$ 为 x 的已知函数。称 $q(x)$ 为方程的非齐次项，自由项。若 $q(x) \neq 0$ ($\equiv 0$) 称此方程为一阶线性非齐次(齐次)微分方程。

(1) 齐次方程通解公式

$y' = p(x)y \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int p(x)dx + c' \Rightarrow \ln|y| = \int p(x)dx + c'$

$|y| = e^{\int p(x)dx} \cdot e^{c'} \Rightarrow y = e^{\int p(x)dx} \cdot (\pm e^{c'}) = c \cdot e^{\int p(x)dx}$ $(c \neq 0)$

此处仅需求出 $p(x)$ 的一个原函数 ←

$\because y=0$ 也是方程解 $\therefore y = c \cdot e^{\int p(x)dx}$，$c$ 为任意常数

例1：解方程 $xy' = y$

解 $y' = \frac{1}{x} y \Rightarrow y = ce^{\int \frac{1}{x}dx} = ce^{\ln|x|} = c|x|$ × 在 $x=0$ 点不可导

故 $= ce^{\ln x} = cx$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c' \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c' = |y| = |x| \cdot e^{c'}$

$\Rightarrow y = x(\pm e^{c'}) = cx$

注：在通解公式中，$e^{\int p(x)dx} = e^{\ln f(x)}$，$f(x)$ 不打绝对值

(2) 非齐次的通解公式 $y' = p(x)y + q(x)$

$\int \frac{1}{y} dy = \int p(x)dx + \int \frac{q(x)}{y} dx + c'$

$\ln|y| = \int p(x)dx + \int \frac{q(x)}{y} dx + c'$

$y = e^{\int p(x)dx} \boxed{e^{\int \frac{q(x)}{y}dx} \cdot c} = \boxed{u} \cdot e^{\int p(x)dx}$

解法：常数变易法 令 $y = u \cdot e^{\int p(x)dx}$，$u = u(x)$

$y' = u' \cdot e^{\int p(x)dx} + u e^{\int p(x)dx} p(x) = p(x) u \cdot e^{\int p(x)dx} + q(x)$

$u' = e^{-\int p(x)dx} \cdot q(x) \Rightarrow u = \int q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + C$

一阶线性微分方程的通解公式 ←

$\therefore y = (C + \int q(x) e^{-\int p(x)dx} dx) e^{\int p(x)dx}$ —通解公式

$= y_1 + y_2$

类比线代 ←

$y_1 = c e^{\int p(x)dx}$ 齐次通解

$y_2 = \int q(x) e^{-\int p(x)dx} dx \, e^{\int p(x)dx}$ 非齐次特解

例1：求 $xy' = y + x^2e^x$ 满足 $y|_{x=1}=0$ 的解

解 $y' = \frac{1}{x}y + xe^x$

$y = (C + \int xe^x e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx)\, e^{\int \frac{1}{x}dx}$

$= (C + \int xe^x \frac{1}{x} dx)\, x = (C+e^x)x$

将 $x=1$ $y=0$ 代入得 $C=-e$ 即 $y=(e^x-e)x$

例2：解方程 $(x-y^2e^y)y' = y$

不适合分离变量
也不是典型
可尝试将 x 看作函数
y 看作自变量
或者换元转化

解 $x - y^2e^y = y\frac{dx}{dy} = x'\cdot y \Rightarrow x' = \frac{1}{y}x - ye^y$ $p(y)=\frac{1}{y}$ $q(y)=-ye^y$

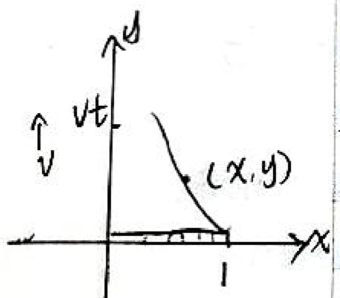
$x = (C + \int -ye^y e^{-\int \frac{1}{y}dy} dy)\, e^{\int \frac{1}{y}dy}$

