Calculus note

微积分笔记

ElegantLaTeX

Victory won't come to us unless we go to it.

整理：唐绍东 & TangShaodong
整理时间：June 5, 2021
Email: 2842305604@qq.com

Version: 3.10

目　　录

第 1 章 实数集与函数

1.1 实数

1.1.1 常用公式

1. (Newton 二项式) $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$, $\quad C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

2. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

3. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$

4. $a^3+b^3+c^3-3ab=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

5. (B.Pascal 恒等式) $C_{k-1}^n+C_k^n=C_k^{n+1}$

常用级数求和

1. $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^3=(1+2+\cdots+n)^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

3. $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

4. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

三角求和公式

1. $\sum_{k=0}^{n}\cos(x+k\alpha)=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)$

2. $\sum_{k=0}^{n}\sin(2k-1)x=\frac{(\sin nx)^2}{\sin x}$

3. $\sum_{k=0}^{n}\sin^2 kx=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)x\cdot\sin nx}{2\sin x}$

4. $\dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \cos 2kt$

5. $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

6. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$

7. $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

8. $\sin^4 x - \cos^4 x = -\cos 2x$

9. $\cos n\pi = (-1)^n$

Example 1.1: 证明: $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$

Proof: 利用棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

令 $n=3$, 将左端展开得到

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta \\ &= \cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta\end{aligned}$$

分别比较等式两边的实部与虚部得到

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

□

Example 1.2: 证明: $\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k = -1$

Solution

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \times 1^{n-k} - 1 = (-1+1)^n - 1 = -1$$

◀

1.1.2 不等式

1. $(2n)!! > (2n+1)!!, n > 1$ $\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

2. $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

3. $\frac{k}{n+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{k}{n}$，其中 $k\in N_+$

4. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$；$\frac{2x}{\pi}<\sin x<x$；$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x}$

5. 当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$

Theorem 1.1 三角形不等式

设 a, b 为任意实数，则

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$$

Theorem 1.2 伯努利 (Bernoulli) 不等式

设 $x>-1, n\in \mathrm{N}^+, n\geqslant 2$, 则

$$(1+x)^n\geq 1+nx$$

Theorem 1.3 柯西 (Cauchy) 不等式

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为两组实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2\right)$$

Theorem 1.4 均值不等式

$H_n < G_n < A_n < Q_n$ 被称为均值不等式。简记为“调几算方”。

其中：$H_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$，被称为调和平均数

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}，被称为几何平均数。$$

$$A_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}，被称为算术平均数。$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}，被称为平方平均数。$$

Exercise 1.1: 已知 $0 < a \leq 1$, 求证 $|x+y|^a \leq |x|^a + |y|^a$.

Proof:

$$|x+y|^a \leqslant (|x|+|y|)^a = |x|(|x|+|y|)^{a-1} + |y|(|x|+|y|)^{a-1} \leqslant |x|^a + |y|^a.$$

□

Exercise 1.2: 求证不等式

1. $\left|x-y\right| \geqslant \left||x|-|y|\right|$
2. $\left|x+x_1+\cdots+x_n\right| \geqslant |x| - \left(|x_1|+\cdots+|x_n|\right)$

Proof: 1) 由

$$|x-y| = |x+(-y)| \geqslant |x| - |-y| = |x| - |y|$$

及

$$|x-y| = |y-x| \geqslant |y| - |x| = -(|x|-|y|)$$

即得

$$|x-y| \geqslant \left||x|-|y|\right|$$

也可如下证明：由 $|xy| \geqslant xy$ 知

$$x^2 - 2xy + y^2 \geqslant x^2 - 2|xy| + y^2$$

即

$$(x-y)^2 \geqslant \left(|x|-|y|\right)^2$$

开方即得

$$|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$$

2)

$$\left|x+x_1+\cdots+x_n\right| \geqslant |x|-|x_1+\cdots+x_n|$$

而

$$\begin{aligned}\left|x+x_1+\cdots+x_n\right| &\leqslant |x_1|+|x_2+\cdots+x_n| \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\end{aligned}$$

所以

$$\left|x+x_1+\cdots+x_n\right| \geqslant |x|-\left(|x_1|+\cdots+|x_n|\right)$$

□

Exercise 1.3: 证明: $(\cos x)^p \leqslant \cos(px)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0<p<1$.

Proof: 方法 1 对 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 有

$$\begin{aligned}\cos(px) &= \cos\big(px+(1-p)\cdot 0\big) \\ &\geqslant p\cos x+(1-p)\cos 0 = 1-p(1-\cos x)\end{aligned}$$

又由伯努利不等式 $(1+y)^{1/p} \geqslant 1+\frac{1}{p}y$, $y \geqslant -1$ 可得

$$\big(\cos(px)\big)^{1/p} \geqslant \big(1-p(1-\cos x)\big)^{1/p} \geqslant 1-\frac{p(1-\cos x)}{p} = \cos x,$$

从而 $(\cos x)^p \leqslant \cos(px)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0<p<1$ □

Example 1.3: 证明对于任何自然数 n, 有

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

Proof: 左边有

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{k}\,\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^n\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}n\sqrt{n}$$

右边, 注意到 (凹凸性, 面积法)

$$\sqrt{k}+\sqrt{k-1} < \int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \sqrt{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{\sqrt{n}}{2} \\
&< \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}n\sqrt{n}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{\sqrt{n}}{2} < \frac{2}{3}n\sqrt{n} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}
$$

□

Exercise 1.4:

☞ Proof:

□

1.1.3 上确界与下确界

Example 1.4: 设 A, B 为非空有界数集, $S = A \cup B$, 证明:

$$\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$$

Solution 由于 $S = A \cup B$ 显然是非空有界数集, 因此 S 的上, 下确界都存在
一方面, $\forall x \in S$, 有 $x \in A$ 或 $x \in B \implies x \leqslant \sup A$ 或 $x \leqslant \sup B$
从而有 $x \leqslant \max\{\sup A, \sup B\}$, 故得

$$\sup S \leqslant \max\{\sup A, \sup B\}$$

另一方面, 因为 $A \subset S \implies \sup A \leqslant \sup S$, 同理又有 $B \subset S \implies \sup B \leqslant \sup S$. 所以

$$\sup S \geqslant \max\{\sup A, \sup B\}$$

综上，即所得

$$\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$$

◀

Example 1.5: 证明: $\sqrt[n]{2}$ 为无理数

Solution 当 $n = 2$ 时, $\sqrt{2}$ 显然为无理数. 下面讨论 $n \geqslant 3$.
采用反证法. 若 $\sqrt[n]{2}$ 为有理数，于是存在两个互素（或互质）的正整数 p, q 使得

$$\sqrt[n]{2} = \frac{q}{p} \iff 2 = \frac{q^n}{p^n} \iff q^n = p^n + p^n$$

最后的等式与费马大定理 (Fermat's Last Theorem) 矛盾, 证毕

Theorem 1.5 Fermat's Last Theorem

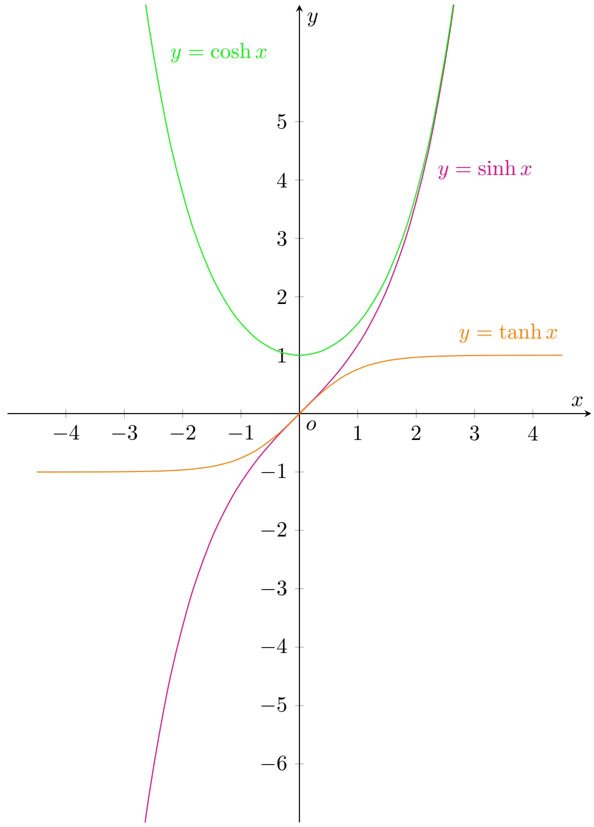
当 $n \geqslant 3$ 时, $x^n + y^n = z^n$ 无整数解 ♣

◀

1.2 函数

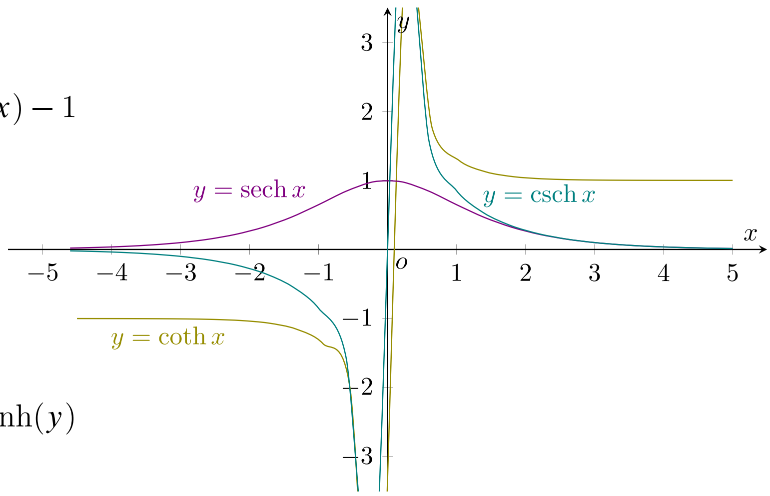
1.2.1 双曲函数

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$
$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$
$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$
$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$



$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$$
$$\coth^2(x) - 1 = \operatorname{csch}^2(x)$$
$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tan(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1$$
$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$
$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x) - 1}{2}$$
$$\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x) + 1}{2}$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$



Example 1.6: 设 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 则 n 次复合函数为

$$(f \cdot f \cdot f \cdot \cdots \cdot f)(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

Solution 现假定 $n = k$ 时, k 次复合函数满足 $(f \cdot f \cdot f \cdot \cdots \cdot f)(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, 则对 $n = k+1$ 时, 其 $k+1$ 次复合函数为

$$(f \cdot f \cdot f \cdot \cdots \cdot f)(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \bigg/ \sqrt{1 + k\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Bigg/ \sqrt{\frac{1+x^2+kx^2}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

根据数学归纳法即得所证 ◀

Theorem 1.6 函数的周期性

1. 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数, 则 $f'(x)$ 仍是以 T 为周期的函数

   【注】 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数, 且 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f'(x_0+T)=f'(x_0)$

2. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{nT} f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

Example 1.7: 证明: 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}x$ 为非周期函数

Solution(反证法) 假定 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $0=f(x+T)-f(x)$ 即

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sin(x+T)+\sin\left(\sqrt{2}(x+T)\right)\right)-\left(\sin x+\sin\sqrt{2}x\right) \\ &\xlongequal{\text{和差化积公式}} 2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)-2\sin\frac{T}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{2}x+\frac{T}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

由此知 $\sin\frac{T}{2}=0=\sin\frac{T}{\sqrt{2}}$. 从而 $2n\pi=\sqrt{2}m\pi$, $\frac{m}{n}=\sqrt{2}$ 但 m,n 是正整数 ◀

Example 1.8: 已知函数 $f(x)$ 满足关系式

$$af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{b}{x} \quad (|a|\neq 1\,,\ a\,,\ b\,,\ ,\ \text{为常数})$$

确定 $f(x)$ 的奇偶性

Solution 将 $x=\frac{1}{t}$ 代入关系式得 $af\left(\frac{1}{t}\right)+f(t)=bt$, 又将 t 改为 x 与关系式联立方程组

$$\begin{cases} af(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{b}{x} \\ af(x)+f(x)=\dfrac{b}{x} \end{cases}$$

可解得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-1}\left(\frac{ab}{x}-bx\right)=\frac{ab-bx^2}{(a^2-1)x}\ (a\neq 1)\,.$$

显然

$$f(-x)=\frac{ab-b(-x)^2}{(a^2-1)(-x)}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数 ◀

1.2.2 反函数

Properties: 单调函数一定存在反函数

Example 1.9: 求 $y=\sin x\ \left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\right)$ 的反函数

Solution 原函数 y 的值域为 $[0,1]$

$$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\Longleftrightarrow-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\pi\leqslant0$$

又

$$\sin(x-\pi)=\sin x=y$$

所以,

$$x-\pi=\arcsin y$$

即:

$$x=\pi-\arcsin y$$

从而, 原函数的反函数为:

$$y=\pi-\arcsin x\,,\ x\in[0,1]$$

◀

Example 1.10: 设可导函数 $f(x)$ 的原函数是 $F(x)$, 可导函数 $g(x)$ 的原函数是 $G(x)$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的反函数, 则 ( )

(A) $F'(x)G'(x)=1$

(B) $f'(x)g'\big(f(x)\big)=1$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}G\big(f(x)\big)}{\mathrm{d}x}=-1$

(D) $\dfrac{\mathrm{d}F\big(g(x)\big)}{\mathrm{d}x}=1$

Proof:注意到 (反函数与原函数的公式)

$$g\big(f(x)\big)=x\,,\quad f\big(g(x)\big)=x$$

于是

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)'=x'=1=g'\big(f(x)\big)f'(x)\Longrightarrow g'\big(f(x)\big)=\frac{1}{f'(x)}\Longrightarrow B\ \checkmark$$

□

Example 1.11: 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$ 的反函数及反函数的定义域

Solution 两边同时平方

$$f^2(x)=y^2=2+2x^2-2\sqrt{x^4+x^2+1}$$

移项

$$(y^2-2-2x^2)=-2\sqrt{x^4+x^2+1}$$

两边同时平方

$$(y^2-2-2x^2)^2=4(x^4+x^2+1)\Longrightarrow x^2=\frac{y^4-4y^2}{4y^2-4}$$

于是

$$x=\pm\sqrt{\frac{y^4-4y^2}{4y^2-4}}$$

函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$ **的反函数为** $f(x)=\pm\sqrt{\frac{x^4-4x^2}{4x^2-4}}$ ◀

Example 1.12:

Solution

◀

第 2 章 极限论

2.1 数列的极限

Definition 2.1 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$

Example 2.1: 利用定义证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$

Proof: 首先有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}.$$

因此 $\forall\varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只需要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 故取正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

即 $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. 证毕. □

Example 2.2: 利用定义证明 $\lim_{n\to\infty} c = c$

Proof: $\forall\varepsilon > 0$, 因为

$$|x_n - c| = |c - c| = 0,$$

所以对任意的自然数 n, 都有 $|x_n - c| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n\to\infty} c = c$. □

Example 2.3: 利用定义证明 $\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0.$

Proof: 由于

$$|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1},$$

因此 $\forall\varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要

$$|q|^{n-1} < \varepsilon.$$

两边取自然对数, 得

$$(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon.$$

因 $|q| < 1, \ln|q| < 0$, 故

$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} + 1.$$

当 $\varepsilon > 1$ 时, $\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ 是负数, 这时可取 $N = 1$. 当 $\varepsilon < 1$ 时, 取

$$N = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} + 1\right],$$

则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^{n-1} - 0| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$. 证毕. □

Example 2.4: 设 $x_n = \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^k}}$ $(k \in \mathrm{N}^+)$, 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Proof: 首先,

$$|x_n - 1| = \left|\sqrt{1 + \frac{1}{n^k}} - 1\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{n^k}} - 1 = \frac{\frac{1}{n^k}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^k}} + 1} < \frac{1}{2n^k} < \frac{1}{n}.$$

因此 $\forall 0 < \varepsilon < 1$, 要使 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. 故取正整数 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 从而有

$$\left|\sqrt{1 + \frac{1}{n^k}} - 1\right| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. 证毕. □

Example 2.5: 利用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$.

Proof: 首先有

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{2(2n+1)} < \frac{5}{4n}.$$

因此 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left|\dfrac{3n-1}{2n+1} - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$, 只需要 $\dfrac{5}{4n} < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{5}{4\varepsilon}$. 故取正整数 $N = \left\lfloor\dfrac{5}{4\varepsilon}\right\rfloor$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$. □

Example 2.6: 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Solution 应用几何–算术平均不等式得

$$\begin{aligned}
1 \leqslant \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} &= \left(1 \cdots 1 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\leqslant \frac{(n-2) + 2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2(\sqrt{n} - 1)}{n} \\
&< 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

故要使 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{4}{\varepsilon^2}$ 即可.

对于任意的正数 ε , 取$N = \left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right| < \varepsilon$

即得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

◀

Example 2.7: 用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

Solution 对固定 a, 存在 $N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时, 有 $n > |a|$, 即 $\dfrac{|a|}{n} < 1$. 考察

$$\begin{aligned}\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| &= \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N_0}\cdot\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n}\\ &= \frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\cdot\underbrace{\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n-1}}_{\text{每一项都}<1}\cdot\frac{|a|}{n}\\ &< \frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\cdot\frac{1}{n} = \frac{M}{n} \quad (\text{其中} M = \frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!})\end{aligned}$$

故要使 $\left|\dfrac{a^n}{n!} - 0\right| \leqslant \dfrac{M}{n} < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{M}{\varepsilon}$ 即可.

对于任意的正数 ε , 取$N = \max\left\{N_0, \left\lfloor\dfrac{M}{\varepsilon}\right\rfloor + 1\right\}$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left|\dfrac{a^n}{n!} - 0\right| < \varepsilon$

即得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

◀

Example 2.8: 用定义验证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} = \frac{1}{3}$$

Solution 任给 $\varepsilon > 0$, 由

$$\left|\frac{n^2}{3n^2 n - 7} - \frac{1}{3}\right| = \frac{n+7}{3(3n^2 - n - 7)}$$

当 $n \geqslant 7$ 时, $n + 7 \leqslant 2n$, $3n^2 - n - 7 \geqslant 3n^2 - 2n \geqslant 2n^2$

故要使

$$\left|\frac{n^2}{3n^2 n - 7} - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{2n}{6n^2} = \frac{1}{3n} < \varepsilon$$

只要 $n > \dfrac{1}{3\varepsilon}$ 即可.

对于任意的正数 ε , 取$N = \max\left\{7, \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]\right\}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\frac{n^2}{3n^2 - n - 7} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2-n-7}=\frac{1}{3}$$

◀

Example 2.9: 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan n}{n^8}=0$$

Lemma 2.1

设集合 $S\subset\mathbb{R}$ 满足，对于每个 $s\in S$，至多存在有限个约分数 $\frac{p}{q}$ 满足 $0<\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^3}$，则 x 的无理数测度 (irrationality measure) 定义为 $\mu(x)=\inf\limits_{\mu\in S}\mu$，即集合 S 的下确界

目前已知 $\mu(\pi)\leqslant 7.6063$

Proof: 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan n}{n^8}\neq 0$。不失一般性还假设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\tan n}{n^8}=A>0$，
先假设 A 为有限，则存在正整数的子列 $\{a_n\}$，使得

$$\forall A>\varepsilon>0,\ \exists N,\ n>N\Longrightarrow\left|\frac{\tan a_n}{a_n^{a_n}}\right|<\varepsilon\Longrightarrow a_n^{a_n}(-\varepsilon+A)<\tan a_n$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{a_1^{a_1}}$，选择一个 $b_1\in\{a_n\}$ 使得

$$-1+A<-1+Aa_1^{a_1}<\tan b_1$$

再取 $\varepsilon=\frac{1}{a_2^{a_1}}$，选择一个 $b_2\in\{a_n\}>b_1$ 使得

$$-1+A\times 2^8<-1+Aa_1^{a_1}<\tan b_1$$

然后再取 $\varepsilon=\frac{1}{a_3^{a_1}}$，选择一个 $b_3\in\{a_n\}>b_2$ 使得

$$-1+A\times 3^8<-1+Aa_1^{a_1}<\tan b_1$$

归纳可得一个单调递增的数列 $\{b_n\}$，使得 $\{b_n\}\subset\{a_n\}$，
且对于每个 b_n 有 $\frac{\tan b_n+1}{A}>n^8$，可见我们可以要求所有的 $\tan b_n$ 都 >0.
而且还可以假设 $\{\tan b_n\}$ 也是递增的，否则从中抽出递增的子列即可
现在再构造一个新数列 $\{c_n\}$，且 $0<c_n<\frac{\pi}{2}$，而且 $b_n=c_n\pmod{\pi}$
因为 $\tan x$ 为周期 π 的函数，则 $\tan b_n=\tan c_n$.
此时有 $0<c_n<\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{\pi}{2}$，$\frac{\tan b_n+1}{A}>n^8$，$\{c_n\}$ 单调递增
又有 $b_n=c_n\pmod{\pi}$ 而 b_n 为整数 $\Longrightarrow c_n=M_n-\pi N_n$，其中 $M,N\in\mathbb{N}$
利用 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\ (x>0)$ 以及不等式 $\arctan x<\pi$ 有

$$\tan c_n>An^8-1\Longrightarrow c_n>\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{An^8-1}\right)>\frac{\pi}{2}-\frac{1}{An^8-1}$$

$$\Longrightarrow 0<\frac{\pi}{2}-c_n<\frac{1}{An^8-1}$$

将 $c_M=M_M-\pi N_n$ 代入，有

$$0<\pi-\frac{2M_n}{2N_n+1}<\frac{1}{2N_N+1}\cdot\frac{1}{An^8-1}<\frac{C}{n^{7.7}}\quad \text{其中}C\text{为一常数}$$

由此可见所有 $\left\{\dfrac{2M_N}{2N_N+1}\right\}$ 均满足无理数测度的定义，
所以 $\mu(\pi)\geqslant 7.7$，但这和已知上界 $\mu(\pi)\leqslant 7.6063$ 矛盾。
若 A 为无限，则随便取一个有限的 $D>0$，仿照上面的方法，
同样有数列 $\{b_n\}$ 满足 $\dfrac{\tan b_n+1}{D}>n^8$
综上，即知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan n}{n^8}=0$ □

Example 2.10: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-a_{n-1})=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

Proof: 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时有

$$|2a_n+a_{n-1}|<\varepsilon\Longleftrightarrow|a_n|<\frac{1}{2}|a_{n-1}|+\frac{\varepsilon}{2}$$

从而得

$$\begin{aligned}|a_n|&<\frac{1}{2}|a_{n-1}|+\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|a_{n-2}|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{1}{2^2}|a_{n-2}|\\&<\cdots\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^{n-N}}+\frac{1}{2^{n-N}}|a_{n-N}|\quad(n>N)\end{aligned}$$

由此知

$$|a_n|<\varepsilon+\frac{1}{2^{n-N}}|a_{n-N}|\,(n>N)$$

易知存在 $N_1>N$, 使得 $\dfrac{|a_N|}{2^{n-N}}<\varepsilon\ (n>N_1)$. 最后我们有 $|a_n|<2\varepsilon\ (n>N_1)$. 即得所证 □

Example 2.11: 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

Proof:[4][5] 当 $a\in\mathbb{R}$ 时,
由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 知, $\forall\varepsilon>0, \exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\\=&\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\\leqslant&\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+|a_{N_1+2}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\\leqslant&\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

其次, 记 $M=|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$, 且取 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

当 $a \to +\infty$ 时,

$\forall M > 0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 故 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, $a_n > 2M + 2$. 固定 N_1, 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - N_1}{n} = 1 > \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} = 0 > -1,$$

由定理 2.1.1 知 $\exists N \in \mathbb{N}$, $N > N_1$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{n - N_1}{n} > \frac{1}{2}, \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} > -1.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_n}{n} \\ &> -1 + \frac{n - N_1}{n}(2M + 2) > -1 + \frac{2A + 2}{2} = M\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$

当 $a \to -\infty$ 时,

$\forall M > 0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 故 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, $a_n < -2M - 2$. 固定 N_1, 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - N_1}{n} = 1 > \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} = 0 < 1,$$

由定理 2.1.1 知 $\exists N \in \mathbb{N}$, $N > N_1$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{n - N_1}{n} > \frac{1}{2}, \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} > -1.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_n}{n} \\ &< 1 + \frac{n - N_1}{n}(-2M - 2) > 1 + \frac{-2A - 2}{2} = -M\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = -\infty$ □

Note: *当 $a = \infty$ 时, 结论不一定成立, 反例: $a_n = (-1)^{n-1} n$*

Example 2.12: 计算: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$

Example 2.13: 若 $a_n > 0\,(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$

Solution 当 $a = 0$ 时, 应用几何–算术平均不等式得

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}} \leqslant \frac{\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$ 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - a\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是用 N_1 作分项指标, 得

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - a\right| \leqslant \left|\frac{\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}}}{n} - a\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\frac{\left(\frac{a_1}{1}-a\right)+\left(\frac{a_2}{a_1}-a\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}-a\right)}{n}\right| \\
&\leqslant \frac{\left|\frac{a_1}{1}-a\right|+\left|\frac{a_2}{a_1}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}-a\right|}{n} \\
&= \frac{\left|\frac{a_1}{1}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}-a\right|}{n}+\frac{\left|\frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+1}}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}-a\right|}{n} \\
&\leqslant \frac{\left|\frac{a_1}{1}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}-a\right|}{n}+\frac{(n-N_1+1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

其次, 记 $M=\left|\frac{a_1}{1}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}-a\right|$, 且取 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\frac{M}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$
\left|\sqrt[n]{a_n}-a\right| \leqslant \left|\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}-a\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon
$$

当 $a>0$ 时, 应用均值不等式得

$$
1\bigg/\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n} \leqslant \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}} \leqslant \frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}
$$

不等式左边, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a \iff \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{a}$ 知, 由极限的定义 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$,
当 $n>N_1$ 时, 有 $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{a}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是用 N_1 作分项指标, 得

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}-\frac{1}{a}\right| \\
\leqslant &\frac{\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}\right|+\left|\frac{a_1}{a_2}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{1}{a}\right|}{n} \\
= &\frac{\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}}-\frac{1}{a}\right|}{n}+\frac{\left|\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1+2}}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{1}{a}\right|}{n} \\
\leqslant &\frac{\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}}-\frac{1}{a}\right|}{n}+\frac{(n-N_1+1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

其次, 记 $M=\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}}-\frac{1}{a}\right|$, 且取 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\frac{M}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$
\left|\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}-\frac{1}{a}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon
$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}=\frac{1}{a}$, 右边不等式同 $a=0$ 时
于是由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$ ◀

Example 2.14: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. 用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_n + a_n b_0}{n} = ab$$

Solution 因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, 故数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都有界,
即 $\exists$ 数 $M > 0$, 使得 $|a_n| < M$, $|b_n| < M$, $|a| < M$.
对任意 $\forall \varepsilon > 0$, 由条件知 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

其次, 记 $K = |a_0 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a| + |b_0 - b| + \cdots + |b_{N_1} - b| + |b|$, 显然 $\lim_{n\to\infty} \frac{MK}{n} = 0$
且取 $N_2 = \frac{2MK}{\varepsilon}$, 使得当 $n > N_2$ 时, 有 $\frac{MK}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.
固定 N_1, 取自然数 $N > \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_n + a_n b_0}{n} - ab\right| \\
=&\left|\frac{1}{n}[(a_0 b_n - ab) + (a_1 b_{n-1} - ab) + \cdots + (a_{n-1} b_1 - ab) + (a_n b_0 - ab) + \frac{ab}{n}]\right| \\
=&\left|\frac{1}{n}[b_n(a_0 - a) + a(b_n - b) + \cdots + b_0(a_n - a) + a(b_0 - b)] + \frac{ab}{n}\right| \\
\leqslant&\frac{M}{n}[|a_0 - a| + \cdots + |a_n - a| + |b_0 - b| + \cdot + |b_n - b| + |b|] \\
\leqslant&\frac{M}{n}[|a_0 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a| + |b_0 - b| + \cdot + |b_{N_1} - b| + |b|] \\
&+ \frac{M}{n}[|a_{N_1+1} - a| + \cdots + |a_n - a| + |b_{N_1+1} - b| + \cdot + |b_n - b|] \\
=&\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n}(n - N_1) \cdot \frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon
\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_n + a_n b_0}{n} = ab$$

◀

Exercise 2.1: 证明

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \cdots}}}}$$

Proof:

$$\begin{aligned}
3 &= \sqrt{9} = \sqrt{1 + 8} = \sqrt{1 + 2 \times 4} \\
&= \sqrt{1 + 2\sqrt{16}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 15}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \times 5}} \\
&= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{25}}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4 \times 6}}}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}$$

$$\vdots$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}$$

□

2.1.1 收敛数列的性质

Theorem 2.1 极限的唯一性

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一.

Proof: 用反证法. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a < b$. 根据数列极限的定义有

$$令\ \varepsilon_0 = \frac{b-a}{2} > 0, \begin{cases} \exists N_1 \in \mathrm{N}^+, \forall n > N_1, 有\ |x_n - a| < \varepsilon_0. \\ \exists N_2 \in \mathrm{N}^+, \forall n > N_2, 有\ |x_n - b| < \varepsilon_0. \end{cases}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N$, 同时有

$$|x_n - a| < \varepsilon_0 \quad 与 \quad |x_n - b| < \varepsilon_0,$$

即同时有 $x_n < a + \varepsilon_0 = \dfrac{a+b}{2}$ 与 $x_n > b - \varepsilon_0 = \dfrac{a+b}{2}$, 这是不可能的.
所以假设 $a < b$ 不成立. 同理可证假设 $a > b$ 也不成立,
从而 $a = b$, 即极限是唯一的. 证毕. □

Theorem 2.2 收敛数列的有界性

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

Proof: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 根据数列极限的定义, 取 $\varepsilon_0 = 1$, 则存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有不等式

$$|x_n - a| < 1.$$

于是, 当 $n > N$ 时,

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leqslant |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |a|\}$, 则对一切 x_n, 都有

$$|x_n| \leqslant M.$$

即数列 $\{x_n\}$ 有界. 证毕. □

Theorem 2.3 收敛数列的保号性

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

Proof: 当 $a > 0$ 时, 根据数列极限的定义, 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{a}{2}$, 则存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

从而

$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

同理可证 $a < 0$ 的情形. 证毕. □

Theorem 2.4

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > b$ (或 $< b$), 则 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, 有 $a_n > b$ (或 $< b$)

Corollary 2.1

如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geqslant 0$(或 $x_n \leqslant 0$), 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 那么 $a \geqslant 0$ (或 $a \leqslant 0$)

Theorem 2.5 Toeplitz 定理

设 $n, k \in \mathbb{N}, t_{nk} \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} a_k = a$

Proof: 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 知, $\exists M > 0$, 使 $|a_n - a| < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 固定 N_1, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$.
故 $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$0 \leqslant t_{nk} \leqslant \frac{\varepsilon}{2N_2 M}, \ k = 1, 2, \cdots, N_2.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时, 利用等式 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$ 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-a\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}(a_k-a)\right| \\ &\leqslant t_{n1}|a_1-a|+\cdots+t_{nN_1}|a_{N_1}-a|+t_{nN_1+1}|a_{N_1+1}-a|+\cdots+t_{nn}|a_n-a| \\ &< M(t_{n1}+\cdots+t_{nN_1})+\frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1}+\cdots+t_{nn}) \\ &\leqslant M\cdot N_1\cdot\frac{\varepsilon}{2N_1M}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1=\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a$ □

Theorem 2.6 收敛数列与子列的关系

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 那么它的任一子列也收敛, 且极限也是 a.

Proof: 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的子列, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
根据数列极限的定义, $\forall\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

由于 $n_k\geqslant k$, 故当 $k>N$ 时, 有 $n_k\geqslant k>N$, 从而有

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. 证毕. □

2.1.2 数列极限存在的判别定理

Theorem 2.7 夹逼定理

如果数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

1. 从某项起, 即 $\exists N_0\in\mathrm{N}^+$, 当 $n>N_0$ 时, 有
$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n,$$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,
那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Proof: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 所以根据数列极限的定义,

$$\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \exists N_1 \in \mathrm{N}^+, \forall n > N_1, \text{有 } |y_n - a| < \varepsilon. \\ \exists N_2 \in \mathrm{N}^+, \forall n > N_2, \text{有 } |z_n - a| < \varepsilon. \end{cases}$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N$, 有

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad |z_n - a| < \varepsilon$$

同时成立, 即

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

同时成立. 由 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ $(n > N_0)$, 所以当 $n > N$ 时, 有

$$a - \varepsilon < y_n \leqslant x_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

即

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 证毕. □

Example 2.15: 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$ 为常数).

Proof: (1) 当 $a \geqslant 1$ 时, 设 $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n \quad (h_n \geqslant 0)$, 下面先证 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.
由牛顿二项式展开公式得

$$a = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2!}h_n^2 + \cdots + h_n^n,$$

所以 $a \geqslant 1 + nh_n$, 从而

$$0 \leqslant h_n \leqslant \frac{a-1}{n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$, 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + h_n) = 1 + 0 = 1$.

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 根据 (1) 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, 故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

证毕. □

Example 2.16: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1}$

Solution 注意到

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

当 $n > k$ 时有

$$(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1} = (n+1-k)\left[n \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right]^{-1}$$

$$= \frac{k!}{n(n-1)\cdots(n-k+2)} n^{-2} \leqslant 2n^{-2}$$

所以原式有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1} \leqslant 2n^{-2} \to 0$$

由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1} = 0$$

◀

Example 2.17: 设 $\{a_n\}$ 是正序列，且 $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, 证明:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 + a_1 + \cdots + a_n} = 1$$

Proof: 注意到

$$1 = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 + a_1 + \cdots + a_n}$$

所以只要估计 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 的一个上界即可。而由 $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ 知,

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时 $a_n \leq (1+\varepsilon)^n$ 设 $A = \sum_{k=1}^{N} a_k$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < A + \frac{(1+\varepsilon)^{n-N+1}}{\varepsilon}$$

而当 n 充分大时 $\frac{(1+\varepsilon)^{n-N+1}}{\varepsilon} > A$, 所以

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(1+\varepsilon)^{n-N+1}}{\varepsilon}} = 1$$

因此

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 + a_1 + \cdots + a_n} = 1$$

□

Example 2.18: 设 $a_n > 0, n = 1, 2\cdots, \alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln\ln a_n}{n}$, 且

$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

求证: 数列 $\{x_n\}$ 当 $\alpha < \ln 2$ 时收敛, 而当 $\alpha > \ln 2$ 时发散。

Proof: 当 $\alpha < \ln 2$ 时，由上极限的定义，存在 $n_0 \in \mathrm{N}$, 当 $n \geq n_0$ 时，就有 $\ln\ln a_n < n\ln 2$, 也就是 $a_n < e^{2^n}$, 这时对 $n \geq n_0$, 有

$$x_n = \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} + \cdots + \sqrt{a_n}}}$$

$$\leq \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0+1} + \sqrt{e^{2^{n_0}} + \cdots + \sqrt{e^{2^n}}}}}$$
$$\leq \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{2^{n_0}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots \sqrt{1}}}}}$$
$$\leq \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{2^{n_0}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

所以 x_n 是单调递增有上界的序列，故收敛。

当 $\alpha > \ln 2$ 时，存在 $\beta > 2$, 对任意的 n_0, 都有 $n > n_0$, 使得 $a_n > e^{\beta^n}$, 这时

$$x_n = \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} + \cdots + \sqrt{a_n}}}$$
$$> \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{\frac{\beta^n}{2^{n-n_0-1}}}}}$$
$$> e^{\left(\frac{\beta}{2}\right)^n}$$

显然，$\{x_n\}$ 发散。 □

Example 2.19:

Proof:

□

2.2 函数的极限

Definition 2.2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时}, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Example 2.20: 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

Proof: 首先 $|f(x) - A| = |c - c| = 0$.

故 $\forall \varepsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$. □

Example 2.21: 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Proof: 首先 $|f(x) - A| = |x - x_0|$.

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证毕. □

Example 2.22: 利用定义证明 $\lim\limits_{x\to 1}(3x - 2) = 1$.

Proof: $|f(x) - A| = |(3x - 2) - 1| = 3|x - 1|$.

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $3|x - 1| < \varepsilon$, 即 $|x - 1| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

故取 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$|(3x-2)-1| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2) = 1$. 证毕. □

Example 2.23: 证明: 当 $x_0 > 0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Proof: $|f(x)-A| = |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| = \left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|$.

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x)-A| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0| < \varepsilon$,

即 $|x-x_0| < \sqrt{x_0}\varepsilon$. 同时由于 $\sqrt{x}$ 的定义域是 $x \geqslant 0$, 这可用 $|x-x_0| \leqslant x_0$ 保证.

故取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\varepsilon\}$, 则当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, 有 $x \geqslant 0$, 且

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| < \varepsilon.$$

从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x} = \sqrt{x_0}$. 证毕. □

Example 2.24: 证明: $\lim\limits_{x\to -1} x^2 = 1$.

Proof: 因为 $x \to -1$, 我们可以设 $|x-(-1)| = |x+1| < 1$, 也就是 $-2 < x < 0$,

从而有, $|x-1| < 3$, 于是

$$|x^2-1| = |x-1|\cdot|x+1| < 3|x+1| < \varepsilon$$

因此, $\forall\, \varepsilon > 0$, 要使 $|x^2-1| < \varepsilon$, 只要 $|x+1| < \frac{1}{3}\varepsilon$, 又 $|x-1| < 3$,

即只要取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$, 当 $0 < |x+1| < \delta$ 时, $|x^2-1| < \varepsilon$ 成立,

故 $\lim\limits_{x\to -1} x^2 = 1$.

Note: 我们也可以设 $|x-(-1)| = |x+1| < \frac{1}{2}$, 也就是 $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$,

得到

$$|x^2-1| = |x-1|\cdot|x+1| < \frac{5}{2}|x+1| < \varepsilon\,,\ |x+1| < \frac{2}{5}\varepsilon$$

令: $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\varepsilon\}$

Note: 我们也可以设 $|x-(-1)| = |x+1| < 2$, 也就是 $-3 < x < 1$,

得到

$$|x^2-1| = |x-1|\cdot|x+1| < 4|x+1| < \varepsilon\,,\ |x+1| < \frac{1}{4}\varepsilon$$

令: $\delta = \min\{2, \frac{1}{4}\varepsilon\}$

Note: 我们也可以设 $|x-(-1)| = |x+1| < \frac{1}{3}$, 也就是 $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$,

得到

$$|x^2-1| = |x-1|\cdot|x+1| < \frac{7}{2}|x+1| < \varepsilon\,,\ |x+1| < \frac{2}{7}\varepsilon$$

令: $\delta = \min\{\frac{1}{3}, \frac{2}{57}\varepsilon\}$

□

Example 2.25: 证明: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}} = 1$

☞ Proof: 因为

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right| &= \left|\frac{7/(16x^2-9)-1}{\sqrt{7/(16x^2-9)}+1}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{7}{16x^2-9}-1\right| = \frac{16|1+x||1-x|}{|(4x+3)(4x-3)|}\end{aligned}$$

设 $|x-1|<1$, 即 $0<x<2$, 则上式右边大于 $\dfrac{16\cdot 3|1-x|}{3\cdot 4|x-\frac{3}{4}|}$.

再设 $|x-1|<\dfrac{1}{8}$, 即 $1-\dfrac{1}{8}<x<1+\dfrac{1}{8}$, 于是上式右边不等式大于 $32|1-x|$.

故 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\frac{1}{8},\frac{\varepsilon}{32}\}$, 则当 $0<|x-1|<\delta$ 时, $\left|\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}-1\right|<\varepsilon$ 成立,

故 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}=1$. □

Example 2.26:

☞ Proof:

□

Definition 2.3 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0, \exists X>0, \text{当 } |x|>X \text{ 时, 有 } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Example 2.27: 利用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

☞ Proof: $|f(x)-A|=\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}$.

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$, 即 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

故取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x|>X$ 时, 有 $\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$, 于是有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. 证毕. □

Example 2.28: 利用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}=2$

☞ Proof: 因为 $\forall\varepsilon>0$, 要找到 $M>0$, 使 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|\frac{2x^2+1}{x^2-3}-2\right|=\frac{7}{|x^2-3|}<\varepsilon$$

而当 $|x|>3$ 时, $|x^2-3|>|x|$, 故要

$$\frac{7}{|x^2-3|}<\frac{7}{|x|}<\varepsilon$$

只需 $|x| > \frac{7}{\varepsilon}$. 故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = \max\{3, \frac{7}{\varepsilon}\}$, 当 $|x| > M$ 时, 有

$$\left|\frac{2x^2+1}{x^2-3} - 2\right| < \varepsilon$$

于是 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3} = 2$ □

2.2.1 函数极限的性质

Theorem 2.8 函数极限唯一性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

Theorem 2.9 函数极限的局部有界性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

Proof: 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 所以取 $\varepsilon = 1$,
则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$. 因此,

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|.$$

记 $M = A + 1$, 于是有

$$|f(x)| \leqslant M.$$

证毕. □

Theorem 2.10 函数极限的局部保号性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 而 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

Proof: 仅就 $A > 0$ 的情形证明.
因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 所以给定 $\varepsilon = \frac{A}{2}$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2},$$

从而

$$f(x) > -\frac{A}{2} + A = \frac{A}{2} > 0.$$

证毕. □

Theorem 2.11

如果 $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$, 而 $\lim \varphi(x) = A, \lim \psi(x) = B$. 那么 $A \geqslant B$ ♣

Example 2.29: 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$， $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，且 $A < B$。
证明：在点 x_0 的某去心领域内 $f(x) < g(x)$

Proof: 因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, s.t $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 因为 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, s.t $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时有 $|g(x) - B| < \varepsilon$
所以

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \qquad B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon$$

所以

$$B - A - 2\varepsilon < g(x) - f(x)$$

因为 $\varepsilon > 0$ 任意，所以取 $\varepsilon < \dfrac{B - A}{2}$ 就有 $g(x) - f(x) > 0$.
所以 $g(x) - f(x) > 0$ □

Theorem 2.12 海涅定理

如果极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 是函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足: $x_n \neq x_0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, 那么相应的函数值数列 $f(x_n)$ 必收敛, 且

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

♣

Example 2.30: 证明 $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ 不存在.

Proof: 取两个数列 $\{x_n'\}, \{x_n''\}$, 其中

$$x_n' = \frac{1}{2n\pi}, \quad x_n'' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

则有

$$x_n' \neq 0, x_n'' \neq 0 (\forall n), \lim_{n \to \infty} x_n' = \lim_{n \to \infty} x_n'' = 0.$$

因为

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n') = \lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n'} = \lim_{n \to \infty} \sin 2n\pi = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n'') = \lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n''} = \lim_{n \to \infty} \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

这说明当 $\{x_n\}$ 取不同数列趋于 0 时, 对应的函数值数列趋于不同的值,
所以应用海涅定理知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在 □

Example 2.31: 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}=\infty$.

Proof:

$$\left|\frac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}\right|\geqslant\frac{x^3}{6x^2}=\frac{x}{6},\quad x>100$$

因此, $\forall M>0$, 要使 $\left|\dfrac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}\right|>M$, 只要 $\dfrac{x}{6}>M$, 即 $x>6M$,
即只要取 $X=\max\{100,6M\}$, 当 $x>X$ 时, 有 $\left|\dfrac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}\right|>M$ 成立,
即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}=\infty$. □

Theorem 2.13 复合函数的极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成, $f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

Theorem 2.14 夹逼定理

如果函数 $f(x), g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件
(1) 当 $x\in\mathring{U}(x_0,r)$ (或 $|x|>M$) 时,

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x);$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$, 那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$ 存在且等于 A.