$= (C-e^y)y$

$y' = p(x)y + y^{\lambda}q(x)$ $(\lambda \neq 0, 1)$

方程的应用
见反面

例1：一个儿童用一米长的竹杆拉一个玩具，起始时，儿童在(0,0)处，玩具在(1,0)处，现在儿童以匀速v沿y轴正向行走，问玩具所运行的轨迹如何？



解：如图设 $t=0$ 为初始状态，经过时间 t，儿童运行到 $(0, vt)$ 处，玩具在 (x,y) 处，有 $(y-vt)^2+x^2=1$ ①

过 x, y 点切线 $Y-y = y'(X-x)$ 代入 $(0, vt)$ 得 $vt-y = y'\cdot(-x)$ ② 令 $x=\sin t$

② 代入 ① 中有 $y'^2x^2+x^2=1$ 且 $y|_{x=1}=0 \Rightarrow y' = -\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$ $(0<x\leq 1)$ $y=\int -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$

$= -\cos t - \ln|\csc t - \cot t| + C$

代入 $t=\arcsin t$ $y|_{x=1}=0$ $C=0$

4. 贝努利方程：$y' = p(x)y + y^{\lambda}q(x)$ $(\lambda \neq 0, 1)$

$y^{-\lambda}y' = y^{-\lambda}p(x)y + q(x) = y^{1-\lambda}p(x) + q(x)$ 令 $y^{1-\lambda}=u \Rightarrow (1-\lambda)y^{-\lambda}y'=u'$

$\Rightarrow \frac{u'}{1-\lambda} = p(x)u + q(x) \Rightarrow u' = (1-\lambda)p(x)u + (1-\lambda)q(x)$

通解公式一 $\therefore y^{1-\lambda} = u = (C + \int (1-\lambda)q(x)e^{-\int(1-\lambda)p(x)dx}dx)\, e^{\int(1-\lambda)p(x)dx}$

例3：解方程：$xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$ $p(x)=\frac{4}{x}$ $q(x)=x$ $\lambda=\frac{1}{2}$

解：$y^{\frac{1}{2}} = (C + \int \frac{1}{2}x\, e^{-\int \frac{1}{2}\frac{4}{x}dx}dx)\, e^{\int \frac{1}{2}\frac{4}{x}dx}$

$= (C + \int \frac{1}{2}x \cdot e^{-2\ln x}dx)\cdot x^2$

$= (C + \frac{1}{2}\ln|x|)\, x^2$

$yx' = 4x + y^2\sqrt{x}$ $x' = \frac{4}{y}x + y\sqrt{x}$ $p(y)=\frac{4}{y}$ $q(y)=y$ $\lambda=\frac{1}{2}$

§7.3. 三种可降阶的高阶方程

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型方程　　　$y^{(3)}=x$

$$y=\underbrace{\int\int\cdots\int}_{n} f(x)\,(dx)^n + C_{n-1}x^{n-1}+C_{n-2}x^{n-2}+\cdots+C_1x+C_0$$

2. $F(x, y^{(n)}, y^{(n-1)})=0$ 型方程

解法：令 $y^{(n-1)}=u$，$y^{(n)}=u'$，则方程变为 $F(x, u', u)=0$

若此方程可解，则原方程可解

例1：求方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=3$ 的解

解：设 $u=y'$，$u'=y''$，原方程变为 $(1+x^2)u'=2xu \Rightarrow u'=\frac{2x}{1+x^2}u$

$u=Ce^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}=C(1+x^2)$　代入 $u|_{x=0}=3$ 得 $C=3$

$\therefore y'=u=3(1+x^2)$　$\therefore y=x^3+3x+C'$ 代入 $y|_{x=0}=1$ 得 $C'=1$

$\therefore y=x^3+3x+1$

3. $F(y, y', y'')=0$ 型方程

设 $y'=u$，$u=u(y)$，$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}$

方程变为 $F(y, u, u\frac{du}{dy})=0$

例2：求方程 $yy''=1+(y')^2$ 满足 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$ 的解。