2.3 极限存在准则 两个重要极限

2.3.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Theorem 2.15

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

☞ Proof: 当 $x\neq 0$ 时, 函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 有定义. 因为

$$|\sin x|<|x|<|\tan x|\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

不等式两边同除以 $|\sin x|$, 得到

$$1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\frac{1}{|\cos x|},$$

由于当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\dfrac{x}{\sin x}>0$, $\dfrac{1}{\cos x}>0$, 从而有

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad\text{或}\quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

于是有

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}x^2,\tag{1-2}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}x^2=0$, 所以由夹逼定理得到

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=0,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

证毕 □

2.3.2 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Example 2.32: 设 $n\in\mathbb{N}$, 证明

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right))^{n+1},\quad n\geqslant 2$$

☞ Proof: 利用伯努利 (Bernoulli) 不等式 $(1+x)^n\leq 1+nx$, 有

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\geqslant 1+\frac{n}{n-1}\qquad\left(1+\frac{1}{n}\right))^{n+1}\geqslant 1+\frac{n+1}{n}$$

因为

$$\frac{n}{n-1}-\frac{n+1}{n}=\frac{n^2-n^2-1}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}>0\,,\quad n\geqslant 2.$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

□

Example 2.33: 利用平均值不等式证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\,,\quad n=1,2,\cdots$$

.

Proof: 利用平均值不等式

$$\sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}}\leqslant\frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})$$

中 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1+\dfrac{1}{n}$, $x_{n+1}=1$, 则上式成为

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}<\frac{1}{n+1}\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right]=1+\frac{1}{n+1}$$

两边 $n+1$ 次方, 得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

□

Example 2.34: 证明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Proof: 由 $\sqrt{i(n-i)}\leqslant\dfrac{n}{2}$, 则 $\dfrac{1}{2}\big[\ln i+\ln(n-i)\big]\leqslant\ln\dfrac{n}{2}$ 从而

$$\sum_{i=1}^{n-1}\ln i\leqslant(n-1)\ln\frac{n}{2}\,,\ (n-1)!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$$

两边同乘以 $\dfrac{n}{2}$, 得 $\dfrac{1}{2}n!\leqslant\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$, 于是

$$n!\leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

即

$$n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

再证 $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n<n!$. 设 $x_n=\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, 则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{e}<n$$

所以 (注意到 $x_1 = \frac{1}{e} < 1$)

$$x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!$$

从而证得

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$$

□

Example 2.35: 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n > 1$$

Proof: 当 $n = 2$ 时, 因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$, 故不等式成立

当 $n = k$ 时, 不等式成立, 即

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k$$

则对于 $n = k+1$ 时, 有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}(k+1) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1}$$

即对于 $n = k+1$ 时, 不等式也成立.

于是, 对于任何自然数 $n > 1$, 有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

□

Example 2.36: 证明

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Proof:

□

Example 2.37: 证明不等式: $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

Proof: 对 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$, 有

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

因此有

$$\left(\frac{2}{1}\right)^1 < e < \left(\frac{2}{1}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 < e < \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

连乘得到 $\dfrac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$, 再变形 ...

$$\frac{(n+1)^n}{e^n} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \Rightarrow \left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

□

☞ Proof: 注意到对任意正整数 m 有 $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m \le e \le \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1}$。回到原问题，即是证明

$$(n+1)^n < e^n \cdot n! < (n+1)^{n+1}$$

当 $n = 1$ 时，显然成立

设 $n = k$ 时成立，即是说

$$(k+1)^k < e^k \cdot k! < (k+1)^{k+1}$$

则 $n = k + 1$ 有

$$\begin{aligned} e^{k+1}\cdot(k+1)! &= e^k \cdot k! \cdot e(k+1) > (k+1)^k \cdot e(k+1) = e(k+1)^{k+1} \\ &\ge (1+\frac{1}{k+1})^{k+1}(k+1)^{k+1} = (k+2)^{k+1} \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} e^{k+1}\cdot(k+1)! &= e^k \cdot k! \cdot e(k+1) < (k+1)^{k+1} \cdot e(k+1) = e(k+1)^{k+2} \\ &\le (1+\frac{1}{k+1})^{k+2}(k+1)^{k+2} = (k+2)^{k+2} \end{aligned}$$

于是，由归纳法，对所有正整数 n 成立。 □

2.3.3 柯西极限存在准则

Example 2.38: 设数列满足条件: $|a_{n+1} - a_n| < r^n$, $n = 1, 2, \cdots$, 其中 $r \in (0, 1)$. 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

☞ Proof: 若 $n < m$, 则

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leqslant |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| \\ &\leqslant r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{m-1} = \frac{r^n - r^m}{1-r} < \frac{r^n}{1-r} \end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{1-r} = 0$. 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N, \left|\dfrac{r^n}{1-r}\right| < \varepsilon$.

若 $m > n > N$, 就有

$$|a_n - a_m| \leqslant \left|\frac{r^n}{1-r}\right| < \varepsilon$$

由柯西准则, $\{a_n\}$ 收敛 □

Example 2.39: 对给定的 y 值, 方程 $x-\alpha\cdot\sin x=y$ $(0<\alpha<1)$ 有唯一解

Proof: 令 $y=x_0$, 且 $x_1=y+\alpha\cdot\sin x_0$, $x_n=y+\alpha\cdot\sin x_{n-1}$ $(n\in\mathbb{N})$. 因为 $|\sin t|<|t|$ 所以对任意自然数 n 及 p, 可知

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= \alpha|\sin x_{n+p}-\sin x_n|\\ &\leqslant \alpha|x_{n+p-1}-x_{n-1}|\leqslant\alpha^2|x_{n+p-2}-x_{n-2}|\\ &\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n|x_p-x_0|=\alpha^{n+1}|\sin x_{p-1}|\leqslant\alpha^{n+1}\end{aligned}$$

由于 $0<\alpha<1$, 故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而是收敛列

现在令 $x_n\in\xi$ $(n\to\infty)$, 易知 $\xi=y+\alpha\sin\xi$. 进一步, 若该方程另有一解 $x=\eta$,

则由 $|\eta-\xi|=\alpha|\sin\eta-\sin\xi|\leqslant\alpha|\eta-\xi|$, 可知 $\eta=\xi$ □

2.3.4 单调有界定理

Example 2.40: 设 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ (n 个根号), 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在

Proof: 显然数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 对于一切 n 皆有 $2^n>\ln n$, 故有

$$e^{2^n}>n\qquad(n=1,2,\cdots)$$

这样

$$a_n<\sqrt{e^2+\sqrt{e^{2^2}+\cdots+\sqrt{e^{2^n}}}}<e\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}=\frac{e}{2}(1+\sqrt{5})$$

故数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在 □

Example 2.41: 设 $a_1=\sqrt{1+2015}$, $a_2=\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016}}$, $\cdots$,

$$a_n=\sqrt{\left(1+2015\sqrt{\left(1+2016\sqrt{\left(1+\cdots+(2014+n)\sqrt{1+(2013+n)}\right)}\right)}\right)}$$

求证：数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的值

Proof: $x\geqslant0$, $n\in\mathbb{N}$, 设

$$f_n(x)=\sqrt{\left(1+x\sqrt{\left(1+(x+1)\sqrt{\left(1+\cdots+(x+n-1)\sqrt{1+(x+n)}\right)}\right)}\right)}$$

则

$$f_n(x)=\sqrt{1+xf_{n-1}(x+1)}\tag{2.1}$$

由数学归纳法易得 $f_n(x)\leqslant x+1$, 所以对固定的 x, $\{f_n(x)\}$ 单调递增有上界,

所以 $\{f_n(x)\}$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在, 记 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, 则

$$F(x)\leqslant x+1,\ \ F(x)=1+xF(x+1),$$

今往证 $F(x)=x+1$, 因为

$$f_n(x)>\sqrt{x\sqrt{x\cdots\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}}=x^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

取极限得 $F(x)\geqslant x$, 设 $b_0=0$, $b_{n+1}=\dfrac{1+b_n}{2}$, 则当 $F(x)\geqslant x+b_n$ 时, 由 (2.1) 得

$$F(x)=\sqrt{1+x\sqrt{F(x+1)}}\geqslant\sqrt{1+x(x+1+b_n)}\geqslant x+\frac{1+b_n}{2}=x+b_{n+1}\,,$$

即 $F(x)\geqslant x+b_{n+1}$, 所以 $F(x)\geqslant x+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x+1$, 又 $F(x)\leqslant x+1$, 所以 $F(x)=x+1$, 得证一般结论. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=F(2015)=2016$. □

Example 2.42: 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 2}$ 为

$$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}\,.$$

显然, 可以证明 $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt[n]{\ell-a_n}=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

Proof:(by ytdwdw) 对于 $x\geqslant 1$, 记

$$a_n(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+1+\sqrt{x+2+\cdots+\sqrt{x+n-1}}}}\,,\quad \ell(x)=\lim_{n\to\infty}a_n(x)$$

易见

$$\ell=\ell(1)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+\ell(n+1)}}}}\,,$$

$$\sqrt{n}\leqslant\ell(n)\leqslant\sqrt{n}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\cdots}}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{n}\,,$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\ell(n)}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\ell(n+1)}}{\sqrt{n}}=1\,.$$

又记

$$f_n(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+x}}}}\,,\quad x\geqslant -n\,.$$

则存在 $\xi\in(0,\ell(n+1))$ 使得

$$\begin{aligned}\ell-a_n&=f_n(\ell(n+1))-f_n(0)=f_n'(\xi)\ell(n+1)\\&=\ell(n+1)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{j+\sqrt{j+1+\cdots+\sqrt{n+\xi}}}}\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\ell(n+1)}{2^n\sqrt{n!}}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{j}}{\ell(j)}\leqslant\ell-a_n\leqslant\frac{\ell(n+1)}{2^n\sqrt{n!}}$$

对于正数列 $\{b_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 存在, 则由 Stolz 公式

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln b_n}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\frac{b_{n+1}}{b_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\ell(n+1)}{2^n\sqrt{n!}}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!}}=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{j}}{\ell(j)}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ell(n)}=1$$

因此, 由夹逼准则得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt[n]{\ell-a_n}=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$. □

Example 2.43: (江西首届高校杯数学联赛) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=a>1$, 且满足递推

$$x_{n+1}=1+\ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right),n=2,3,\cdots$$

求证: $\{x_n\}$ 收敛, 并求出极限值

Proof: 先利用数学归纳法证明 $x_n>1$, 现在假设 $x_n>1$ 则只需要证明

$$\ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right)>0\Longleftrightarrow x_n^2-1-\ln x_n>0$$

考虑函数 $f(x)=x^2-1-\ln x,x>1$, 易得 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)>f(1)=0$

接着证明 $x_n<x_{n+1}$, 那么只要证明

$$x_{n+1}-1-\ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right)>0$$

考虑函数

$$g(x)=x-1-2\ln x+\ln(1+\ln x),x>1$$

易得

$$g'(x)=\frac{x-1+x\ln x-2\ln x}{x(1+\ln x)},x>1$$

考虑函数 $h(x)=x-1+x\ln x-2\ln x,x>1$, 易得 $g(x)>0$

或者考虑

$$G(x)=1+2\ln x+\ln(1+\ln x)\Longrightarrow G'(x)=\frac{1+2\ln x}{x(1+\ln x)}$$

利用导数易得 $x(1+\ln x)\geqslant 1+2\ln x,x\geqslant 1$, 故有 $0<G'(x)<1$

那么有

$$0<x_{n+1}=G(x_n)=\int_1^{x_n}G'(x)\,\mathrm{d}x+1\leqslant 1+(x_n-1)=x_n$$

综上知: 数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛, 设极限值为 A, 有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=A$$

即

$$A = 1 + \ln\left(\frac{A^2}{1+A}\right) \Longrightarrow A = 1$$

□

Example 2.44: 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $x_1 = 2,\ y_1 = 1$, 且满足

$$x_{n+1} = x_n^2 + 1\,, \quad y_{n+1} = x_n y_n$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 极限存在, 假设极限为 A , 并且证明 $A < \sqrt{7}$

Proof: 由题设知

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_n^2+1}{x_n y_n} = \frac{x_n}{y_n} + \frac{1}{y_{n+1}}$$

由上式知 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 为严格增数列, 且当 $n \geqslant 2$ 时

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + \frac{1}{y_n} = \frac{x_{n-2}}{y_{n-2}} + \frac{1}{y_{n-1}} + \frac{1}{y_n} = \cdots = \frac{x_1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \cdots + \frac{1}{y_n} \tag{2.2}$$

由条件 $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ 知 $x_{n+1} \geqslant 2x_n$, $n = 1, 2\cdots$, 从而 $\{x_n\}$ 严格增, 并且易得 $x_n \geqslant 2^{n-1}x_1 = 2^n$. 由条件 $y_{n+1} = x_n y_n$ 知, 对 $n \geqslant 2$,

$$\frac{\frac{1}{y_{n+1}}}{\frac{1}{y_{n+1}}} = \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{1}{x_n}$$

容易算出 $x_2 = 5,\ y_2 = 2,\ y_3 = 10$ 利用上式知及 $\{x_n\}$ 的单调性知, 对 $n \geqslant 3$,

$$\frac{\frac{1}{y_n}}{\frac{1}{y_2}} = \prod_{i=3}^{n}\left(\frac{\frac{1}{y_i}}{\frac{1}{y_{i-1}}}\right) = \prod_{i=3}^{n}\frac{1}{x_{i-1}} \leqslant= \prod_{i=3}^{n}\frac{1}{x_2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$$

于是在 (2.2) 式中, 当 $n \geqslant 2$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{y_n} &\leqslant \frac{x_1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\left(1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}\right)\\ &< \frac{x_1}{y_1} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{y_2} = \frac{2}{1} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2} = 2.625 < \sqrt{7}\,(\approx 2.646)\end{aligned}$$

从而由单调收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 极限存在, 并且由极限的保不等式性知此极限 $A < \sqrt{7}$ □

Example 2.45: 设函数 $f_n(x) = x^n + nx - 2$,

证明: $f_n(x)$ 在 $x > 0$ 的范围内仅有一个根 a_n, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n$.

Proof: 由于 $f_n'(x) = nx^{n-1} + n = n(x^{n-1}+1) > 0\ (x > 0)$.

所以函数 $f_n(x)$ 在 $x > 0$ 时严格单调增加. 并且容易计算得到

$$f_n(0) = -2 < 0\,, \quad f(2) = 4 + 2(n-1) \geqslant 4 > 0\ (n \geqslant 1)$$

所以 $f_n(x)$ 有且仅有唯一的正根.

当 $n = 1$ 时, 有

$$f_n(x) = x + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow a_1 = 1$$

当 $n>1$ 时, 由 $f_n(x)=x(x^{n-1}+n)-2$, 可知, 函数的根必须在位于 $(0,1)$ 区间内.
根据函数表达式的结构, 尝试探索令 $x=\frac{1}{n}$ 时,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n}+1-2=\frac{1}{n^n}-1<0$$

随着 n 增加, 差距减小, 考虑$x=\frac{2}{n}$ 代入, 得

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{2^n}{n^n}+2-2=\frac{2^n}{n^n}>0$$

即当 $n\geqslant 2$ 时, 函数的根 $\frac{1}{n}<a_n<\frac{2}{n}$. 于是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<(1+a_n)^n<\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$
容易计算左边极限为 e, 右边极限为 e^2, 夹逼准则使用失败!
尝试放大 $\frac{1}{n}$ 或者缩小 $\frac{2}{n}$ 减小一个数量级, 比如考察 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}$, 则有

$$\begin{aligned}f_n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)&=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n+n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-2=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n+\frac{1}{n}-1\\&<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-1<0\ (n>3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_n\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)&=\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n+n\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)-2=\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n-\frac{2}{n}\\&\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)-\frac{2}{n}=-\frac{2}{n^2}<0\end{aligned}$$

所以可以考虑的区间为 $\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\frac{2}{n}\right]$, $\left[\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2},\frac{2}{n}\right]$
于是分别求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{n+1}{n}}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{2n-2}{n^2}}=e^2$$

所以由以上分析可知方程的根位于 $\left[\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2},\frac{2}{n}\right]$ 区间内,
并且可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n=e^2$ □

Example 2.46: 设 a_0 和 a_1 是实数，且满足 $a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}$,
证明: 序列 $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 收敛，并求极限。

Proof: 设

$$S(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

则

$$\begin{aligned}S(x)&=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n\\&=a_0+a_1x+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}\end{aligned}$$

$$= a_0 + a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n x^{n+1} + \frac{2}{n+1}a_{n-1}x^{n+1}\right)$$
$$= a_0 + a_1 x + x(S(x) - a_0) + 2\int_0^x tS(t)dt$$

两边对 x 求导，得到微分方程

$$(x-1)S'(x) + (2x+1)S(x) + a_1 - a_0 = 0$$

注意到初值 $S_0 = a_0$, 解这个 ODE, 得到

$$S(x) = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{(2x^2-6x+5)(a_0-a_1)+(5a_1-9a_0)e^{-2x}}{(x-1)^3}\right]$$

我们有展开式

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)(k+1)}{2}x^k\ , \quad e^{-2x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!}x^k$$

则

$$(2x^2-6x+5)\cdot\frac{1}{(1-x)^3} = 5 + 9x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(n+5)(n+2)x^n$$
$$e^{-2x}\cdot\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

其中

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k(n-k+2)(n-k+1)}{2\cdot k!}$$

于是

$$S(x) = \frac{1}{4}(a_1-a_0)\left(5+9x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(n+5)(n+2)x^n\right) + \left(\frac{9}{4}a_0 - \frac{5}{4}a_1\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\right)$$

对比 x^n 项的系数，得到

$$a_n = \frac{1}{8}(n+5)(n+2)(a_1-a_0) + \left(\frac{9}{4}a_0 - \frac{5}{4}a_1\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k(n-k+2)(n-k+1)}{2\cdot k!}\right)$$

下面来计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$$

显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{8}(n+5)(n+2)(a_1-a_0)}{n^2} = \frac{1}{8}(a_1-a_0)$$

又注意到

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{2\cdot k!}(n-k+2)(n-k+1 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{2\cdot k!}[n^2+3n-2kn+(k-2)(k-1)]$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{2\cdot k!} + o(1) \to \frac{e^{-2}}{2} \qquad (n\to\infty)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\left(\frac{9}{8}e^{-2}-\frac{1}{8}\right)a_0+\left(\frac{1}{8}-\frac{5}{8}e^{-2}\right)a_1$$

□

Example 2.47: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,$\{d_n\}$ 单调地趋于 0, $\sum_{n=1}^{\infty}d_na_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty}d_nA_n=0$.

Proof: 不妨设 $d_n>0$, $d_n\downarrow 0$. 对任意正整数 n,p,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p}d_ka_k&=\sum_{k=n+1}^{n+p}d_k(A_k-A_{k-1})\\&=d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}d_kA_k-\sum_{k=n+2}^{n+p}d_kA_{k-1}\\&=d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}d_kA_k-\sum_{k=n+1}^{n+p-1}d_{k+1}A_k\\&=d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(d_k-d_{k+1})A_k\\&\geq d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(d_k-d_{k+1})A_{n+1}\\&=d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+(d_{n+1}-d_{n+p})A_{n+1}\\&\geq d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+p}A_{n+1}.\end{aligned}$$

对任何固定的 n, 有 $\lim_{p\to\infty}d_{n+p}A_{n+1}=0$. 在上式中令 $p\to\infty$, 得到

$$\limsup_{m\to\infty}d_mA_m\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}d_ka_k.$$

令 $n\to\infty$, 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}d_na_n$ 收敛, 得到 $\limsup_{m\to\infty}d_mA_m\leq 0$. 故 $\lim_{n\to\infty}d_nA_n=0$. □

Example 2.48: 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$ 且对 $\forall x\geqslant 1$, 有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$

证明: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)<1+\dfrac{\pi}{4}$

Proof: 由题意知 $f'(x)>0$, $\therefore f(x)$ 有 $f(1)=1$

$\therefore x\geqslant 1$ 时, $\forall f(x)\geqslant 1\Longrightarrow\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}\leqslant\dfrac{1}{1+x^2}$ 上式对两边积分得

$$\int_1^t f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^t\frac{1}{x^2+f^2(x)}\,\mathrm{d}x<\int_1^t\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan t-\frac{\pi}{4}$$

所以

$$f(t)-f(1)<\arctan t-\frac{\pi}{4}$$

所以对以 $\forall x$

$$f(t)<\arctan t-\frac{\pi}{4}+1\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)<1+\frac{\pi}{4}$$

由上式知 $f(x)$ 有上界, 故由单调有界定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在 □

Example 2.49: 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1\ a_{n+1}=a_n+e^{-a_n}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{a_n-\ln n}{\ln n}$

Solution(by 向禹) 首先由递推式 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+e^{-a_n}$ 显然归纳可得 $a_n>\ln(n+1)$. 因此

$$(a_{n+1}-\ln(n+1))-(a_n-\ln n)=e^{-a_n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0.$$

这说明 $b_n=a_n-\ln n$ 是单调递减的正数列, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ 存在. 代入原递推式可得

$$b_{n+1}=b_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{e^{-b_n}}{n}.$$

如果 $b>0$, 则存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant N$ 时, $b_n>\dfrac{b}{2}$ 都成立. 则

$$b_{n+1}<b_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{e^{-\frac{b}{2}}}{n}<b_n-\frac{1}{n+1}-\frac{e^{-\frac{b}{2}}}{n}<b_n-\frac{C}{n}.$$

这里 $C>0$ 为常数. 由调和级数的发散性可知这不可能, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b=0$. 因此

$$b_{n+1}=b_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{e^{-b_n}}{n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)b_n+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是

$$nb_{n+1}=(n-1)b_n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=(1+o(1))\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\ln n+o(\ln n).$$

这说明 $b_n=\dfrac{\ln n}{2n}+o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{a_n-\ln n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{\ln n}{2n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}$$

◀

Example 2.50: 设 $\{x_n\}$ 满足: $-1<x_0<0$, $x_{n+1}=x_n^2+2x_n\ (n=0,1,2,\cdots)$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{x\to0} x_n$

Proof: 当 $n=0$ 时,

$$x_1=x_0^2+2x_0=(x_0+1)^2-1\in(-1,0)$$

当 $n=1$ 时,

$$x_2=x_1^2+2x_1=(x_1+1)^2-1\in(-1,0)$$

假设当 $n=k$ 时, $x_{k+1}\in(-1,0)$, 当 $n=k+1$ 时

$$x_{k+2}=x_{k+1}^2+2x_{k+1}=(x_{k+1}+1)^2-1\in(-1,0)$$

由数学归纳法可得 $-1 < x_n < 0$, 即数列 $\{x_n\}$ 有界, 且

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 + x_n = x_n(x_n + 1) < 0$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界定理知数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，
记 $\lim\limits_{x\to 0} x_n = A$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} x_{n+1} = A$. 故有

$$A = A^2 + 2A \Longrightarrow A = 0 \text{ 或 } A = 1$$

由于 $1 < x_0 < 0$ 以及数列 $\{x_n\}$ 单调递减，知 $\lim\limits_{x\to 0} x_n = -1$ □

Note: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 2 + x_n > 1$ 数列 $\{x_n\}$ 递增. 因为 $-1 < x_n < 0$

Example 2.51: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, 其中 $y_n = 1 + \dfrac{y_{n-1}}{1 + y_{n-1}}$, $y_0 = 1$

Proof:(方法 1 夹逼准则) 假设极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在, 并记极限为 A, 两边取极限

$$A = 1 + \frac{A}{1+A} \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{或} A = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{舍去}$$

现在来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 因为

$$\begin{aligned} 0 < \left| y_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| &= \left| 1 + \frac{y_{n-1}}{1+y_{n-1}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = \left| \frac{y_{n-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}}{2\underbrace{(y_{n-1}+1)}_{>2}\underbrace{(3-\sqrt{5})}_{>0.5}} \right| \\ &< \frac{1}{2}\left| y_{n-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \right| \quad (\text{递推}) \\ &< \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}\left| y_1 - \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \right| \to 0 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

于是由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
(方法 2 单调有界) 易得 $1 \leqslant y_n \leqslant 2$, 且因为

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1+x} \Longrightarrow y_{n+1} = f(y_n) \Longrightarrow y' = \frac{1}{(1+x)^2} > 0,$$

$y_1 - y_0 = 1 + \dfrac{y_0}{1+y_0} - y_0 = \dfrac{1}{2} > 0 \Longrightarrow y_1 > y_0$ 故数列 $\{y_n\}$ 单调递增,
或者设 $y_n > y_{n-1}$, 即数列 $\{y_n\}$ 单调递增. 考虑数学归纳法
$y_1 - y_0 = 1 + \dfrac{y_0}{1+y_0} - y_0 = \dfrac{1}{2} > 0 \Longrightarrow y_1 > y_0$
现假设 $n = k$ 时成立, 即有 $y_k > y_{k-1}$. 当 $n = k+1$ 时

$$\begin{aligned} y_{k+1} - y_k &= \left(1 + \frac{y_k}{1+y_k}\right) - \left(1 + \frac{y_{k-1}}{1+y_{k-1}}\right) \\ &= \frac{y_k}{1+y_k} - \frac{y_{k-1}}{1+y_{k-1}} = \frac{y_k - y_{k-1}}{(1+y_k)(1+y_{k-1})} > 0 \end{aligned}$$

因此由单调有界定理知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在并记极限为 A, 两边取极限

$$A = 1 + \frac{A}{1+A} \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{或} A = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{舍去}$$

□

Example 2.52: 设 $x_1 > x_2 > 0$, $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求极限

Proof: 由 $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}$, 易得

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}} \Longrightarrow x_{n+2} = x_2\sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdots\frac{x_1}{x_2}} = x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{n+1}}}$$

由于

$$x_2 < x_3 = x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < x_1,\ x_2 < x_4 = x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_3}} < x_3\sqrt{\frac{x_1}{x_3}} = x_3 < x_1,$$

推断出 $\{x_{2k-1}\}$ 单调递减, $\{x_{2k}\}$ 单调递增, 且 $x_2 < x_{2k+1}$, $x_{2k} < x_1$. 应用数学归纳法证明假设 $x_2 < x_{2k-1} < x_{2k-3}$, $x_{2k-2} < x_{2k} < x_1$, 则

$$x_{2k+1} = x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k}}} < x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-2}}} = x_{2k-1} > x_2$$

$$x_{2k+2} = x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k+1}}} > x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-1}}} = x_{2k} < x_1$$

由单调有界定理可知 $\{x_{2k-1}\}$, $\{x_{2k}\}$ 极限存在. 并且设

$$\lim_{n\to\infty} x_{2k-1} = a\ ,\quad \lim_{n\to\infty} x_{2k} = b$$

于是由

$$x_{2k-1} = x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-2}}}\ ,\quad x_{2k} = x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-1}}}$$

两边取极限可得

$$a = x_2\sqrt{\frac{x_1}{b}}\ ,\quad b = x_2\sqrt{\frac{x_1}{a}}$$

解得 $a = b = \sqrt[3]{x_1x_2^2} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ □

Example 2.53: 设 $x_1 = a \geqslant 0$, $y_1 = b \geqslant 0$, 且

$$x_{n+1} = \sqrt{x_ny_n}\ ,\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)\ ,\ n = 1, 2, \cdots\ ,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Proof: $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$ 是显然的. 由

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geqslant \sqrt{x_ny_n} = x_{n+1}\ ,$$

得

$$x_{n+1} = \sqrt{x_ny_n} \geqslant \sqrt{x_nx_n} = x_n\ ,$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leqslant \frac{y_n + y_n}{2} = y_n\ .$$

知 $\{x_n\}$ 单调增加, $\{y_n\}$ 单调减少, 又

$$x_n \leqslant y_n \leqslant y_1\ ,\ y_n \geqslant x_n \geqslant x_1$$

所以 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 有界. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ 存在.

对 $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ 两边取极限, 得

$$B = \frac{1}{2}(A+B) \Longrightarrow A = B$$

□

Example 2.54: 设 $a_0 = 3, a_n = a_{n-1}^2 - 2$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_0a_1\cdots a_{n-1}} = \sqrt{5}$

Proof:[6]

$$\begin{aligned} a_n^2 - 4 &= (a_n-2)(a_n+2) = a_{n-1}^2(a_{n-1}^2 - 4) \\ &= a_{n-1}^2 a_{n-2}^2 (a_{n-2}^2 - 4) \\ &= \cdots \\ &= a_{n-1}^2 a_{n-2}^2 \cdots a_0^2 (a_0^2 - 4) = 5a_0^2 a_1^2 \cdots a_{n-1}^2 , \end{aligned}$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_0a_1\cdots a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n^2-4}}{a_0a_1\cdots a_n} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-\frac{4}{a_n^2}}} = \sqrt{5}.$$

□

Example 2.55: (上海交通大学 1991 年竞赛题) 设 $x_1 = 1, x_2 = 2$, 且

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} \cdot x_n} \ (n = 1, 2, \cdots)$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Proof: 令 $y_n = \ln x_n$, 则由 $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} \cdot x_n}$ 得 $y_{n+2} = \dfrac{1}{2}(y_{n+1} + y_n)$, 故

$$\begin{aligned} y_{n+2} - y_{n+1} &= -\frac{1}{2}(y_{n+1} - y_n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (y_n - y_{n-1}) \\ &= \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (y_2 - y_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \ln 2 \end{aligned}$$

移项得

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= y_{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \ln 2 = y_n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ln 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \ln 2 \\ &= \cdots = y_1 + \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0 \ln 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \ln 2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \ln 2\right] \\ &= \ln 2 \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \\ &= \ln 2 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \ln 2 \end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+2} = \dfrac{2}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \ln 2 = \dfrac{2}{3} \ln 2$, 于是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+2} = \lim_{n\to\infty} e^{y_{n+2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+2}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

□

Exercise 2.2: 设 $x_1=a,\ x_2=b,\ x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})\ (n\geqslant 2)$.
证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

Solution 因为

$$x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2}),\ (n\geqslant 3)$$

求积得

$$\prod_{i=3}^{n}(x_i-x_{i-1})=\prod_{i=3}^{n}\left[-\frac{1}{2}(x_{i-1}-x_{i-2})\right]=\prod_{i=2}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)(x_i-x_{i-1})$$

化简得

$$x_n-x_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2-x_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a)$$

求和得

$$x_n-x_1=(b-a)\times\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1-(-\frac{1}{2})}$$

即

$$x_n=\frac{2}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]+a$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}(a+2b)$$

◀

Example 2.56: 设 $a_0=1,\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n},\ n\in\mathbb{N}^+$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$

Proof:[1] 由 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ 平方可得 $a_{n+1}^2=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2$

$$\begin{aligned}a_{n+1}^2&=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2\geqslant a_n^2+2\\&\geqslant\cdots\geqslant a_0^2+2(n+1)\end{aligned}$$

于是有

$$a_{n+1}^2\geqslant a_0^2+2(n+1)=2n+3\Longrightarrow\frac{1}{a_{n+1}^2}\leqslant\frac{1}{2n+3}$$

故

$$\begin{aligned}a_n^2&=a_{n-1}^2+\frac{1}{a_{n-1}^2}+2\leqslant a_{n-1}^2+\frac{1}{2n-1}+2\\&\leqslant\cdots\leqslant a_0^2+2(n+1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\end{aligned}$$

因此

$$a_0^2+2n\leqslant a_n^2\leqslant a_0^2+2(n+1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

$$1 \leqslant \frac{a_n^2}{2n+1} \leqslant 1 + \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{n}\frac{n}{2n+1}$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{H_{2n}-H_n}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\ln(2n)+\gamma+\varepsilon_{2n}\right)-\frac{1}{2}\left(\ln n+\gamma+\varepsilon_n\right)}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln n}{n} = 0\end{aligned}$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n+1}=1$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$$

□

Exercise 2.3: 设 $y_0 \geq 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2 (n \in \mathbb{N}), S_n = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \cdots + \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}$,

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2-4}}{2}$

Proof: 若 $y_0 = 2$, 则 $y_n = 2, n \in \mathbb{N}$. 此时

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1 = \frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$$

若 $y_0 > 2$, 这时记 $\alpha = \frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$, 此时 $y_0 = \alpha + \frac{1}{\alpha}$. 一般地，

$$y_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

因此

$$\begin{aligned}y_0 y_1 y_2 \cdots y_n &= (\alpha+\alpha^{-1})(\alpha^2+\alpha^{-2})(\alpha^{2^2}+\alpha^{-2^2})\cdots(\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n}) \\ &= \frac{\alpha^{2^{n+1}}-\alpha^{-2^{n+1}}}{\alpha-\alpha^{-1}} = \frac{\alpha}{\alpha^2-1}\cdot\frac{\alpha^{2^{n+2}}-1}{\alpha^{2^{n+1}}}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_0 y_1 y_2 \cdots y_n} &= \frac{\alpha^2-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^{n+2}}-1} = \frac{\alpha^2-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^{2^{n+1}}+1-1}{\alpha^{2^{n+2}}-1} \\ &= \frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^{2^{n+1}}-1}-\frac{1}{\alpha^{2^{n+2}}-1}\right)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{y_0 y_1 y_2\cdots y_k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^{2^{k+1}}-1}-\frac{1}{\alpha^{2^{k+2}}-1}\right) \\ &= \frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2-1}-\frac{1}{\alpha^{2^{n+2}}-1}\right)\end{aligned}$$

注意到 $\alpha < 1$, 最终

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2-1}+1\right) = \alpha = \frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$$

□

Exercise 2.4: 设数列 a_n 满足级数 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{p\to\infty}(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p+\cdots)^{\frac{1}{p}}$ 的极限存在, 并求之.

Proof: 记

$$||a||_p = (|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p+\cdots)^{\frac{1}{p}},\ (p>0)$$

由于 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0, \sup|a_n|$ 存在
易证 $|a_n| \le ||a||_q$ $(q>1, n=1,2,3,\cdots)$, 于是 $\sup|a_n| \le ||a||_q$, 对 $1<q<p$

$$\begin{aligned}||a||_p &= (|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p+\cdots)^{\frac{1}{p}}\\ &= (|a_1|^{p-q}|a_1|^q+|a_2|^{p-q}|a_2|^q+\cdots+|a_n|^{p-q}|a_n|^q+\cdots)^{\frac{1}{p}}\\ &\le ||a||_q^{\frac{p-q}{p}}(|a_1|^q+|a_2|^q+\cdots+|a_n|^q+\cdots)^{\frac{1}{p}}\\ &\le ||a||_q^{\frac{p-q}{p}}||a||_q^{\frac{q}{p}} = ||a||_q\end{aligned}$$

故 $||a||_p \le ||a||_q$, 所以 $||a||_p$ 关于 p 单调递减且有下界. 于是有

$$a_n \le ||a||_p \le (\sup a_n)^{1-\frac{q}{p}}||a||_q^{\frac{q}{p}}$$

当 $p\to+\infty$ 时, 有夹逼定理, $\lim\limits_{p\to+\infty}||a||_p = \sup|a_n|$ □

Exercise 2.5: 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2\ln n}}$

Proof: 易知 $\{a_n\}$ 单调递增，且趋于 ∞ , 所以

$$1 \le \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1+\frac{1}{na_n}$$

$$1 \le n+1-n\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{1+\frac{n+1}{na_n}}{1+\frac{1}{na_n}},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n+1}{na_n}}{1+\frac{1}{na_n}}=1$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\sum\limits_{i=1}^n a_i)^2}=0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}(a_{n+1}^2-a_n^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2a_n}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}+\frac{1}{(\sum\limits_{i=1}^n a_i)^2}\right)=1$$

□

Example 2.57: 设方程 $x^n+x=1$ 在 $(0,1)$ 中的根为 a_n $(n\in N^+)$

(1) 求证: 数列 a_n 是单调递增

(2) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

(3) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(a_n - 1) = 1$

(4) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(\ln n)}\left(1 - a_n - \frac{\ln n}{n}\right) = 1$ 的值

✎ Solution

(1) 实际上我们利用零点定理和单调性知道 $x^n + x = 1$ 在 $(0,1)$ 中有唯一正实数根设 $f_n(x) = x^n + x - 1$, 则有

$$f_{n+1}(a_{n+1}) = 0 \Longrightarrow (a_{n+1})^{n+1} + a_{n+1} = 1$$

$$f_n(a_n) = 0 \Longrightarrow (a_n)^n + a_n = 1$$

由于

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$$

即 $f_n(x)$ 关于 x 单调递增, 且注意到

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= (a_{n+1})(a_{n+1})^{n+1} + a_{n+1} + 1 \\
&= (a_{n+1})(a_{n+1})^n - (a_{n+1})(a_{n+1})^{n+1} \\
&> 0 = f_n(a_n), 0 < a_{n+1} < 1
\end{aligned}$$

所以有

$$a_{n+1} > a_n$$

(2): ◀

Exercise 2.6: $a \geq 0$。$x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n + a(a+1)}, n = 0, 1, 2, \ldots.$ 计算下面这个极限

$$\lim_{n\to\infty} (a+1)^{2n}(a + 1 - x_n)$$

☞ Proof:(by tian27546) 易得

$$\begin{aligned}
&\frac{a+1-x_{n+1}}{a+1-x_n} = \frac{1}{(a+1)+x_{n+1}} \\
\Longrightarrow &\frac{a+1-x_{n+1}}{a+1-x_n} = \frac{1}{2(a+1)}\left(1 + \frac{a+1-x_{n+1}}{a+1+x_{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

so

$$a + 1 - x_n = \frac{1}{2^n(a+1)^n}(a+1-x_0)\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{a+1-x_i}{a+1+x_i}\right) \cdots\cdots (1)$$

显然我们有

$$a + 1 - x_i \leq \frac{(a+1) - x_0}{(a+1)^i}$$

即

$$(a+1-x_0)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a+1-x_i}{a+1+x_i}\right)$$

收敛. 到一个常数 $f(a)\in(0,\infty)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}2^n(a+1)^n(a+1-x_n)=f(a)$$

显然我们很容易得到

$$f(a)=\begin{cases}\infty & a>1\\ \dfrac{\pi^2}{4} & a=1\\ 0 & a<1\end{cases}$$

□

Exercise 2.7: 假设 $x_0=1, x_n=x_{n-1}+\cos x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,
证明: 当 $x\to\infty$ 时, $x_n-\dfrac{\pi}{2}=o\left(\dfrac{1}{n^n}\right)$.

Proof: 方法 1 先证 $1\le x_n<\dfrac{\pi}{2}$, 得到 $x_n-x_{n-1}>0$,
由单调有界定理可知 x_n 极限存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}=\dfrac{\pi}{2}$. 下面用归纳法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^n\left(x_n-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.
假设

$$\lim_{n\to\infty}n^n\left(x_n-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_{n+1}-\frac{\pi}{2}\right)&=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_n+\cos x_n-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_n+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_n+\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)^3-\frac{\pi}{2}\right)\\&=-\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)^3\\&=-\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{3n}}\left[n^n\left(x_n-\frac{\pi}{2}\right)\right]^3=0.\end{aligned}$$

方法 2: 令 $y_n=\dfrac{\pi}{2}-x_n$, 得到 $y_n=y_{n-1}-\sin y_{n-1}$. 可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n^3}=\frac{1}{6}.$$

因此当 $n>N$ 时, 我们有

$$\frac{y_{n+1}}{y_n^3}<\frac{1}{2}.$$

因此

$$0<y_n<\frac{1}{2}y_{n-1}^3<\left(\frac{1}{2}\right)^{1+3}y_{n-2}^{3^2}<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{1+3+\cdots+3^{n-N-2}}y_{N+1}^{3^{n-N-1}},$$

即

$$0<y_n<\left(\frac{1}{2}\right)^{(3^{n-N-1}-1)/2}y_{N+1}^{3^{n-N-1}}.$$

□

Exercise 2.8: 设 $0 < p \le 1$, $x_1 > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $x_{n+1} = a + \dfrac{b}{x_n^p}, n \in \mathbb{N}$.
证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

Proof: 令 $f(x) = a + \dfrac{b}{x^p}, x \in (0, +\infty)$. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可微, 方程 $f(x) = x$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解, 记为 x^*. $\{x_{2n}\}$ 单调递增, $\{x_{2n}\}$ 单调递减, 或 $\{x_{2n-1}\}$ 单调递减, $\{x_{2n-1}\}$ 单调递增. 易知, $a < x_n < a + \dfrac{b}{a^p}, \forall n \ge 2$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$ 均存在, 极限值分别记为 A 和 B. 由递推公式知,

$$A = a + \frac{b}{B^p} = f(B), B = a + \frac{b}{A^p} = f(A).$$

以下证明 $A = B(= x^*)$. 事实上, 总有 $f(f(A)) = A$, $f(f(B)) = B$, $f(f(x^*)) = x^*$.
由此易知, 若 $A \ne B$, 则 A, B, x^* 为 g 的三个不同的不动点, 其中 $g(x) = f(f(x))$. 根据 Lagrange 定理, 存在 $0 < \xi_1 < \xi_2$ 使得 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 1$. 然而

$$g'(x) = f'\big(f(x)\big) f'(x) = \frac{b^2 p^2}{(ax + bx^{1-p})^{p+1}}$$

为 $(0, +\infty)$ 上严格减函数 (注意到 $0 < p \le 1$), 矛盾. 矛盾说明必有 $A = B$. 即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

□

Exercise 2.9: 设 $\{x_n\}$ 为正数数列, $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+2} + x_{n+1}}{x_n} > 2$. 证明: $\{x_n\}$ 无界.

Proof: 令 $\beta = \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+2} + x_{n+1}}{x_n}$. 取 $\alpha \in (2, \beta)$, 则存在正整数 N, 使得

$$\frac{x_{n+2} + x_{n+1}}{x_n} > \alpha, \forall n \ge N.$$

记 $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{4\alpha + 1} - 1}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{4\alpha + 1} + 1}{2}$. 则 $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$. 以上不等式可以等价地写成

$$x_{n+2} + \lambda_2 x_{n+1} > \lambda_1 (x_{n+1} + \lambda_2 x_n), \forall n \ge N.$$

从而

$$\begin{aligned} x_{n+2} + \lambda_2 x_{n+1} &> \lambda_1 (x_{n+1} + \lambda_2 x_n) \\ &> \lambda_1^2 (x_n + \lambda_2 x_{n-1}) \\ &> \cdots \lambda_1^{n-N+1} (x_{N+1} + \lambda_2 x_N), \forall n \ge N. \end{aligned}$$

注意到 $\lambda_1 > 1$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} \big(x_{n+2} + \lambda_2 x_{n+1}\big) = +\infty$. 故 $\{x_n\}$ 无界. □

Exercise 2.10: 设

$$a_n = L_n - \frac{4 \ln n}{\pi^2}, L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \right| \mathrm{d}x, n = 1, 2 \ldots.$$

证明 $\{a_n\}$ 为有界数列.