解：设 $u=y'$，$y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}$，原方程变为

$y\cdot u\cdot\frac{du}{dy}=1+u^2 \Rightarrow \int\frac{u}{1+u^2}du=\int\frac{1}{y}dy+C' \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|y|+C' \Rightarrow \sqrt{1+u^2}=|y|\cdot e^{C'}=y\cdot(\pm e^{C'})$

$\sqrt{1+u^2}=y\cdot C''$　代入 $u|_{y=1}=0$ 得 $C''=1$

$\therefore \sqrt{1+u^2}=y \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2}=y \Rightarrow y'=\pm\sqrt{y^2-1}$

$\Rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}dy=\int\pm dx+C \Rightarrow \ln|y+\sqrt{y^2-1}|=\pm x+C$

$\Rightarrow |y+\sqrt{y^2-1}|=e^{\pm x}\cdot e^{C} \Rightarrow y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}\cdot C_0$ 代入 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_0=1$

$\therefore y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}$　$y-\sqrt{y^2-1}=e^{\mp x}$（分子有理化）

$\therefore y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

例2：飞机着陆时，为减少滑行距离，立即打开机尾减速伞。经测试，此种

形成的阻力大小与滑行速度成正比，比例系数$K=6\times10^6$。今有一架重9000kg的飞机，着陆时的水平速度为700km/h。若不计较飞机与地面摩擦力，求飞机最长滑行多少米？

解：由牛顿第二定律：t-时间 s-滑行距离，t=0为初始状态

$9000\frac{d^2s}{dt^2}=-6\times10^6\frac{ds}{dt}$ 且 $s|_{t=0}=0$，$v=\frac{ds}{dt}$ $v|_{t=0}=700$

令 $v=\frac{ds}{dt}$，则方程变为 $9000\frac{dv}{dt}=-6\times10^6v$ 且 $v|_{t=0}=700$

$v=C\cdot e^{\int\frac{-6\times10^6}{9000}dt}=Ce^{-\frac{2000}{3}t}$ 将 $v|_{t=0}=700$ 代入 $C=700$

$\therefore v=700\cdot e^{-\frac{2000}{3}t}$ $\Rightarrow s=\int vdt=\int700e^{-\frac{2000}{3}t}dt=-\frac{21}{20}e^{-\frac{2000}{3}t}+C'$

将 $s|_{t=0}=0$ 代入得 $C'=\frac{21}{20}$ $\therefore s=\frac{21}{20}-\frac{21}{20}e^{-\frac{2000}{3}t}$

$\lim\limits_{t\to+\infty}s=\frac{21}{20}=1.05$（公里）

例3：有一个装有进出两个水嘴的圆柱形容器，盛有50%浓度的酒精水溶液bL。现同时打开两个水嘴，它们的速度均为a L/min，而进水嘴流进10%浓度的酒精水溶液。问经过多长时间，容器中酒精水溶液浓度变为20%？

解：t-时间 y(t)-t时刻容器中的浓度，给t一个增量Δt

$\Delta y=\frac{[y(t)b+a\Delta t\cdot10\%-y(t)a\Delta t]}{b}-y(t)$

$\therefore \Delta y=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{10}\Delta t-\frac{a}{b}y(t)\Delta t$

$\Rightarrow y'=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{10}-\frac{a}{b}y(t)$ 且 $y|_{t=0}=50\%$

$y=0.4e^{-\frac{a}{b}t}+0.1=0.2\Rightarrow t=\frac{b}{a}\ln4$

§7.4 n阶线性微分方程及其通解的结构

一. n阶线性微分方程

型如：$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$ (1)

$L(y)=f(x)$ (1)

$L(y)=0$ (2)

称(1)为n阶线性微分方程。当$f(x)=0$时，称(1)为n阶线性齐次方程，当$f(x)\neq0$时，称(1)为n阶线性非齐次微分方程。令$L\triangleq\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$