Solution 令

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}} - \dfrac{2}{x}, & 0 < x \le \pi, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则 f 在 $[0,\pi]$ 上连续, 且 $0\le f(x)\le 1-\dfrac{2}{\pi}$, $0\le x\le\pi$. 从而

$$L_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{x}\mathrm{d}x=L_{n1}+L_{n2}.$$

其中

$$0\le L_{n1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x\le\frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot(1-\frac{2}{\pi})=1-\frac{2}{\pi}.$$

$$\begin{aligned}
L_{n2}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\\
&=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2n}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\ge\frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u\\
&\ge\frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1}\ge\frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\int_{i+1}^{i+2}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&=\frac{4}{\pi^2}\int_1^{2n+2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{4}{\pi^2}\ln(2n+2)\\
&\ge\frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2)
\end{aligned}$$

类似可得到估计

$$L_{n2}\le 1+\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2).$$

从而

$$\frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2)\le L_n\le\frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2)+2.$$

$$\frac{4\ln 2}{\pi^2}\le a_n\le\frac{4\ln 2}{\pi^2}+2, n=1,2,\ldots.$$

故 $\{a_n\}$ 有界. ◀

✎ Solution 事实上, 由于被积函数为偶函数, 故

$$L_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

先估计 $\{a_n\}$ 的下界. 根据 $\sin u\le u, u\in[0,\pi/2]$, 得到

$$\begin{aligned}
L_n&\ge\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\\
&=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2n}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\\
&\ge\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2n}\frac{2}{(i+1)\pi}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=\frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1}\\
&\ge\frac{4}{\pi^2}\left(1+\sum_{i=1}^{2n}\int_i^{i+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)=\frac{4}{\pi^2}(1+\ln(2n+1))\\
&\ge\frac{4}{\pi^2}(\ln n+1+\ln 2).
\end{aligned}$$

从而

$$a_n \geq -\frac{4+4\ln 2}{\pi^2}.$$

即 $\{a_n\}$ 有下界. 现在估计 $\{a_n\}$ 的上界. 以下设 $n \geq 4$.

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\pi} \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = L_{n1} + L_{n2}.$$

其中

$$L_{n1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\cdot(n+\frac{1}{2})\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}
L_{n2} &= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\pi} \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\frac{2i\pi}{2n+1}}^{\frac{(2i+2)\pi}{2n+1}} \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi} \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{i\pi}{2n+1}}\int_{\frac{2i\pi}{2n+1}}^{\frac{(2i+2)\pi}{2n+1}} \left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi}\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{i\pi}{2n+1}} + \frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}} \\
&= \frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{i\pi}{2n+1}} + \frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}} \\
&\leq \frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{i=2}^{n-1}\int_{i-1}^{i}\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{\pi x}{2n+1}} + \frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}} \\
&= \frac{4}{\pi(2n+1)}\int_{1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{\pi x}{2n+1}} + \frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}} \\
&= \frac{4}{\pi^2}\left(\ln\tan\frac{\pi(n-1)}{4n+2} - \ln\tan\frac{\pi}{4n+2}\right) + \frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}} \\
&\leq \frac{4}{\pi^2}(\ln n + \ln 5 - \ln\pi) + \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

从而

$$L_n \leq \frac{4}{\pi^2}(\ln n + \ln 5 - \ln\pi) + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}, n \geq 4.$$

$$a_n \leq \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{5}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}, n \geq 4.$$

即 $\{a_n\}$ 有上界. ◀

Example 2.58: 设 $a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$n$ 为自然数，

求证：(1) $|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Proof:

$$|a_{n+1}| - |a_n| = \left|\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| - \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|$$

$$\xlongequal{t=x-\pi}\left|-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin t}{t+\pi}\,\mathrm{d}t\right|-\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|$$
$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\left(\frac{1}{x+\pi}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\leqslant 0$$

即数列 $\{|a_n|\}$ 单调递减，且 $|a_n|\geqslant 0$。由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|=\lim_{n\to\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{n\to\infty}|\sin\xi|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,,\quad \xi\in[n\pi,(n+1)\pi]$$
$$=\lim_{n\to\infty}|\sin\xi|\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 0\,,\quad n\to\infty$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ □

Example 2.59:

Proof:

□

2.4 Stolz 定理 [1]

Theorem 2.16 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 公式

设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ 且 $\{x_n\}$ 严格增.

如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a\ (\text{实数},\ +\infty,\ -\infty)\,,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

Proof:[1] 令 $a_n=y_n-y_{n-1}$, $b_n=x_n-x_{n-1}$, 其中 $y_0=0=x_0$. 于是 $b_n>0$. 令

$$t_{nm}=\frac{b_m}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\,,\quad m=1,2,\cdots,n$$

则 $t_{nm}>0$, 且

$$t_{n1}+t_{n2}+\cdots+t_{nm}=\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}t_{nm}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_m}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_m-x_{m-1}}{x_n}=0$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\cdot\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{b_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\cdot\frac{a_n}{b_n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(t_{n1}\cdot\frac{a_1}{b_1}+\cdots+t_{nn}\cdot\frac{a_n}{b_n}\right)\\
&\xlongequal{\text{Toeplitz}} \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a
\end{aligned}
$$

□

Theorem 2.17 $\frac{\bullet}{\infty}$ **型 Stolz 公式**

设有数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 其中 $\{x_n\}$ 严格增, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (注意: 不必 $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$). 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = a\ (\text{实数},\ +\infty,\ -\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = a = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

Proof: (1) a 为实数.

$\forall\, \varepsilon>0$, 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a$, 所以 $\exists\, N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, 有

$$\left|\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}<a+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n-x_{n-1})<y_n-y_{n-1}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n-x_{n-1}).$$

类推有

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n-1}-x_{n-2})<y_{n-1}-y_{n-2}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n-1}-x_{n-2}),$$

$$\vdots$$

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{N_1+1}-x_{N_1})<y_{N_1+1}-y_{N_1}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{N_1+1}-x_{N_1}).$$

将上面各式相加得到

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n-x_{N_1})<y_n-y_{N_1}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n-x_{N_1}).$$

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{y_n-y_{N_1}}{x_n-x_{N_1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}.$$

对固定的 N_1, 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 所以, $\exists\, N>N_1$, s.t. 当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{y_{N_1}-ax_{N_1}}{x_n}<\frac{\varepsilon}{2},\quad 0<\frac{x_{N_1}}{x_n}<1$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{y_{N_1}}{x_n}-a\right| &= \left|\frac{y_n-y_{N_1}}{x_n}+\frac{y_{N_1}-ax_{N_1}}{x_n}-a\left(1-\frac{x_{N_1}}{x_n}\right)\right| \\ &= \left|\frac{y_{N_1}-ax_{N_1}}{x_n}-\left(1-\frac{x_{N_1}}{x_n}\right)\left(\frac{y_n-y_{N_1}}{x_n-x_{N_1}}-a\right)\right| \\ &= \left|\frac{y_{N_1}-ax_{N_1}}{x_n}\right|+\left|\frac{y_n-y_{N_1}}{x_n-x_{N_1}}-a\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=a$

(2) $a=+\infty$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a=+\infty$, 所以 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}>1\,,\quad y_n-y_{n-1}>x_n-x_{n-1}>0$$

即 $\{y_n\}$ 严格增. 又由于

$$\begin{aligned}y_n-y_N &= (y_n-y_{n-1})+(y_{n-1}-y_{n-2})+\cdots+(y_{N_1+1}-y_N) \\ &> (x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_{N_1+1}-x_N) \\ &= x_n-x_N\,,\end{aligned}$$

根据 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$. 应用 (1) 的结果得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}1\Big/\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}1\Big/\frac{x_n}{y_n}=+\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

(3) $a=-\infty$

由 (2) 知,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{-y_n}{x_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-y_n)-(-y_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} \\ &= -\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=+\infty\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{-y_n}{x_n}=-\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}\,.$$

□

Note: 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\infty$ 时, $\{x_n\}$ 严格增且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 时, 并不能推出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\infty$$

反例: $x_n=n\,,\ y_n=\left[1+(-1)^n\right]n^2$, 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\infty$, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}\neq\infty$

Theorem 2.18 $\frac{0}{0}$ 型 Stolz 公式

设有数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 其中 $\{x_n\}$ 严格减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a \text{ (实数, } +\infty\text{, } -\infty\text{)},$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

☞ Proof: (1) a 为实数.

$\forall A > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a$, 所以 $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} < a + \frac{\varepsilon}{2}, \quad x_n - x_{n+1} > 0$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{n+1}) < y_n - y_{n+1} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{n+1}).$$

类推有

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n+1} - x_{n+2}) < y_{n+1} - y_{n+2} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n+1} - x_{n+2}),$$

$$\vdots$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n+p-1} - x_{n+p}) < y_{n+p-1} - y_{n+p} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n+p-1} - x_{n+p}).$$

将上面各式相加得到

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{n+p}) < y_n - y_{n+p} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{n+p}).$$

令 $p \to +\infty$, 由 $x_{n+p} \to 0$, $y_{n+p} \to 0$, 得到

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) x_n \leqslant y_n \leqslant \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) x_n$$

由于 $x_n > 0$, 有

$$a - \varepsilon < a - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{y_n}{x_n} \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a$.

(2) $a = +\infty$

$\forall A > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$, 所以 $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} > 2A,,$$

类似上述论证有

$$y_n - y_{n+p} > 2A(x_n - x_{n+p}).$$

令 $p \to +\infty$, 由 $y_{n+p} \to 0$, $x_{n+p} \to 0$, 得到

$$y_n \geqslant 2Ax_n, \quad \frac{y_n}{x_n} \geqslant 2A > A,$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$$

(3) $a = -\infty$

类似 (2) 的证明或将 (2) 的结论应用到 $\{-y_n\}$ 即得 □

Example 2.60: 设 $a_n = \dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 求 $\{a_n\}$ 的极限。

Proof: 方法 1 直接用 Stolz 定理计算如下

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!n} = 1$$

方法 2(夹逼准则) 因为

$$\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!} = \frac{1!+2!+3!+\cdots+(n-2)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + 1$$

其中

$$0 < \frac{1!+2!+3!+\cdots+(n-2)!}{n!} < \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} \to 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!} = 1$$

□

Example 2.61: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Proof: 设

$$x_n = \left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

则

$$\begin{aligned} \ln x_n &= \frac{1}{2^{n-1}} \ln \frac{2}{2^2-1} + \frac{1}{2^{n-2}} \ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\ln \frac{2}{2^2-1} + 2\ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + 2^{n-2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \right) \end{aligned}$$

因为 $2^{n-1} \to +\infty$ 应用 Stolz 定理, 得

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}} = -\ln 2$$

□

Example 2.62: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+11+\cdots+\overbrace{11\cdots1}^{(n+1)\text{个}1}}{10^n}$$

Solution

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+11+\cdots+\overbrace{11\cdots1}^{(n+1)\text{个}1}}{10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k}10^i}{10^n}\xlongequal{\text{Stolz}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n+1}10^i}{10^{n+1}-10^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10^{n+2}-1}{10-1}}{10^n(10-1)}=\frac{100}{81}$$

◀

Example 2.63: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n}\right)$$

Solution 令 $y_n=\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n}$, $x_n=\frac{1}{n^2}$. 显然 $\{x_n\}$ 单调递减并趋于 0.

注意到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 故 $\{y_n\}\to 0$, 利用 Stolz 公式

$$\text{原极限}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2(n-1)}}{\frac{1-2n}{n^2(n-1)^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{1-2n}=-\frac{1}{2}$$

◀

Exercise 2.11: 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Solution: 令

$$x_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

则

$$\ln x_n=\frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{4}{7}+\cdots+\frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\ln\frac{2}{3}+2\ln\frac{4}{7}+\cdots+2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)$$

应用 Stolz 公式求极限

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}=\ln\frac{1}{2}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^{\frac{1}{2^{n-1}}} (\frac{4}{7})^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots (\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

□

Exercise 2.12: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2011}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^{2010} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x$$

Solution: 根据推广的积分第一中值定理，对每个正整数 n $\exists$ $\theta_n \in (0,1)$ 使得

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2010} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x = ((2n+\theta_n)\pi)^{2010} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x$$

由此得

$$\begin{aligned}
&\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2010} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= \left((2n\pi)^{2010} + o(n^{2010})\right) \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= \left((2n\pi)^{2010} + o(n^{2010})\right) \left(\frac{\cos 5x}{80} - \frac{\cos 3x}{48} - \frac{\cos x}{8}\right)\Bigg|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\
&= \frac{4}{15}((2n\pi)^{2010} + o(n^{2010})) \ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

另外

$$(2n+1)^{2011} - (2n-1)^{2011} = 4022(2n)^{2010} + o(n^{2010}) \ (n\to\infty)$$

根据 Stolz 定理

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2011}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^{2010} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2010} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x}{(2n+1)^{2011} - (2n-1)^{2011}} \\
&= \frac{2}{30165} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n\pi)^{2010} + o(n^{2010})}{(2n)^{2010} + o(n^{2010})} \\
&= \frac{2\pi^{2010}}{30165}
\end{aligned}$$

此题的更一般结果为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^{p+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^p \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{2\pi^p}{15(p+1)} (p>0)$$

□

Example 2.64: 设 $x_1 \in (0,1)$, $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, $\forall n \geq 1$, 证明： $\lim_{n\to\infty} nx_n = 1$.

☞ Proof: 有 $0 < x_n < 1, \forall n \geq 1, x_{n+1} = x_n(1-x_n) < x_n$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减有界，设

$$x_n \to a\,(n \to \infty), a = a(1-a), a = 0,$$

有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n} = 1,$$

由 Stolz 公式，

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}} = 1.$$

□

☞ Proof: 首先由归纳法容易证明:

$$x_n < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - x_n > \frac{n-1}{n}.$$

因而 $\{n x_{n+1}\}$ 是递增数列, 且

$$n x_{n+1} < \frac{n}{n+1} < 1.$$

这意味着 $\lim\limits_{n\to\infty} n x_{n+1}$ 存在, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$ 存在. 我们假设

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = \beta \leq 1.$$

用反证法, 如果 $\beta < 1$, 我们取 $\lambda = \dfrac{\beta+1}{2} < 1$, 则存在充分大的 k 使得

$$\forall\, n \geq k: \quad x_n < \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 - \frac{\lambda}{n}.$$

并且

$$\log\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \geq -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)\frac{\lambda}{n}, \quad \forall\, n \geq k.$$

所以

$$\frac{x_m}{x_k} \geq \prod_{n=k}^{m-1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \Rightarrow x_m \geq x_k \exp\left\{-\frac{\lambda+1}{2}\sum_{n=k}^{m-1}\frac{1}{n}\right\}.$$

可知

$$\lim_{m\to\infty} m x_m = +\infty.$$

得到矛盾. 所以 $\beta = 1$. □

Note:[7](*by maorenfeng88*) *考虑 $p > 0$ 的情况，套路如下：*
已知 $a_{n+1} = f(a_n)$ 和 a_1，证明 a_n 与 $n^{-\frac{1}{p}}$ 同阶。

1. *第一步，证明 $a_n \to 0$。(根据要证的结果可以看出，这个肯定是对的。)*
2. *第二步，把 $n^{-\frac{1}{p}}$ 次数去掉，然后用 stolz*: $\lim \dfrac{a_n^{-p}}{n} = \lim \dfrac{a_{n+1}^{-p} - a_n^{-p}}{(n+1)-n}$.

3. 第三步，把 $a_{n+1}=f(a_n)$ 代入，并利用归结原则换元 $a_n=t$：$\lim \dfrac{a_{n+1}^{-p}-a_n{}^{-p}}{(n+1)-n}=\lim\limits_{t\to 0}[f^{-p}(t)-t^{-p}]$

Exercise 2.13: $a_n>0$, 且$a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n\geq 1)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j}$

Proof: 假设 $0<a_n<M$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\Rightarrow a_n-a_1=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\geq 2\frac{n-1}{M}$$

令 $n\to+\infty, a_n$ 无界, 与假设矛盾! 显然 a_n 严格单调递增, 故 $a_n\to+\infty(n\to+\infty)$
将 $a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 两边平方得

$$a_{n+1}^2+\frac{1}{a_{n+1}^2}=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+4$$

从而

$$a_n+\frac{1}{a_n}=\sqrt{4n+a_1^2+\frac{1}{a_1^2}-2}$$

用 Stolz 公式, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n+a_1^2+\dfrac{1}{a_1^2}-2}+\dfrac{1}{a_{n+1}}}=1$$

□

Exercise 2.14: 设 $n\in N^+, I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{\ln n}$

Solution 利用 $\sin^2 nt=\dfrac{1-\cos 2nt}{2}$,可得$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2nt}{2\sin t}\,\mathrm{d}t$
所以

$$\begin{aligned}I_{n+1}-I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2(n+1)t}{2\sin t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2nt}{2\sin t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nt-\cos 2(n+1)t}{2\sin t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

利用和差化积公式

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

有:

$$\begin{aligned}I_{n+1}-I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin 2(n+1)t\sin t}{2\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t\\&=\left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

所以 $I_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$, 显然当 $n \to +\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

应用 *Stolz* 定理有:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1} - I_n}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

◀

Example 2.65: 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + e^{-a_n}$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{\ln n} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

Solution 我们先证里面层的，就是 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln n} = 1$, 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}}{n} = 1$

由条件得 $a_{n+1} > a_n$, 所以数列严格递增，因此有有限正极限或者极限为 $+\infty$,

若 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, 则有

$$A = A + e^{-A} \Longrightarrow 0 = e^{-A}$$

因此只能有 $A = +\infty$, 这样就得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$$e^{a_{n+1}} = e^{a_n} \cdot e^{\frac{1}{e^{a_n}}} = e^{a_n}(1 + e^{-a_n} + o(e^{-a_n})) \qquad (n \to +\infty)$$

所以就有

$$e^{a_{n+1}} = e^{a_n} + 1 + o(e^{-a_n}) \qquad (n \to \infty)$$

O.Stolz 马上看到 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}}{n} = 1$, 这时 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln n} = 1$, 而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{\ln n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{na_n - n\ln n}{a_n}$$

又由 O.Stolz 得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n - n\ln n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a_{n+1} - na_n - ((n+1)\ln(n+1) - n\ln n)}{a_{n+1} - a_n}$$

$$\frac{(n+1)a_{n+1} - na_n - ((n+1)\ln(n+1) - n\ln n)}{a_{n+1} - a_n} = \frac{(n+1)(a_n + e^{-a_n}) - na_n - \ln\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}{e^{-a_n}}$$

由 $a_n \sim \ln n$, 得到

$$\frac{(n+1)(a_n + e^{-a_n}) - na_n - \ln\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}{e^{-a_n}} \sim \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n}(n+1) - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$\sim \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{\ln n}-1\right)=\frac{1}{2}]$$

◀

Example 2.66: 正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)=1$, 且 $p>-1$ 是已知常数，求 A,B, 使得 A,B 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(A-na_n^{p+1})=B$$

✎ Solution 设 $S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i^p$, 容易证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0,\ \lim_{n\to\infty} S_n=+\infty$$

由 O.Stolz 定理得到

$$\lim_{n\to\infty} na_n^{p+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^{p+1}}-\frac{1}{a_n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}^{p+1}-S_n^p}$$

而

$$\begin{aligned}S_{n+1}^{p+1}-S_n^{p+1}&=S_{n+1}^{p+1}-(S_{n+1}-a_{n+1}^p)^{p+1}\\&=S_{n+1}-\sum_{k=0}^{p+1}C_{p+1}^k(-1)^kS_{n+1}^{p+1-k}\cdot a_{n+1}^{pk}\\&=(p+1)S_{n+1}a_{n+1}-\frac{(p+1)p}{2!}S_{n+1}^{p-1}a_{n+1}^{2p}+\cdots\\&=(p+1)+o(1)\qquad(n\to+\infty)\end{aligned}$$

所以 $A=\frac{1}{p+1}$, 同时有 $(p+1)a_n^{p+1}\sim\frac{1}{n}$, 这时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(A-na_n^{p+1})=\lim_{n\to\infty} na_n^{p+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{A\cdot S_n^{p+1}-n}{\ln n}$$

又有 O.Stolz 定理

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{A\cdot S_n^{p+1}-n}{\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{A(S_{n+1}^{p+1}-S_n^p)-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{p+1}((p+1)-\frac{(p+1)p}{2}S_{n+1}^{p-1}a_n^{2p}+\cdots)}{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{p}{2}S_{n+1}^{p-1}a_{n+1}^{2p}+o(S_{n+1}^{p-1}a_{n+1}^{2p})}{(p+1)a_{n+1}^{p+1}}\\&=-\frac{p}{2(p+1)}\end{aligned}$$

所以

$$B=-\frac{p}{2(p+1)^2}$$

◀

Example 2.67: 设 k 是一个大于 1 的整数，且 $x_0>0$, 满足 $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{\sqrt[k]{x_n}}$, 求: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x_n^{k+1}}{n^k}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n^{k+1}}{n^k}-\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-1}$$

Solution(by 西西) 我们将要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{k+1}}{n^k}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

为此，只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}=\frac{k+1}{k}$$

而归纳得到 $x_{n+1}>x_n,x_n>0$, 因此，x_n 的单调递增序列。设 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$, 则有 $A=+\infty$. 说明 $x_n\to+\infty,n\to+\infty$.

$$\begin{aligned}
(x_{n+1}^{1+\frac{1}{k}}-x_n^{1+\frac{1}{k}})&=x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1+\frac{1}{k}}-1\right)\\
&=x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\exp\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)\right]-1\right)\\
&\sim\frac{k+1}{k}(n\to+\infty)
\end{aligned}$$

所以，由 O.Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}=\frac{k+1}{k}$$

对于加强版本，我们先看一个事实，对任意一个收敛的序列，比如说 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 那么，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n^k-A^k)}{a_n-A}=kA^{k-1}$$

这样，设 $a_n=\frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}}{n}$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{k+1}{k}=A$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(a_n^k-A^k)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(a_n-A)\cdot k\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-1}$$

于是，只要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(a_n-A)=\frac{1}{2k}$, 就是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}}{n}-A\right)=\frac{1}{2k}$$

$$\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}}{n}-A\right)=\frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}-nA}{\ln n}$$

这时，可以用 O.Stolz 定理了。就有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}-nA}{\ln n}\xlongequal{O.Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^{1+\frac{1}{k}}-x_n^{1+\frac{1}{k}}-A}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1+\frac{1}{k}}-1\right)-A\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\exp\left(1+\frac{1}{k}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)-1\right)-A\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\exp\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2\right)\right)-1\right)-A\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2\right)^2\right)-A\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{k+1}{2k^2}\frac{n}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}=\frac{1}{2k}
\end{aligned}$$

因此，命题得证。 ◀

Theorem 2.19 函数极限的 Stolz 定理

设函数 $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, 满足:

(1) $g(x+T)>g(x),\forall x\geqslant a$, 其中 $T>0$ 为常数;

(2) 函数 f,g 在 $[a,+\infty)$ 的任何有限子区间有界;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A$$

那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$

☞ Proof: 由题意, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\Delta>a$, 当 $x\geqslant\Delta$ 时,

$$\left|\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}-A\right|<\varepsilon.$$

对 $\forall x > \Delta + T, \exists k \in \mathbb{N}$, 使 $x = \Delta + kT + r, 0 \leqslant r < T$, 显然, $x \to +\infty \Leftrightarrow k \to +\infty$. 排出一系列不等式:

$$A - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x-T)}{g(x) - g(x-T)} < A + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$A - \varepsilon < \frac{f(x-(k-1)T) - f(x-kT)}{g(x-(k-1)T) - g(x-kT)} < A + \varepsilon$$

应用合分比公式

$$\begin{aligned} A - \varepsilon &= \frac{f(x) - f(x-T) + f(x-T) - f(x-2T) + \cdots + f(x-(k-1)T) - f(x-kT)}{g(x) - g(x-T) + g(x-T) - g(x-2T) + \cdots + g(x-(k-1)T) - g(x-kT)} \\ &= \frac{f(x) - f(x-kT)}{g(x) - g(x-kT)} = \frac{f(x) - f(\Delta+r)}{g(x) - g(\Delta+r)} < A + \varepsilon \end{aligned}$$

由 f, g 在 $[\Delta, \Delta+T]$ 中有界及 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ 有

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x) - f(\Delta+r)}{g(x) - g(\Delta+r)} \leqslant A + \varepsilon\,, \quad \underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x) - f(\Delta+r)}{g(x) - g(\Delta+r)} \geqslant A - \varepsilon$$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x) - f(\Delta+r)}{g(x) - g(\Delta+r)} \leqslant A + \varepsilon$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x) - f(\Delta+r)}{g(x) - g(\Delta+r)} \geqslant A - \varepsilon$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任取的, 故有

$$A \leqslant \underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant A$$

即

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

□

Example 2.68:

Proof:

□

2.5 无穷小的比较

Properties: 有限个无穷小的和仍是无穷小.

Properties: 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

Properties: 有界函数和无穷小的乘积是无穷小.

Proof: 设函数 $u(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 内是有界的,
即 $\exists M > 0$ 使得 $|u(x)| \leqslant M$ 对一切 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 成立. 又设 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小,
即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 有

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,

$$|u|\leqslant M \quad 和 \quad |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$$

同时成立. 从而

$$|u\alpha|=|u||\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

即

$$\lim_{x\to x_0}u\alpha=0.$$

□

Theorem 2.20

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

Proof: 先证必要性. 设 $\alpha\sim\beta$, 则

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=1-1=0,$$

因此

$$\beta-\alpha=o(\alpha),$$

即

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

再证充分性. 设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$, 则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1,$$

因此

$$\alpha\sim\beta,$$

证毕. □

Example 2.69: 证明：当$x\to 0$ 时, 有$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sim x$

Proof:

$$\begin{aligned}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)&=\ln\left(1+(x+\sqrt{1+x^2}-1)\right)\\&\sim(x+\sqrt{1+x^2}-1)=x\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)\sim x\end{aligned}$$

□

Example 2.70: (2017/10/20) 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$$

☞ Proof:

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式}&\xlongequal{\text{和差化积}}-2\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\\
&\xlongequal{\text{有理化}}-2\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\\
&\xlongequal{\sin x\sim x}-2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\\
&\xlongequal{\text{有界乘无穷小量}}0
\end{aligned}$$

□

Example 2.71: 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$

✎ Solution:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}&=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}\\
&=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}\\
&=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

□

Example 2.72: 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}$$

✎ Solution:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin 3x}{3x}+\ln 3+\ln x}{\ln\frac{\sin 2x}{2x}+\ln 2+\ln x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\frac{\sin 3x}{3x}}{\ln x}+\frac{\ln 3}{\ln x}+1}{\frac{\ln\frac{\sin 2x}{2x}}{\ln x}+\frac{\ln 2}{\ln x}+1}=1
\end{aligned}$$

□

Note: (抓大头) $x\to+\infty$, $\ln^\alpha x<x^\beta<a^x<x^x$, 其中 $\alpha,\beta>0$, $a>1$

Example 2.73: 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{x}$$

–傲娇小魔王

✎ Solution

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\left(\sqrt{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+2x}}\right)^{\frac{1}{x}}-1}{x}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+x}{\sqrt{1+2x}}}{x^2}\\
&=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\sqrt{1+2x}}{x^2}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x+\sqrt{1+2x}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{e}{2}$$

◀

Example 2.74: 求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{1-\cos^{\alpha} x}\sqrt{1-\cos^{\alpha} x}}$$

Solution 注意到

$$1-\cos^{\alpha} x = 1-\big(1+(\cos x-1)\big)^{\alpha} \sim -\alpha(\cos x-1) \sim \frac{\alpha}{2}x^2$$

于是

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{1-\cos^{\alpha} x}\sqrt{1-\cos^{\alpha} x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\alpha+\beta}{2}x^2}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}x^2}\sqrt{\frac{\beta}{2}x^2}} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

◀

Example 2.75: 求极限

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Solution

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} &\xlongequal[f^g=e^{g\ln f}]{\text{取对数}} \exp \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right) \\
&= \exp \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1+\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{e}\right) \\
&\xlongequal{\ln(1+x)\sim x} \exp \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{ex} = \exp \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x} \\
&\xlongequal{e^x-1\sim x} \exp \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} = \exp \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \\
&\xlongequal{x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

◀

Example 2.76: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \left(\tan \int_0^{\pi} \sqrt[n]{\sin x}\, \mathrm{d}x + \sin \int_0^{\pi} \sqrt[n]{\sin x}\, \mathrm{d}x\right)$$

–傲娇小魔王 ✓

Solution 当 $x \to 0$ 时, $\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^3 \left(\tan \int_0^{\pi} \sqrt[n]{\sin x}\, \mathrm{d}x + \sin \int_0^{\pi} \sqrt[n]{\sin x}\, \mathrm{d}x\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} n^3 \left(\tan \int_0^{\pi} \left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right) \mathrm{d}x - \sin \int_0^{\pi} \left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right) \mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n\int_0^\pi \left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x\right)^3}{2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\int_0^\pi \ln\sin x\,\mathrm{d}x\right)^3}{2} = -\frac{(\pi\ln 2)^3}{2}$$

◀

Example 2.77: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdots\frac{n^3+1}{n^3-1}$$

Solution

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1\times 2}{(n-1)n}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)k+1}{k(k-1)+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)n}\frac{(n+1)n+1}{2(2-1)+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n+2}{2(n-1)n} = \frac{2}{3}$$

◀

Example 2.78: 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

Solution 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

1° $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=1$

2° $x\neq 0$ 时，原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2^n}$ ◀

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$

Exercise 2.15: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\tan\left(\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}\right)+4\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+\left[\frac{8n}{11}\right]}\right)\right\}$$

Solution:

$$\tan\pi\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}\right) = \tan\left(\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}-n\pi\right)$$

$$\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}-n\pi = \frac{\left[\frac{6}{11}n\right]}{\sqrt{n^2+\left[\frac{6}{11}n\right]}+\sqrt{n^2}}\pi$$

考虑下列不等式

$$\frac{\frac{6}{11}n-1}{\sqrt{n^2+\frac{6}{11}n}+\sqrt{n^2}} \le \frac{\left[\frac{6}{11}n\right]}{\sqrt{n^2+\left[\frac{6}{11}n\right]}+\sqrt{n^2}} \le \frac{\left[\frac{6}{11}n\right]}{2n} \le \frac{3}{11}$$

当 $n\to\infty$, 左边等于 $\dfrac{3}{11}$ 故

$$\lim_{n\to\infty}\tan\left(\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}\right)=\tan\frac{3}{11}\pi$$

同样的方法，可以计算出

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+\left[\frac{8n}{11}\right]}\right)=\sin\frac{2}{11}\pi$$

对于 $\tan\dfrac{3}{11}\pi+4\sin\dfrac{2}{11}\pi=\sqrt{11}$ 的计算，这里不再给出。 □

Example 2.79: 求 $x\to 1^-$ 时，与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

Solution 注意到当 $x\to1^-$ 时，$f(n)=x^{n^2}$ 在 $n\in[0,+\infty)$ 内单调递减，因此一方面

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}&=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{n^2}\,\mathrm{d}t\\&<1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{n^2}\,\mathrm{d}x=1+\int_0^{\infty}x^{n^2}\,\mathrm{d}x\,,\quad x\to1^-\end{aligned}$$

另一方面

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}x^{n^2}\,\mathrm{d}t>\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}x^{n^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x^{n^2}\,\mathrm{d}x\,,\quad x\to1^-$$

故

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\leqslant\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t+1\,,\quad x\to1^-$$

易得

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}t$$

因此

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

其中

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,\xlongequal[\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u]{t^2=u}\,\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

◀

Example 2.80: 记 $\lfloor x\rfloor$ 为不超过 x 的最大整数, 记 $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$.
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$

☞ Proof: 利用二项式定理

$$(2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sqrt{3})^k 2^{n-k}$$

分成 k 为偶数项的和 A_n 及 k 为奇数项的和 B_n 两部分, 即

$$(2+\sqrt{3})^n = A_n + B_n$$

显而易见 $(2-\sqrt{3})^n = A_n - B_n$, 由于 $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, 则 $A_n > B_n$

$$0 < 2-\sqrt{3} < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{3})^n = 0 \Longrightarrow A_n - B_n \to 0$$

注意到 C_n^k 为整数, 故 $A_n > 1$ 且为整数,

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{\frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right)}{\frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right)} \to 1\,, \quad n \to \infty$$

因为 A_n 为整数, 所以 B_n 随着 n 的增大也与整数相差很小, 即 $\{B_n\} = B_n - \lfloor B_n \rfloor \to 1$. 由此得

$$\{A_n + B_n\} = (A_n + B_n) - \lfloor A_n + B_n \rfloor = B_n - \lfloor B_n \rfloor \to 1$$

□

Exercise 2.16:

☞ Proof:

□

2.6 函数的连续性与间断点

Definition 2.4

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0, \tag{1-6}$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

Definition 2.5

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1-5}$$

则称**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续**.
上述定义用“ε-δ”语言表述如下:
$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Example 2.81: 证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的.

Proof: 设 x 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 内任意一点，当 x 取得改变量 Δx 时，对应函数的改变量是 $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. 因为

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

同时

$$\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

于是得到

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| \leqslant 2\left|\sin \frac{\Delta x}{2}\right|.$$

因为对任意的角度 α，当 $\alpha \neq 0$ 时有 $|\sin \alpha| < |\alpha|$，所以

$$0 \leqslant |\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| < 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|.$$

故当 $\Delta x \to 0$ 时，由夹逼定理知 $|\Delta y| \to 0$，从而 $\Delta y \to 0$，即函数在 x 处连续.
由 x 的任意性得到 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.
同理可证函数 $y = \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的. □

Example 2.82: 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 点连续，证明函数

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}\ ,\ \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

在点 x_0 点连续

Proof:[8]

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right]$$

$$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\right]$$

又，若 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则 $|f(x)|$ 在 x_0 点也连续；由连续函数的和、差仍连续，
故 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 在点 x_0 点连续 □

Example 2.83: 设 f 与 g 为两个周期函数，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - g(x)\right] = 0$. 证明: $f = g$

☞ Proof:[1] 设 f 和 g 的周期分别为 T_f 和 T_g, 则对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= \lim_{n\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\big[(f(x+nT_f)-g(x+nT_f)+ \\ &\qquad (g(x+nT_f+nT_g)-f(x+nT_f+nT_g))+(f(x+nT_g)+g(x+nT_g))\big] \\ &= 0+0+0=0 \end{aligned}$$

故 $f(x)=g(x)$, 所以 $f=g$ □

Example 2.84: (华东师大; 南航) 设 $f(x)$ 对 $(-\infty,+\infty)$ 内一切 x 有 $f(x^2)=f(x)$, 且 $f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 连续. 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为常数

Solution 当 $x>0$ 时, 由已知条件, 有

$$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{2^2}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=\cdots$$

于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f\left(\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}\right)=f(1)$$

当 $x<0$ 时, $f(x)=f(x^2)=f(1)$

$$f(x)=f(x^2)=f(|x|^{\frac{1}{2^2}})=\cdots=f(|x|^{\frac{1}{2^n}})=\cdots$$

于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(|x|^{\frac{1}{2^n}})=f\left(\lim_{n\to\infty}|x|^{\frac{1}{2^n}}\right)=f(1)$$

当 $x=0$ 时, $f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(1)=f(1)$.

综上知, $f(x)\equiv f(1)$(常数) ◀

Example 2.85: 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数, 求 a,b 的值

Solution $x=1,x=-1$ 处可能是间断点, 在 $x=1,x=-1$ 分别求左右极限

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{x^{2n-1}}^{+\infty}+ax^2+bx}{\underbrace{x^{2n}}_{+\infty}+1}=\lim_{x\to1^+}\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}}=1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{x^{2n-1}}^{0}+ax^2+bx}{\underbrace{x^{2n}}_{0}+1}=\lim_{x\to1^-}\lim_{n\to\infty}\frac{ax^2+bx}{1}=a+b$$

$$f(x)\text{ 连续}\Longrightarrow\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)\Longrightarrow a+b=1$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{x^{2n-1}}^{0}+ax^2+bx}{\underbrace{x^{2n}}_{0}+1}=\lim_{x\to-1^+}\lim_{n\to\infty}\frac{ax^2+bx}{1}=a-b$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{x^{2n-1}}^{\infty} + ax^2 + bx}{\underbrace{x^{2n}}_{\infty} + 1} = \lim_{x\to -1^-}\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1}}{x^{2n}} = -1$$

$f(x)$ 连续 $\Longrightarrow \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) \Longrightarrow a - b = -1$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-1 \end{cases} \Longrightarrow a=0, b=1$$

◀

Example 2.86: 设 $f(a) = \int_{-1}^{1} |x-a|e^x \,\mathrm{d}x$, 求 $f(a)$ 并判断连续性.

Proof: 首先去绝对值则有

1: $a \leqslant 1$ 时 $f(a) = \int_{-1}^{1} (a-x)e^x \,\mathrm{d}x = ae - \frac{a+2}{e}$

2: $a \geqslant 1$ 时 $f(a) = \int_{-1}^{1} (x-a)e^x \,\mathrm{d}x = \frac{a+2}{e} - ae$

3: $-1 < a < 1$ 时 $f(a) = \int_{-1}^{a} (a-x)e^x \,\mathrm{d}x + \int_{a}^{1} (x-a)e^x \,\mathrm{d}x = 2e^a - ae - \frac{a+2}{e}$

所以

$$f(a) = \begin{cases} ae - \frac{a+2}{e} & a \leqslant 1 \\ \frac{a+2}{e} - ae & a \geqslant 1 \\ 2e^a - ae - \frac{a+2}{e} & -1 < a < 1 \end{cases}$$

因为

$$\lim_{a\to 1^+} f(a) = \lim_{a\to 1^-} f(a) = e - \frac{3}{e} = f(1)$$

故 $f(a)$ 在 $x=1$ 处连续因为

$$\lim_{a\to -1^+} f(a) = \lim_{a\to -1^-} f(a) = \frac{1}{e} + e = f(-1)$$

故 $f(a)$ 在 $x=-1$ 处连续 □

Example 2.87:

Proof:

□

Definition 2.6 函数的间断点

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义. ... 同 7p58

2.7 闭区间上连续函数的性质

Theorem 2.21 介值定理

设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a) = A$ 及 $f(b) = B$，那么对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi) = C$.

Proof: 构造辅助函数，设 $\varphi(x) = f(x) - C$，
则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $\varphi(a) = A - C$ 与 $\varphi(b) = B - C$ 异号 (C 在 A 与 B 之间)，所以由零点定理知，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\varphi(\xi) = 0$. 而 $\varphi(\xi) = f(\xi) - C$，于是得到

$$f(\xi) = C \quad (a < \xi < b).$$

该定理的几何意义是：连续曲线 $y = f(x)$ 与数 A 和数 B 之间的任一条水平直线 $y = C$ 至少有一个交点 $\square$

Exercise 2.17: 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界，证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内一致连续.

Solution: 对任意 $0 < x_1 < x_2 < +\infty$，根据 Cauchy 中值定理，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$，使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}} = 2\sqrt{\xi}f'(\xi).$$

设 $M = \sup\{2|f'(x)|\sqrt{x} : x \in (0,+\infty)\} < +\infty$，则

$$|f(x_2) - f(x_1)| = 2|f'(\xi)|\sqrt{\xi}(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \leqslant M\sqrt{x_2 - x_1}.$$

故 f 在 $(0,+\infty)$ 内一致连续. $\square$

Exercise 2.18: 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对任意 >0，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n\alpha) = 0$. 求证：$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution: 由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知：$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$，当 $|x - y| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, y \in [0,+\infty).$$

对上述 ε，由 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n\delta) = 0$ 知：$\exists N \in \mathbb{N}_+$，当 $n > N$ 时，有 $|f(n\delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
取 $A = N\delta, \forall x > A, \exists n \geqslant N$，使得

$$n\delta \leqslant x < (n+1)\delta \Leftrightarrow 0 < x - n\delta < \delta.$$

于是

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(n\delta)| + |f(n\delta)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\square$

Exercise 2.19: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明:$m(x)=\min_{t\in[a,x]} f(t), M(x)=\max_{t\in[a,x]} f(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续。

Solution: 只证 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，事实上，对 $\forall\ a\le x_1<x_2\le b$

$$0\le m(x_1)-m(x_2)\le \max_{t\in[x_1,x_2]} f(t)-\min_{t\in[x_1,x_2]} f(t)=\omega(f,[x_1,x_2])$$

根据 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可知它在 $[a,b]$ 上一致连续，从而

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0, st\ \ \forall\ a\le x_1<x_2\le b$$

只要 $x_2-x_1<\delta$，就有 $\omega(f,[x_1,x_2])<\varepsilon$ 从而对这样的 δ,x_1,x_2, 必有

$$0\le m(x_1)-m(x_2)<\varepsilon$$

从而 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，即连续。[1] □

Exercise 2.20: 设 $[0,1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足 $g(1)=1,g(0)=0$, 单调递增函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\ge 0, f(x)\le 1$. 证明: $f(x)=g(x)$ 在 $[0,1]$ 上一定有解.

Solution: 只需考察 $f(0)\ne g(0)$, 则 $f(0)>g(0)=0$. 由 $g\in C[0,1]$ 可知 $\exists\varepsilon_0>0$, 使得当 $0\le x\le\varepsilon_0$ 时, 有

$$g(x)<f(0)\le f(x).$$

令 $A=\{t: x\in[0,t], g(x)<f(x)\}$, 则 $\varepsilon_0\in A$, 记 $S=\sup A$. 若 $S=1$, 则对 $\forall x\in[0,1)$, 有 $g(x)<f(x)\le f(1)$, 则

$$1\ge f(1)\ge\lim_{x\to1^-} g(x)=g(1)=1,$$

因此 $f(1)=g(1)=1$. 若 $S<1$, 则对 $\forall x\in[0,S)$, 有 $g(x)<f(x)\le f(S)$, 则

$$f(S)\ge\lim_{x\to S^-} g(x)=g(S),$$

则 $f(S)>g(S)$. 于是 $\exists\varepsilon_1>0$, 使得 $S\le x\le S+\varepsilon_1$ 时, 有 $g(x)<f(S)\le f(x)$, 则 $S+\varepsilon_1\in A$, 与 $S=\sup A$ 矛盾. □

2.7.1 一致连续性

Example 2.88: 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续

Proof: 因为对任意的 $x_1,\ x_2\in[1,+\infty)$, 有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\leqslant|x_2-x_1|$$

所以对任意的正数 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leqslant|x_2-x_1|\leqslant\varepsilon$$

所以 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续 □

[1] 类似地，当 $M(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 的最大值时，$M(x)$ 亦连续

Example 2.89: 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 不上一致连续

Proof: 取原点附近的两点

$$x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{1}{n+1},$$

其中 n 为正整数, 这样的 x_1, x_2 显然在 $(0, 1]$ 上. 因

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$$

故只要 n 取得足够大, 总能使 $|x_1 - x_2| < \delta$. 但这时有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right| = |n - (n+1)| = 1 > \varepsilon$$

不符合一致连续的定义, 所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 不上一致连续 □

Example 2.90:

Proof:

□

第 3 章 导数与微分

Example 3.1: 设 $f(x)$ 可导, 在 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件

Proof:(1) $f(x)$ 可导知 $f(x)$ 连续, 又 $f(0)=0$, 于是可知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}\\&=f'(0)+0=f'(0)\end{aligned}$$

(2) $f(x)$ 可导知 $f(x)$ 连续, 于是可知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\begin{aligned}F'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}\\&=f'(0)+f(0)\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=f'(0)-f(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}\\&=f'(0)+f(0)\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=f'(0)+f(0)\end{aligned}$$

$F(x)$ 可导 $\Longrightarrow F'(0)=F'_-(0)=F'_+(0)\Longrightarrow f(0)=0$ □

Example 3.2: 设函数 $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 求 $f(0)$

Solution $f(x)$ 可导知 $f(x)$ 连续, 于是可知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\begin{aligned}F'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}\\&=f'(0)+f(0)\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=f'(0)-f(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}\end{aligned}$$

$$= f'(0) + f(0)\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = f'(0) + f(0)$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Longrightarrow F'(0)=F'_-(0)=F'_+(0)\Longrightarrow f(0)=0$ ◀

Theorem 3.1

在 $(-a,a)$ 内可导的奇函数的导数是偶函数;
在 $(-a,a)$ 内可导的偶函数的导数是奇函数。

Example 3.3: 设函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在 $x=1$ 处可导, 且对任意的 $x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$, 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}+f'(1)$.

Proof: 在关系式 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$ 中令 $x=y=1$, 则得到 $f(1)=0$

$$f(xy)=yf(x)+xf(y)\Longleftrightarrow f(xy)-f(x)=yf(x)-f(x)+xf(y)$$

上式两边同除以 $x(y-1)$ 可得

$$\frac{f(xy)-f(x)}{xy-x}=\frac{yf(x)-f(x)+xf(y)}{x(y-1)}=\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)-f(1)}{y-1}$$

令 $y\to 1$ 得

$$\lim_{y\to 1}\frac{f(xy)-f(x)}{xy-x}=\frac{f(x)}{x}+\lim_{y\to 1}\frac{f(y)-f(1)}{y-1}$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导

$$\lim_{y\to 1}\frac{f(xy)-f(x)}{xy-x}=\frac{f(x)}{x}+f'(1)$$

因此, 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}+f'(1)$. □

Exercise 3.1: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ 存在. 求证 $f'(0)$ 存在.

Solution: 令 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$, 下证 $f'(0)=A$.
事实上, 对任意 $\varepsilon>0$, 根据所给条件, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}-A\right|<\varepsilon, \forall 0<|x|<\delta,$$

即

$$Ax-\varepsilon|x|<f(2x)-f(x)<Ax+\varepsilon|x|, \forall 0<|x|<\delta.$$

从而

$$\frac{Ax}{2^i}-\frac{\varepsilon|x|}{2^i}<f\left(\frac{x}{2^{i-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^i}\right)<\frac{Ax}{2^i}+\frac{\varepsilon|x|}{2^i}, \forall 0<|x|<\delta, i\in\mathbb{N}.$$

因此对任意 $0<|x|<\delta$ 和 $n\in\mathbb{N}$,

$$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(Ax-\varepsilon|x|)<f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)<\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(Ax+\varepsilon|x|).$$

令 $n\to\infty$, 利用 f 在 $x=0$ 处的连续性, 得到

$$Ax-\varepsilon|x|\leqslant f(x)-f(0)\leqslant Ax+\varepsilon|x|,\forall 0<|x|<\delta.$$

即

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-A\right|\leqslant\varepsilon,\forall 0<|x|<\delta,$$

这就证明了 $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)=A$. □

Example 3.4: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(\sin x)}{x^3}$ 存在. 问 $f(x)$ 在 0 点是否可导

Solution 回答是肯定的. 不妨设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(\sin x)}{x^3}=0$ 以及 $f(0)=0$. 我们有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

因此, 存在 $\eta\in(0,1)$ 使得当 $0<|x|<\eta$ 时,

$$\frac{\sin(2x)-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{x^3}<0$$

特别, 当 $\frac{1}{\sqrt{n}}<\eta$ 时, 成立

$$\sin\frac{2}{\sqrt{n}}<\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}}.\tag{3.1}$$

另一方面, $\forall\varepsilon>0$, 由假设, 存在 $\varepsilon\in(0,\frac{\eta}{2})$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(\sin x)|\leqslant\varepsilon|x^3|$$

记 $a_0(x)=x,a_{n+1}(x)=\sin(a_n(x))$ 并取整数 k 满足 $\frac{1}{x^2}+1\leqslant k\leqslant\frac{4}{x^2}$. 则利用 (3.1) 归纳可证

$$|a_n(x)|=a_n(|x|)\leqslant\frac{2}{\sqrt{k+n}},\quad\forall n\geqslant0.$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|f(a_n(x))-f(a_{n+1}(x))|\leqslant\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x)|^3\\&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(k+n)^{\frac{3}{2}}}\leqslant\varepsilon\int_{k-1}^{+\infty}\frac{8}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t=\frac{16\varepsilon}{\sqrt{k-1}}\leqslant16\varepsilon|x|,\quad\forall\,0<|x|<\delta\end{aligned}$$

因此,

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\leqslant16\varepsilon,\quad\forall\,0<|x|<\delta$$

从而得到 $f'(0)=0$. ◀

Theorem 3.2 有限增量公式

设 $f(x)$ 在 x_0 可导

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

Theorem 3.3 常用导数公式

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$
$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$
$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$
$$(a^x) = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$(\sinh x)' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (\cosh x)' = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$(\tanh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad (\coth x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$
$$(\operatorname{arsinh} x)' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (\operatorname{arcosh} x)' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2-1})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Theorem 3.4 反函数的求导法则

如果函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{x | x = f(y), y \in I_y\}$ 内也可导, 且

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}. \tag{2-6}$$

☞ Proof: 由于 $x = f(y)$ 在 I_y 内单调、可导 (从而连续), 由定理 1.1.1 知, $x = f(y)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 存在, 且 $f^{-1}(x)$ 在 I_x 内也单调、连续.
任取 $x \in I_x$, 给 x 以改变量 Δx ($\Delta x \neq 0, x + \Delta x \in I_x$), 由 $y = f^{-1}(x)$ 的单调性可知

$$\Delta y = f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(x) \neq 0,$$

故

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

又由于 $y=f^{-1}(x)$ 连续, 故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

从而

$$[f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}.$$

□

Example 3.5: 若 $y=f(x)$ 存在单值反函数 $x=\varphi(y)$, 且 $y'\neq 0$, $y''\neq 0$, 试求 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2y}$, $\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}^3y}$

Solution 由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1/y'$, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\right]\cdot\frac{1}{y'}\\&=-\frac{1}{y'}\cdot\frac{1}{(y')^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=-\frac{y''}{(y')^3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}^3y}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{y''}{(y')^3}\right]\cdot\frac{1}{y'}\\&=-\frac{y'''(y')^3-3(y')^2y''\cdot y''}{(y')^6}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.\end{aligned}$$

◀

Example 3.6: 设 $y=y(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的二阶可导函数, 且满足方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a^2y=0,$$

作变量代换 $x=\sin t$ 后, 证明: 函数 y 满足方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+a^2y=0$

Proof: 注意到 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\cos t=\sqrt{1-x^2}$, 故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-x^2}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}\\&=\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\sqrt{1-x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-x^2}\\&=(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

再代入到方程即可得证 □

Theorem 3.5 行列式函数的求导法则

设函数 $f_{ij}(x)$, $(i,j=1,2,\ ,n)$ 在区间 I 内可导，则行列式函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

也在 I 内可导，且

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Theorem 3.6 Darboux 中值定理, 导数的介值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 则对于 $f'_{+}(a)$ 与 $f'_{-}(b)$ 之间的一切值 k,
必 $\exists\xi\in[a,b]$, s.t. $f'(\xi)=k$

Exercise 3.2:

Solution:

□

、

Example 3.7: 求与抛物线族 $x=ay^2$ 正交的曲线族

Solution 由题 $x=ay^2\Longrightarrow a=\dfrac{x}{y^2}$, 等式 $x=ay^2$ 对 x 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2ay}=\frac{y}{2x}$$

由已知所求与 $x=ay^2$ 正交 (垂直), 故

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{2ay}=\frac{y}{2x}$$

解此微分方程得

$$\frac{y^2}{2}+x^2=C$$

◀

3.1 高阶导数

Theorem 3.7 常用高阶导数公式

$$(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0) \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$$
$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \qquad \left(\frac{1}{x\pm a}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x\pm a)^{n+1}}$$
$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} \qquad (x^n)^{(n)} = n!$$

Example 3.8: 设 $y(x) = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(x)$

Solution $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)y' = 1$. 利用 Leibniz 公式得

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + n\cdot 2xy^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2y^{(n-1)} = 0$$

令 $x = 0$ 得

$$y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0)\,, n = 1,2,3,\cdots$$

由 $y(0) = 0$, $y'' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=0} = 0$, 得

$$y''(0) = 0\,,\ y''''(0) = 0\,,\ \cdots\,,\ y^{2n} = 0$$

由 $y'(0) = 1$, 得

$$y^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1)y^{(2m-1)}(0) = \cdots = (-1)^m(2m)!y'(0)\,, \quad m \in \mathbb{N}$$

故而 $y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!y'(0)$, $y'(0)$, 综上

$$y^{(n)} = \begin{cases} 0\,, & n\text{ 为偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{ 为奇数} \end{cases}$$

Example 3.9: 设 $y(x) = \arcsin x$, 求 $y^{(n)}(x)$

Solution $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 即 $\sqrt{1-x^2}y' = 1$. 再次求导, 得到

$$y''\sqrt{1-x^2} - y'\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow (1-x^2)'' - xy' = 0$$

利用 Leibniz 公式得

$$y^{(n+2)}(1-x^2) + ny^{(n+1)}(-2x) + \frac{n(n-1)}{2}y^{(n)}(-2) - \left(xy^{(n+1)} + ny^{(n)}\right) = 0$$

整理后得到

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$$

现在用 $x=0$ 代入, 就得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0)-n^2y^{(n)}(0)=0 \Longrightarrow y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$$

由 $y(0)=0$, 得

$$y''(0)=0\,,\ y''''(0)=0\,,\ \cdots\,,\ y^{2n}=0$$

由 $y'(0)=1$, 得

$$y'''(0)=1\,,\ y^{(5)}=3^2\,,\ y^{(7)}=5^2\cdot 3^2,\cdots\,,$$

即可总结为

$$y^{(2m+1)}(0)=[(2m-1)!!]^2\,,\quad m\in\mathbb{N}_+$$

综上

$$y^{(n)}=\begin{cases}0\,, & n=2m\\ [(2m-1)!!]^2\,, & n=2m+1\end{cases}$$

◀

Example 3.10: 求 $y=\dfrac{1}{x^2+a^2}$ 的 n 阶导数

Proof: 利用复数分解公式 $\dfrac{1}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{2ai}\left(\dfrac{1}{x-ai}-\dfrac{1}{x+ai}\right)$, 可知

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{(n)}&=\frac{1}{2ai}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+ai)^{n+1}}\right]\\&=\frac{(-1)^n n!}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right]\end{aligned}$$

现在令 $x=a\cot\theta, 0<\theta<\pi, \theta=\operatorname{arccot}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, 则

$$x\pm ai=a\big(\cot\theta\pm i\big)=\frac{a\big(\cos\theta\pm i\sin\theta\big)}{\sin\theta}$$

由此可知

$$\frac{1}{(x\pm ai)^{n+1}}=\frac{\sin^{n+1}\theta}{a^{n+1}}\big[\cos(n+1)\theta\mp i\sin(n+1)\theta\big]$$

代入前式并注意 $\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{(n)}&=\frac{(-1)^n n!\sin^{n+1}\theta\sin(n+1)\theta}{a^{n+2}}\\&=(-1)^n n!\frac{\sin\big[(n+1)\operatorname{arccot}(x/a)\big]}{a(x^2+a^2)^{\frac{n+1}{2}}}\end{aligned}$$

□

Example 3.11: $y=(x^2+1)\sin x$, 求 $y^{(60)}$.

Proof: 首先

$$(x^2+1)'=2x,\quad (x^2+1)''=2,\quad (x^2+1)'''=0.$$

设 $u=\sin x$, $v=x^2+1$, 而

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

故由莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned}
y^{(60)} &= u^{(60)}v+C_{60}^1u^{(59)}v'+C_{60}^2u^{(58)}v'' \\
&= \sin\left(x+60\cdot\frac{\pi}{2}\right)(x^2+1)+60\sin\left(x+59\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2x+\frac{60\cdot 59}{2!}\sin\left(x+58\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 \\
&= (x^2+1)\sin x+120x(-\cos x)+3540(-\sin x) \\
&= (x^2-3539)\sin x-120x\cos x.
\end{aligned}$$

□

Example 3.12: 设 $f(x)$ 连续且 $f(x)=3x+\int_0^x (t-x)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $f^{(2017)}(0)$ 的值.

Solution

$$f(x)=3x+\int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t-2x\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f'(x)=3-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad f'(0)=3$$

$$f''(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=2f(x),\quad f'''(0)=0$$

$$f^{(4)}(x)=2f'(x),\quad f^{(4)}(0)=2\times 3=6$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}0, & n\neq 3k+1\\ 2^k\cdot 3 & n=3k+1\end{cases}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

由于 $2017=3\times 673+1$ 因此

$$f^{(2017)}(0)=3\cdot 2^{673}$$

◀

Exercise 3.3: $y=\sin^4 x+\cos^4 x$, 求 $y^{(n)}$

Solution

$$\begin{aligned}
y &= \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x \\
&= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x
\end{aligned}$$

◀

Exercise 3.4: $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$

✎ Solution

$$
\begin{aligned}
y' &= 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x \\
&= 6\sin x\cos x(\sin^4 x - \cos^4 x) \\
&= 6\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\
&= -3\sin 2x\cos 2x = -\frac{3}{2}\sin 4x
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 3.5: 已知 $y = x^2e^{2x}$ ，求 $y^{(20)}$

✎ Solution 设 $u = e^{2x}$ ，$v = x^2$ ，则

$$u^{(k)} = 2^k e^{2x}\ (k = 1, 2, \cdots, 20)$$

$$v' = 2x,\ v'' = 2,\ v^{(k)} = 0\ (k = 3, 4, \cdots, 20)$$

代入莱布尼茨公式, 得

$$
\begin{aligned}
y^{(20)} &= (x^2e^{2x})^{(20)} \\
&= 2^{20}e^{2x}\cdot x^2 + 20\cdot 2^{19}e^{2x}\cdot 2x + \frac{20\cdot 19}{2!}2^{18}e^{2x}\cdot 2 \\
&= 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95)
\end{aligned}
$$

莱布尼茨公式

$$(uv)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

◀

Exercise 3.6: 求 $y = x^2e^{3x}$ 的 n 阶导数

✎ Solution 设 $u = e^{3x}$ ，$v = x^2$ ，则

$$u^{(k)} = 2^k e^{2x}\ (k = 1, 2, \cdots, 20)$$

$$v' = 2x,\ v'' = 2,\ v^{(k)} = 0\ (k = 3, 4, \cdots, 20)$$

代入莱布尼茨公式, 得

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= (x^2e^{3x})^{(n)} \\
&= (e^{3x})^{(n)}x^2 + n(e^{3x})^{(n-1)}(x^2)' + \frac{n(n-1)}{2}(e^{3x})^{(n-2)}(x^2)'' \\
&= 3^{n-2}e^{3x}\left[9x^2 + 6nx + n(n-1)\right]
\end{aligned}
$$

莱布尼茨公式

$$(uv)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

◀

Exercise 3.7: 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2+x^4}$ 求 $f^{(100)}(0)$

Solution 因为

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2+x^4}=\frac{1+x^2}{1+x^6}$$

由带皮亚诺余项的麦克劳林公式, 有

$$f(x)=(1+x^2)(1-x^6+\cdots+x^{96}-x^{102}+o(x^{102}))$$

所以 $f(x)$ 展开式的 100 次项为 0

即有 $\dfrac{f^{(100)}(0)}{100!}=0$, 故 $f^{(100)}(0)=0$

◀

Exercise 3.8: 设 $f(x)=e^x\sin 2x$ 求 $f^{(4)}(0)$

Solution 由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

则

$$f(x)=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)\left(2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^4)\right)$$

所以 $f(x)$ 展开式的 4 次项为

$$\frac{2}{3!}x^4-\frac{1}{3!}(2x)^3\cdot x=-x^4$$

即有 $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}=-x^4$, 故 $f^{(4)}(0)=-24$

◀

Exercise 3.9: 设 $f_n(x)=x^n\ln x$, $n\in\mathbb{N}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$

Solution 先求 $f_n(x)$ 的一阶导数, 有

$$f_(' x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=nf_{n-1}(x)=x^{n-1}$$

两边同求 $(n-1)$ 阶导数得

$$f_n^{(n)}(x)=nf_{n-1}^{(n-1)}(x)+(n-1)!$$

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

将前 n 个排列起来相加, 即有

$$f_1'(x)=(x\ln x)'=1+\ln x$$

$$\frac{f_2''(x)}{2!}=\frac{f_1'(x)}{1!}+\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} = \frac{f_{n-2}^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} + \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{1}{n}$$

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!} = \ln x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

令 $x = \frac{1}{n}$, 就是 $\frac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!} = \ln\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$$

其中 γ 为 Euler 常数 ◀

3.2 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率

Example 3.13: 求 $y = x^{x^x}$ 的导数

Solution 等式两边取对数得 $\ln y = x^x \ln x$, 注意到

$$(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = x^x(1+\ln x)$$

$\ln y = x^x \ln x$ 两边对 x 求导, 得

$$\frac{y'}{y} = x^x(1+\ln x)\ln x + \frac{1}{x}x^x$$

整理可得

$$y' = x^{x^x}\left[x^{x-1} + x^x(1+\ln x)\ln x\right]$$

◀

Example 3.14: 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f \neq 0$ ，则 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}^2 x} =$ ________

Solution 方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 的两边同时对 x 求导, 得

$$e^{f(y)} + xy'f'(y)e^{f(y)} = y'e^y\ln 29$$

又因为 $xe^{f(y)} = e^y\ln 29$, 故 $\frac{1}{x} + y'f'(y) = y'$, 即 $y' = \frac{1}{x(1-f'(y))}$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}^2 x} = y'' &= -\frac{1}{x^2(1-f'(y))} + \frac{y'f''(y)}{x[1-f'(y)]^2}\\ &= \frac{f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3} - \frac{1}{x^2(1-f'(y))} = \frac{f''(y) - [1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}\end{aligned}$$

◀

3.3 函数的微分

Definition 3.1

设函数 $f(x)$ 在某区间内有定义, x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内, 如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的, 而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应与自变量增量 Δx 的微分, 记作 $\mathrm{d}y$, 即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x$$

Note: 当 $f(x)$ 在点 x_0 可微时, 其微分一定是 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

Note: 当 $f(x)$ 在任意点 x 的微分, 称为函数的微分, 记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$, 即 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$

Note: 通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分, 记作 $\mathrm{d}x$, 即 $\mathrm{d}x=\Delta x$

Theorem 3.8

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x.$$

Proof: (1) 必要性　设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微, 依定义有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x\to 0$, 由于 $o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小, 所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A,$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $A=f'(x_0)$, 故 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$.

(2) 充分性　设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0),$$

即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right] = 0,$$

故 $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ 是 $\Delta x \to 0$ 的无穷小, 记作 α. 于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

从而

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

因为当 $\Delta x \to 0$ 时, $\alpha \to 0$, 所以 $\alpha \Delta x = o(\Delta x)$, 且 $f'(x_0)$ 不依赖于 Δx, 故由定义知函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微. □

Example 3.15: 设函数 y 在任意点 x 处的增量满足

$$\Delta y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Delta x - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}\Delta y + \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+1}\Delta x \cdot \Delta y$$

且 $y(0) = 0$. 计算极限: $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{\arctan x} y(t)\,\mathrm{d}t}{x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$

Solution 因为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad A = y'(x)$$

故

$$\Delta x \cdot \Delta y = o(\Delta x) = o(\Delta y) \quad (\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$$

故有

$$\Delta y \left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1} \right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$$

由定义可得 $f(x)$ 可微且

$$y' = \frac{x}{1+x^2}$$

解之

$$y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

且 $y(0) = 0$, 因此

$$y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Lemma 3.1

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0} \frac{f}{g} = 1 \\ \lim_{x \to 0} f = \lim_{x \to 0} g = 0 \end{cases} \Longrightarrow x \to 0 \quad \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \sim \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

故

$$\int_0^{\arctan x} \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\arctan x} \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}(\arctan x)^3 \sim \frac{1}{6}x^3$$

而

$$x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x^2(x+\sqrt{1+x^2}-1) = x^3\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right) \sim x^3$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\arctan x} y(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Note:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f}{g} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} f = \lim\limits_{x\to 0} g = 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{当} x\to 0,\quad \text{有} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \sim \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x$$

◀

Example 3.16:

Solution

◀

3.4 反例

Example 3.17: 一个可微函数 $f(x)$, 使得 $f'(x_0)>0$, 但 $f(x)$ 在点 x_0 的任何领域内都不是单调的

Solution

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

◀

第 4 章 微分中值定理与导数的应用

4.1 微分中值定理

Theorem 4.1 费马 (Fermat) 定理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内有定义, 并且在 x_0 处可导, 如果对任意的 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \geqslant f(x_0))$$

那么 $f'(x_0) = 0$

Example 4.1: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$,

求证：存在 $\xi \in (0,+\infty)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

Solution 由题给不等式，令 $x \to 0$ 得 $f(0) = 0$ ，且由 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ 得

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

令

$$F(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}$$

(1) 若对一切 $x \geqslant 0$ 有 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$，则 $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ，所以对任何正数 ξ 有

$$f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2};$$

(2) 若存在 $x_0 > 0$ 使得 $f(x_0) \neq \dfrac{x_0}{1+x_0^2}$，则 $F(x_0) < 0$，由于

$$F(0) = f(0) - 0 = 0\,, \quad F(+\infty) = f(+\infty) = 0,$$

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内取得最小值，设最小值为 $F(\xi)$，由费马定理得 $F'(\xi) = 0$ ，即

$$f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2};$$

◀

Theorem 4.2 罗尔 (Rolle) 定理

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零，即 $f'(\xi)=0$

☞ Proof: 由于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数的最大值和最小值定理, 在 $[a,b]$ 上必定取得它的最大值 M 和最小值 m. 于是

(1) 若 $M=m$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于常数 M. 因此, 对任意 $x\in(a,b)$, 有 $f'(x)=0$. 所以, 任取 $\xi\in(a,b)$, 有 $f'(\xi)=0$.

(2) 若 $M>m$, 因为 $f(a)=f(b)$, 所以 M 与 N 中至少有一个不等于 $f(a)$ 与 $f(b)$, 不妨设 $M\neq f(a)$, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=M$, 即

$$f(x)\leqslant f(\xi)=M,\quad \forall x\in[a,b].$$

因为 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 处可导, 下面证明 $f'(\xi)=0$. 利用导数的定义 (2-5), 有

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

注意到当 $x>\xi$ 时,

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0;$$

当 $x<\xi$ 时,

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0;$$

再结合函数在一点可导的条件及极限的保号性, 得到

$$f'(\xi)=f'_{+}(\xi)=\lim_{x\to\xi^{+}}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0,$$

$$f'(\xi)=f'_{-}(\xi)=\lim_{x\to\xi^{-}}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0,$$

所以, $f'(\xi)=0$. 证毕. □

Exercise 4.1: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)f'(b)>0$, 证明: $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在两个不相等的实根

☞ Proof: 由题意 $f'(a)f'(b)>0$, 故不妨设 $f'(a)>0$, $f'(b)>0$, 由导数定义可得:

$$f'(a)=f'_{+}(a)=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)}{x-a}>0\ ,\quad f'(b)=f'_{-}(b)=\lim_{x\to b^{-}}\frac{f(x)}{x-b}>0$$

由极限的保号性可知 $\exists x_1 \in (a, a+\delta_1)$ 和 $x_2 \in (b-\delta_2, b)$ 使得

$$f(x_1) > 0,\ \ f(x_2) < 0$$

其中 δ_1, δ_2 为充分小的正数，显然 $x_1 < x_2$。在区间 $[x_1, x_2]$ 上应用介值定理得：$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$. 再由 $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$ 及罗尔定理可知：存在 $\eta_1 \in (a, \xi)$ 和 $\eta_2 \in (\xi, b)$ 使得

$$f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$$

□

Theorem 4.3 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi(a < \xi < b)$，使等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ 成立

☞ Proof: 结论变形为

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

即

$$\left[f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'\Big|_{x=\xi} = 0.$$

于是构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$$

则 $F(x)$ 满足

$$F(a) = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} = F(b),$$

且 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 从而由罗尔定理得到在 (a, b) 内至少存在一点 ξ $(a < \xi < b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 于是有

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

即

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

□

Example 4.2: 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导，$|f''(x)| \leqslant M$，且 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内取得最大值，试证

$$|f'(0)| + |f'(1)| \leqslant M$$

✎ Solution 设 $f(x)$ 在 $x=c\in(0,1)$ 取得最大值，因 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导，故 $f'(c)=0$ 对于函数 $y=f'(x)$，因 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导，在区间 $[0,c]$ 与 $[c,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理得：存在 $\xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,1)$，使得

$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c\,,$$

$$f'(1)-f'(c)=f''(\xi_2)(1-c)\,,$$

即

$$f'(0)=-f''(\xi_1)c\;,\quad f'(1)=f''(\xi_2)(1-c)$$

于是

$$\begin{aligned}|f'(0)|+|f'(1)|&=|f''(x_1)|c+|f''(x_2)|(1-c)\\&\leqslant Mc+M(1-c)=M\end{aligned}$$

◀

Example 4.3: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $|f'(x)|<1$, $f(0)=f(1)$

证明: 对于 $[0,1]$ 上的任意两点 x_1,x_2, 恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$

☞ Proof: 不妨设 $x_1<x_2$, 由题意对 $[0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,1]$ 分别使用拉格朗日中值定理得

$$f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)x_1\quad \xi_1\in(0,x_1)$$

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi_2)(x_1-x_2)\quad \xi_2\in(x_1,x_2)$$

$$f(1)-f(x_2)=f'(\xi_3)(1-x_2)\quad \xi_3\in(x_2,1)$$

以上式子相加, 并注意到 $f(0)=f(1)$, 得

$$2\big(f(x_1)-f(x_2)\big)=f'(\xi_1)x_1+f'(\xi_2)(x_1-x_2)+f'(\xi_3)(1-x_2)$$

因为 $|f'(x)|<1$, 于是

$$\begin{aligned}2\big|f(x_1)-f(x_2)\big|&=\big|f'(\xi_1)x_1+f'(\xi_2)(x_1-x_2)+f'(\xi_3)(1-x_2)\big|\\&<\big|f'(\xi_1)x_1\big|+\big|f'(\xi_2)(x_1-x_2)\big|+\big|f'(\xi_3)(1-x_2)\big|\\&<x_1+(x_2-x_1)+(1-x_2)=1\end{aligned}$$

□

Example 4.4: 写出下列命题中真命题的序号:_______

1. $\ln 3<\sqrt{3}\ln 2$
2. $\ln\pi<\sqrt{\dfrac{\pi}{e}}$
3. $2^{\sqrt{15}}<15$

4. $3e\ln 2<4\sqrt{2}$

✎ Solution 命题 1:

$$\ln 3<\sqrt{3}\ln 2\Leftrightarrow\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\ln 2\Leftrightarrow\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\frac{2\ln 2}{2}\Leftrightarrow\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\frac{\ln 4}{\sqrt{4}}$$

命题 2:

$$\ln\pi<\sqrt{\frac{\pi}{e}}\Leftrightarrow\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}<\sqrt{\frac{1}{e}}\Leftrightarrow\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}<\frac{1}{\sqrt{e}}\Leftrightarrow\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}<\frac{\ln e}{\sqrt{e}}$$

命题 3:

$$2^{\sqrt{15}}<15\Leftrightarrow\ln 2^{\sqrt{15}}<\ln 15\Leftrightarrow\ln 2<\frac{\ln 15}{\sqrt{15}}\Leftrightarrow\frac{4\ln 2}{4}<\frac{\ln 15}{\sqrt{15}}\Leftrightarrow\frac{\ln 16}{\sqrt{16}}<\frac{\ln 15}{\sqrt{15}}$$

命题 4:

$$3e\ln 2<4\sqrt{2}\Leftrightarrow e\ln 8<4\sqrt{2}\Leftrightarrow\ln 8<\frac{4\sqrt{2}}{e}\Leftrightarrow\frac{\ln 8}{2\sqrt{2}}<\frac{2}{e}\Leftrightarrow\frac{\ln 8}{\sqrt{8}}<\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}$$

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 则 $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}\Longrightarrow x>e^2, f'(x)<0; 0<x<e^2, f'(x)>0$

命题 1,

$$\frac{\ln 4}{\sqrt{4}}-\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}=(4-3)f'(\xi)>0,\quad \xi\in(3,4)$$

命题 2,

$$\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}-\frac{\ln e}{\sqrt{e}}=(\pi-e)f'(\xi)>0,\quad \xi\in(e,\pi)$$

命题 3,

$$\frac{\ln 16}{\sqrt{16}}-\frac{\ln 15}{\sqrt{15}}=(16-15)f'(\xi)<0,\quad \xi\in(15,16)$$

命题 4,

$$\frac{\ln 8}{\sqrt{8}}-\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=(8-e^2)f'(\xi)<0,\quad \xi\in(e^2,8)$$

综上答案为 1，3，4 ◀

Corollary 4.1

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数 ♣

☞ Proof: 充分性显然, 下面证明必要性.

在区间 I 上任取两点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$, 在 $[x_1,x_2]$ 上应用 (3-1) 有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\qquad(x_1<\xi<x_2).$$

由条件知 $f'(\xi)=0$, 从而 $f(x_1)-f(x_2)=0$, 即

$$f(x_1)=f(x_2).$$

因为 $x_1, x_2(x_1 < x_2)$ 是区间上的任意两点, 所以 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数. □

Example 4.5: 证明：$t \in [0,1]$, 恒有 $2\arcsin t + \arcsin(1-2t^2) = \frac{\pi}{2}$

Proof: 令 $f(t) = 2\arcsin t + \arcsin(1-2t^2)$ 则

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{-4t}{\sqrt{1-(1-2t^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{-4t}{\sqrt{4t^2-4t^4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{-2}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \end{aligned}$$

由拉格朗日中值定理知 $f(x) \equiv C$, 令 $x = 0$ 得 $f(0) = \frac{\pi}{2}$

故 $\forall t \in [0,1]$, 恒有 $2\arcsin t + \arcsin(1-2t^2) = \frac{\pi}{2}$ □

Corollary 4.2

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上 $f(x) = g(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 在区间 I 上有 $f(x) = g(x) + C$

Theorem 4.4 柯西中值定理

如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 对任一 $x \in (a,b)$, $F'(x) \neq 0$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a < \xi < b)$，使等式 $\frac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 成立

Proof: 首先 $g(b) - g(a) = g'(\eta)(b-a)$ $(a < \eta < b)$, 由条件 (3) 知 $g'(\eta) \neq 0$, 所以有 $g(b) - g(a) \neq 0$. 其次将结论变形为

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0,$$

构造辅助函数 $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$, 则 $F(x)$ 满足

$$F(a) = \frac{g(b)f(a) - g(a)f(b)}{g(b)-g(a)} = F(b),$$

且 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 从而由罗尔定理得到在 (a,b) 内至少存在一点 ξ $(a < \xi < b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 于是有

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi),$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Example 4.6: 设 x 与 y 均大于 0, 且 $x\neq y$. 证明: $\frac{1}{x-y}\begin{vmatrix} x & y \\ e^x & e^y \end{vmatrix}<1$

Proof:注意到

$$\frac{1}{x-y}\begin{vmatrix} x & y \\ e^x & e^y \end{vmatrix}=\frac{xe^y-ye^x}{x-y}\xlongequal{\text{分子分母同除以}xy}\frac{\frac{e^y}{y}-\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}<1$$

令 $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$, 则 $f(x),g(x)$ 在 $[x,y]$ 连续, 又 $x\neq y$, 故 $f(x),g(x)$ 在 (x,y) 可导,

不妨设 $y>x$, $f(x),g(x)$ 在 $[x,y]$ 应用柯西中值定理,

$$\frac{\frac{e^y}{y}-\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=\frac{(y-x)\frac{e^\xi(\xi-1)}{\xi^2}}{(y-x)\frac{-1}{\xi^2}}=e^\xi(1-\xi),\quad \xi\in(0<x<\xi<y)$$

又令 $h(x)=e^x(1-x)$, 则 $h'(x)=-xe^x<0$, $x\in(0,+\infty)$, 故 $\max\limits_{x\in(0,+\infty)}h(x)=h(0)=1$

因此不等式成立 □

Exercise 4.2: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明: 对任意的正数 a 和 b, 总存在 $\xi,\eta\in(0,1)$ $(\xi\neq\eta)$, 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$$

Proof: 设 $0<c<1$, 对 $f(x)$ 在区间 $[0,c],[c,1]$ 上分别使用拉格朗日中值定理可得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c},\ \xi_1\in(0,c)\Longrightarrow\frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}=\frac{\frac{a}{a+b}c}{f(c)}$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{f(1)-f(c)}{1-c},\ \xi_1\in(c,1)\Longrightarrow\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}=\frac{\frac{b}{a+b}(1-c)}{1-f(c)}$$

欲使

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b\Longleftrightarrow\frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}+\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}=1$$

只需

$$f(c)=\frac{a}{a+b}\Longrightarrow 1-f(c)=\frac{b}{a+b}$$

又 $f(0)=0, f(1)=1$, 由连续函数的介值定理知, 存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)=\frac{a}{a+b}$ □

Exercise 4.3: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, $f(0)=0, f(1)=1$. 三个正数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的和为 1, 证明: $(0,1)$ 内存在三个不同数 ξ_1,ξ_2,ξ_3, 使得

$$\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=1$$

Proof: 设 $0<x_1<x_2<1$, 对 $f(x)$ 在区间 $[0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,1]$ 上分别使用拉格朗日中值定理可得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}=\frac{f(x_1)}{x_1},\quad \xi_1\in(0,x_1)\Longrightarrow\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}=\frac{\lambda_1x_1}{f(x_1)}$$
$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\quad \xi_1\in(x_1,x_2)\Longrightarrow\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}=\frac{\lambda_2(x_2-x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$
$$f'(\xi_3)=\frac{f(1)-f(x_2)}{1-x_2}=\frac{1-f(x_2)}{1-x_2},\quad \xi_1\in(x_2,1)\Longrightarrow\frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=\frac{\lambda_3(1-x_2)}{1-f(x_2)}$$

欲使

$$\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=1$$

只需

$$f(x_1)=\lambda_1,f(x_2)=\lambda_2-\lambda_1$$

又 $f(0)=0,f(1)=1$, 由连续函数的介值定理知,
存在 $x_1\in(0,1)$, 使得 $f(x_1)=\lambda_1$ 和 存在 $x_2\in(0,1)$, 使得 $f(x_1)=\lambda_2-\lambda_1$ □

Exercise 4.4: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且 $f(0)=0,f(1)=1$. 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增
证明: $(0,1)$ 内存在 $\xi_i\in(0,1)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 使得

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\cdots+\frac{1}{f'(\xi_n)}=n$$

Proof: 设 $\xi_i\in(0,1)$, 对 $f(x)$ 在区间 $[0,x_1],[x_2,x_3],\cdots,[x_{n-1},1]$ 上分别使用拉格朗日中值定理可得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}=\frac{f(x_1)}{x_1},\quad \xi_1\in(0,x_1)\Longrightarrow\frac{1}{f'(\xi_1)}=\frac{x_1}{f(x_1)}$$
$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\quad \xi_1\in(x_1,x_2)\Longrightarrow\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}$$
$$\vdots$$
$$f'(\xi_n)=\frac{f(1)-f(x_{n-1})}{1-x_{n-1}}=\frac{1-f(x_{n-1})}{1-x_{n-1}},\quad \xi_n\in(x_{n-1},1)\Longrightarrow\frac{1}{f'(\xi_n)}=\frac{1-x_{n-1}}{1-f(x_{n-1})}$$

欲使

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\cdots+\frac{1}{f'(\xi_2)}=n$$

只需

$$f(x_1)=\frac{1}{n},f(x_2)=\frac{2}{n},\cdots,f(x_{n-1})=\frac{n-1}{n}$$

又 $f(0)=0,f(1)=1$, 由连续函数的介值定理, 存在 $x_k\in(0,1)$, $k\in[1,n-1]$, 使得 $f(x_k)=\frac{k}{n}$
证毕 □

Exercise 4.5: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导 $(0<a<b)$, $f(a)\neq f(b)$,
证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}\eta f'(\eta)$

✎ Solution 考虑

$$\frac{f'(\xi)}{2\xi} \Longrightarrow g'(x)=x^2 \Longrightarrow \text{构造 } g(x)=x^2$$

令 $g(x)=x^2$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由柯西中值定理知 $\exists\,\xi\in[a,b]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{2\xi} \Longrightarrow f(b)-f(a)=\frac{(b^2-a^2)f'(\xi)}{2\xi}$$

考虑

$$\eta f'(\eta)=\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}} \Longrightarrow g'(x)=\ln x \Longrightarrow \text{构造 } g(x)=\ln x$$

令 $g(x)=\ln x$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由柯西中值定理知 $\exists\,\eta\in[a,b]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=\eta f'(\eta) \Longrightarrow f(b)-f(a)=\ln\frac{b}{a}\eta f'(\eta)$$

故 $\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}\eta f'(\eta)$. 得证 ◀

Note: *复杂程度相同, 柯西; 复杂程度不同, 复杂的用柯西, 简单的用拉格朗日*

Exercise 4.6: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)\neq 0$,

试证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$

✎ Solution 考虑

$$\frac{e^\eta}{f'(\eta)} \Longrightarrow g'(x)=e^x \Longrightarrow \text{构造 } g(x)=e^x$$

令 $g(x)=e^x$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由柯西中值定理知 $\exists\,\xi\in[a,b]$

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{g'(\eta)}{f'(\eta)}=\frac{e^\eta}{f'(\eta)} \Longrightarrow f(b)-f(a)=\frac{(e^b-e^a)f'(\eta)}{e^\eta}$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由拉格朗日中值定理知 $\exists\,\eta\in[a,b]$

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$$

故 $\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$. 得证 ◀

Exercise 4.7: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $(0,1)$ 内可导. 证明: $\forall\,\xi,\eta\in(0,1)$ 使

$$\frac{3}{7}f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{(1+\eta)^2}$$

☞ Proof: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 由拉格朗日中值定理可得

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)\quad \xi\in(0,1)$$

令 $g(x)=\dfrac{(1+x)^3}{7}$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 由柯西中值定理知

$$f(1)-f(0)=\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{f'(\eta)}{\frac{3}{7}(1+\eta)^2}\quad \eta\in(0,1)$$

故 $\forall\ \xi,\eta\in(0,1)$ 使

$$\frac{3}{7}f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{(1+\eta)^2}$$

□

Exercise 4.8: 设 $f(x)$ 在 $[01]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, 证明：存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, $\xi\neq\eta$, 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$.

Proof: 令 $G(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2$ 则 $G(0)=G(1)=0$, 令 $G(\dfrac{1}{2})=m$

则由 Lagrange 中值定理可知 $\exists\xi\in(0,\dfrac{1}{2})$,s.t.

$$G'(\xi)=\frac{G(\frac{1}{2})-G(0)}{\dfrac{1}{2}-0},$$

$\exists\eta\in(\dfrac{1}{2},1)$,s.t.

$$G'(\eta)=\frac{G(1)-G(\frac{1}{2})}{1-\dfrac{1}{2}},$$

故 $G'(\xi)+G'(\eta)=0$ □

Example 4.7: 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f(0)=0$,

证明：存在 $\xi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\xi)=f(\xi)[1+2\tan^2\xi]$$

Proof:(by 西西) 设

$$g(x)=f(x)\cos x,\quad g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

那么有

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0,\qquad \xi_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\xi_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

继续考虑

$$h(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2x}=\frac{f'(x)\cos x-f(x)\sin x}{\cos^2x}$$

则显然有

$$h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$$

则有

$$h'(\xi)=\frac{1}{\cos\xi}[f''(\xi)-f(\xi)(1+2\tan^2\xi)]$$

□

Example 4.8: 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 内连续，且在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(1)=0$，求证: $\exists\xi\in(0,2)$,

$$f'(\xi)=\frac{\pi(\xi-\tan\xi)}{2\xi^2\sec\xi-\pi\xi\tan\xi}f(\xi)$$

Solution(by 西西) 构造

$$F(x)=\left(2-\pi\cdot\frac{\sin x}{x}\right)f(x)$$

$$F'(x)=\pi\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\right)f(x)+f'(x)\left(\frac{2x-\pi\sin x}{x}\right)$$

由于 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(1)=0$, 由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $F'(\xi)=0$

$$\pi\left(\frac{\sin\xi-\xi\cos\xi}{\xi^2}\right)f(\xi)+f'(\xi)\left(\frac{2\xi-\pi\sin\xi}{\xi}\right)=0$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\pi(\xi-\tan\xi)}{2\xi^2\sec\xi-\pi\xi\tan\xi}f(\xi)$$

◀

Exercise 4.9: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续二阶导数，且 $f''(x)\le 0$，证明：若对于 $0<a<b<a+b<2$，有 $f(a)\ge f(a+b)$，则

$$\frac{af(a)+bf(b)}{a+b}\ge f(a+b).$$

Proof: 根据 $f''(x)\leqslant 0$, 可知 f 在 $[0,2]$ 上是凹函数. 故

$$f(b)=f\left(\frac{b-a}{b}(a+b)+\frac{a}{b}a\right)\geqslant\frac{b-a}{b}f(a+b)+\frac{a}{b}f(a).$$

再根据条件 $f(a)\geqslant f(a+b)$ 得到 $f(b)\geqslant f(a+b)$. 因此

$$\begin{aligned}\frac{af(a)+bf(b)}{a+b}&=\frac{a}{a+b}f(a)+\frac{b}{a+b}f(b)\\&\geqslant\frac{a}{a+b}f(a+b)+\frac{b}{a+b}f(a+b)=f(a+b).\end{aligned}$$

□

Exercise 4.10: 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)=f'(b)$. 证明：$\exists\xi\in(a,b)$,s.t.

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

Proof: 不妨设 $f'(a)=f'(b)=0$，否则用 $f(x)-xf'(a)$ 即可. 令

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\in(a,b],\\ f'(a)=0, & x=a,\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，在 (a,b) 内可导．若 $F(b)=0$，
由 Rolle 定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\frac{f'(\xi)}{\xi-a}-\frac{f(\xi)-f(a)}{(\xi-a)^2}=0,$$

从而

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

若 $F(b)>0$，由于 $F'(b)=-\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}<0$，所以存在 $x_1\in(a,b)$ 使得 $F(x_1)>F(b)$．因为

$$0=F(a)<F(b)<F(x_1),$$

故由介值定理可知，存在 $x_2\in(a,x_1)$ 使得 $F(x_2)=F(b)$，于是由 Rolle 定理可知存在 $\xi\in(x_2,b)\subset(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$，从而结论成立．对 $F(b)<0$ 类似可证． □

☞ Proof: 令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b,\\ f'(a), & x=a,\end{cases}$$

则 g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b]$ 上可导. 分三种情况考虑.

1) $g(a)=f'(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=g(b)$, 根据 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$. 这等价于

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

2) $g(a)=f'(a)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=g(b)$. 此时有

$$g'(b)=\frac{f'(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{b-a}=\frac{g(a)-g(b)}{b-a}>0.$$

从而只要 $x\in(a,b)$ 且充分接近 b, 就有 $g(x)<g(b)$, 故 $g(a)$, $g(b)$ 都不是 g 的最小值, 因此 g 的最小值必在某点 $\xi\in(a,b)$ 处达到. 从而 $g'(\xi)=0$.

3) $g(a)=f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=g(b)$. 此时有

$$g'(b)=\frac{f'(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{b-a}=\frac{g(a)-g(b)}{b-a}<0.$$

从而只要 $x\in(a,b)$ 且充分接近 b, 就有 $g(x)>g(b)$, 故 $g(a),g(b)$ 都不是 g 的最大值, 因此 g 的最大值必在某点 $\xi\in(a,b)$ 处达到. 从而 $g'(\xi)=0$. □

Exercise 4.11: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导, 且 $f''(x)\neq 0$.

(1) 证明：对任何非零实数 x, 存在唯一的 $\theta(x)$ $(0<\theta(x)<1)$, 使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x)).$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$

☞ Proof: (1) 对任意非零实数 x, 由拉格朗日中值定理知 $\theta(x)$ $(0<\theta(x)<1)$ 存在, 使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x)).$$

如果这样的 $\theta(x)$ 不唯一, 则存在 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ $\theta_1(x)<\theta_2(x)$, 使得 $f'(x\theta_1(x))=f'(x\theta_2(x))$, 由罗尔定理, 存在一点 ξ 使得 $f''(\xi)=0$. 这与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾, 所以 $\theta(x)$ 是唯一的

(2) 因为 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x\theta(x)}$, 且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$ □

Exercise 4.12: 已知 $|f(x)+f'(x)|\leq 1$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，证明：$|f(x)|\leq 1$.

☞ Proof: 根据条件，可得

$$[e^x(1\pm f(x))]'\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

故

$$e^x(1\pm f(x))\geqslant\lim_{x\to-\infty}e^x(1\pm f(x))=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

因此

$$1\pm f(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

即

$$|f(x)|\leqslant 1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

□

Exercise 4.13: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$

证明：存在两个不同的常数 $\eta,\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

✎ Solution 构造函数令 $F(x)=f(x)+x-1$

因为 $F(0)F(1)<0$ 故由零点定理知存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $F(x_0)=f(x_0)+x_0-1=0$, 即 $f(x_0)=1-x_0$

在 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,1)$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理可得

$$f(x_0)-f(0)=f'(\xi)(x_0-0)\Leftrightarrow\frac{1-x_0}{x_0}=f'(\xi),\xi\in(0,x_0)$$

$$f(1)-f(x_0)=f'(\eta)(1-x_0)\Leftrightarrow\frac{x_0}{1-x_0}=f'(\eta),\eta\in(x_0,1)$$

于是有

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{1-x_0}{x_0}\times\frac{x_0}{1-x_0}=1$$

因此存在两个不同的常数 $\eta,\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

◀

Exercise 4.14: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0,\ f'(1)=1$
求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=2$

Solution 令 $F(x)=f(x)-x^2$, 则 $F(0)=f(0), F(1)=f(1)-1$,
且 $F(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件. 由拉格朗日中值定理,
$\exists C\in(0,1)$, 使

$$F'(C)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=-1$$

又

$$F'(x)=f'(x)-2x, F'(1)=f'(1)-2=-1$$

且 $F(x)$ 在 $[C,1]$ 满足罗尔定理的条件. 根据罗尔定理 $\exists\xi\in(C,1)$, 使 $F''(\xi)=0$
即 $f''(\xi)-2=0$, 也即存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=2$ ◀

Exercise 4.15: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 开区间 (a,b) 内二阶可导,
$f(a)=f(b)=0, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 证明

(1) 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=f(\xi)$;

(2) 至少存在一点 $\eta\in(a,b)$, $\eta\neq\xi$, 使得 $f''(\eta)=f(\eta)$

Solution 令 $g(x)=f(x)e^{-x}$, 由 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 知存在 $f(\lambda)=0\,(0<\lambda<b)$
且 $g(\lambda)=g(a)=0, g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 开区间 (a,b) 内二阶可导,
由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi_1\in(a,\lambda)$, 使得

$$g'(\xi_1)=0\,(a<\xi_1<\lambda)$$

同理, 至少存在一点 $\xi_2\in(\lambda,b)$, 使得

$$g'(\xi_2)=0\,(\lambda<\xi_2<b)$$

令 $h(x)=f^2(x)-[f'(x)]^2$, 易知 $h(\xi_1)=h(\xi_2)$
$h(x)$ 在 (ξ_1,ξ_2) 上满足罗尔定理的条件, 因此至少存在一点 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$, $\eta\neq\xi$, 使得
$h'(\eta)=0$, 即 $f''(\eta)=f(\eta)$ ◀

Example 4.9: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续, 开区间 (a,b) 内可导, 试证在 (a,b) 内至少存在一点 x, 满足 $2x\big[f(b)-f(a)\big]=(b^2-a^2)f'(x)$

Proof:令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x^2\big[f(b)-f(a)\big]}{b^2-a^2}$ □

Exercise 4.16: 函数 f 在 (-1,1) 上二阶可微，$f(0)=f'(0)=0$，且在该区间上成立不等式 $|f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|$，证明：$f(x)\equiv0$.

Solution 设 x_0 是 $|f'(x_0)|$ 在 $[-1/2,1/2]$ 上取得最大值的点，由 Lagrange 中值定理有

$$f'(x_0)-f'(0)=x_0f''(\theta x_0), 0<\theta<1.$$

故结合已知，有

$$|f'(x_0)| = |x_0||f''(\theta x_0)| \le |x_0|(|f'(\theta x_0)| + |f(\theta x_0)|) \le |x_0|(|f'(x_0) + |f(\theta x_0)|).$$

因 $f(\theta x_0) = \int_0^{\theta x_0} f'(t)dt$，故 $|f(\theta x_0)| \le \left|\int_0^{\theta x_0} |f'(t)|dt\right| \theta|x_0||f'(x_0)|$。因此

$$|f'(x_0)| \le |x_0|(|f'(x_0)| + \theta|x_0||f'(x_0)|) = (|x_0| + \theta x_0^2)|f'(x_0)|.$$

因 $|x_0| + \theta x_0^2 < 1$, 故 $f'(x_0) = 0$，这说明 $f'(x) = 0$，$\forall x \in [-1/2, 1/2]$。
又因 $f(0) = 0$，故 $f(x) = 0$，$\forall x \in [-1/2, 1/2]$。
取 ε, $0 < \varepsilon < 1/2$，设 x_1 是 $|f'(x)|$ 在 $[1/2, 1-\varepsilon]$ 上取得最大值的点。
由 Lagrange 中值定理，有

$$f'(x_1) - f'\Big(\frac{1}{2}\Big) = \Big(x_1 - \frac{1}{2}\Big)f''\Big(\frac{1}{2} + \theta_1\Big(x_1 - \frac{1}{2}\Big)\Big), 0 < \theta_1 < 1.$$

故

$$\begin{aligned}|f'(x_1)| &= \Big|x_1 - \frac{1}{2}\Big|\Big|f''\Big(\frac{1}{2} + \theta_1\Big(x_1 - \frac{1}{2}\Big)\Big)\Big| \\ &\le \Big(x_1 - \frac{1}{2}\Big)(|f'(\xi)| + |f(\xi)|) \le (|f'(x_1)| + |f(\xi)|)\end{aligned}$$

(记 $\xi = 1/2 + \theta_1(x_1 - 1/2)$)。而

$$|f(\xi)| = \left|\int_{\frac{1}{2}}^{\xi} f'(t)dt\right| \le \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} |f'(t)|dt \le \theta_1\Big(x_1 - \frac{1}{2}\Big)|f'(x_1)|.$$

于是，$f(x)$ 在 $[1/2, 1-\varepsilon]$ 上恒为 0，因 $\varepsilon > 0$ 可任意小，故 $f(x) = 0, \forall x \in [-1/2, 1)$。
同理可证，当 $x \in (-1, 1/2]$ 时，$f(x) = 0$。◀

Exercise 4.17: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)}$$

✎ Solution 根据 Lagrange 定理, 对任意 $n \ge 1$, 存在 $\xi_n, \eta_n \in (0,1)$, 使得

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{(n+\xi_n)^{1/n-1}}{n} = n^{1/n-2}(1 + \frac{\xi_n}{n})^{1/n-1},$$

$$\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n} = \ln n \cdot n^{\frac{1}{n+\eta_n}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

从而

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{1}{n^2}, \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n^2}(n \to \infty).$$

所以

$$\frac{n^2(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)} = \frac{n^2(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})}{\ln(n+1)} + \frac{n^2(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)}$$

$$\to 0+1=1(n\to\infty).$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)}=1.$$

◀

✎ Solution 注意到 $(\lambda_n\in(0,1))$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n}&=e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}-e^{\frac{\ln n}{n+1}}\\&=e^{\lambda_n\frac{\ln(n+1)}{n}+(1-\lambda_n)\frac{\ln n}{n+1}}(\frac{\ln(n+1)}{n}-\frac{\ln n}{n+1})\\&\sim\frac{\ln(n+1)}{n}-\frac{\ln n}{n+1}=\frac{\ln n}{n(n+1)}+\frac{\ln(1+1/n)}{n}\\&=\frac{\ln n}{n(n+1)}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&\sim\frac{\ln n}{n(n+1)}\sim\frac{\ln(n+1)}{n^2}(n\to\infty),\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)}=1.$$

◀

Exercise 4.18: 设函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}},x>1$

① 证明：$\forall x>1$, 恒有 $1<f(x)<1+e^{\frac{1}{e}}\cdot\frac{\ln x}{x}$

② 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}$

③ 设数列 $I_n=\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{1+2^{\frac{1}{2^k}}+3^{\frac{1}{3^k}}+\cdots+n^{\frac{1}{n^k}}}{n^2+k^2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$

✎ Solution ① $f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln x}{x}},x>1$ 并注意到 $\frac{\ln x}{x}>0\ (x>1)$ 故 $f(x)>e^0=1$

由于 e^x 在 $\left[0,\frac{\ln x}{x}\right]$ 可导, 由拉格朗日中值定理有

$$e^{\frac{\ln x}{x}}-e^0=\frac{\ln x}{x}e^{\xi}\quad \xi\in\left(0,\frac{\ln x}{x}\right)$$

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 故 $g(x)$ 在 $(1,e)\uparrow$ 在 $(e,+\infty)\downarrow$ 因此 $g_{max}(x)=\frac{1}{e}$
故

$$f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}=1+e^{\xi}\frac{\ln x}{x}<1+\frac{\ln x}{x}e^{\frac{\ln x}{x}}<1+\frac{\ln x}{x}e^{\frac{1}{e}}$$

②: 由 ① 知

$$1\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln i}{i}e^{\frac{1}{e}}\right)$$

其中

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln i}{i}e^{\frac{1}{e}}<e^{\frac{1}{e}}\frac{\ln n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<e^{\frac{1}{e}}\frac{\ln n(\ln n+1)}{n}\to 0\quad (n\to\infty)$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}=1$$

用到不等式

$$\ln n<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<\ln n+1$$

③: 由 ② 知

$$\left(1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}\right)=\sum_{i=1}^{n}i^{\frac{1}{i}}\sim n+o(n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}I_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}i^{\frac{1}{i}}}{n^2+k^2}$$

下面计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}$

一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k-1}^{k}\frac{n}{n^2+k^2}\mathrm{d}x\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k-1}^{k}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{n^2}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k}^{k+1}\frac{n}{n^2+k^2}\mathrm{d}x\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k}^{k+1}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_{1}^{n^2+1}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1+2^{\frac{1}{2^k}}+3^{\frac{1}{3^k}}+\cdots+n^{\frac{1}{n^k}}}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{2}$$

◀

Exercise 4.19: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$, 证明:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|.$$

Proof:对任何固定的 $x\in(a,b)$, 令

$$g(t)=f(t)-\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}(t-a)(t-b),t\in[a,b],$$

则 $g(a)=g(x)=g(b)=0$, 根据 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g''(\xi)=0$, 即

$$f(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(\xi),x\in(a,b).$$

从而

$$|f(x)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|,\forall x\in[a,b].$$

□

Exercise 4.20: 设 f 是在 R 上有四阶连续可导的函数, $x\in[0,1]$, 满足

$$\int_0^1 f(x)dx+3f\left(\frac{1}{2}\right)=8\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}f(x)dx$$

证明：存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f^{(4)}(c)=0$

Proof: 令 $G(t)=\int_{-t}^{t}g(x)dx-8\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}g(x)dx$, 其中

$$g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$$

易得 $G(0)=0,G\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 由 Rolle 定理有存在 $t_0\in(0,1/2)$ 使得 $G'(t_0)=0$. 由于

$$G'(t)=g(t)-4g(\frac{t}{2})-4g(-\frac{t}{2})+g(-t)$$

则 $G'(0)=0,G'(t_0)=0$, 则由 Rolle 定理有：$G''(t_1)=0$, 又

$$G''(t)=g'(t)-2g'(\frac{t}{2})+2g'(-\frac{t}{2})-g'(-t)$$

显然 $G''(0)=0$, 故由中值定理有 $G'''(t_2)=0$, 又

$$G'''(t)=(g''(t)-g''(\frac{t}{2}))-(g''(-\frac{t}{2})-g''(-t))$$

即

$$G'''(t_2)=(g''(t_2)-g''(\frac{t_2}{2}))-(g''(-\frac{t_2}{2})-g''(-t_2))$$

又由拉格朗日中值定理有存在 $\theta_+\in(t_2/2,t_2),\theta_-\in(-t_2,-\frac{t_2}{2})$,

$$(g''(t_2)-g''(\frac{t_2}{2}))-(g''(-\frac{t_2}{2})-g''(-t_2))=g'''(\theta_+)\frac{t_2}{2}-g'''(\theta_-)\frac{t_2}{2}$$

注意 $t_2 \neq 0$ 即 $g'''(\theta_+) - g'''(\theta_-) = 0$

再利用拉格朗日中值定理 $g''''(\theta) = 0$, 即 $f^{(4)}\left(\theta + \frac{1}{2}\right) = 0$ 将 $\theta + \frac{1}{2} \to \theta$, 即有 $f^{(4)}(\theta) = 0$

□

Exercise 4.21:

Proof:

□

4.1.1 常数 K 值法

Theorem 4.5 K 值法 1

1. 对结论进行适当的变形, 把不含中值 ξ 的因子分离出来作为一个整体, 并令其为常数 K , 构造一个含 K 的等式
2. 对含常数 K 的等式进行适当变形, 并且使等式右端为零
3. 再将等式左端中出现区间 (a, b) 的端点 a (或 b) 全部换成 x 并令左端为 $F(x)$, 此 $F(x)$ 即为所构造的辅助函数

♣

Theorem 4.6 K 值法 2

1. 对结论进行适当的变形, 把不含中值 ξ 的因子分离出来作为一个整体, 并令其为常数 K , 构造一个含 K 的等式
2. 对含常数 K 的等式进行适当变形, 使等式左端为由 a 构成的代数式, 右端为由 b 构成的代数式
3. 上述等式关于区间 (a, b) 端点 a 和 b 的表达式是对称的, 此时只要把等式左端中出现的 a 全部换成 x, 并令左端为 $F(x)$, 此 $F(x)$ 即为所构造的辅助函数

♣

Example 4.10: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内连续, 开区间 (a, b) 内可导, 试证在 (a, b) 内至少存在一点 x, 满足 $2x\left[f(b) - f(a)\right] = (b^2 - a^2) f'(x)$

Proof:令 $F(x) = f(x) - \dfrac{x^2\left[f(b) - f(a)\right]}{b^2 - a^2}$ □

Note: 本题不能使用柯西中值定理, (a, b) 内可能包含 0

Example 4.11: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists \xi \in (a,b)$ ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(a+b)^3 f''(\xi)$$

Proof: 令 $g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - (x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{1}{24}(x-a)^3 K$ 则 $g(a) = g(b) = 0$, 其中

$$K = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{24}(b-a)^3}$$

所以由罗尔定理知存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $g(x_0) = 0$. 又

$$g(x) = f(x) - f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{x-a}{2}f'\left(\frac{x-a}{2}\right) - \frac{1}{8}(x-a)^2 K$$

所以

$$f(x_0) = f\left(\frac{a+x_0}{2}\right) + \frac{x_0-a}{2}f'\left(\frac{x_0-a}{2}\right) + \frac{1}{8}(x_0-a)^2 K \tag{4.1}$$

在 $x = \frac{a+x_0}{2}$ 处将 $f(x)$ 泰勒展开，并令 $x = x_0$ 得到

$$f(x_0) = f\left(\frac{a+x_0}{2}\right) + \frac{x_0-a}{2}f'\left(\frac{x_0-a}{2}\right) + \frac{1}{8}(x_0-a)^2 f''(\xi) \tag{4.2}$$

其中 $\xi \in \left(x_0, \frac{a+x_0}{2}\right) \subseteq (a,b)$ 比较 (4.1)(4.2)，得 $K = f''(\xi)$。所以存在 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(a+b)^3 f''(\xi)$$

□

Example 4.12: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists \xi \in (a,b)$ ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$

Example 4.13:

Solution

◀

4.2 洛必达法则

Example 4.14: 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 内的具有二阶连续导数的函数，且

$$\left| f''(x) + 2xf'(x) + (x^2+1)f(x) \right| \leqslant 1$$

证明：$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

☞ Proof: 对分式表达式 $\dfrac{f(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}$ 使用两次洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{[f'(x)+xf(x)]e^{\frac{x^2}{2}}}{xe^{\frac{x^2}{2}}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{[f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)]e^{\frac{x^2}{2}}}{(x^2+1)e^{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

□

Example 4.15: 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可微, 且 $f'(0)=0$, $f''(0)=A\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x^4}$

✎ Solution

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\sin x)}{x^4} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to0}\frac{f'(x)-\cos x f'(\sin x)}{4x^3}$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(\sin x)+f'(\sin x)-\cos x f'(\sin x)}{4x^3}$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(\sin x)}{4x^3} + \lim_{x\to0}\frac{f'(\sin x)-\cos x f'(\sin x)}{4x^3}$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{(x-\sin x)f''(\xi)}{x^3}}_{\xi\text{ 在}x\text{与}\sin x\text{之间}} + \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{4x^2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\sin x)}{x}$$
$$= \frac{A}{24}+\frac{1}{8}\lim_{x\to0}\cos x\lim_{x\to0}f''(\sin x) = \frac{A}{6}$$

◀

Example 4.16: 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$$

✎ Solution

$$I = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$$
$$\xlongequal{u=\frac{1}{x}} \lim_{u\to0^+}\frac{\left(1-u+\frac{u^2}{2}e^u\right)-\sqrt{1+u^6}}{u^3}$$
$$= \lim_{u\to0^+}\frac{\frac{u^2e^u}{2}-\frac{3u^5}{\sqrt{1+u^6}}}{3u^2} = \lim_{u\to0^+}\frac{\frac{e^u}{2}-\frac{3u^3}{\sqrt{1+u^6}}}{3}$$
$$\xlongequal{\text{代值}} \frac{1}{6}$$

◀

Example 4.17: 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos x}\cdots\sqrt[n]{\cos x}}{(x+\sin x)^2}$$

Solution

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos x}\cdots\sqrt[n]{\cos x}}{(x+\sin x)^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\ln\left(\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos x}\cdots\sqrt[n]{\cos x}\right)}}{(x+\sin x)^2}\\
=&-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)+\ln(\sqrt[2]{\cos x})+\cdots+\ln(\sqrt[n]{\cos x})}{(x+\sin x)^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\tan 2x+\cdots+\tan nx}{2(x+\sin x)(1+\cos x)}\\
=&\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\tan 2x+\cdots+\tan nx}{x+\sin x}\\
=&\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x+2\sec^2 2x+3\sec^2 3x+\cdots+n\sec^2 nx}{1+\cos x}\\
=&\frac{1}{8}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{16}
\end{aligned}
$$

◀

Example 4.18: 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ 傲娇小魔王

Solution 因为

$$
\begin{aligned}
0\leqslant \lim_{x\to 0^+}|x\ln x| &= \lim_{x\to 0^+}\left|\frac{2\ln\sqrt{x}}{\frac{1}{x}}\right| = \lim_{x\to 0^+}\left|-2\frac{\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}\right|\\
&\leqslant \lim_{x\to 0^+}\left|-2\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}\right| = \lim_{x\to 0^+}\left|2\sqrt{x}\right| = 0
\end{aligned}
$$

故由夹逼则知

$$
\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0
$$

◀

Example 4.19: 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4 3x}$ 傲娇小魔王

Solution

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{3^4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{x^4}\\
&\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\frac{1}{4\cdot 3^4}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos(e^x-1)-e^{\sin x}\cos x}{x^3}\\
&= \frac{1}{4\cdot 3^4}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos(e^x-1)-e^x\cos x+e^x\cos x-e^{\sin x}\cos x}{x^3}\\
&= \frac{1}{4\cdot 3^4}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\sin\frac{e^x-1+x}{2}\sin\frac{x-e^x+1}{2}}{x^3}+\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cos x\cdot\frac{e^{x-\sin x}-1}{x^3}\right)\\
&= \frac{1}{4\cdot 3^4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{4\cdot 3^5} = -\frac{1}{972}
\end{aligned}
$$

◀

Example 4.20: 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

Solution

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)(\sin x + x)}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos x + 1}{1}\\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}\\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

◀

Exercise 4.22: 求极限

$$\lim_{x\to 0} x^6\left(\frac{1}{\sin^8 x}-\frac{1}{x^8}\right)$$

Solution

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x^6\left(\frac{1}{\sin^8 x}-\frac{1}{x^8}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^8-\sin^8 x}{x^2\sin^8 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x^4-\sin^4 x)(x^4+\sin^4 x)}{x^{10}}\\
&=2\lim_{x\to 0}\frac{x^4-\sin^4 x}{x^6}\\
&=2\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\sin^2 x)(x^2+\sin^2 x)}{x^6}\\
&=4\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\\
&=4\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^4}\\
&=8\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\\
&=8\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{8}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\\
&=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

◀

Example 4.21: (2017/10/8) 求极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-2x}}-\sqrt{1+2x-\cos x}}{\sqrt{x^3}}$$

Proof:

$$\text{原式} \xlongequal{\text{有理化}} \lim_{x\to0^+}\frac{-e^{-2x}-2x+\cos x}{\sqrt{x^3}\left(\underbrace{\sqrt{1-e^{-2x}}}_{\sim\sqrt{2x}}+\underbrace{\sqrt{1+2x-\cos x}}_{\sim\sqrt{2x}}\right)}$$

$$\xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-e^{-2x}-2x}{2\sqrt{2}x^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x+2e^{-2x}-2}{4\sqrt{2}x}$$

$$\begin{cases}\xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x+(-4x)}{4\sqrt{2}x}=-\dfrac{5}{4\sqrt{2}}\\ \xlongequal{\text{洛必达}} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\cos x-4e^{-2x}}{4\sqrt{2}}=-\dfrac{5}{4\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$\text{原式} \xlongequal{\text{有理化}} \lim_{x\to0^+}\frac{-e^{-2x}-2x+\cos x}{\sqrt{x^3}\left(\underbrace{\sqrt{1-e^{-2x}}}_{\sim\sqrt{2x}}+\underbrace{\sqrt{1+2x-\cos x}}_{\sim\sqrt{2x}}\right)}$$

$$\xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-e^{-2x}-2x}{2\sqrt{2}x^2}$$

$$\xlongequal{\text{泰勒展开}} \lim_{x\to0^+}\frac{\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)-\left(1+(-2x)+\frac{1}{2!}(-2x)^2+o(x^2)\right)-2x}{2\sqrt{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(-\frac{1}{2!}-\frac{1}{2!}(-2)^2\right)x^2}{2\sqrt{2}x^2}=-\frac{5}{4\sqrt{2}}$$

□

Exercise 4.23: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$.

求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$

Solution 由题意

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x-3x+3x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x-3x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{3x+xf(x)}{x^3}$$

$$=-\frac{9}{2}+\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}=0$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}=\frac{9}{2}\Longrightarrow\lim_{x\to0}f(x)=-3$$

且 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内二阶可导, 故

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=-3$$

以及

$$\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{9}{2}\Longrightarrow f'(0)=\lim_{x\to0}f'(x)=0$$

由上式

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{9}{2}\Longrightarrow f''(0)=\lim_{x\to0}f''(x)=9$$

◀

Exercise 4.24: 求极限

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}&=\exp\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x+1}{x-1}\right)}{x}\\&=\exp\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)}{x}\\&=\exp\lim_{x\to-\infty}\frac{-\ln(-x)}{x}=1\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x+1}{x-1}&=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x-1}{x+1}\right)\\&=\arctan\frac{x-1}{x+1}-\frac{\pi}{4}\\&=\left(\arctan x-\frac{\pi}{4}+\pi\right)-\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\pi}{2}+\arctan x=\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\right)\\&=-\arctan\frac{1}{x}\sim-\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Note:

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},x<0$$

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},x>0$$

$$\arctan x-\arctan y=-\pi+\arctan\frac{x-y}{1+xy},\quad x<0,\ xy<-1$$

◀

4.3 泰勒公式

Theorem 4.7 泰勒中值定理–皮亚诺形式

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个领域 $U(x_0)$ 内有 $(n+1)$ 阶导数, 那么对任一 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$. 称为皮亚诺形式的余项

Theorem 4.8 泰勒中值定理–拉格朗日形

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个领域，对于该领域内的任一 x ，有

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,　ξ 在 x 与 x_0 之间. $R_n(x)$ 称为拉格朗日形式的余项

☞ Proof: 下面只证明 $x > x_0$ 的情形.
根据定义有

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

求 $R_n(x)$ 的各阶导数得

$$R_n'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1},$$

$$\vdots$$

$$R_n^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{k=m}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!}(x-x_0)^{k-m},$$

$$\vdots$$

$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0),$$

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

容易看出

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(m)}(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

对函数 $R_n(x)$ 和 $(x-x_0)^{n+1}$ 在区间 $[x_0, x]$ 上应用柯西中值定理, 得

$$\begin{aligned}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} \\ &= \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n},\ (x_0<\xi_1<x).\end{aligned}$$

继续对函数 $R_n'(x)$ 和 $(x-x_0)^n$ 以及它们的导数在区间 $[x_0, \xi_1]$ 上应用柯西中值定理, 于是有

$$\begin{aligned}\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} &= \frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)[(\xi_1-x_0)^n-(x_0-x_0)^n]} \\ &= \frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}} \\ &= \cdots \\ &= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)} \\ &= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)![(\xi_n-x_0)-(x_0-x_0)]} \\ &= \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

其中 $x_0<\xi<\xi_n<\cdots<\xi_2<\xi_1<x$. 由此即得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

证毕. □

Theorem 4.9 泰勒中值定理–柯西形

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个领域，对于该领域内的任一 x ，有

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\theta\in(0,1)$, $R_n(x)$ 称为柯西形式的余项

Example 4.22: 设函数 $f(x)$ 满足 $[0,1]$ 内二阶可导, 且 $|f(x)|\leqslant a$, $|f''(x)|\leqslant b$
证明： $|f'(x)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{a}$

Solution $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒展开, 其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

分别取 $x=0$ 和 $x=1$ 有

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2 \quad ①$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2 \quad ②$$

由 ②–① 得:

$$f(1)-f(0)=f'(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2$$

$$\Longrightarrow f'(x_0)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2$$

所以

$$\begin{aligned}\left|f'(x_0)\right| &\leqslant \left|f(1)\right|+\left|f(0)\right|+\left|\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2\right|+\left|\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2\right|\\ &\leqslant 2a+\frac{b}{2}\left[(1-x_0)^2+x_0^2\right]=2a+\frac{b}{2}\underbrace{\left(1+2x_0^2-2x_0\right)}_{x_0\in(0,1)}\\ &\leqslant 2a+\frac{b}{a}\end{aligned}$$

◀

Exercise 4.25: 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, 且 $f''(x)>0$. 证明: $f(x)>x$.

Solution: 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, 所以 $f(0)=0,\ f'(0)=1$.
而 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

即

$$f(x)=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2.$$

又由于 $f''(x)>0$, 故 $f(x)>x$. □

Exercise 4.26: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f'(a)=f'(b)=0$

证明: $\exists\,\xi\in(a,b)$, 使

$$\left|f''(\xi)\right|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$$

Solution 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在 a 和点 b 展开成泰勒公式, 并考虑到 $f'(a)=f'(b)=0$, 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2} \tag{4.3}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\quad \frac{a+b}{2}<\xi_1<b \tag{4.4}$$

由 (4.4) − (4.3), 得

$$f(b)-f(a)+\frac{1}{8}\big[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\big](b-a)^2=0$$

故

$$\frac{4\big|f(b)-f(a)\big|}{(b-a)^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\big|f''(\xi_1)\big|+\big|f''(\xi_2)\big|\right)\leqslant f''(\xi)$$

其中 $f''(\xi)=\max\left\{\big|f''(\xi_1)\big|,\big|f''(\xi_2)\big|\right\}$ ◀

Exercise 4.27: 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有任意阶导数，$f^{(n)}(0)=0,\forall n\in\mathrm{N}_+$，且存在常数 $C\geq 0$，使得对所有 $n\in\mathrm{N}_+$ 和 $x\in[-1,1]$ 成立不等式 $|f^{(n)}(x)|\leq n!C^n$. 证明: $f(x)\equiv 0$.

☞ Proof: 不妨设 $C>0$. 令 $\delta=\min\{1,\dfrac{1}{2C}\}$, 则对任何 $x\in[-\delta,\delta]$ 和正整数 n, 根据 Taylor 定理和所给条件, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq 2^{-n-1}.$$

令 $n\to\infty$, 得到 $f(x)\equiv 0,x\in[-\delta,\delta]$. 从而

$$f^{(n)}(x)\equiv 0,x\in[-\delta,\delta],n=0,1,2,\ldots.$$

令

$$a=\inf\{\alpha\in[-1,0):f(x)=0,\forall x\in[\alpha,0]\},b=\sup\{\beta\in(0,1]:f(x)=0,\forall x\in[0,\beta]\},$$

则根据已证结果, $-1\leq a<b\leq 1$. 我们断言必有 $a=-1,b=1$. 先证 $b=1$. 若 $b<1$, 取 $\delta_1=\min\{\delta,1-b\}$. 则对任何 $x\in[b,b+\delta_1]$ 和正整数 n, 根据 Taylor 定理和已证结果, 存在 $\theta_1\in(0,1)$, 使得

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(b)}{i!}(x-b)^i+\frac{f^{(n+1)}(b+\theta_1(x-b))}{(n+1)!}(x-b)^{(n+1)}\right|\leq 2^{-n-1}.$$

令 $n\to\infty$, 得到 $f(x)\equiv 0,x\in[b,b+\delta_1]$, 从而 $f(x)\equiv 0,x\in[0,b+\delta_1]$, 这与 b 的定义矛盾. 矛盾说明必有 $b=1$. 从而 $f(x)\equiv 0,x\in[0,1]$. 类似可证 $a=-1$. 从而 $f(x)\equiv 0,x\in[-1,0]$. 最后得到 $f(x)\equiv 0,x\in[-1,1]$ □

Exercise 4.28: 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有三阶导数, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$ 也存在, 并且

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0$$

☞ Proof: 由题设极限存在条件, 记

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}f'''(x)=b$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有三阶导数,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_x)h^3\tag{4.5}$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-\frac{1}{6}f'''(\eta_x)h^3 \tag{4.6}$$

其中 $\xi_x\in(x,x+h)$, $\eta_x\in(x-h,x)$.

(4.5) 与 (4.5) 两式相加, 得

$$f''(x)=\big(f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\big)+\frac{h^3}{6}\big(f'''(\xi_x)-f'''(\eta_x)\big)$$

在式中令 $x\to+\infty$, 可推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$ 存在, 并且

$$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=(a+a-2a)-\frac{1}{6}(b-b)=0$$

(4.5) 与 (4.5) 两式相减, 得

$$f'(x)=\frac{1}{2h}\Big[f(x-h)-f(x+h)-\frac{h^3}{6}\big(f'''(\xi_x)+f'''(\eta_x)\big)\Big] \tag{4.7}$$

在式 (4.7) 中令 $x\to+\infty$, 可推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在, 由 Lagrange 中值定理,

$$f(x-h)-f(x+h)=2hf'(\theta)\,,\quad \theta\in(x-h,x+h)$$

在式 (4.7) 中令 $x\to\infty$, 那么 $\theta\to+\infty$, 于是 $a=a-\dfrac{h^2b}{6}$, 因此 $b=0$ 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)=0$

在 (4.5) 中, 令 $x\to+\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ □

Exercise 4.29: 设 $f(x)\in C^{(2)}(0,1)$, 且 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$. 若存在 $M>0$，使得

$$(1-x)^2|f''(x)|\le M\quad(0<x<1)$$

则 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)f'(x)=0$

Proof: 对 $t,x\in(0,1):t>x$, 用 Taylor 公式

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+f''(\xi)\frac{(t-x)^2}{2},x<\xi<t$$

并取 $t=x+(1-x)\delta$, $(0<\delta<\dfrac{1}{2})$, 我们有

$$f(t)-f(x)=\delta(1-x)f'(x)+\frac{\delta^2}{2}f''(\xi)(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow(1-x)f'(x)=\frac{f(t)-f(x)}{\delta}-\frac{\delta}{2}f''(\xi)(1-x)^2$$

$$|f'(x)(1-x)|\le\frac{|f(t)-f(x)|}{\delta}+\frac{\delta}{2}|f''(\xi)|(1-x)^2$$

注意到 $\xi=x+(t-x)\theta$, $0<\theta<1$

$$\Rightarrow(1-\xi)^2=(1-x)^2(1-\delta\theta)^2>\frac{1}{4}(1-x)^2$$

(这里是由于 $0<\delta\theta<\dfrac{1}{2}$) 及条件 $(1-x)^2|f''(x)|\le M(0<x<1)$

$$\frac{\delta}{2}|f''(\xi)|(1-x)^2=|f''(\xi)|(1-\xi)^2\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-\xi)^2}\cdot\frac{\delta}{2}<2M\delta$$

$$\Rightarrow |f'(x)(1-x)| \le \frac{|f(t)-f(x)|}{\delta} + 2M\delta$$

现在，对 $\forall\varepsilon$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4M}$ 对上述 $\delta\varepsilon$, 存在 $\eta > 0$, 对 $\forall 0 < 1-x < \eta$, 有 $|f(t)-f(x)| < \dfrac{\delta\varepsilon}{2}$ 这样，对 $\forall 0 < 1-x < \eta$，就有 $\Rightarrow |f'(x)(1-x)| < \varepsilon$ 故得

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)f'(x) = 0$$

□

Example 4.23: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a)=f'(b)=0$, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\left|f''(\xi)\right| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

Proof: 将 $f(x)$ 在 $x=a$ 与 $x=b$ 处分别泰勒展开得

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(\xi_a)(x-a)^2, \quad \xi_a \in (a,x)$$

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{1}{2}f''(\xi_b)(x-b)^2, \quad \xi_b \in (x,b)$$

在以上两式分别令 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 可得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{1}{8}f''(\xi_a')(b-a)^2, \quad \xi_a \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right) \tag{4.8}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{1}{8}f''(\xi_b')(a-b)^2, \quad \xi_a \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right) \tag{4.9}$$

由 (4.9) − (4.8) 得

$$f(b)-f(a) = \frac{(b-a)^2}{8}\left(f''(\xi_a') - f''(\xi_b')\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\left|f(b)-f(a)\right| &\leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\left(\left|f''(\xi_a')\right| + \left|f''(\xi_b')\right|\right) \\ &\leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\max\left(\left|f''(\xi_a')\right|, \left|f''(\xi_b')\right|\right) = \frac{(b-a)^2}{4}\left|f''(\xi)\right|\end{aligned}$$

这里 ξ 为 $\left|f''(\xi_a')\right|$ 或 $\left|f''(\xi_b')\right|$ 由此即得原式 □

Example 4.24: 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - (1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$$

Solution

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - (1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{e\ln(1+x)}{x}}}{x^2}\left(e^{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{e\ln(1+x)}{x}} - 1\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{e+1}}{x^2}\left[e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}} - \frac{\ln(1+x)-x}{x} - 1\right] \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{e+1}}{x^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^2\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{e+1}}{x^2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x^2/2}{x}\right)^2 = \frac{e^{e+1}}{8}$$

◀

Example 4.25: 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{x}{2}+\arctan x} - e^{\pi}x\right)$$

Solution

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{x}{2}+\arctan x} - e^{\pi}x\right)\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} - e^{\pi}x\right)\\
=&e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} - x\right)\\
=&e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x\right)\\
=&-2e^{\pi}
\end{aligned}$$

注:

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0$$

◀

Exercise 4.30: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2\sqrt{\frac{n}{n+1}} - (n^2+1)\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)$$

Solution

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(n^2\sqrt{\frac{n}{n+1}} - (n^2+1)\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt{n+2}-(n^2+1)(n+1)\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^{\frac{7}{2}}\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)-\left(n^{\frac{7}{2}}+n^{\frac{5}{2}}+n^{\frac{3}{2}}+\sqrt{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^{\frac{7}{2}}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)-\left(n^{\frac{7}{2}}+n^{\frac{5}{2}}+n^{\frac{3}{2}}+\sqrt{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}\\
=&-\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Note:

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)$$

◀

Example 4.26: 求极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$$

–傲娇小魔王

Solution

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{1+x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty} x^2\left[-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]+\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\\
=&-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercise 4.31: 求极限

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{(\sin x)^x}-(\sin x)^{x^{\sin x}}}{x^3}$$

Solution

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+}\frac{x^{(\sin x)^x}-(\sin x)^{x^{\sin x}}}{x^3}\\
=&\lim_{x\to0^+}\frac{e^{(\sin x)^x\ln x}-e^{x^{\sin x}\ln\sin x}}{x^3}\\
=&\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)^x\ln x}-e^{x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)}\ln\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)}}{x^3}\\
=&\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\ln\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}}{x}\times\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)\ln x-x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\ln\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}-1}{x^2}\\
=&1\times\lim_{x\to0^+}\frac{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)\ln x-x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\ln\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}{x^2}\\
=&\lim_{x\to0^+}\frac{\left[\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^x-x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\right]\ln x}{x^2}-\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\left(-\frac{1}{6}x^2\right)}{x^2}\\
=&0-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Exercise 4.32: 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{x+1}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right)$$

Solution

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{x+1}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\frac{x}{e}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{e} \lim_{x\to\infty} x \left[\frac{1}{\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1\right)} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{e} \lim_{x\to\infty} x \left[\exp\left(1 - x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) - 1 \right] \\
&= \frac{1}{e} \lim_{x\to\infty} x \left[\exp\left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1 \right] \\
&= \frac{1}{2e}
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 4.33: 求极限

$$
\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)
$$

Solution

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} - 2\right) \\
&= \lim_{t\to0^+} \frac{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} - 2}{t^2} \\
&= \lim_{t\to0^+} \frac{\left(1+\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o\left(t^2\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o\left(t^2\right)\right) - 2}{t^2} \\
&= \lim_{t\to0^+} \frac{-\frac{1}{4}t^2 + o\left(t^2\right)}{t^2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Note:

$$
\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^2\right)
$$

◀

Exercise 4.34: 求极限

$$
\lim_{x\to0} \frac{\tan\tan x - \sin\sin x}{\tan x - \sin x}
$$

Solution

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} &= \lim_{x\to0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\tan x)}{\tan x - \sin x} + \lim_{x\to0} \frac{\sin(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2}\tan^3 x + o(\tan^3 x)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} + \lim_{x\to0} \frac{2\cos\frac{\tan x + \sin x}{2}\sin\frac{\tan x - \sin x}{2}}{\tan x - \sin x} \\
&= 1 + 1 = 2
\end{aligned}
$$

◀

Solution

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\tan x-\tan\sin x+\tan\sin x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\tan x-\tan\sin x}{\tan x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan\sin x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\tan x-\tan\sin x}{\tan x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan\sin x\,(1-\cos\sin x)}{\tan x\,(1-\cos x)}\\
&=\underset{\varepsilon\in(\sin x,\tan x)}{(\tan\varepsilon)'}+\lim_{x\to 0}\frac{x\times\frac{1}{2}x^2}{x\times\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{\cos^2\varepsilon}+1=1+1=2
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 4.35: 求极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$$

Solution

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x\left(e^{(x-1)\ln x}-1\right)}{\ln x-x+1}\\
&=\lim_{x\to 1}x\times\lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)\ln x}-1}{\ln x-x+1}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)}-1}{-\frac{1}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)}{-\frac{1}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)}\\
&=-2
\end{aligned}
$$

◀

Example 4.27: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$

Solution

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\ (0<\theta_{n+1}<1)$$

$$n!e=\underbrace{n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)}_{\text{整数}}+\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)&=\lim_{n\to\infty} n\sin\left[2\pi e n!-\overbrace{2\pi n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)}^{\sin(x\pm 2k\pi)=\sin x,\ k\in\mathbb{Z}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)=2\pi
\end{aligned}
$$

◀

Example 4.28: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}\right)$

Solution

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{C_n^1}+\frac{1}{C_n^{n-1}}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=2\end{aligned}$$

◀

Example 4.29: 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}$

Solution

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+o(x^2)$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}\\ =&\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)-\sin^2 x+\sin^2 x-2(1-\cos x)+4\sin^2\frac{x}{2}-6\left(\sqrt[3]{1+2\sin^2\frac{x}{2}}-1\right)}{x^4}\\ =&\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)-\sin^2 x}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-2(1-\cos x)}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}-6\left(\sqrt[3]{1+2\sin^2\frac{x}{2}}-1\right)}{x^4}\\ =&\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}\sin^4 x}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{4x^3}+\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}-6\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{3}-\frac{(2\sin^2\frac{x}{2})^2}{9}+o(x^2)\right)}{x^4}\\ =&-\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{4x^3}+\lim_{x\to0}\frac{6\times\frac{(2\sin^2\frac{x}{2})^2}{9}+o(x^4)}{x^4}\\ =&-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}=-\frac{7}{12}\end{aligned}$$

◀

Example 4.30: 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}$

Solution(by ytdwdw)

Lemma 4.1

若 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} g(x)=0$, 且对 $0<|x|<\delta$ 成立 $f(x)\neq g(x)$, 则

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan f(x)-\tan g(x)}{f(x)-g(x)}=1$$

我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}&\xlongequal{\text{用}x\text{代替}\tan x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan\sin\arctan x}{x^7}\\ &\xlongequal{4.3}\lim_{x\to0}\frac{\arctan\sin x-\sin\arctan x}{x^7}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal{\sin\arctan x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\lim_{x\to0}\frac{\arctan\sin x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x^7}\\
&\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac32}}}{7x^6}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^2}-\frac{1}{(1+x^2)^3}}{14x^6}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{1-\sin^4 x-\left(\frac{1+\sin^2 x}{1+x^2}\right)^3}{14x^6}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^4 x-\frac{3(x^2-\sin^2 x)}{1+x^2}}{14x^6}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14}
\end{aligned}
$$

接下来可以这样计算

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14}&=\lim_{x\to0}\frac{3x^2-\frac{15-16\cos2x+\cos4x}{8}}{14x^6}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{24x^2-4(15-16\cos x+\cos 2x)}{7x^6}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{24x-2(16\sin x-2\sin 2x)}{21x^5}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{24-2(16\cos x-4\cos 2x)}{105x^4}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{8\sin x-4\sin 2x}{105x^3}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{8\cos x-8\cos 2x}{315x^2}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-4\sin x+8\sin 2x}{315x}-\frac{1}{14}=-\frac{1}{30}
\end{aligned}
$$

也可以这样算

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14}&=\lim_{x\to0}\frac{3x^2-3\left(\sin x+\frac{\sin^3 x}{6}\right)^2}{14x^6}-\frac{11}{12\times14}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{3\left(x-\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}\right)}{7x^5}-\frac{11}{12\times14}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{3\left(1-\cos x-\frac{\sin^2 x\cos x}{2}\right)}{35x^4}-\frac{11}{12\times14}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{3\left(\sin x-\sin x\cos^2 x+\frac{\sin^3 x}{2}\right)}{140x^3}-\frac{11}{12\times14}\\
&=\frac{9}{280}-\frac{11}{12\times14}=-\frac{1}{30}
\end{aligned}
$$

或

$$
\lim_{x\to0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2-3\left(\sin x+\frac{\sin^3 x}{6}\right)^2}{14x^6}-\frac{11}{12\times14}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{3\left(x-\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}\right)}{7x^5}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{3\left(\arcsin x-x-\frac{x^3}{6}\right)}{7x^5}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1-\frac{x^2}{2}\right)}{35x^4}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1-\frac{x}{2}\right)}{35x^2}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{3\left((1-x)^{-\frac{3}{2}}-1\right)}{140x}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \frac{9}{280}-\frac{11}{12\times 14}=-\frac{1}{30}
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 4.36: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n.$$

Solution(by Hansschwarzkopf) 令

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n.$$

注意到

$$1-\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x}}\leqslant 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2,\forall x\in[0,1],$$

得到

$$\left(1-\frac{n+1}{4n^2}\right)^n\leqslant a_n=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)^n\leqslant\left(1-\frac{n+1}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{48n^4}\right)^n.$$

故

$$a_n=\left(1-\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=e^{-\frac{1}{4}}+o(1),\quad n\to\infty.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-\frac{1}{4}}.$$

◀

Exercise 4.37: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)\right)\right)^n-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right]$$

✎ Solution(by 西西) 记

$$I=n\left[\left(\frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)\right)\right)^n-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right]$$

则

$$I=\frac{n}{\sqrt[4]{e}}\left(\exp\left(n\ln\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}}{\pi}+\frac{1}{4}\right)-1\right)$$

注意到

$$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}=\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\quad(n\to+\infty)$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to+\infty)$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=1-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)=1-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\begin{aligned}&\ln\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)\right]\\&=-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]\\&\quad-\frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)}{4n^2}-\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}+\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]\right]^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to+\infty)\end{aligned}$$

$$n\ln\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)\right]+\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + n\left[-\frac{(n+1)}{4n^2} + \frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4} - \frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{15}{96n} - \frac{\pi^2}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to +\infty)$$

这里得注意到事实

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right] \sim \frac{\pi^2}{n^2}$$

所以就有

$$\lim_{n\to\infty} I = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[4]{e}}\left(e^{-\frac{15}{96n}-\frac{\pi^2}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) = -\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\left(\frac{15}{96} + \frac{\pi^2}{6}\right)$$

◀

Exercise 4.38: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n\right)$$

Solution 利用不等式

$$\left(\frac{n-i}{n}\right)^n \le e^{-i}$$

可得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} \le \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1}$$

另一方面，对于固定的正整数 k ，截取题目数列的后 $k+1$ 项，由于是有限项，所以可以逐项求极限，可得原极限大于等于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-i}{n}\right)^n &= \sum_{i=0}^{k}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-i}{n}\right)^n \\ &= \sum_{i=0}^{k} e^{-i} = \frac{1-e^{-k-1}}{1-e^{-1}}\end{aligned}$$

再令 $k \to \infty$ 即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{e-1}$$

◀

Corollary 4.3 [9]

Let $f:(0,1]\to(0,+\infty)$ be a differentiablr function on (0,1) with $f'(1)>0$ and $\ln f$ having decreasing derivative. Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be the sequence defined by

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]^n.$$

Then,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}0 & \text{if } f(1)<1,\\ \dfrac{1}{1-e^{-f'(1)}} & \text{if } f(1)=1,\\ +\infty & \text{if } f(1)>1.\end{cases}$$

Exercise 4.39: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{e}{e-1}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\right]$$

Solution(小灰灰)

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{e}{e-1}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}-\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}-\left(1-\frac{k}{n}\right)^n+\sum_{k=n}^{\infty}e^{-k}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}\left(1-\left(1-\frac{k}{n}\right)^n e^k\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}\left(-\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)^n-k\right)+O\left(\left(-\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)^n-k\right)^2\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}\left(n\left(\frac{k}{n}+\frac{k^2}{2n^2}+o\left(\frac{k^3}{3n^3}\right)\right)-k\right)+o\left(\left(-\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)^n-k\right)^2\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}\left(\frac{k^2}{2n}+O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)\right)+O\left(\left(\frac{k^2}{2n}\right)^2\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}\frac{k^2}{2}+\frac{1}{n}o\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}k^3\right)+\frac{1}{4n}o\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}k^4\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}\frac{k^2}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\frac{k^2}{2}=S=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k+1}\frac{(k-1)^2}{2}\\
&=eS-\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k+1}\frac{2k-1}{2}=\frac{1}{2e-2}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k+1}(2k-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2e-2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}(2k+1) = \frac{1}{2e-2} + e^{-1}S + \frac{1}{2e-2}\sum_{k=1}^{\infty} 2e^{-k} \\
&= \frac{1}{1-e^{-1}}\frac{1}{2e-2}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} 2e^{-k}\right) = \frac{e^{-1}(e^{-1}+1)}{2(1-e^{-1})^3} \\
&= \frac{e(e^2+1)}{2(e-1)^3}
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 4.40: 求极限

$$
\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{24(e-1)^5} - n\left(n\left(\frac{e}{e-1} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\right) - \frac{e(e+1)}{2(e-1)^3}\right)\right]
$$

✎ Solution(西西) 我们如果利用泰勒公式就可以达到很好的结果

$$
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}
$$

注意到

$$
e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} = e^{-k}\left(1 - \frac{k^2}{2n} + \frac{k^3(3k-8)}{24n^2} - \frac{k^4(k^2-8k+12)}{48n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right)
$$

且注意到

$$
\sum_{k=0}^{n} e^{-k} = \frac{e}{e-1}
$$

$$
\sum_{k=0}^{n} k^2 e^{-k} = \frac{e(e+1)}{(e-1)^3}
$$

和

$$
\sum_{k=0}^{n} k^3(3k-8)e^{-k} = \frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{(e-1)^5}
$$

$$
\sum_{k=0}^{n} k^4(k^2-8k+12)e^{-k} = \frac{e(21+365e+502e^2-138e^3-35e^4+5e^5)}{(e-1)^7}
$$

带入即可得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n = {}& \frac{e}{e-1} - \frac{1}{2n}\cdot\frac{e(e+1)}{(e-1)^3} + \frac{1}{24n^2}\cdot\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{(e-1)^5} \\
& - \frac{1}{48n^3}\cdot\frac{e(21+365e+502e^2-138e^3-35e^4+5e^5)}{(e-1)^7} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}
$$

那么我们可以达到

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{24(e-1)^5}-n\left(n\left(\frac{e}{e-1}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\right)-\frac{e(e+1)}{2(e-1)^3}\right)\right]$$
$$=\frac{e(21+365e+502e^2-138e^3-35e^4+5e^5)}{48(e-1)^7}$$

◀

Exercise 4.41: 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right)$$

Solution: 解法 1 由不等式

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{e}\right)^n\cdot(n+1)$$

得

$$\frac{n+1}{e} < \sqrt{n!} < \frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

令

$$a_n=\left(((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right)=(n!)^{\frac{1}{n}}\left(\left(\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)$$

则有

$$\frac{n+1}{e}\left(\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)<a_n<\frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}\left((e^n)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)$$

一方面, 有

$$\frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}\left((e^n)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)=\left((n+1)(e^{\frac{1}{n+1}}-1)\right)\cdot\frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{e}\to\ln e\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(n\to\infty)$$

另一方面, 令 $t_n=(n+1)^{\frac{1}{n}}-1>0$, 则 $\lim_{n\to+\infty} t_n=0$, 于是

$$a_n=\left(\frac{e}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{n+1}}-1=\left(\frac{e}{1+t_n}\right)^{\frac{1}{n+1}}-1$$

$$n+1=\frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln 1+a_n}$$

$$\frac{n+1}{e}\left(\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln 1+a_n}a_n\right)=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}}=\frac{1}{e}\frac{\ln\frac{e}{1+0}}{\ln e}=\frac{1}{e}$$

根据夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left(((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{e}$$

解法 2 由

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to+\infty}\left((n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}=1^0=1$$

$$\lim_{n\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}=0$$

得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{e}\left(\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{e(n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}}}\left(e^{\frac{1}{n+1}}-e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}\right)\\
=&\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}(n+1)\left(e^{\frac{1}{n+1}}-e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}\right)\\
=&\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}-\frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}-1}{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln(n+1)}{n}\right)\\
=&\frac{1}{e}(1-1\times 0)=\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

□

4.3.1 泰勒中值定理–积分型余项

Theorem 4.10 泰勒中值定理–积分型

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的领域 $U(x_0)$ 内有连续的 $n+1$ 阶导数, 则 $\forall x\in U(x_0)$， 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$ 称为积分型余项

Example 4.31: 证明: $1+\dfrac{n}{1!}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}>\dfrac{e^n}{2}$ 对于每个整数 $n\geqslant 0$ 成立

Solution 由于 $e^n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^n(n-t)^ne^t\,\mathrm{d}t$, 问题等价于证明

$$n!>2e^{-n}\int_0^n(n-t)^ne^t\,\mathrm{d}t$$

即

$$\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t>2e^{-n}\int_0^n(n-t)^ne^t\,\mathrm{d}t$$

令 $u=n-t$, 上式化为

$$\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t>2\int_0^n u^ne^{-u}\,\mathrm{d}u$$

从而其等价于

$$\int_n^{+\infty}u^ne^{-u}\,\mathrm{d}u>\int_0^n u^ne^{-u}\,\mathrm{d}u$$

设 $f(u)=u^n e^{-u}$, 则只要证明

$$f(n+h)\geqslant f(n-h)\,,\quad 0\leqslant h\leqslant n$$

则问题得证. 以下证明上式成立. 上式等价于证明

$$(n+h)^n e^{-n-h}\geqslant (n-h)e^{h-n}$$

即

$$n\ln(n+h)\geqslant n\ln(n-h)+h$$

令 $g(h)=n\ln(n+h)-n\ln(n-h)-2h$, 则 $g(0)=0$, 并且对 $0<h<n$, 有

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}=\frac{n}{n+h}+\frac{n}{n-h}-2=\frac{2n^2}{n^2-h^2}-2>0$$

从而当 $0<h<n$ 时, $g(h)>0$. 这样问题得证 ◀

Note: 利用这一结论我们可以证明如下结论。证明存在 $50<a<100$. 使得

$$\int_0^a e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{100}}{100!}\right)\mathrm{d}x=50$$

Exercise 4.42: 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n}$$

Solution 解法 1

$$e^n=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\mathrm{d}x$$

原命题等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\quad \text{而}n!=\sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta}{12n}},\theta\in(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

注意到 $e^{-\frac{x^2}{2}}\geq(1-x)e^x(x\geq 0)$

$$\therefore\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\mathrm{d}x\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\sqrt{n}e^{-\frac{nx^2}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

考虑

$$f(x)=(1-x)e^x-e^{-\frac{ax^2}{2}}(x\geq 0,a\geq 1),f'(x)=xe^x(ae^{-\frac{ax^2}{2}-x}-1)$$

$$\because\quad \lim_{x\to 0^+}(ae^{-\frac{ax^2}{2}-x}-1)=a-1>0\text{,故存在 }x_a\in(0,1)\text{,使得 }ae^{-\frac{ax^2}{2}-x}-1>0$$

$$(1-x)e^x\geq e^{-\frac{ax^2}{2}}(x\in[0,x_a])\Rightarrow\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\mathrm{d}x$$

$$\geq \lim_{n\to\infty}\int_0^{x_a}\sqrt{n}e^{-\frac{nax^2}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

因为 a 是任意的，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\mathrm{d}x\geq\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

综上得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

◀

✎ Solution 解法 2

$$\because\quad(1+n+\frac{n^2}{n!}+\cdots+\frac{n^n}{n!})=e^n-\int_0^n e^t\frac{(n-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\xlongequal{n-t=x}e^n-e^n\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$$

两边除以 e^n

$$\therefore\ a_n=1-\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$$

下面求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$

令 $\eta=n^{-\frac{1}{2}+z},0<\varepsilon<\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\because\quad\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\mathrm{d}x&\xlongequal{x=n(z+1)}\int_{-1}^0\frac{e^{-n(z+1)}(z+1)^nn^{n+1}}{n!}dz\\&=n\frac{n^n}{n!e^n}\int_{-1}^0e^{-nz}(z+1)^ndz\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(\frac{1}{n})]\int_{-1}^0[e^{-z}(z+1)]^ndz\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(\frac{1}{n})][\int_{-1}^\eta[e^{-z}(z+1)]^ndz+\int_{-\eta}^0[e^{-z}(1+z)]^ndz]\\&=I_1+I_2\end{aligned}$$

设 $f(z)=e^{-z}(1+z),(z\leq 0),f'(z)=-e^{-z}\cdot z\geq 0$

$$\therefore\int_{-1}^\eta[e^{-z}(1+z)]^ndz<(1-\eta)[e^{-\eta}(1-\eta)]^n<[e^{-\eta}(1-\eta)]^n$$

$$\therefore\ I_1=o(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}n^{2z}})$$

下面考虑 I_2

$$\because\ e^{-z}(1+z)=e^{-z+\ln(z+1)}=e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4(1+\theta(z))^4}}\quad(0<\theta(z)<1)$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(n^{-1+4z})]\int_{-\eta}^{0} e^{-n(\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3})}dz \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(n^{-1+4z})]\int_{-\eta}^{0} e^{-n\frac{z^2}{2}}(1+n\frac{z^3}{3})dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^z}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}})\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{n\to\infty} a_n &= 1-\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\mathrm{d}x \\
&= 1-(\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2)) \\
&= 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^z}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}})\,\mathrm{d}y \\
&= 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\int_{-\infty}^{0}\frac{y^3}{3}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y \\
&= 1-\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}(-\frac{2}{3}) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

从这个解答也可以看出

$$\begin{aligned}
&(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}) \\
&= e^n-e^n\int_0^n \frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^n (x+n)^n e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^n}{n!}\int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\mathrm{d}x \sim \frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}
\end{aligned}$$

◀

✎ Solution 解法 3 考虑 Taylor 公式的积分形式, 有

$$e^n = 1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!} &= e^n-\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t \\
\text{令}(n-t=x)\qquad &= e^n-e^n\int_0^n \frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x \\
\text{注意到}(\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x=1)\qquad &= e^n(\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x-\int_0^n \frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x) \\
&= e^n\int_n^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{n!}\int_n^{+\infty}x^ne^{n-x}\mathrm{d}x$$

令$(n-x=-t)$ $$=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}(n+t)^ne^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{n^n}{n!}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^ne^{-x}\mathrm{d}x$$

由 Striling 公式得

$$\frac{n^n}{n!}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^ne^{-x}\mathrm{d}x\sim\frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$
$$n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2n\pi}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n!}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^ne^{-x}\mathrm{d}x}{e^n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}{e^n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n^ne^{-n}\sqrt{2n\pi}}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}{e^n}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

证明:

$$\frac{n^n}{n!}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^ne^{-x}\,\mathrm{d}x\sim\frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

因为

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^ne^{-x}=e^{-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{3n^2}+o(\frac{x^3}{n^3})}$$

所以

$$\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^ne^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1e^{-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{3n^2}+o(\frac{x^3}{n^3})}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2n}\int_0^ne^{-t^2}e^{o(\frac{1}{\sqrt{n}})}\,\mathrm{d}t\sim\sqrt{2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

下面考察

$$\frac{n^n}{n!}\int_1^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^ne^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_n^{\infty}(1+x)^ne^{-nx}\,\mathrm{d}x<\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-\frac{n^2}{2}}\int_n^{\infty}(1+x)^ne^{-nx/2}\,\mathrm{d}x$$

因为

$$\ln(n^{n+1}e^{-\frac{n^2}{2}})=(n+1)\ln n-\frac{n^2}{2}=n^2\left[(1+\frac{1}{n})\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\right]$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{n+1}e^{-\frac{n^2}{2}}=0$, 且由 $e^{\frac{nx}{2}}>\dfrac{\left(\frac{nx}{2}\right)^{n+2}}{(n+2)!}\Rightarrow e^{-\frac{nx}{2}}<\dfrac{(n+2)!}{(\frac{nx}{2})^{n+2}}$

$$\Rightarrow\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-\frac{n^2}{2}}\int_n^{\infty}(1+x)^ne^{-nx/2}\,\mathrm{d}x<\frac{n^{n+1}e^{-\frac{n^2}{2}}(n+1)(n+2)}{(\frac{n}{2})^{n+2}}\int_n^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+2}}=0.\lim_{n\to\infty}\int_n^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-\frac{n^2}{2}}\int_n^{\infty}(1+x)^ne^{-nx/2}\,\mathrm{d}x=0$$

所以

$$\frac{n^n}{n!}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^ne^{-x}\,\mathrm{d}x\sim\frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

◀

✎ Solution 解法 4 考虑中心极限定理

我们来证一个一般性的结论设 $x_1,x_2,\cdots$ 为相互独立且服从参数 λ 的普阿松分布 $P(x_i=k)=\frac{1}{k!}e^{-\lambda}$

$\therefore\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 服从参数 $n\lambda$ 的普阿松分布, 即 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=k\right)=\frac{(n\lambda)}{k!}e^{-n\lambda}$ 因为

$$E(\sum_{i=1}^{n}x_i)=n\lambda,\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n}x_i)=n\lambda$$

由中心极限定理对任意的 x 有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

因为

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}<x\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}x_i<n\lambda+x\sqrt{n\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{[n\lambda+x\sqrt{n\lambda}]}\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}e^{-n\lambda}\sum_{k=0}^{[n\lambda+x\sqrt{n\lambda}]}\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

所以取 $x=0,\lambda=1$ 即得到: $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}$ ◀

Exercise 4.43: 设 $a_n=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}}{e^n}$, 我们来计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

✎ Solution 因为

$$\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)=e^n-\int_0^n\frac{(n-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t\overset{n-t=x}{=}e^n-e^n\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x$$

两边除以 e^n

$$\Rightarrow a_n=1-\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x,\text{ 即求 }\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x\text{ 就好}$$

先令 $\eta{=}n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon},0<\varepsilon<\dfrac{1}{6}.$
因为

$$\begin{aligned}\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x&\xlongequal{x=n(z+1)}\int_{-1}^0\frac{e^{-n(z+1)}(z+1)^nn^{n+1}}{n!}dz\\&=n\frac{n^n}{n!e^n}\int_{-1}^0e^{-nz}(z+1)^ndz\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[1+o(\frac{1}{n})\right]\int_{-1}^0[e^{-z}(1{+}\mathrm{z})]^ndz\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[1+o(\frac{1}{n})\right]\left[\int_{-1}^{\eta}[e^{-z}(1{+}\mathrm{z})]^ndz+\int_{-\eta}^0[e^{-z}\,(1+z)]^ndz\right]\\&=I_1+I_2\end{aligned}$$

设 $f(z)=e^{-z}(1+z),(z\le 0).f'(z)=-e^{-z}z\ge 0.$
所以

$$\int_{-1}^{\eta}[e^{-z}(1{+}\mathrm{z})]^ndz<(1-\eta)[e^{-\eta}(1-\eta)]^n<[e^{-\eta}(1-\eta)]^n$$

所以 $I_1=o(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}})$
再来考虑 I_2，$e^{-z}(1+z)=e^{-z+\ln(z+1)}=e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4(1+\theta(z))^4}},0<\theta(z)<1$
所以

$$\begin{aligned}I_2&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[1+o(n^{-1+4\varepsilon})\right]\int_{-\eta}^0e^{-n(\frac{x^2}{2}-\frac{z^3}{3})}dz\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[1+o(n^{-1+4\varepsilon})\right]\int_{-\eta}^0e^{-n\frac{z^2}{2}}(1+n\frac{z^3}{3})dz\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^{\varepsilon}}^0e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\left(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=1-\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x=1-\left(\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2)\right)\\&=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^{\varepsilon}}^0e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\left(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= 1-\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x = 1-\left(\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2)\right)\\ &= 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^\varepsilon}^0 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\left(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y\\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\int_{-\infty}^0\frac{y^3}{3}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\\ &= 1-\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

得证, 从这个解答也可以看出

$$\begin{aligned}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{n^n}{n!}\right) &= \mathrm{e}^n-e^n\int_0^n\frac{x^n}{n!}e^{-x} = \frac{1}{n!}\int_0^\infty (x+n)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{n^n}{n!}\int_0^\infty\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &\sim \frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}\end{aligned}$$

◀

Exercise 4.44: 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\left(\sum_{k=0}^n\frac{n^k}{k!}-\sum_{k=n+1}^\infty\frac{n^k}{k!}\right)=\frac{4}{3}$$

Solution(西西): 我们有

$$e^n=\sum_{k=0}^n\frac{n^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^\infty\frac{n^k}{k!}=\sum_{k=0}^n\frac{n^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$$

所以

$$\sum_{k=n+1}^\infty\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$$

$$\sum_{k=0}^n\frac{n^k}{k!}=e^n-\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$$

因此，只要计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\left(e^n-\frac{2}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t\right)$$

下面来估计

$$\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$$

我们有

$$\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t=n^{n+1}\int_0^1 e^{nz}(1-z)^n dz$$

$$
\begin{aligned}
&= n^{n+1}\int_0^1 e^{n(z+\ln(1-z))}dz \\
&= n^{n+1}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2-\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)}dz \\
&= n^{n+1}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(1-\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{n!}{n^n}\left(e^n-\frac{2}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t\right) \\
=&\frac{n!e^n}{n^n}-2n\left[\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(1-\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz\right] \\
=&\left(\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}-2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}dz\right)+2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz
\end{aligned}
$$

其中 $\theta_n \in (0,1)$

显然有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}-2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}dz\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(\int_0^{\frac{n}{2}}e^{-z}zdz+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{4}{3}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\right)=\frac{4}{3}$$

◀

Exercise 4.45: 求证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}$$

Solution ◀

Exercise 4.46: 求证

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}-\sqrt{n}\left(e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{23}{270\sqrt{2\pi}}$$

Solution ◀

Exercise 4.47: 设 $a>1$，试证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^a\left(e^{-x}x\right)^n\mathrm{d}x=1$$

Solution 首先,

$$\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}\left(e^{-x}x\right)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}e^{-y}y^n\,\mathrm{d}y=1.$$

其次, 取 $\lambda \in (0,1)$ 使得 $a\lambda > 1$. 命

$$f(x) = e^{-\lambda x}x \Rightarrow f'(x) = e^{-\lambda x}(1-\lambda x) \Rightarrow f'(x) < 0, \quad \forall x \in [a,\infty).$$

因此

$$e^{-\lambda x}x \le e^{-\lambda a}a, \quad \forall x \in [a,\infty).$$

$$\begin{aligned}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_a^\infty (e^{-x}x)^n\,\mathrm{d}x &= \frac{n^{n+1}}{n!}\int_a^\infty e^{-(1-\lambda)xn}(e^{-\lambda x}x)^n\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{n^{n+1}}{n!}(e^{-\lambda a}a)^n\int_a^\infty e^{-(1-\lambda)xn}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{n^{n+1}}{n!}(e^{-\lambda a}a)^n\frac{e^{-(1-\lambda)an}}{(1-\lambda)n}\\ &= \frac{n^n}{n!}a^n\frac{e^{-an}}{1-\lambda}\\ &\sim \frac{1}{(1-\lambda)\sqrt{2n\pi}}(ae^{1-a})^n \to 0.\end{aligned}$$

由此可知:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^a (e^{-x}x)^n\,\mathrm{d}x = 1.$$

◀

✎ Solution 令 $nx = t$, 则原极限等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{na} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = 1.$$

注意到

$$1 = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t,$$

上式又等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_{na}^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = 0.$$

事实上, 容易算出

$$\int_{na}^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = \left((na)^n + n(na)^{n-1} + n(n-1)(na)^{n-2} + \ldots + n!\right)e^{-na}.$$

由 $a > 1$ 易知

$$(na)^n + n(na)^{n-1} + n(n-1)(na)^{n-2} + \ldots + n! < (n+1)(na)^n.$$

因此

$$\frac{1}{n!}\int_{na}^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t < \frac{(n+1)(na)^n e^{-na}}{n!}.$$

根据 Stirling 公式和 $e^{a-1} > a(a > 1)$,

$$\frac{(n+1)(na)^n e^{-na}}{n!} \sim \frac{(n+1)(na)^n e^{-na}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{a}{e^{a-1}}\right)^n \to 0(n\to\infty).$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_{na}^{+\infty}t^ne^{-t}\mathrm{d}t=0,a>1.$$

注意上式即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{na}{1!}+\frac{(na)^2}{2!}+\ldots+\frac{(na)^n}{n!}}{e^{na}}=0,a>1.$$

◀

4.4 函数的单调性与曲线的凹凸性

4.4.1 曲线的凹凸性与拐点

Definition 4.1

设函数 f 在区间 I 上定义. 若对每一对点 $x_1, x_2\in I$, $x_1\neq x_2$ 和每个 $\lambda\in(0,1)$ 成立不等式

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\tag{4.10}$$

则称 f 为区间 I 上的下凹函数

Theorem 4.11

如 f 为区间 I 上的二阶可微下凸函数, 则对任何 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$ 与满足条件 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ 的 n 个正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 成立不等式

$$\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)\geqslant f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)$$

又若 f 严格下凸, 则上述不等式成立等号的充分必要条件是

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

Exercise 4.48: 设 $n\geq 1,a_1,a_2,\cdots,a_n>0$. 求证

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{n-1}{n}\max_{i.j\in R}(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2$$

Solution:(by tian27546) 设

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$\max_i a_i=b,\min_i a_i=a$$

考虑任意 $a_i \ge a_j$ 则有

$$\begin{aligned} & f(a_1,a_2,\cdots,a_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_i+\varepsilon,\cdots,a_j-\varepsilon,\cdots,a_n) \\ =& \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}-\sqrt[n]{a_1\cdots(a_i+\varepsilon)(a_j-\varepsilon)\cdots a_n} \\ =& \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}(\sqrt[n]{(a_i+\varepsilon)(a_j-\varepsilon)}-\sqrt[n]{a_ia_j}) \end{aligned}$$

注意

$$aia_j-(a_i+\varepsilon)(a_j-\varepsilon)=\varepsilon(a_i-a_j)+\varepsilon^2\ge 0$$

故

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_i+\varepsilon,\cdots,a_j-\varepsilon,\cdots,a_n)\le 0$$

如此下去, 我们只有当 a_i 中有 k 个值为 a, 有 $n-k-1$ 个取 b, 还有一个是任意的, 不妨设是 $a_p=x>0$, 故我们考虑

$$f(c)=\frac{ka+(n-k-1)b+x}{n}-\sqrt[n]{a^kb^{n-k-1}x}$$

显然有

$$f''(x)=\sqrt[n]{a^kb^{n-k-1}}\cdot\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}-2}>0$$

故 f 是凸函数, 那么只有当 $x=b$ 时取得最大. 故我们只要证明

$$\frac{ka+(n-k)b}{n}-\sqrt[n]{a^kb^{n-k}}\le\frac{n-1}{n}(a-2\sqrt{ab}+b)$$

即等价证明

$$(n-1-k)+(k-1)b+n\sqrt[n]{a^kb^{n-k}}\ge(2n-2)\sqrt{ab}$$

这显然有 $2n-2$ 元均值不等式有

$$a+\cdots a+b+\cdots b+\sqrt[n]{a^nb^{n-k}}+\cdots+\sqrt[n]{a^nb^{n-k}}\ge(2n-2)\sqrt[2n-2]{a^{n-1-k}b^{k-1}a^kb^{n-k}}=(2n-2)\sqrt{ab}$$

证毕!

按照同样方法我们可以得到下界:

$$\frac{n^2-1}{6}\min_{i,j}(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

□

4.5 函数的极值与最大值最小值

Example 4.32: 设 $a>b>1$. 证明: $a^{b^a}>b^{a^b}$

Proof: (by Hansschwarzkopf)

1) 若 $b^a>a^b$, 则

$$a^{b^a}>b^{b^a}>b^{a^b}.$$

2) 若 $b^a \le a^b$, 则 $\frac{\ln a}{\ln b} \ge \frac{a}{b}$. 注意到 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上为严格减函数, 从而 $\frac{\ln b}{b-1} > \frac{\ln a}{a-1}$, 即 $\frac{a}{b} > \frac{a^b}{b^a}$. 因此

$$\frac{\ln a}{\ln b} \ge \frac{a}{b} > \frac{a^b}{b^a}.$$

即

$$a^{b^a} > b^{a^b}.$$

□

Example 4.33: 设 $0 < x < 1$, 证明: $(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 4$

Proof:(by Hansschwarzkopf) 两边取对数得

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 4 \Longleftrightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \ln 4$$

令 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x) = \frac{2\ln(1+x)}{x^3} - \frac{4x^2+2x}{x^2(1+x)^2} = \frac{2}{x^3}\left(\ln(1+x) - \frac{2x^2+x}{(1+x)^2}\right).$$

令 $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x^2+x}{(1+x)^2}$, 则 $g'(x) = \frac{x^2-x}{(1+x)^3} = \frac{x(x-1)}{(1+x)^3} < 0$, $\forall x \in (0,1)$, 故

$$g(x) < g(0) = 0\,, \quad \forall x \in (0,1).$$

因此 $f''(x) < 0$, $\forall x \in (0,1)$. 进一步有

$$f(x) < f(1) + f'(1)(x-1) = f(1) = \ln 4\,, \quad \forall x \in (0,1).$$

从而

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{f(x)} < 4\,, \quad \forall x \in (0,1)\,.$$

□

Example 4.34: 求函数

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

的极值, 其中 n 为正整数

Solution $f(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$,

$$f'(x) = -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= e^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

令 $f'(x)=0$, 可解得唯一驻点 $x=0$. 当 n 为奇数时,

$$f'(x)\begin{cases}>0, & x<0\\ <0, & x>0\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 取得极大值 $f(0)=1$; 而当 n 为偶数时, $\forall\, x\neq 0$ 有 $f'(x)<0$ 所以此时 $f(x)$ 无极值 ◀

Exercise 4.49: 设 $x>0$, 证明 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 其中 $\dfrac{1}{4}<\theta(x)<\dfrac{1}{2}$

Solution(by 蓝兔兔): 由题易得

$$\begin{aligned}\theta(x)&=\frac{1}{4(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})^2}-x\\&=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{x^2+x}-2x+1\right)\end{aligned}$$

令 $g(x)=2\sqrt{x^2+x}-2x+1$, 则有 $g(0)=1$ 因为

$$g'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}-2=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x^2+x}}\geqslant 0$$

由此可知 $g(x)\uparrow$

又 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)=1$ 以及 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1+2\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=2$

所以 $\theta(x)=\dfrac{1}{4}g(x)\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

◀

Solution(by Hilbert): 由题

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}\iff\sqrt{1+x}+\sqrt{x}=2\sqrt{x+\theta(x)}$$

故

$$\begin{aligned}\theta(x)&=\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}\right)^2-x=\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\\&=\frac{3\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{2}\\&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}+2\sqrt{x}}{4\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\end{aligned}$$

显然 $\theta(x)\uparrow$, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$ 以及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$

故 $\theta(x)\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

◀

Exercise 4.50: 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 证明: $\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$

Proof: 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2\cos x}{\sin^3 x}=\frac{2(x^3\cos x-\sin^3 x)}{x^3\sin^3 x}\tag{4.11}$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}-x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{\cos^{\frac{4}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^2 x}{\cos^{\frac{2}{3}}x}-1\\&=\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x-1\end{aligned}$$

由均值不等式, 得

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x&=\frac{1}{3}\left(\cos^{\frac{2}{3}}x+\cos^{\frac{2}{3}}x+\cos^{-\frac{3}{4}}x\right)\\&>\sqrt[3]{\cos^{\frac{2}{3}}x+\cos^{\frac{2}{3}}x+\cos^{-\frac{3}{4}}x}=1\end{aligned}$$

所以当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\varphi'(x)>0$, 从而 $\varphi(x)$ 单调递增，又 $\varphi(0)=0$, 因此 $\varphi(x)>0$, 即

$$x^3\cos x-\sin^3 x<0$$

由 (4.11) 式得 $f'(x)<0$ 从而 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\frac{4}{\pi^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}f(x)&=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x+x}{x}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x\tan^2 x}\\&=2\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

所以 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}$$

□

Example 4.35: 设 a,b,c,d 是 4 个不等于 1 的正数, 满足 $abcd=1$, 问 $a^{2010}+b^{2010}+c^{2010}+d^{2010}$ 和 $a^{2011}+b^{2011}+c^{2011}+d^{2011}$ 哪个数大? 为什么?

Solution

$$f(x) = a^x + b^x + c^x + d^x (x > 0)$$

则有

$$f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c + d^x \ln d$$

且有 $f'(0) = 0$. 二阶导数

$$f''(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b + c^x \ln^2 c + d^x \ln^2 d > 0$$

故有 $f'(x) > 0, x > 0. f(x)$ 严格单调递增, 故

$$f(2010) < f(2011)$$

本题的推广

设 $a_i > 0, p > q, p, q \in \mathbb{R}$ 若 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 则 $\sum_{i=1}^{n} a_i^p \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^q$. ◀

Example 4.36: 证明: $\dfrac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} < \arctan a - \arctan b < a - b$, 其中 $0 < b < a$

Proof: 设 $f(x) = \arctan x$. 则 f 在 $[b, a]$ 上连续可导, $f' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
由拉格朗日 (Lagrange) 中值定理, $\exists \xi(b, a)$, s.t

$$\arctan a - \arctan b = \frac{1}{1+\xi^2}(a-b) < a - b$$

为证明另一半不等式. 令 $a = \tan\alpha$, $b = \tan\beta$, 则

$$\frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} < \arctan a - \arctan b \Longleftrightarrow \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\sec\alpha\sec\beta} < \alpha - \beta$$
$$\Longleftrightarrow \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha < \alpha - \beta \Longleftrightarrow \sin(\alpha-\beta) < \alpha - \beta$$

$\sin(\alpha - \beta) < \alpha - \beta$ 当 $0 < \alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$ 成立

或者, 令 $F(x) = \arctan x - \arctan b - \dfrac{x-b}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+b^2}}$, 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2-bx}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\left[1 - \frac{bx+1}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+x^2}}\right] > 0 \end{aligned}$$

$F(x)$ 单调增, 由 $a > b$ 得

$$\arctan a - \arctan b - \frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} = F(a) - F(b) = 0.$$

由此得 $\arctan a - \arctan b > \dfrac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}$ □

Example 4.37:

Solution

◀

Exercise 4.51: 某产品的需求函数和总成本函数分别为 $p = 40 - 4q$ 和 $C(q) = 2q^2 + 4q + 10$，政府对产品以税率 t 征税，求:

(1) 厂方以税率 t 纳税后，获得最大利润时产品的产量和单价，以及征税收益.

(2) $t = 12$ 和 $t = 30$ 时，分别求厂方获得最大利润时产品的产量和单价，以及征税收益.

(3) 税率 t 为多少时，征税收益最大？此时产品的产量和单价为多少？

✎ Solution 纳税后的利润函数

$$L_t(q) = R(q) - C(q) - tq = 36q - 6q^2 - 10 - tq, \quad L'(q) = 36 - 12q - t = 0,$$

得唯一驻点 $q = \dfrac{36-t}{12}$，又 $L''(q) = -12 < 0$，所以 $q_t = q = \dfrac{36-t}{12}$ 是最大值点，此时

$$p_t = 40 - 4q_t = 28 + \frac{t}{3},$$

因此，以税率 t 纳税时，当产量 $q_t = \dfrac{36-t}{12}$，单价 $p_t = 28 + \dfrac{t}{3}$ 时，厂方获得最大利润，此时征税收益 $T = tq_t = \dfrac{36t - t^2}{12}$.

(2) 把 $t = 12$ 代入上述各值，得

$$q_{12} = \frac{36-12}{12} = 2, p_{12} = 28 + \frac{12}{3} = 32, T = 12 \times 2 = 24,$$

再把 $t = 30$ 代入，得

$$q_{30} = \frac{36-30}{12} = \frac{1}{2}, p_{30} = 28 + \frac{30}{3} = 38, T = 30 \times \frac{1}{2} = 15,$$

(3) 由征税收益

$$T = \frac{36t - t^2}{12}, \quad T' = \frac{18-t}{6} = 0, \quad T'' = -\frac{1}{6}$$

得唯一驻点 $t = 18$，又 $T''(18) < 0$，所以 $t = 18$ 为最大值点. 因此，当税率 $t = 18$ 时，征税收益最大，此时

$$q_{18} = \frac{36-18}{12} = \frac{3}{2}, \quad p_{18} = 40 - 4q_{18} = 40 - 4 \times \frac{3}{2} = 34,$$

征税收益

$$T = 18 \times \frac{3}{2} = 27,$$

因此，当税率 $t = 18$ 时，征税收益最大为 27，此时产品产出量为 1.5，单价为 34. ◀

4.6 Lagrange 差值公式

Exercise 4.52: 求

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}$$

✎ Solution 设

$$f(x) = x^{n+1} - x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

由插值公式我们有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{j\neq k}\frac{(x-j)}{k-j}\right)f(k)$$

比较两边 x^n 系数:

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{j\neq k}\frac{k^{n+1}}{k-j}\right)$$

化简得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1}=\frac{n(n+1)!}{2}$$

◀

4.7 函数的凹凸性

Theorem 4.12

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数, 那么

1. 如果在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;
2. 如果在 (a,b) 内 $f''(x)<0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

♣

☞ Proof: 先证情形 (1). 在 $[a,b]$ 上任取两点 x_1,x_2, 且 $x_1<x_2$, 记

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

由泰勒中值定理得:

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x_0)^2,\ 其中\ x_1<\xi_1<x_0,$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x_0)^2,\ 其中\ x_0<\xi_2<x_2.$$

由于

$$x_1-x_0=-(x_2-x_0),$$

所以

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}(x_1-x_0)^2,$$

由条件知 $f''(\xi_1)>0$, $f''(\xi_2)>0$, 从而有

$$f(x_1)+f(x_2)>2f(x_0),$$

即

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的. 情形 (2) 的证明与上类似, 定理证完. □

4.8 渐近线

Definition 4.2 水平渐近线

曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 与直线 $y=c$ 的距离为 $|f(x)-c|$，当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$ 三种情况之一成立，直线 $y=c$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线

Note: *一条曲线最多两条水平渐近线*

Definition 4.3 铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $\left(\text{或} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \text{ 或 } \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty\right)$，则直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线

Note: *当 $x=c$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点时，$x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线*

Definition 4.4 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，则直线 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线

Note: *有时需要分 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 加以讨论. 一条曲线最多两条斜渐近线*

Example 4.38: 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]$$

Solution

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{4x^2+x}-2x+2x\right)\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+2x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+2x\left(\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-\ln 2\right)\right]
\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+2x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{4}\ln 2+1$$

◀

Exercise 4.53: 求极限:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$$

Proof:

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}}-x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}x\left[(x+a)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x+a}}\right]+\lim_{x\to+\infty}a(x+a)^{\frac{1}{x}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}\left[e^{\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x}-1\right]+a\\
&\xlongequal{e^x-1\sim x}\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x+a}}\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x\right]+a\\
&=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x}\ln x\right)+\left(\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x+a}\ln x\right)\right]+a\\
&\xlongequal{\ln(1+x)\sim x}\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{a}{x^2}+\frac{a\ln x}{x(x+a)}\right]+a=a
\end{aligned}
$$

□

Definition 4.5 极坐标渐近线

对于以极坐标表示的曲线 $r=f(\theta)$，其渐近线为 $r\sin(\theta_0-\theta)=p$，其中 $\lim_{\theta\to\theta_0}f(\theta)=\infty$，$\lim_{\theta\to\theta_0}r(\theta_0-\theta)$.

Example 4.39: 求极坐标系下的曲线 $r=\frac{1}{3\theta-\pi}$ 的斜渐近线

Solution 写成参数方程形式

$$r=\frac{1}{3\theta-\pi}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\cos\theta}{3\theta-\pi}\\ y=\dfrac{\sin\theta}{3\theta-\pi}\end{cases}$$

当且仅当 $\theta\to\dfrac{\pi}{3}$ 时，才有 $x\to\infty$. 所以曲线至多有一条斜渐近线，由于

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\tan\theta=\sqrt{3}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-\sqrt{3}x)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta}{3\theta-\pi}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}=\frac{2}{3}$$

所以，有斜渐近线 $y=\sqrt{3}x+\dfrac{2}{3}$ ◀

4.9 曲率

Theorem 4.13 曲率 (直角坐标系)

设 $y=f(x)$ 二次可导, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x,f(x))$ 处的曲率值 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ♣

Theorem 4.14 曲率 (参数方程)

设 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 二阶可导, 则 $K=\dfrac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$ ♣

Proof: 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

故

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$$

□

Theorem 4.15 曲率 (极坐标系)

当曲线由极坐标形式 $r=f(\theta)$ 表示时, 则曲率为 $K=\dfrac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ♣

Theorem 4.16 弧微分

$$y=f(x)\quad \mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

♣

4.10 方程的近似解

Example 4.40: 求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解, 精确到 0.001

☞ Proof: 由泰勒公式 $\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2} t^2$ $(0 < \theta < 1)$. 令 $t = \frac{1}{x}$ 得

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2},$$

代入原方程得

$$x - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right) = 2x - 501 \Longrightarrow x = 501 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)$$

由此知 $x > 500$, $0 < \frac{\theta}{x} < \frac{1}{500}$, 则有

$$|x - 501| = \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta}{x} < \frac{1}{1000} = 0.001$$

所以, $x = 501$ 是满足条件的解 □

第 5 章 不定积分

5.1 不定积分的概念与性质

Theorem 5.1 积化和差和积化和差公式

积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

积化和差

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

♣

表 5.1: 部分初等函数积分表

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C \qquad \int\csc x\,\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

Theorem 5.2

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界, 则 $f(x)$ 的导函数和原函数在区间上不一定有界

例: $y=\sqrt{x},x\in(0,1]$ 与 $y=1-\sin x,x\in(-\infty,+\infty)$

♣

Exercise 5.1: 求不定积分

$$\int\sin x\sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}\int \sin x \sin 2x \sin 3x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 3x)\sin 3x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \cos x \sin 3x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 3x \sin 3x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int (\sin 2x + \sin 4x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \sin 6x \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x + C\end{aligned}$$

Note:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

◀

5.2 不定积分的计算

分段函数的不定积分

Example 5.1: 求 $\int \max\{1,|x|\}\,\mathrm{d}x$

Solution 由于

$$\max\{1,|x|\} = \begin{cases} -x\,, & x<-1 \\ 1\,, & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ x\,, & x>1 \end{cases}$$

所以

$$\int \max\{1,|x|\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+C_1\,, & x<-1 \\ x+C_2\,, & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2}+C_3\,, & x>1 \end{cases}$$

由原函数的连续性, 若记 $C_2=C$, 则 $C_1=-\dfrac{1}{2}+C$, $C_3=\dfrac{1}{2}+C$. 故

$$\int \max\{1,|x|\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}+C\,, & x<-1 \\ x+C\,, & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}+C\,, & x>1 \end{cases}$$

◀

Example 5.2: 求 $\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x$

✎ Solution

$$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x=\begin{cases} e^{x}+C_1\,, & x\geqslant 0\\ -e^{-x}+C_2\,, & x<0\end{cases}$$

由于函数满足连续，所以

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x+C_1)=\lim_{x\to 0^-}(-e^{-x}+C_2)$$

故

$$1+C_1=-1+C_2\Longrightarrow C_2=C_1+2$$

因此

$$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x=\begin{cases} e^{x}+C\,, & x\geqslant 0\\ -e^{-x}+2+C\,, & x<0\end{cases}$$

◀

Example 5.3: 计算不定积分

$$\int [x]\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution 由微积分基本定理，有

$$\begin{aligned}\int [x]\,\mathrm{d}x&=\int_0^x [t]\,\mathrm{d}t+C=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} k\,\mathrm{d}t+\int_{[x]}^x [t]\,\mathrm{d}t+C\\ &=\sum_{k=0}^{[x]-1}k+\int_{[x]}^x [x]\,\mathrm{d}t+C\\ &=\sum_{k=0}^{[x]-1}k+[x]\big(x-[x]\big)+C\\ &=x[x]-\frac{[x]^2+[x]}{2}+C\end{aligned}$$

◀

Example 5.4: 计算 $\int \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x\ (x\geqslant 0)$，其中 $\lfloor x\rfloor$ 为取整函数

✎ Solution 由 $\int \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x=\int_0^x \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+C$，将区间内插入整数点，

$$\begin{aligned}\int \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x&=\int_0^x \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+C\\ &=\int_0^1 \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+\int_1^2 \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+\cdots\\ &\quad+\int_{\lfloor x\rfloor-1}^{\lfloor x\rfloor} \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+\int_{\lfloor x\rfloor}^{x} \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+C\\ &=2-\int_1^2 \sin\pi x\,\mathrm{d}x+2\int_2^3 \sin\pi x\,\mathrm{d}x+\cdots+\\ &\quad(-1)^{\lfloor x\rfloor-1}(\lfloor x\rfloor-1)\int_{\lfloor x\rfloor-1}^{\lfloor x\rfloor}\sin\pi x\,\mathrm{d}x+(-1)^{\lfloor x\rfloor}\lfloor x\rfloor\int_{\lfloor x\rfloor}^{x}\sin\pi x\,\mathrm{d}x+C\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\cdot 2 + \frac{2}{\pi}\cdot 2 + \cdots + \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}(\lfloor x\rfloor - 1)}{\pi}\cdot 2(-1)^{\lfloor x\rfloor} \\
&\qquad + \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor+1}\lfloor x\rfloor}{\pi}\left(\cos\pi x - (-1)^{\lfloor x\rfloor}\right) + C \\
&= \frac{\lfloor x\rfloor}{\pi}\left(\lfloor x\rfloor - (-1)^{\lfloor x\rfloor}\cos\pi x\right) + C
\end{aligned}
$$

◀

隐函数的不定积分

Example 5.5: 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定的隐函数, 求积分 $\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x$

Solution 令 $y=tx$, 代入所给的方程可得 $x=\frac{1}{t^2(1-t)}$, 则

$$
y=\frac{1}{t(1-t)},\ \mathrm{d}x=\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\,\mathrm{d}t
$$

故

$$
\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(3-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = 3t - 2\ln t + C = \frac{3y}{x} - 2\ln\frac{y}{x} + C
$$

◀

Example 5.6: 设 $y=y(x)$ 是由方程 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所确定的隐函数, 求积分

$$
\int \frac{1}{y(x^2+y^2+a^2)}\,\mathrm{d}x
$$

Solution 令 $y=tx$, 代入所给的方程可得 $x=\sqrt{2}a\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}$, 则

$$
y=\sqrt{2}a\frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\sqrt{2}a\frac{t^3-3t}{(1+t^2)^2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t
$$

注意到 $x^2+y^2+a^2=a^2\frac{3-t^2}{1+t^2}$, 有

$$
\int \frac{1}{y(x^2+y^2+a^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| + C
$$

◀

Exercise 5.2: 设 $y(x-y)^2=x$, 求积分

$$
\int \frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}x
$$

Solution 令 $y=tx$ 则 $x=\frac{1}{\sqrt{t(1-t)^2}}$, $y=\frac{t}{\sqrt{t(1-t)^2}}$

当 $t\geqslant 1$ 时 $x=\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$, $y=\frac{t}{(1-t)\sqrt{t}}$ $\mathrm{d}x=\frac{3t-1}{2(t-1)^2t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$

那么

$$
I=\int\frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{2t(1-t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y-x}\right| + C
\end{aligned}
$$

当 $t<1$ 时 $x=\dfrac{1}{(t-1)\sqrt{t}}$, $y=\dfrac{t}{(t-1)\sqrt{t}}$ $\mathrm{d}x=\dfrac{1-3t}{2(t-1)^2t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$

那么

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2t(t-1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{x-y}\right| + C
\end{aligned}
$$

◀

✎ Solution 令 $\begin{cases} x-y=u \\ \dfrac{x}{y}=v \end{cases}$ 即 $u^2=v$ 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{uv}{v-1}=\dfrac{u^3}{u^2-1} \\ y=\dfrac{u}{v-1}=\dfrac{u}{u^2-1} \end{cases}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{u^4-3u^2}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u$

所以

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2-1\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|(x-y)^2-1\right| + C
\end{aligned}
$$

◀

5.2.1 换元积分法 (凑微分)

Exercise 5.3: 求不定积分

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}
$$

✎ Solution

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}} \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x-a}}{\sqrt{(b-a)-\left(\sqrt{x-a}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

$$= 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

◀

Exercise 5.4: 求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(9x+7)\sqrt{x-2}}$$

Solution

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(9x+7)\sqrt{x-2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left((9+\sqrt{x-2})^2\right)\sqrt{x-2}}$$
$$= \int \frac{2d\left(\sqrt{x-2}\right)}{9+\left(\sqrt{x-2}\right)^2}$$
$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{3} + c$$

◀

Example 5.7: 求不定积分 $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,\mathrm{d}x$

Solution 令 $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1} = e^x + t$, 则 $t = \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} - e^x$, $x = \ln\frac{t^2+1}{4-2t}$

$$\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,\mathrm{d}x = \int (e^x+t)\,\mathrm{d}x = \int e^x\,\mathrm{d}x + \int t\,\mathrm{d}x$$
$$= e^x + \int t\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{2-t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= e^x + \int \left(2 - \frac{2}{t^2+1} - 1 + \frac{2}{2-t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= e^x + t - 2\arctan t - 2\ln(2-t) + C$$

◀

Exercise 5.5: 求不定积分

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{(1+x)^2-(x+1)+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2\sqrt{1-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}}$$
$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}}$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$
$$= \ln(1+x) - \ln(2\sqrt{x^2+x+1}-x+1)+C$$

◀

Example 5.8: 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}$

Solution

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{4(2x+1)-(2x+1)^2}}$$
$$\xlongequal{t=\frac{1}{2x+1}} -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4t-1}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\sqrt{4t-1}+C$$
$$= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3-2x}{2x+1}}+C$$

◀

Exercise 5.6: 求不定积分

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

Solution

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(x+\sqrt{1-x^2})$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1-x^2}|+C$$

◀

Example 5.9: 求不定积分

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Solution 首先有

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \left(\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x}_{I} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x}_{J}$$

其中

$$J = \int \frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

$$I = \int \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int \left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - 2\right] \mathrm{d}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$= -\int \left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^2 - 2\right] \mathrm{d}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^3 + 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = \frac{(5x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C$$

于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = I + J = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C$$

◀

Exercise 5.7: 求不定积分

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t} \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t - \frac{1}{2}\right)^2 \sec t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{3}{4}\int \tan^2 t\sec t\,\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\int \tan t\sec t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int \sec t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{3}{4}\int \sec t(\sec^2 t - 1)\,\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sec t + \frac{1}{4}\ln|\sec t + \tan t|$$
$$= \frac{3}{4}\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t - \frac{3}{4}\int \sec t\,\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sec t + \frac{1}{4}\ln|\sec t + \tan t|$$
$$= \frac{3}{4}\sec t\tan t - \frac{3}{4}\int \tan^2 t\sec t\,\mathrm{d}t - \frac{3}{4}\int \sec t\,\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sec t + \frac{1}{4}\ln|\sec t + \tan t|$$
$$= \frac{3}{8}\sec t\tan t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sec t - \frac{1}{8}\ln|\sec t + \tan t| + C$$
$$= \frac{1}{4}(2x-3)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{8}\ln|2\sqrt{x^2+x+1} + 2x + 1| + C$$

◀

Exercise 5.8: 计算积分

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x\sqrt{(x-1)^2-4}}\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{x-1=2\sec t} \int \frac{2\tan t\sec t}{2(2\sec t + 1)\tan t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2+\cos t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{2-\cos t}{4-\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int \frac{1}{4\sin^2 t + 3\cos^2 t}\,\mathrm{d}t - \int \frac{\cos t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&=\int \frac{1}{(2\tan t)^2+3}\,\mathrm{d}(2\tan t)-\int \frac{1}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}(\sin t)\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan t}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+C\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\frac{2\tan t}{\sqrt{3}}-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2\tan t}{\sqrt{3}}\times\frac{\sin t}{\sqrt{3}}}+C\\
&=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+3}{\sqrt{3}\sqrt{x^2-2x-3}}+C
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 5.9: 求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

Solution

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}&=\int \frac{1}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}x\\
&=\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c\\
&=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 5.10: 求不定积分

$$I=\int \frac{f'(x)+f(x)g'(x)}{f(x)\left[c+f(x)e^{g(x)}\right]}\,\mathrm{d}x$$

Solution 注意到

$$\left(c+f(x)e^{g(x)}\right)'=e^{g(x)}\left[f'(x)+f(x)g'(x)\right]$$

故

$$
\begin{aligned}
I&=\int \frac{e^{g(x)}\left[f'(x)+f(x)g'(x)\right]}{f(x)e^{g(x)}\left[c+f(x)e^{g(x)}\right]}\,\mathrm{d}x\\
&=\int \frac{\mathrm{d}\left[c+f(x)e^{g(x)}\right]}{f(x)e^{g(x)}\left[c+f(x)e^{g(x)}\right]}\\
&=\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{f(x)e^{g(x)}}-\frac{1}{c+f(x)e^{g(x)}}\right]\mathrm{d}\left[c+f(x)e^{g(x)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{c}\left\{\int \frac{\mathrm{d}\left[c+f(x)e^{g(x)}\right]}{f(x)e^{g(x)}} - \int \frac{\mathrm{d}\left[c+f(x)e^{g(x)}\right]}{c+f(x)e^{g(x)}}\right\} \\
&= \frac{1}{c}\left[\ln\left|f(x)e^{g(x)}\right| - \ln\left|c+f(x)e^{g(x)}\right|\right] + C
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 5.11: 求不定积分

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + C
\end{aligned}
$$

◀

Example 5.10: 求不定积分 $\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2+2}\,\mathrm{d}x$

Solution

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{x^4-2x^2+3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2+\sqrt{3}}{x^4+3-2x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x^2-\sqrt{3}}{x^4+3-2x^2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{x^2}}{x^2+\frac{3}{x^2}-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{x^2}}{x^2+\frac{3}{x^2}-2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2+2\sqrt{3}-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{x}\right)}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2-2(\sqrt{3}+1)}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

◀

Example 5.11: 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Solution

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}} &\xlongequal{t=\frac{1}{x}} \int \frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{\sqrt[4]{a1+t^4}}{t}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[4]{1+t^4}} \\
&\xlongequal{u^4=1+t^4} -\int \frac{\frac{1}{4}\cdot 4u^3(u^4-1)^{-\frac{3}{4}}}{u\sqrt[4]{u^4+1}}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int \frac{u^2}{u^4-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{(u^2+1)-(1-u^2)}{u^4-1}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\arctan u - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C \\
&= -\frac{1}{2}\arctan \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\right| + C
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 5.12: 求不定积分

$$
\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x
$$

Solution

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{\sqrt{\tan x}=t} 2\int \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1-t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} d\left(t-\frac{1}{t}\right) - \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2} d\left(t+\frac{1}{t}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + c \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan x-1}{2\sqrt{\tan x}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}\right| + c
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 5.13: 求不定积分

$$
\int \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x
$$

Solution

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(x\sin x+\cos x)}{x\sin x+\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}(x\cos x-\sin x)}{x\cos x-\sin x} \\
&= \ln\left|\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}\right| + C
\end{aligned}
$$

◀

Example 5.12: 求不定积分

$$
\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x
$$

✎ Solution

$$\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x\sec^2 x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(1-x\tan x)}{(1-x\tan x)^2}$$
$$= \frac{1}{1-x\tan x}+C = \frac{\cos x}{\cos x - x\sin x}+C$$

◀

Exercise 5.14: 求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$$

✎ Solution

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^3(x-1)^4}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal[x=\frac{u^3+1}{u^3-1}]{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}} \int \frac{u}{\left(\frac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2-1}\cdot\frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{3}{2}\int \mathrm{d}u = -\frac{3}{2}u+C$$
$$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$$

◀

Exercise 5.15: 求不定积分

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2},$$

✎ Solution

$$I = \int \frac{x^2+x^4}{(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{((x-\frac{1}{x})^2+2)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$J = \int \frac{-x^2+x^4}{(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{((x+\frac{1}{x})^2-2)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

◀

✎ Solution

$$\int \frac{x^2}{(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{4x^3}{4x(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4x(x^4+1)^2}\mathrm{d}(x^4+1) = \int \frac{-1}{4x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^4+1}\right)$$
$$= \frac{-1}{4x(x^4+1)} + \int \frac{1}{4(x^4+1)}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}\frac{1}{x} = \int \frac{y^4}{y^4+1}\mathrm{d}y = \int 1-\frac{1}{y^4+1}\mathrm{d}y$$

$$\int \frac{1}{y^4+1}\mathrm{d}y = \int \frac{(y^2+1)-(y^2-1)}{2(y^4+1)}\mathrm{d}y = \int \frac{y^2+1}{2(y^4+1)}\mathrm{d}y - \int \frac{y^2-1}{2(y^4+1)}\mathrm{d}y$$

$$= y - \int \frac{1}{y^4+1} \mathrm{d}y$$

$$\int \frac{y^2+1}{y^4+1} \mathrm{d}y = \int \frac{1+\frac{1}{y^2}}{y^2+\frac{1}{y^2}} \mathrm{d}y = \int \frac{1}{(y-\frac{1}{y})^2+2} \mathrm{d}\left(y-\frac{1}{y}\right)$$

$$\int \frac{y^2-1}{y^4+1} \mathrm{d}y = \int \frac{1-\frac{1}{y^2}}{y^2+\frac{1}{y^2}} \mathrm{d}y = \int \frac{1}{(y+\frac{1}{y})^2-2} \mathrm{d}\left(y+\frac{1}{y}\right)$$

◀

Exercise 5.16: 求不定积分

$$\int \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x} \mathrm{d}x$$

Solution 注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x(1-\cos^2 x) + \cos^4 x(1-\sin^2 x)} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^4 x \cos^2 x - \cos^4 x \sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x} \mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^4 x - \tan^2 x + 1} \mathrm{d}(\tan x) \\ &\overset{t=\tan x}{=\!=\!=} \int \frac{t^2+1}{t^4-t^2+1} \mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{(t-\frac{1}{t})^2+1} \mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right) \\ &= \arctan\left(t-\frac{1}{t}\right) + C \\ &= -\arctan(2\cot x) + C \end{aligned}$$

◀

Exercise 5.17: 求不定积分

$$\int \frac{\sin x - x\cos x}{x(x-\sin x)} \mathrm{d}x$$

Solution

$$\int \frac{\sin x - x\cos x}{x(x-\sin x)} \mathrm{d}x = \int \frac{-(x-\sin x) + (x - x\cos x)}{x(x-\sin x)} \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln\left|\frac{x-\sin x}{x}\right| + C$$

◀

Exercise 5.18: 求不定积分

$$\int \frac{2^x \times 3^x}{9^x - 4^x}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\int \frac{2^x \times 3^x}{9^x - 4^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2^x}{3^x}}{1-\left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{d\left(\frac{2^x}{3^x}\right)=\frac{2^x}{3^x}\ln\frac{2}{3}\,\mathrm{d}x} \frac{1}{\ln\frac{2}{3}} \int \frac{1}{1-\left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2} d\left(\frac{2^x}{3^x}\right)$$
$$= \frac{1}{\ln\frac{2}{3}} \int \frac{1}{\left(1-\frac{2^x}{3^x}\right)\left(1+\frac{2^x}{3^x}\right)} d\left(\frac{2^x}{3^x}\right)$$
$$= \frac{1}{2\ln\frac{2}{3}} \left[\int \frac{1}{1-\frac{2^x}{3^x}} d\left(\frac{2^x}{3^x}\right) - \int \frac{1}{1+\frac{2^x}{3^x}} d\left(\frac{2^x}{3^x}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2\ln\frac{2}{3}} \left(\ln\left|1-\frac{2^x}{3^x}\right| - \ln\left|1+\frac{2^x}{3^x}\right|\right) + c$$
$$= \frac{1}{2\ln\frac{2}{3}} \ln\left|\frac{1-\frac{2^x}{3^x}}{1+\frac{2^x}{3^x}}\right| + c = \frac{1}{2\ln\frac{2}{3}} \ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right| + c$$

◀

Exercise 5.19: 求不定积分

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{1-2\sin^2 x}\,\mathrm{d}(\sin x) + \int \frac{1}{2\cos^2 x - 1}\,\mathrm{d}(\cos x)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{2\sin^2 x - 1}\,\mathrm{d}\big(\sqrt{2}\sin x\big) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{2\cos^2 x - 1}\,\mathrm{d}\big(\sqrt{2}\cos x\big)$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\sqrt{2}\sin x + 1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C$$

◀

Solution

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int \frac{1}{-\left(\tan\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right)^2 + 2}\,\mathrm{d}\big(\tan\left(\frac{1}{2}x\right) - 1\big)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{1}{2}x\right) - 1 - \sqrt{2}}{\tan\left(\frac{1}{2}x\right) - 1 + \sqrt{2}} \right| + C$$

◀

✎ Solution

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \mathrm{d}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C
\end{aligned}$$

◀

Example 5.13: 求不定积分

$$\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} \mathrm{d}x$$

✎ Solution 注意到

$$\frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} = \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{8\cos^3\frac{x}{2}} + \frac{1}{4\sin x}$$

故

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} \mathrm{d}x &= \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{8\cos^3\frac{x}{2}} \mathrm{d}x + \int \frac{1}{4\sin x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln|\sec x - \cot x| + C
\end{aligned}$$

◀

Example 5.14: 求不定积分

$$\int \frac{\sin^{188} x}{(\sin x + \cos x)^{190}} \mathrm{d}x$$

✎ Solution 注意到

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\right)' = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^{188} x}{(\sin x + \cos x)^{190}} \mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^{188} x}{(\sin x + \cos x)^{188}} \cdot \left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\right)' \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{189} \frac{\sin^{189} x}{(\sin x + \cos x)^{189}} + C
\end{aligned}$$

◀

Exercise 5.20: 求不定积分

$$\int x^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
I &= \int x^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x\sqrt{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^4+x^2}d x^2\\
&= \frac{1}{2}\int\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}d x^2 = \frac{1}{2}\int\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^4+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+\frac{1}{2})^2}{\sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^4+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}{\sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^4+x^2}-\frac{1}{2}\int\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\\
&\quad -\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^4+x^2}-I-\frac{1}{8}\ln\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2}\right)\\
\Rightarrow I &= \frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^4+x^2}-\frac{1}{16}\ln\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2}\right)+c_1\\
&= \frac{1}{8}x\left(2x^2-1\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{16}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2+c\left(c=c_1+\frac{\ln 2}{16}\right)\\
&= \frac{1}{8}x\left(2x^2-1\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c
\end{aligned}$$

◀

5.2.2 分部积分法

Exercise 5.21: 求不定积分

$$\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\int\frac{\overbrace{3/4+(x+1/2)^2}^{x^2+x+1}-(x+1/2)^2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{3}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\\
&= \frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + C$$

◀

Exercise 5.22: 求不定积分

$$I = \int \frac{16x+11}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
I &= 8\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{5}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 8\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}d\left(x^2+2x+2\right) - 5\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{8}{x^2+2x+2} - 5\int \frac{1+(x+1)^2-(x+1)^2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{8}{x^2+2x+2} - 5\int \frac{1}{(x+1)^2+1}d\,(x+1) - \frac{5}{2}\int (x+1)d\left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right) \\
&= -\frac{8}{x^2+2x+2} - 5\arctan(x+1) - \frac{5x+5}{2\,(x^2+2x+2)} + \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2+1}d\,(x+1) \\
&= -\frac{5x+21}{2\,(x^2+2x+2)} - \frac{5}{2}\arctan(x+1) + C
\end{aligned}$$

◀

Example 5.15: (18 数学) 求不定积分

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x &= \int \arctan\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\sqrt{e^x-1}=t} \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{2}\int (t^2+1)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t + C \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{6}\sqrt{e^x-1}(e^x+2) + C
\end{aligned}$$

◀

Exercise 5.23: 求不定积分

$$\int \left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2\mathrm{d}x$$

Solution

$$\int \left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2\mathrm{d}x \xlongequal{t=\arctan x} \int \frac{t^2\sec^2 t}{(\tan t - t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{t^2}{(\sin t - t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin t - t\cos t}\right) \\
&= \frac{t}{\sin t(\sin t - t\cos t)} - \int \frac{1}{\sin t - t\cos t} \times \frac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{\sin t(\sin t - t\cos t)} + \cot t + C \\
&= \frac{x\arctan x}{x - \arctan x} + C
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 5.24: 求不定积分

$$\int \frac{16x+11}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$
\begin{aligned}
\int \frac{16x+11}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x &= 8\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{5}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 8\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2} d\left(x^2+2x+2\right) - 5\underbrace{\int \frac{1}{\left((x+1)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x}_{x+1=\tan t} \\
&= -\frac{8}{x^2+2x+2} - 5\int \frac{\sec^2 t}{(\tan^2 t+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{8}{x^2+2x+2} - 5\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{8}{x^2+2x+2} - 5\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{8}{x^2+2x+2} - \frac{5}{2}\int \mathrm{d}t - \frac{5}{4}\int \cos 2t\, d\,(2t) \\
&= -\frac{8}{x^2+2x+2} - \frac{5}{2}t - \frac{5}{4}\sin 2t + C \\
&= -\frac{5x+21}{2\left(x^2+2x+2\right)} - \frac{5}{2}\arctan(x+1) + C
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 5.25: 求不定积分

$$\int \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x + \int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x+\frac{1}{x}} - \int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x + \int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x+\frac{1}{x}} + C
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 5.26: 求不定积分

$$\int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{x^4\cos^3 x - x\sin x + \cos x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$$

Solution 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{x\sin+\cos x}\right) = x\cos x e^{x\sin+\cos x}$$

以及

$$\int \frac{\cos x - x\sin x}{x^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x\cos x}$$

故

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{x^4\cos^3 x - x\sin x + \cos x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x\sin+\cos x} x^2\cos x\,\mathrm{d}x + \int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{\cos x - x\sin x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int x\,\mathrm{d}\left(e^{x\sin+\cos x}\right) + \int e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x\cos x}\right) \\
&= xe^{x\sin+\cos x} - \int e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{x\cos x}e^{x\sin+\cos x} + \int \frac{1}{x\cos x}x\cos x e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x\sin+\cos x} - \frac{e^{x\sin+\cos x}}{x\cos x} + C
\end{aligned}$$

◀

Example 5.16: 求不定积分

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{(1-x^4)+2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} - \int x\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{-(-4x^3)}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} - \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C
\end{aligned}$$

◀

5.2.3 有理分式

令 $u=\tan\frac{x}{2}\ \ (-\pi<x<\pi)$, 则 $x=2\arctan u, \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2}$$
$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$
$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1-u^2}$$

Exercise 5.27: 计算不定积分

$$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x(x>0).$$

Solution 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x=\frac{1}{t^2-1}$. 从而有

$$\begin{aligned}\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x&=\int\ln(1+t)d\left(\frac{1}{t^2-1}\right)\\&=\frac{1}{t^2-1}\ln(1+t)-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t&=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}+C\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x&=\frac{1}{t^2-1}\ln(1+t)+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2(t+1)}+C\\&=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}+C\\&=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+C.\end{aligned}$$

◀

Exercise 5.28: 求不定积分

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$I=\int\frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\mathrm{d}x \xlongequal{\sqrt{\tan x}=t}\int\frac{2t}{(1+t)(1+t^4)}$$

$$\begin{aligned}\frac{2t}{(1+t^4)(1+t)}&=\frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{1+t^4}+\frac{E}{1+t}\\&=\frac{(A+E)t^4+(A+B)t^3+(B+C)t^2+(C+D)t+(D+E)}{(1+t^4)(1+t)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}A+E=0\\A+B=0\\B+C=0\\C+D=2\\D+E=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=1\\D=1\\E=-1\end{cases}\Longrightarrow\frac{2t}{(1+t^4)(1+t)}=\frac{t^3-t^2+t+1}{1+t^4}-\frac{1}{1+t}$$

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{t^3-t^2+t+1}{1+t^4}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+t^4}d\left(t^4\right)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^4}d\left(t^2\right)+\int\frac{\frac{1}{t^2}-1}{\frac{1}{t^2}+t^2}\mathrm{d}t-\ln|1+t|\\&=\frac{1}{4}\ln\left(1+t^4\right)+\frac{1}{2}\arctan t^2-\ln|1+t|+\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2}d\left(t+\frac{1}{t}\right)\\&=\frac{1}{4}\ln\left(1+\tan^2x\right)+\frac{1}{2}\arctan\tan x-\ln\left|1+\sqrt{\tan x}\right|-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}\right|+c\end{aligned}$$

◀

Exercise 5.29: 求不定积分

$$\int\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}I&=\int\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=2\theta}2\int\sqrt[3]{\frac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}}\mathrm{d}\theta=2\int\sqrt[3]{\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta\\&=2\int\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta\\&\xlongequal{\phi=\frac{\pi}{4}+\theta}2\int\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta\\&=2\int\tan^{\frac{3}{2}}\phi\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

$$
\xlongequal{\sqrt{\tan\phi}=t} 4\int \frac{t^4}{1+t^4}\mathrm{d}t = 4t - 4\int \frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t
$$

$$
= 4t - 2\int \frac{(t^2+1)-(t^2-1)}{1+t^4}\mathrm{d}t
$$

$$
= 4t - 2\int \frac{t^2+1}{1+t^4}\mathrm{d}t + 2\int \frac{t^2-1}{1+t^4}\mathrm{d}t
$$

$$
= 4t - 2\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right) + 2\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2}\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)
$$

$$
= 4t - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t^2-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + C
$$

$$
= 4\sqrt{\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sqrt{2}}
$$

$$
- \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sqrt{\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)}+1}{\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sqrt{\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)}+1}\right| + C
$$

◀

Exercise 5.30: 求不定积分

$$\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\,\mathrm{d}x &\xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t]{x=\frac{1}{t}} \int \frac{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1}}{\frac{1}{t}}\times\frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1-t+t^2}d\frac{1}{t} \\
&= \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{-1+2t}{t\sqrt{1-t+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t} - \int \frac{1}{\sqrt{1-t+t^2}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t\sqrt{1-t+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t} - \int \frac{1}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t\sqrt{1-t+t^2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{备注 1} \\
&= \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t} - \ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| + \frac{1}{2}J
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J = \int \frac{1}{t\sqrt{1-t+t^2}}\,\mathrm{d}t &\xlongequal[\mathrm{d}t=\frac{-1}{u^2}\,\mathrm{d}u]{t=\frac{1}{u}} \int \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{1-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}}\times\frac{-1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{\sqrt{u^2-u+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= -\int \frac{1}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|+c \\
&= \ln\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}\right|+c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t} - \ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}\right|+c \\
&= \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\ln\left|2-x+2\sqrt{x^2-x+1}\right| + \ln|x|+c
\end{aligned}$$

注:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$$

◀

✎ Solution

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2-x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}d\left(x^2-x+1\right) - J + K = 2\sqrt{x^2-x+1} - J + K\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x\\ &\xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\,\mathrm{d}t]{\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec t}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \sec t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\cos t} + \frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t| + c\\ &= \sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1\right| + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}t \xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t]{x=\frac{1}{t}} \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}\times\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}}\mathrm{d}t\\ &= -\int \frac{1}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\mathrm{d}t = -\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| + c\\ &= -\ln\left|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right| - \ln|x| + c\end{aligned}$$

所以

$$\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1\right| + \ln|x| + c$$

◀

Exercise 5.31: 求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}\\ &= 2\int \frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)^2(2-\sin x\cos x)}\mathrm{d}x\\ &= 2\int \frac{\sin x+\cos x}{(1+2\sin x\cos x)\left[1+(\cos x-\sin x)^2\right]}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\left[2-(\sin x-\cos x)^2\right]\left[1+(\sin x-\cos x)^2\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}v}{(2-v^2)(1+v^2)} = 2\int \frac{\frac{1}{3}(2-v)^2+\frac{1}{3}(1+v^2)}{(2-v^2)(1+v^2)} \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}+\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}v}{2-v^2} \\
&= \frac{2}{3}\arctan v-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right)+C \\
&= \frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x)-\frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sin x-\cos x-\sqrt{2}}{\sin x-\cos x+\sqrt{2}}\right)+C
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 5.32: 求不定积分

$$
\int \frac{1}{x^8+x^4+1}\,\mathrm{d}x
$$

✎ Solution

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^8+x^4+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x^8+2x^4+1)-x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x^4+1)^2-x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\left[(x^4+1)-x^2\right]\left[(x^4+1)+x^4\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{x^2}-1}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} \\
&= \frac{\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)+C
\end{aligned}
$$

◀

Theorem 5.3 奥斯特罗格拉茨基方法 [10]

有理真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\mathrm{d}x$$

其中 $Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots(x^n+\cdots)$, $(n=1,2,\cdots)$, 则

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots$$

$$Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots$$

$P_1(x)$, $P_2(x)$ 的系数可用待定系数法从 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)+\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 求出

Example 5.17: 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}$

Solution

$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-1)^2(x+1)^3\\ Q_1(x)&=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1\\ Q_2(x)&=(x-1)(x+1)x^2-1\end{aligned}$$

设 $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\dfrac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-x-1}\right)'+\dfrac{Dx+E}{x^2-1}$, 则

$$x=(2Ax+B)(x-1)(x+1)-(A^2+Bx+C)(3x-1)+(Dx+E)(x-1)(x+1)^2$$

比较系数, 得

$$\begin{array}{c|r} x^4 & D=0\,,\\ x^3 & -A+D+E=0\,,\\ x^2 & A-2B-D+E=0\,,\\ x^1 & -2A-3C+B-D-E=1\,,\\ x^0 & -B+C-E=0\,. \end{array}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}A=-\frac{1}{8},\\ B=-\frac{1}{8},\\ C=-\frac{1}{4},\\ D=0,\\ E=-\frac{1}{8}\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}&=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\\ &=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C\end{aligned}$$

Example 5.18: 求不定积分 $\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$

Solution 设 $\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)' + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$, 则

$$x^2+2 = A(x^2+x+1) - (Ax+B)(2x+1) + (Cx+D)(x^2+x+1)$$

比较系数, 得

$$\begin{array}{c|r} x^3 & C=0\,, \\ x^2 & -A+C+D=1\,, \\ x^1 & -2B+C=0\,, \\ x^0 & A-B+D=2 \end{array} \implies \begin{cases} A=1, \\ B=1, \\ C=0, \\ D=2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x &= \frac{x+1}{x^2+x+1} + \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1} \\ &= \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

◀

Exercise 5.33: 求不定积分

Solution ◀

5.3 非初等表达

Definition 5.1 菲涅尔积分函数

Fresnel Integrals

$$\mathrm{C}\,(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{S}\,(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right)\mathrm{d}t$$

Example 5.19: 计算积分: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\sin x\mathrm{d}x$

Solution

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\sin x\,\mathrm{d}x &\xlongequal[\mathrm{d}x=\pi t\,\mathrm{d}t]{\sqrt{x}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}t} \pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 t^2\sin\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 t d\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\right) \\ &= \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}t\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\right]_0^1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} C\left(1\right) \approx 0.977451$$

◀

$$C\left(x\right) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \xlongequal[\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}t]{\frac{\pi t^2}{2}=u^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}x} \cos u^2 \,\mathrm{d}u$$

$$\Longrightarrow \int_x^0 \cos x^2 \,\mathrm{d}x = -\int_0^x \cos x^2 \,\mathrm{d}x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} x\right)$$

Definition 5.2 三角积分函数

1. Sine Integrals

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$$

2. Cosine Integrals

$$\mathrm{Ci}(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t} \,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} \,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{Cin}(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t} \,\mathrm{d}t$$

Example 5.20: 求不定积分

$$\int \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x &= -\int \sin^2 x \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{\sin^2 x}{x} + \int \frac{\sin 2x}{x} \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\sin^2 x}{x} + \int \frac{\sin 2x}{2x} \,\mathrm{d}2x \\
&= -\frac{\sin^2 x}{x} + \mathrm{Si}(2x) + c
\end{aligned}$$

◀

Exercise 5.34: 求不定积分

$$\int \cos\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}\int \cos \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x &\xlongequal{x=\frac{1}{t}} -\int \frac{\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t = \int \cos t\, d\frac{1}{t} \\ &= \frac{\cos t}{t} - \int \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos t}{t} - \mathrm{Si}\,(t) + c \\ &= x\cos\frac{1}{x} - \mathrm{Si}\left(\frac{1}{x}\right) + c\end{aligned}$$

◀

Exercise 5.35: 求不定积分

$$\int \sin x \log x\, \mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}\int \sin x \log x\, \mathrm{d}x &= -\int \log x\, d\cos x \\ &= -\log x \cos x + \int \frac{\cos x}{x}\, \mathrm{d}x \\ &= -\log x \cos x + \mathrm{Ci}(x) + c\end{aligned}$$

◀

Definition 5.3 双曲积分函数

1. 双曲正弦积分

$$\mathrm{Shi}(x) = \int_0^x \frac{\sinh x}{x}$$

2. 双曲余弦积分

$$\mathrm{Chi}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cosh t - 1}{t}\, \mathrm{d}t = \mathrm{chi}(x)$$

Exercise 5.36: 求不定积分

$$\int \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Solution 设 $f(x) = \arctan x$ 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1-ix)(1+ix)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix}\right)$$

利用幂级数展开 $f'(x)$, 首先我们知道 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1,1)$

因此

$$f'(x) = \frac{1}{(1-ix)(1+ix)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ix)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-ix)^n\right)$$

对两边积分有:

$$\begin{aligned}
\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^x \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ix)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-ix)^n\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ix)^{n+1}}{n+1} \\
&= -\frac{1}{2}i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^{n}}{n} + \frac{1}{2}i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^{n}}{n}
\end{aligned}$$

所以:

$$f(x) = \arctan x = \frac{1}{2}i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^n}{n} - \frac{1}{2}i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}i\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^n}{n^2} - \frac{1}{2}i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n^2} + c \\
&= \frac{1}{2}i\left(\mathrm{Li}_2(-ix) - \mathrm{Li}_2(ix)\right) + c
\end{aligned}$$

◀

Exercise 5.37: 求不定积分

$$\int x\tan x\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int x\tan x\,\mathrm{d}x &= \int x\times\frac{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}\,\mathrm{d}x = -\int ix\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}\,\mathrm{d}x\\
&= -\int ix\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}\,\mathrm{d}x = -\int ix\,\mathrm{d}x + 2i\int\frac{x}{e^{2ix}+1}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{e^{2ix}=t} -\frac{1}{2}ix^2 + 2i\int\frac{\frac{1}{2i}\ln t}{t+1}\frac{1}{2it}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}ix^2 - \frac{1}{2}i\int\frac{\ln t}{(t+1)\,t}\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{2}ix^2 - \frac{1}{2}i\left(\int\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t - \int\frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= -\frac{1}{2}ix^2 - \frac{1}{2}i\left(\frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t\ln(t+1) + \int\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= -\frac{1}{2}ix^2 - \frac{1}{2}i\left(\frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t\ln(t+1) + \int\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-t)^{k-1}}{k}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= -\frac{1}{2}ix^2 - \frac{1}{2}i\left(\frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t\ln(t+1) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-t)^{k}}{k^2}\right) + c\\
&= -\frac{1}{2}ix^2 - \frac{1}{2}i\left(\frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t\ln(t+1) - \mathrm{Li}_2(-t)\right) + c\\
&= \frac{1}{2}ix^2 + x\ln(e^{2ix}+1) + \frac{1}{2}i\,\mathrm{Li}_2\left(-e^{2ix}\right) + c
\end{aligned}$$

◀

Exercise 5.38: 求不定积分

$$\int\frac{xe^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int\frac{xe^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=e^x} \int\frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t
&= \ln t\ln(1+t) - \int\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= \ln t\ln(1+t) - \int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-t)^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t\\
&= \ln t\ln(1+t) - \sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{(-t)^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t\\
&= \ln t\ln(1+t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-t)^{n}}{n^2}\,\mathrm{d}t + c\\
&= \mathrm{Li}_2(-t) + \ln t\ln(t+1) + c\\
&= \mathrm{Li}_2(-e^x) + x\ln(e^x+1) + c
\end{aligned}$$

Exercise 5.39: 求不定积分

$$\int \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\times\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}\,\mathrm{d}x\\
&= \int xi\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}\,\mathrm{d}x = \int xi\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}+2e^{-ix}\right)}{e^{ix}-e^{-ix}}\,\mathrm{d}x\\
&= \int ix\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{ie^{-ix}x}{e^{ix}-e^{-ix}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}ix^2 + 2\int \frac{ix}{e^{2ix}-1}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}ix^2 - 2\int \frac{ix}{1-e^{2ix}}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{e^{2ix}=t} \frac{ix^2}{2} - 2\int \frac{i\times\frac{1}{2i}\ln t}{1-t}\times\left(\frac{1}{2it}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{ix^2}{2} + \frac{i}{2}\int \frac{\ln t}{t\,(1-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}ix^2 + \frac{i}{2}\left(\int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{2}ix^2 + \frac{i}{2}\left(\int \ln t\,d\ln t - \ln t\ln(1-t) + \int \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{2}ix^2 + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t\ln(1-t) - \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\int t^{n-1}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{2}ix^2 + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t\ln(1-t) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}\right) + c\\
&= \frac{1}{2}ix^2 + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t\ln(1-t) - \mathrm{Li}_2(t)\right) + c\\
&= x\ln\left(1-e^{2ix}\right) - \frac{1}{2}i\left(x^2 + \mathrm{Li}_2\left(e^{2ix}\right)\right) + c
\end{aligned}$$

Exercise 5.40: 计算不定积分

$$\int \frac{\tan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Solution:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \tan x\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int x^{2n}\tan x\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int x^{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}(-4)^k(1-4^k)}{(2k)!}x^{2k-1}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n B_{2k}(-4)^k(1-4^k)}{2(n+k)(2k)!}x^{2n+2k}+C$$

□

Exercise 5.41: 求不定积分

$$\int \sqrt{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \quad \|x\|< 1$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \|x\|< 1\\
&= 2\int \frac{\sqrt{(\sqrt{x})^4+1}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{(\sqrt{x})^4+1}\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\sqrt{x}=u}{=\!=} 2\int \sqrt{u^4+1}\,\mathrm{d}u \quad \|u\|< 1\\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{1/2}\int u^{4n}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{1/2}\frac{u^{4n+1}}{4n+1}+C\\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{1/2}\frac{x^{2n+\frac{1}{2}}}{4n+1}+C
\end{aligned}$$

◀

Example 5.21: 求不定积分

$$\int \frac{1}{\ln x-1}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\ln x-1}\,\mathrm{d}x &\underset{\mathrm{d}x=e^v\,\mathrm{d}v}{\overset{\ln x=v}{=\!=}} \int \frac{e^v}{v-1}\,\mathrm{d}v\\
&= -\int \frac{e^v}{1-v}\,\mathrm{d}v = -\int \left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{v^p}{p!}\right)\mathrm{d}v\left(\sum_{n=0}^{\infty}v^n\right)\\
&= -\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\int v^{n+p}\,\mathrm{d}v\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\cdot\frac{v^{n+p+1}}{n+p+1}+C\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\cdot\frac{(\ln x)^{n+p+1}}{n+p+1}+C
\end{aligned}$$

◀

不定积分的论文

一个不定积分公式的妙用 (by Hansschwarzkopf)

Lemma 5.1

我们有如下不定积分公式:

$$\int |x|^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{|x|^{\alpha}\operatorname{sgn} x}{\alpha+1} + C$$

$$\int |x|^{\alpha}\operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \frac{|x|^{\alpha}}{\alpha+1} + C$$

其中 $\alpha > 0$ 为常数, C 为任意常数.

Example 5.22: 求定积分

$$\int_0^1 x|x-a|\,\mathrm{d}x$$

Solution 根据

$$\int (x-a)|x-a|\,\mathrm{d}x = \int |x-a|^2\operatorname{sgn}(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{|x-a|^3}{3} + C.$$

$$\int |x-a|\,\mathrm{d}x = \frac{|x-a|^2\operatorname{sgn}(x-a)}{2} + C$$

得到

$$\int_0^1 x|x-a|\,\mathrm{d}x = \frac{|1-a|^3-|a|^3}{3} + a\frac{|1-a|^2\operatorname{sgn}(1-a)+a^2\operatorname{sgn} a}{2}$$

◀

Example 5.23: 计算重积分 $\iint\limits_D |3x-4y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

Solution

$$\begin{aligned}\iint\limits_D |3x-4y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 |4y-3x|\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{8}\int_0^1 |4y-3x|^2\operatorname{sgn}(4y-3x)\Big|_0^1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\int_0^1 \left((4-3x)^2+9x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{(3x-4)^3}{9}+3x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

◀

Example 5.24: 计算重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|x-|y||}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,2]\times[-1,1]$.

✎ Solution 根据对称性,

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{|x-|y||}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 2\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^2 \sqrt{|x-y|}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 |x-y|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}(x-y)\Big|_0^2 \mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 \left((2-y)^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{15}\end{aligned}$$

◀

Example 5.25: 计算重积分 $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 2\leqslant y\leqslant 2}} \sqrt{|y-x|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,2]\times[-1,1]$.

✎ Solution 根据对称性,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 2\leqslant y\leqslant 2}} \sqrt{|y-x|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 2\int_0^1 |y-x^2|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}(y-x^2)\Big|_0^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 \left((2-x^2)^{\frac{3}{2}}+x^3\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{3} \\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}\end{aligned}$$

◀

Example 5.26: 计算重积分 $I=\iint\limits_D \min\{2, x^2y\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,4]\times[0,3]$.

✎ Solution 容易算出

$$I_1=\iint\limits_D \frac{x^2y+2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 60$$

另一方面,

$$\begin{aligned}I_2 &= \iint\limits_D \frac{|x^2y-2|}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^4 \mathrm{d}x \int_0^3 \frac{|x^2y-2|}{2}\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \frac{(x^2y-2)^2\operatorname{sgn}(x^2y-2)}{4x^2}\Big|_0^3 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^4 \frac{(3x^2-2)^2\operatorname{sgn}(3x^2-2)+4}{4x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \left(3-\frac{9x^2}{4}\right)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^4 \left(\frac{9x^2}{4}-3+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{6}+\frac{71}{2}+\frac{11\sqrt{6}}{6} = \frac{71}{2}+\frac{8\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

从而

$$I = I_1 - I_2 = \frac{49}{2} - \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

◀

第 6 章 定积分

6.1 定积分的概念与性质

Definition 6.1 定积分

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间 $[a,b]$ 分为若 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

各个小区间长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i\ (x_{i-1} \leqslant \xi \leqslant x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，并作出和

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果当 $\lambda \to 0$ 时，这个和的极限存在，且与闭区间 $[a,b]$ 的分法无关及点 ξ_i 的取法无关，那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分（简称积分），记作 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a,b]$ 叫做积分区间

Definition 6.2 定积分 $\varepsilon-\delta$

设有常数 I, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存在一个正数 δ, 使得对于区间 $[a,b]$ 的任何分法, 不论 ξ_i 在 $[x_{n-1},x_n]$ 中怎样选取, 只要 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}<\delta$, 总有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

成立, 那么称 I 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分, 记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Example 6.1: Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$$

证明: $\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在

Solution 设

$$\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = I$$

若取 ξ_i 为有理点: $D(\xi)=1$

$$\begin{aligned}\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i\\ &= b-a\end{aligned}$$

若取 ξ_i 为无理点: $D(\xi)=0$

$$\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0$$

这样的数 I 不存在, Dirichlet 函数在任何区间上不可积。 ◀

Exercise 6.1: 利用定义计算定积分

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$$

Solution 函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上可积.
将 $[0,1]$ n 等分, 其分点为 $x_i=\frac{i}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 小区间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ $(i=1,2,\cdots,n)$
长度为 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\frac{1}{n}$, 故

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 6.2: 利用定义计算定积分

$$
\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x
$$

✎ Solution 函数 $f(x) = e^x$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故 $f(x) = e^x$ 在 $[0,1]$ 上可积.
将 $[0,1]$ n 等分, 其分点为 $x_i = \frac{i}{n}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 小区间 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 长度为 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 取 $\xi_i = \frac{i}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\lambda = \max\{\Delta x_i\} = \frac{1}{n}$, 故

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i} \Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(e-1)e^{\frac{1}{n}}}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} \\
&= e - 1
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 6.3: 利用定义计算定积分

$$
\int_a^b \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x
$$

✎ Solution 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上可积.
将 $[a,b]$ n 等分, 其分点为 $x_0 = a, x_1 = aq, x_2 = aq^2, \cdots, x_n = aq^n = b, q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$,
小区间 $[aq^{i-1}, aq^i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 长度为 $\Delta x_i = aq^{i-1}(q-1)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,
取 $\xi_i = aq^i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\lambda = \max\{\Delta x_i\} = aq^{n-1}(q-1) \sim \frac{b}{n} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, 故

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i} \Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{aq^{i-1}(q-1)}{aq^i} = \lim_{n\to\infty} n(1 - q^{-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 6.4: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1+2!+3!+\cdots+n!}}{n}$$

Solution 由于

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{1+2!+3!+\cdots+n!}}{n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{n\times n!}}{n}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}==\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\right\}=\exp\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n\times n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$$

所以由夹逼准则知所求极限为 $\frac{1}{e}$ ◀

Exercise 6.5: 求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

Solution

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2$$

◀

Example 6.2: 求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}\quad(b>1).$$

Solution

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\overbrace{b^{\frac{2i+1}{2n}}}^{\xi_i}\overbrace{\left(b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}\right)}^{\Delta x_i}$$

$$=\int_1^b\sin x\,\mathrm{d}x=\cos 1-\cos b$$

◀

Exercise 6.6: 求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$$

Solution

$$I=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right)=\exp\left(\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{4}{e}$$

◀

Exercise 6.7: 求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{3^2+n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

Solution

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i^2+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(\frac{i}{n})^2+1}}\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1\\&=\ln(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.8: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{2}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

Solution

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{2}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{i^2+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\left(\frac{i}{n}\right)^2+1}\\&=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)\\&=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.9: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Solution

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\exp\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\\&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)\\&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}=\exp\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\\&=\exp\left\{\left[x\ln x\right]_0^1-\int_0^1\mathrm{d}x\right\}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.10: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left((n+1)!\right)^{\frac{1}{n+1}}-\left(n!\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

Solution 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\exp\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{e}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\left((n+1)!\right)^{\frac{1}{n+1}}-\left(n!\right)^{\frac{1}{n}}\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}}-e^{\frac{\ln[(n)!]}{n}}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left[e^{\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}-\frac{\ln[(n)!]}{n}}-1\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left[\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}-\frac{\ln(n!)}{n}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left[\frac{n\ln[(n+1)!]}{n+1}-\ln(n!)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left[\ln[(n+1)!]-\ln(n!)-\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}\right]\\&=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[\ln(n+1)-\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)\right]\\&=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right)=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

◀

Solution 注意到斯特林公式

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\quad n\to\infty$$

那么有

$$(n!)^{\frac{1}{n}}\sim\frac{n}{e},\ \left((n+1)!\right)^{\frac{1}{n+1}}\sim\frac{n+1}{e}$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left((n+1)!\right)^{\frac{1}{n+1}}-\left(n!\right)^{\frac{1}{n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{e}-\frac{n}{e}\right]=\frac{1}{e}$$

◀

Exercise 6.11: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$$

Solution 由于

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\pi}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

所以由夹逼准则知所求极限为 $\dfrac{2}{\pi}$

◀

Exercise 6.12: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{n^2+1}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n^2+n}\right)$$

Solution 由于

$$\frac{i}{n^2+n}\leqslant\frac{\sqrt{i\cdot(i+1)}}{n^2+i}\leqslant\frac{i+1}{n^2+1}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=1\times\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2+1}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=1\times\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{n^2+1}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$$

◀

Example 6.3: 求极限: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}$

Lemma 6.1

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}=\frac{2n^2+1}{3}$$

♣

Proof: 方法 1 利用三角恒等式

$$\begin{aligned}\sin 2nx&=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}(-1)^{k-1}\cos^{2n+1-2k}x\sin^{2k}x\\&=\sin^{2n}x\cot x\left(2n\cot^{2n-2}x-\binom{2n}{3}\cot^{2n-4}x+\cdots\right)\end{aligned}$$

若令 $\sin 2nx=0$, 则 $2nx=k\pi$, $x=\dfrac{k\pi}{2n}$. 右边即可得

$$\binom{2n}{1}\cot^{2n-2}x-\binom{2n}{3}\cot^{2n-4}x+\cdots=0.$$

方程 $\binom{2n}{1}\cot^{2n-2}x-\binom{2n}{3}\cot^{2n-4}x+\cdots=0$ 的所有根为

$$t=\cot^2\frac{k\pi}{2n},\ k=1,\cdots,n-1$$

那么由韦达定理可得 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\cot^2\dfrac{k\pi}{2n}=\dfrac{\binom{2n}{3}}{2n}=\dfrac{(2n-1)(n-1)}{3}$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}\csc^2\frac{k\pi}{2n}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\cot^2\frac{k\pi}{2n}+1\right)=\frac{(2n-1)(n-1)}{3}+n=\frac{2n^2+1}{3}.$$

方法 2 利用有理分式展开 $\csc^2 x=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(x+m\pi)^2}$ 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\csc^2\frac{k\pi}{2n}&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{n}+m\pi\right)^2}=\frac{n^2}{\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+nm)^2}\\&=\frac{n^2}{\pi^2}\sum_{\substack{m=-\infty\\ n\mid m}}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{2n^2}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{n^2-1}{3}\end{aligned}$$

在这个求和式子中, 对固定的 m,k 从 1 到 $n-1$ 求和, 则 $k+nm$ 刚好不包含被 n 整除的数. 由此可得

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\cot^2\frac{k\pi}{2n}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4n^2-1}{3}+1\right)=\frac{2n^2+1}{3}.$$

□

✎ Solution 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{2n^2+1}{3}=\frac{2}{3}$$

◀

Exercise 6.13: 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数, 且 $f(x)\geqslant 0$. 证明

$$\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\leqslant f(1)+\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution 一方面

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=f(1)+\sum_{n=2}^{\infty}f(n)=f(1)+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}f(n)\,\mathrm{d}x$$

$$< f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) + \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

另一方面

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant f(1) + \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

◀

Exercise 6.14: 求 $\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分

Solution 一方面

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=2}^{100} n^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=2}^{100} \int_{n-1}^{n} n^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$< 1 + \sum_{n=2}^{100} \int_{n-1}^{n} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 1 + \int_{1}^{100} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 19$$

或者

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} < \int_{1}^{101} \frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{100.5} - \sqrt{2} \approx 18.636$$

另一方面

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{100} \int_{n}^{n+1} n^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x > \sum_{n=1}^{100} \int_{n}^{n+1} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{101} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\left(\sqrt{101} - 1\right) \approx 18.1$$

因此 $\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为 18 ◀

Solution 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

故

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=2}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$< 1 + 2\sum_{n=2}^{100} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = 1 + 2(10-1) = 19$$

又

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

故

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} > 2\sum_{n=2}^{100}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = 2(\sqrt{101}-1) > 18$$

因此 $\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为 18 ◀

Exercise 6.15: 求极限

$$I = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{[n\pi]}+\frac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$$

✎ Solution1. 一方面

$$\begin{aligned}\frac{1}{[n\pi]}+\frac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\frac{1}{4n} &= \sum_{k=0}^{4n-[n\pi]}\frac{1}{[n\pi]+k}\\ &< \sum_{k=0}^{4n-[n\pi]}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{[n\pi]+x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{4n-[n\pi]}\frac{1}{[n\pi]+x}\,\mathrm{d}x \to \ln\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\frac{1}{[n\pi]}+\frac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\frac{1}{4n} &= \sum_{k=0}^{4n-[n\pi]}\frac{1}{[n\pi]+k}\\ &> \sum_{k=0}^{4n-[n\pi]}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{[n\pi]+x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{4n-[n\pi]+1}\frac{1}{[n\pi]+x}\,\mathrm{d}x \to \ln\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{[n\pi]}+\frac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\frac{1}{4n}\right) = \ln\frac{4}{\pi}$

◀

✎ Solution2. 考虑欧拉常数的定义

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln n+\gamma+\varepsilon_n$$

故有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{[n\pi-1]} = \ln[n\pi-1]+\gamma+\varepsilon_{[n\pi]-1} \tag{6.1}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n} = \ln(4n)+\gamma+\varepsilon_{4n} \tag{6.2}$$

由 (6.2)−(6.1) 得

$$\frac{1}{[n\pi]}+\frac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\frac{1}{4n} = \ln\frac{4n}{[n\pi-1]}+\varepsilon_{4n}-\varepsilon_{[n\pi]-1}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{[n\pi]}+\frac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)=\ln\frac{4}{\pi}$

◀

✎ Solution3. 显然

$$n\pi-1<[n\pi]\leqslant n\pi$$

故有

$$\frac{1}{n\pi-1}+\frac{1}{n\pi}+\cdots+\frac{1}{4n-1}<I\leqslant\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{n\pi+1}+\cdots+\frac{1}{4n}$$

其中

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{n\pi+1}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{4n}\frac{1}{n\pi+i}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{(4-\pi)n}\frac{1}{\pi+\frac{i}{n}}=\int_0^{4-\pi}\frac{1}{\pi+x}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\pi-1}+\frac{1}{n\pi}+\cdots+\frac{1}{4n-1}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{4n}\frac{1}{n\pi+i}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{(4-\pi)n}\frac{1}{\pi+\frac{i}{n}}=\int_0^{4-\pi}\frac{1}{\pi+x}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{[n\pi]}+\frac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)=\ln\frac{4}{\pi}$

◀

Exercise 6.16: 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])^2\,\mathrm{d}t$$

✎ Solution 当 $n\leqslant t\leqslant n+1$ 时

$$\begin{aligned}\int_0^x(t-[t])^2\,\mathrm{d}t\int_0^n(t-[t])^2\,\mathrm{d}t+\int_n^x(t-[t])^2\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\int_i^{i+1}(t-[t])^2\,\mathrm{d}t+\int_n^x(t-n)^2\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\int_i^{i+1}(t-i)^2\,\mathrm{d}t-\frac{1}{3}(n-x)^3=\frac{1}{3}\left[n+(x-n)^3\right]\end{aligned}$$

所以

$$\frac{n}{3(n+1)}\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])^2\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{n+1}{3n},n=1,2\cdots$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}$, 并且当 $n\to\infty$ 时有 $x\to\infty$, 所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}$$

Exercise 6.17: 求积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left[\frac{x}{\pi}\right]}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

Solution 当 $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi$ 时

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\left[\frac{x}{\pi}\right]}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{\infty}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\left[\frac{x}{\pi}\right]}{x^3}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{i}{x^3}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{i}{2\pi^2}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\right] = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

其中:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercise 6.18: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}$$

Solution(方法 1) 一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k-1}^{k}\frac{n}{n^2+k^2}\mathrm{d}x\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k-1}^{k}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{n^2}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k}^{k+1}\frac{n}{n^2+k^2}\mathrm{d}x\\ &\geqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k}^{k+1}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{n^2+1}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{2}$$

(方法 2) 设

$$S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

因

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{dx}{1+x^2} < \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} < \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{dx}{1+x^2}$$

则

$$\int_{\frac{n^2+1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x^2} < S_n < \int_0^n \frac{dx}{1+x^2}$$

当 $n \to \infty$ 时，该不等式左右两端的极限都趋于 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

由夹逼准则可知原极限为 $\frac{\pi}{2}$ ◀

Exercise 6.19:

1. 证明: $\ln\ln n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})} \le \frac{5}{2} + \ln\ln n$ ——黑邪 45 自编

2. 求极限 $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\ln\ln n} x \,\mathrm{d}x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})}$ ——黑邪 45 自编

Solution ◀

Exercise 6.20: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$$

Solution

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{n^2+1}{n}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{(n-1)^2+1}{n^2}} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\xi_i)^2} \Delta x_i, \quad \xi_i = \frac{(n-1)^2+1}{n^2}, \Delta x_i = \frac{1}{n} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.21: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[1^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n+1)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[2^\beta + 4^\beta + \cdots + (2n)^\beta\right]^{\alpha+1}} \quad (\alpha, \beta \ne -1)$$

Solution

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[1^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n+1)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[2^\beta + 4^\beta + \cdots + (2n)^\beta\right]^{\alpha+1}} \quad (\alpha, \beta \ne -1) \\
&= 2^{\alpha-\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{\left\{\frac{2}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha + \left(\frac{3}{n}\right)^\alpha + \cdots + \left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]\right\}^{\beta+1}}{\left\{\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^\beta + \left(\frac{4}{n}\right)^\beta + \cdots + \left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]\right\}^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

$$= 2^{\alpha-\beta}\frac{\left\{\int_0^2 x^\alpha\,\mathrm{d}x\right\}^{\beta+1}}{\left\{\int_0^2 x^\beta\,\mathrm{d}x\right\}^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta}\frac{\left\{\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big|_0^2\right\}^{\beta+1}}{\left\{\frac{1}{\beta+1}x^{\beta+1}\Big|_0^2\right\}^{\alpha+1}}$$

$$= 2^{\alpha-\beta}\frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

◀

Exercise 6.22: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}\sqrt[n]{n^2+i^2}$$

Solution 取对数, 我们有

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}\sqrt[n]{n^2+i^2}\right) &= \sum_{i=1}^{2n}\frac{\ln(n^2+i^2)}{n} - \ln n^4\\ &= \sum_{i=1}^{2n}\frac{\ln n^2}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right) - \ln n^4\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}\sqrt[n]{n^2+i^2} &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}\right)\\ &= \exp\left(\int_0^2\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x\right) = 25e^{2\arctan 2-4}\end{aligned}$$

◀

Example 6.4: 设 $a_n = \cos\frac{\theta}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2\theta}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{n\theta}{n\sqrt{n}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Proof: 取对数, 我们有

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \ln\left(\cos\frac{\theta}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2\theta}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{n\theta}{n\sqrt{n}}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\frac{k\theta}{n\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\cos\frac{k\theta}{n\sqrt{n}}-1\right)\right)\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \ln\lim_{n\to\infty}a_n &= \ln\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2\theta^2}{2n^3}-\frac{k^4\theta^4}{12n^6}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= -\ln\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\theta^2}{2n^3}+\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^4\theta^4}{12n^6}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$= -\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + 0 = -\frac{\theta^2}{6}$$

于是 $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\frac{\theta^2}{6}}$ □

Exercise 6.23: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n)^{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{n}}$$

Solution 取对数, 我们有

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n)^{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\ln i - \frac{1}{2}\ln n\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln n - \frac{1}{2}\ln n\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n} + \frac{n^2+n}{2n^2}\ln n - \frac{1}{2}\ln n\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n} + \frac{\ln n}{2n}
\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n)^{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{n}} &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n} + \frac{\ln n}{2n}\right)\right)\\
&= \exp\left(\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x\right) = e^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.24: 求极限

$$I = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+k)(n+k+1)}$$

Solution

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+k} - \frac{k}{n+k+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} - \cdots + \frac{n}{n+n} - \frac{n}{n+n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+k}\right) - \frac{n}{n+n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \frac{1}{2} = \int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\\
&= \ln 2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

◀

Example 6.5: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)^2\right]$$

Solution(by 欧阳) 由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\ln\ln k-\ln^2 n\right)$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\ln\ln k-\ln^2 n\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)^2\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2\frac{k}{n}-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right)^2\right]\\&=\int_0^1\ln^2 x\,\mathrm{d}x-\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)^2=1\end{aligned}$$

或者可以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)\right)^2\right]\\&\xlongequal{\text{将平方展开}}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2\frac{k}{n}-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right)^2\right]\\&=\int_0^1\ln^2 x\,\mathrm{d}x-\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)^2=1\end{aligned}$$

◀

Example 6.6: 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2}{2n}+\sin\frac{4}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}+\sin\frac{3}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2n}}\right)^n=\exp\frac{\sin 1}{1-\cos 1}$$

Solution

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2}{2n}+\sin\frac{4}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}+\sin\frac{3}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}\left(\sin\frac{2}{2n}+\sin\frac{4}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n}{2n}\right)}{\frac{1}{n}\left(\sin\frac{1}{2n}+\sin\frac{3}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2n}\right)}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\int_0^1 \sin x \,\mathrm{d}x + \frac{\sin 1 + \sin 0}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\int_0^1 \sin x \,\mathrm{d}x + \frac{\cos 0 - \cos 1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right)^n = \exp \frac{\sin 1}{1 - \cos 1}$$

◀

Exercise 6.25: 求极限

$$I = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n+2)}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\ln(n+n)}{n+\frac{1}{n}} - \ln n \right]$$

Solution 由于

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n+2)}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\ln(n+n)}{n+\frac{1}{n}} - \ln n \geqslant \frac{\ln(n+1) + \cdots + \ln(n+n)}{n+1} - \ln n$$

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n+2)}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\ln(n+n)}{n+\frac{1}{n}} - \ln n \leqslant \frac{\ln(n+1) + \cdots + \ln(n+n)}{n} - \ln n$$

且

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+1) + \cdots + \ln(n+n)}{n} - \ln n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+1) - \ln n + \ln(n+2) - \ln n + \cdots + \ln(n+n) - \ln n + n\ln n}{n} - \ln n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right) \right] \\
&= \int_0^1 \ln(1+x) \,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+1) + \cdots + \ln(n+n)}{n+1} - \ln n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+1) - \ln n + \ln(n+2) - \ln n + \cdots + \ln(n+n) - \ln n + n\ln n}{n+1} - \ln n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right) \right] - \frac{\ln n}{1+n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right) \right] + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{1+n} \\
&= 1 \times \int_0^1 \ln(1+x) \,\mathrm{d}x + 0 = 2\ln 2 - 1
\end{aligned}$$

所以由夹逼准则知所求极限是 $\frac{2}{\pi}$ ◀

Exercise 6.26: 求极限

$$\int_0^n [x]\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\int_0^n [x]\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}[x]\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Exercise 6.27: 求极限

$$\int_0^1 \left(\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x$$

Solution 当$n \leqslant \frac{2}{x} < n+1$ 即 $\frac{1}{2(n+1)} < x \leqslant \frac{1}{2n}$ 时, $\left[\frac{2}{x}\right] = n$;

同样的, 当$n \leqslant \frac{1}{x} < n+1$ 即 $\frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}$ 时, $\left[\frac{1}{x}\right] = n$;

由于

$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] = \left(\frac{2}{2n+2}, \frac{2}{2n}\right] = \left(\frac{2}{2n+2}, \frac{2}{2n+1}\right] \bigcup \left(\frac{2}{2n+1}, \frac{2}{2n}\right]$$

当 $\frac{2}{2n+2} < x \leqslant \frac{2}{2n+1}$ 时, $\left[\frac{2}{x}\right] = 2n+1$, $\left[\frac{1}{x}\right] = n$, 此时有

$$\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right] = (2n+1) - 2n = 1$$

当 $\frac{2}{2n+1} < x \leqslant \frac{2}{2n}$ 时, $\left[\frac{2}{x}\right] = 2n$, $\left[\frac{1}{x}\right] = n$ 此时有

$$\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right] = 2n - 2n = 0$$

因此,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left(\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+2}}^{\frac{2}{2n+1}} \left(\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{2}{2n}} \left(\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+2}}^{\frac{2}{2n+1}} \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{2}{2n}} 0\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n+2}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) \\
&= 2\left(-\ln 2 + 1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \ln 4 - 1 = 2\ln 2 - 1
\end{aligned}$$

Note:

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \cdots$$

◀

Example 6.7: 设多项式

$$P(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0\,,\ a_m\geqslant 0$$

设 $P(1), P(2), \cdots, P(n)$ 的算术均值和几何均值记作 A_n , G_n 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{G_n}$

Solution 为了方便, 我们记作

$$S_{n,k}=1+2^k+\cdots+n^k$$

易得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n,k}}{n^{k+1}}=\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}$$

那么有

$$A_n=\frac{P(1)+P(2)+\cdots+P(n)}{n}=a_m\frac{S_{n,k}}{n}+a_{m-1}\frac{S_{n-1,k}}{n}+\cdots+a_m$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^m}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_m}{m+1}$$

其次注意

$$\frac{P_n}{n^m}=a_m$$

故

$$\ln G=\frac{\ln P(1)+\ln P(2)+\cdots+\ln P(n)}{n}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\ln\frac{G_n}{(n!)^{\frac{m}{n}}}=\ln a_m$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{G_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^m\cdot\frac{1}{m+1}=\frac{e^m}{m+1}$$

◀

Example 6.8: 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n=1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\ln n}-\frac{2}{\pi}n\right)=\frac{2\gamma}{\pi}-\frac{2\ln\pi-\ln 4}{\pi}$$

Solution (by tian_275461) 记

$$I=\frac{\ln n}{n}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\ln n}-\frac{2}{\pi}n\right)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)-2\ln n$$

只要证

$$\lim_{n\to\infty}I=2\gamma-2\ln\pi+\ln 4$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty}(2\gamma - I) = 2\ln\pi - \ln 4$$

记 $S = 2\gamma - I$, 我们有

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n + c_n \quad \text{其中} c_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\begin{aligned}
S &= 2\sum_{k=1}^{n-1} - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 2c_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 2c_n \\
&= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\frac{k\pi}{n}} + \frac{1}{\pi - \frac{k\pi}{n}}\right) - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 2c_n
\end{aligned}$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty} S = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

故只要证

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x = 2\ln\pi - \ln 4$$

而

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

第二部分用替换 $y = \pi - x$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

注意到

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi}\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)
\end{aligned}$$

对 n 分奇偶性讨论

(1) $n = 2m - 1\,(m = 1, 2, \cdots)$ 时

$$(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \ln\left(\frac{(4m-1)(4m-3)}{(4m-2)^2}\right)$$

(2) $n=2m\,(m=1,2,\cdots)$ 时

$$(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\ln\left(\frac{(4m)^2}{(4m+1)(4m-1)}\right)$$

而

$$\sum_{m=1}^{k}(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\ln\left[\frac{1}{4k+1}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\right]\to\ln\frac{\pi}{4}\quad(\text{用 Wallis 公式})$$

马上得到

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x=2\ln\pi-\ln 4$$

◀

Exercise 6.28: 求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}$$

Solution 考虑 $f(x)=x^p\,(x\in[0,2])$. 将 $[0,2]$ n 等分, 分点为 $\frac{2i}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 小区间长度为 $\Delta x_i=\frac{2}{n}(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\frac{2i-1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\frac{2}{n}$, 故

$$I=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n}\right)^p=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i)^p\Delta x_i=\frac{1}{2}\int_0^2 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{2^p}{p+1}$$

◀

Exercise 6.29: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right)$$

Solution1. 考虑 $f(x)=\sin(\pi x)\,(x\in[0,1])$. 将 $[0,1]$ n 等分, 分点为 $\frac{i}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$,
小区间长度为 $\Delta x_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\frac{i-\frac{1}{2}}{n}(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\frac{1}{n}$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sin(\xi_i\pi)\Delta x_i=\int_0^1\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

◀

Solution2. 考虑 $f(x)=\sin x\,(x\in[0,\pi])$. 将 $[0,\pi]$ n 等分, 分点为 $\frac{i\pi}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$,
小区间长度为 $\Delta x_i=\frac{\pi}{n}(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\,(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\frac{\pi}{n}$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right)=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sin(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$

◀

Exercise 6.30: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 试用定积分的定义和拉格朗日中值定理证明牛顿莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(a) - F(b)$$

Solution 用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将 $[a,b]$ 分为 n 个小区间, 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \, (i = 1, 2, \cdots, n)$, $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$
应用拉格朗日中值定理, 必存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

于是

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x &= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

◀

Exercise 6.31: 证明

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = 0$$

Proof: $\forall \varepsilon > 0 \, (\varepsilon < \pi)$, 因

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{\pi}{2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

而 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\pi}{2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0$, 所以 $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时

$$0 < \frac{\pi}{2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

又

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2}$$

故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时有

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

由极限的定义即得原式成立 □

Example 6.9: 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t=0$$

Proof: 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $0<a<\frac{\varepsilon}{4}$, 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t&=\int_0^{1-a}\sin t^n\,\mathrm{d}t+\int_{1-a}^{1+a}\sin t^n\,\mathrm{d}t+\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t\\&=I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

由 $|\sin x|\le 1$ 知 $|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$, 对 I_1, 有

$$|I_1|\le\int_0^{1-a}|\sin t^n|\,\mathrm{d}t\le\int_0^{1-a}t^n\,\mathrm{d}t\le\frac{(1-a)^{n+1}}{n+1}$$

显然可以找到一个 $N_1>0$ 使得 $n>N_1$ 时有 $|I_1|\le\frac{\varepsilon}{4}$, 而对 I_3

$$\begin{aligned}I_3=\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t&=\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(-\cos t^n)}{nt^{n-1}}\\&=\frac{-\cos t^n}{nt^{n-1}}\Bigg|_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1-n}{n}\cdot\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t^n}{t^n}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\cos(1+a)^n-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{n(1+a)^{n-1}}+\frac{1-n}{n}\cdot\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t^n}{t^n}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

显然存在 N_2, 使得当 $n>N_2$, 时有 $|I_3|<\frac{\varepsilon}{4}$, 这样，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时，就有 $|I|<\varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t=0$$

□

Proof:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n dt=\frac{1}{n}\cdot\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}y^{\frac{1}{n}-1}\sin y\,dy\qquad(y=t^n)$$

而

$$\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)=\int_0^{\infty}u^{-\frac{1}{n}}e^{-u}du=\int_0^{\infty}y^{1-\frac{1}{n}}\cdot x^{-\frac{1}{n}}e^{-xy}dx$$

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}\left(\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{n}}e^{-xy}dx\right)\cdot\sin y\,dy\\&=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{n}}\cdot\left(\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}e^{-xy}\sin y\,dy\right)dx\\&=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{-\frac{1}{n}}}{1+x^2}dx-\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right]}{(1+x^2)e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}}dx\\&=I_1-I_2\end{aligned}$$

而我们知道 $\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin\pi a}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{x^{-\frac{1}{n}}}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2n}}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}I_1=0$$

$$I_2=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\left(\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right)=S_1+S_2$$

其中

$$\begin{aligned}
|S_1|&=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left|\int_0^1\frac{x^{-\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right]}{(1+x^2)e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}}dx\right|\\
&\le\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^1\frac{[\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+1]x^{-\frac{1}{n}}}{e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}}dx\\
&=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}z^{-\frac{1}{n}}e^{-z}dz\\
&\le\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}\int_0^{+\infty}z^{-\frac{1}{n}}e^{-z}dz\\
&=\frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-n}\right]\to 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|S_2|&=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left|\int_1^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right]}{(1+x^2)e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}}dx\right|\\
&\le\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\int_1^{+\infty}\frac{x^{-\frac{1}{n}}}{1+x^2}dx\le\frac{\pi}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\to 0
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n dt=0$$

□

Example 6.10: 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\cos^n\left(\frac{1}{x}\right)dx=0$$

✎ Solution 作变量替换 $u=\frac{1}{x}$, 则有

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos^n u}{u^2}\right|du&=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\cos^n u}{u^2}\right|du+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(k+\frac{3}{2}\right)\pi}\left|\frac{\cos^n u}{u^2}\right|du\\
&\le\cos^n 1\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{u^2}du+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|du\\
&=\cos^n 1\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{u^2}du+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|du
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 知 $\cos^n 1\to 0$, $\int_0^{\pi}|\cos^n u|du\to 0$. 这是由于

$$\int_0^{\pi}|\cos^n u|du=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u du=2I_n$$

由于单调有界收敛原理知 $n\to\infty$ 极限必然存在. 所以考虑偶序列递推公式和 Wallis 公式

$$I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{2n}},\ n\to\infty$$

◀

Exercise 6.32: 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=0$$

Proof: 做变换 $x=\frac{1}{u}$, 得到

$$\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^n u\,\mathrm{d}u}{u^2}.$$

从而

$$\left|\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2}.$$

对任意正整数 k,

$$\begin{aligned}\int_1^{1+k\pi}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2}&=\sum_{i=1}^{k}\int_{1+(i-1)\pi}^{1+i\pi}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1+(i-1)\pi)^2}\int_{1+(i-1)\pi}^{1+i\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1+(i-1)\pi)^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

$$\int_{1+k\pi}^{+\infty}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2}\leqslant\int_{1+k\pi}^{+\infty}\frac{1}{u^2}=\frac{1}{1+k\pi}.$$

因此

$$\left|\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1+(i-1)\pi)^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u+\frac{1}{1+k\pi},\forall k=1,2,\ldots.$$

令 $k\to\infty$, 得到

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(i-1)\pi)^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u\\&<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u=\frac{\pi^2}{6}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

易证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=0.$$

□

☞ Proof: 做变换 $x=\frac{1}{u}$, 得到

$$\int_0^1 \cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^n u\,\mathrm{d}u}{u^2}.$$

从而

$$\left|\int_0^1 \cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2}&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{1+(i-1)\pi}^{1+i\pi}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(i-1)\pi)^2}\int_{1+(i-1)\pi}^{1+i\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(i-1)\pi)^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u\\&<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u=\frac{\pi^2}{6}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

得到

$$\left|\int_0^1 \cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\pi^2}{6}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u,\ \forall n=1,2,\ldots.$$

易证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=0.$$

□

Exercise 6.33: 设 $y=\frac{x^2}{1-x^2}$, $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, 则函数 y 在该区间的平均值 $\bar{y}=$ ________

✎ Solution $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为函数 y 在区间 $[a,b]$ 上的平均值——同济 6 版高数上 (p234)

$$\bar{y}=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{1-2\sqrt{3}+\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}-1}$$

◀

Example 6.11: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^x\sin\frac{\pi}{x+t}\,\mathrm{d}t$

✎ Solution 法 1:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x\sin\frac{\pi}{x+t}\,\mathrm{d}t\xlongequal{u=x+t}\lim_{n\to\infty}\int_x^{2x}\sin\frac{\pi}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{\text{泰勒展开}} \lim_{n\to\infty}\int_x^{2x}\frac{\pi}{u}+o\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\pi\ln 2$$

法 2:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^x\sin\frac{\pi}{x+t}\,\mathrm{d}t &\xlongequal{u=x+t}\lim_{n\to\infty}\int_x^{2x}\sin\frac{\pi}{u}\,\mathrm{d}u\\ &\xlongequal{t=\frac{\pi}{u}}\lim_{n\to\infty}\pi\int_{\frac{\pi}{2x}}^{\frac{\pi}{x}}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{n\to\infty}\pi\frac{\sin\xi_x}{\xi_x}\int_{\frac{\pi}{2x}}^{\frac{\pi}{x}}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\pi\ln 2\end{aligned}$$

◀

Example 6.12: 设 $f(x)\in C[0,1]$, 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 ne^{-x^2n^2}f(x)\,\mathrm{d}x$

Solution(by 蓝兔兔) 注意到

$$\int_0^1 ne^{-x^2n^2}f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=nx}\int_0^n e^{-t^2}f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 ne^{-x^2n^2}f(x)\,\mathrm{d}x &=\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t^2}f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t\\ &=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t+\int_{\sqrt{n}}^n e^{-t^2}f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t\right]\\ &=\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)\int_{\sqrt{n}}^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\ &=\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)\end{aligned}$$

◀

Example 6.13: 求极限 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution 注意到

$$\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=nx}\int_0^n\frac{1}{t^2+1}e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x &=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{1}{t^2+1}e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t\\ &=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1}{t^2+1}e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t+\int_{\sqrt{n}}^n\frac{1}{t^2+1}e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t\right]\\ &=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\xi_n^2}{n^2}}\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t+\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\xi_n^2}{n^2}}\int_{\sqrt{n}}^n\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\xi_n^2}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\sqrt{n}-\arctan 0\right)+0=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Example 6.14: 设 $f(x)=|\sin x|$, 记 $g(x)=\dfrac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}$, 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

Solution 对 $\forall x>0$, 总存在 n 使 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 那么则有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}} &\leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^n|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n\pi)^{m+1}}\\
&=\frac{1}{\pi^{m+1}}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{i=0}^{n}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} t^n|\sin t|\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant\frac{1}{\pi^{m+1}}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{i=0}^{n}(i+1)^m\pi^m\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+1}{n}\right)^m\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

其中

$$
\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=2
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}} &\leqslant\frac{2}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+1}{n}\right)^m\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{m+1}
\end{aligned}
$$

左侧同理亦可得出

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}\geqslant\frac{2\pi}{m+1}
$$

由夹逼准则得

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}=\frac{2\pi}{m+1}
$$

Example 6.15: 求极限

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^x \sin^n t\cos^n t\,\mathrm{d}t}{x}
$$

Solution

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^x \sin^n t\cos^n t\,\mathrm{d}t}{x} &\xlongequal{k\pi\leqslant t<(k+1)\pi}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^n t\cos^n t\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2^n}\sin^n 2t\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{u=2t}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin u}{2}\right)^n\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

◀

Example 6.16: 若函数 $f(x)$ 连续, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\int_0^1 f(x)\left[1-(x-1)^2\right]^n\,\mathrm{d}x$$

Solution(by 蓝兔兔) 注意到

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,\mathrm{d}t}=\frac{1}{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}$$

所以

$$\begin{aligned}
\text{原极限}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^1 f(x)\left[1-(x-1)^2\right]^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^1 f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1 f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(1-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^n}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\\
&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(1-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^n}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\\
&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)e^{-n^{\frac{1}{3}}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=0
\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=o\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x\right)$$

同理

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1 f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=o\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x\right)$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{f(1-\xi_n)}^{\xi_n\in\left(0,\frac{1}{n^{1/3}}\right)}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=f(1)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\int_0^1 f(x)\left[1-(x-1)^2\right]^n\mathrm{d}x=f(1)$$

◀

Example 6.17: 设 $f(x)\in C[0,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)$.

Proof: 因为 $(n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=1$, 所以只需要证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x-(n+1)\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x\right)=0$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=0$, 所以只需证 $\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x=0$

$\forall\,\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$, 所以 $\exists\,\delta>0$ (不妨设 $\delta<1$), 当 $0<1-x<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(1)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 且 $\exists M>0$, 使得 $\forall x\in[0,1]$, 有 $|f(x)|\leqslant M$, 所以

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\\&=n\int_0^{1-\delta}x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x+n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\\&<2Mn\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\\&<2M(1-\delta)^{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}2M(1-\delta)^{n+1}=0$$

所以 $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $2M(1-\delta)^{n+1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 所以当 $n>N$ 时, 有

$$\left|n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right|<2M(1-\delta)^{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因而有

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)$$

□

Example 6.18: 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界. 求极限

$$\lim_{t\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

☞ Proof: 对任意 $\varepsilon > 0$, 由连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得对一切 $|x| \leqslant \delta$, 有 $|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$. 从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x &= \left(\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2M\left(\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x + +\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 4M\arctan\frac{t}{\delta}+\frac{2\varepsilon}{\pi}\arctan\frac{\delta}{t} \\ &< \frac{4Mt}{\delta}+\varepsilon.\end{aligned}$$

故

$$\varlimsup_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

根据 $\varepsilon > 0$ 的任意性,

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

☞ Proof: 注意到, 对任意 $t > 0$, 根据积分中值定理, 存在 $\xi \in (-\sqrt{t}, \sqrt{t})$, 使得

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x &= |f(\xi)-f(0)|\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2|f(\xi)-f(0)|\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x &= \left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{t}}+\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}+\int_{\sqrt{t}}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2M\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{t}}+\int_{\sqrt{t}}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x + 2|f(\xi)-f(0)|\arctan\frac{1}{\sqrt{t}} \\ &= 4M\arctan\sqrt{t}+2|f(\xi)-f(0)|\arctan\frac{1}{\sqrt{t}} \\ &< 4M\sqrt{t}+\pi|f(\xi)-f(0)|.\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

Example 6.19: $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

☞ Proof: 令 $M = \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 若 $M = 0$, 则等式平凡成立. 故不妨设 $M > 0$. 设 $x_0 \in [a,b]$ 满足 $M = |f(x_0)|$. 则对任何 $\varepsilon \in (0, M)$, 存在区间 $[c,d]$, 使得 $x_0 \in [c,d] \subset [a,b]$ 且 $|f(x)| \geqslant M - \varepsilon, \forall x \in [c,d]$. 从而

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant (d-c)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon).$$

因此

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 得到

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M.$$

另一方面, 显然有

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{n}}M.$$

于是

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}},\quad \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = M = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

□

Exercise 6.34: $f_0(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积,

$$f_0(x)>0;\, f_n(x)=\sqrt{\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t},\quad (n=1,2,\ldots),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Proof: 设 $0<\delta<1$. 因为 $f_0(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积且 $f_0(x)>0$,

所以 $f_1(x)=\sqrt{\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t}$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数，故存在正数 m, M, 使得

$$f_1(x)\le M \qquad (x\in[0,1])$$
$$f_1(x)\ge m \qquad (x\in[\delta,1])$$

对任一自然数 n, 用数学归纳法可以证明如下不等式

$$m^{\frac{1}{2^n}}a_n(x-\delta)^{1-\frac{1}{2^n}} \le f_{n+1}(x) \le M^{\frac{1}{2^n}}a_n x^{1-\frac{1}{2^n}} \tag{6.3}$$

其中

$$a_n=\left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $n=1$ 时, 有

$$f_2(x)=\sqrt{\int_0^x f_1(t)\,\mathrm{d}t}\le M^{\frac{1}{2}}x^{1-\frac{1}{2}}=M^{\frac{1}{2}}a_1x^{1-\frac{1}{2}}$$

设 $n-1$ 时结论成立, 则对 n 有

$$f_{n+1}(x)=\sqrt{\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t}\le M^{\frac{1}{2^n}}a_{n-1}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\int_0^x t^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}\,\mathrm{d}t}$$

$$= M^{\frac{1}{2^n}} a_{n-1}^{\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}} = M^{\frac{1}{2^n}} a_n x^{1-\frac{1}{2^n}}$$

故 (6.3) 式右边的不等式对一切自然数 n 都成立, 同理可证左边的不等式亦真.
因为

$$\ln a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln \frac{2}{2^2-1} + \frac{1}{2^{n-2}} \ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

所以根据特普利茨定理（容易验证此时条件全部满足）有

$$\lim_{n\to+\infty} \ln a_n = \lim_{n\to+\infty} \ln \frac{1}{2-\dfrac{1}{2^{n-1}}} = \ln \frac{1}{2}$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty} M^{\frac{1}{2^n}} a_n x^{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{x}{2} \qquad \lim_{n\to+\infty} m^{\frac{1}{2^n}} a_n (x-\delta)^{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{x-\delta}{2}$$

由 δ 的任意性即知对任一切 $x \in (0,1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(x) = \frac{x}{2}$$

又因 $f_{n+1}(0)=0 \quad (n=1,2,\cdots)$ 所以对一切 $x \in [0,1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(x) = \frac{x}{2}$$

□

Example 6.20: 求极限:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n - \frac{1}{2}\right]$$

Solution 首先有

$$\begin{aligned}
I(n) &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=x^n} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{裂项}} \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{t^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln t}} 1-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}k!}\int_0^1 \frac{\ln^k x}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因此不难得到

$$I(n) = 1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
I^n(n) &= e^{n\ln I(n)} = e^{n\ln\left[1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]} \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

因此最后得到

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n - \frac{1}{2}\right] = \frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{4}\ln^2 2$$

◀

Example 6.21: 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt$$

Proof: 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.
于是，对于任意 ε, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x < \delta$ 时 $\cos x > 1-\varepsilon$

$$I = \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{4}} e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt$$

$$\sqrt{x}\int_0^{\delta} e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt \le \sqrt{x}\int_0^{\delta} e^{x(\cos t-1)}dt$$

令 $y = x(1-\cos t), \Rightarrow t = \arccos\left(1-\dfrac{y}{x}\right), \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x\sqrt{1-(1-\frac{y}{x})^2}}dy$, 则

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x}\int_0^{x(1-\cos\delta)} e^{x(\cos t-1)}dt = \sqrt{x}\int_0^{x(1-\cos\delta)} e^{-y}\frac{1}{x\sqrt{1-(1-\frac{y}{x})^2}}dy\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{2x}}}dy\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{2x}}}-1\right)dy + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\\
=&A+B
\end{aligned}$$

显然有

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\frac{y}{2x}}{\sqrt{1-\frac{y}{2x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{y}{2x}}\right)}dy\\
&\le \frac{1}{2\sqrt{2}x}\int_0^{x} e^{-y}y^{\frac{1}{2}}dy \to 0\\
B &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy \to \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (x\to+\infty)
\end{aligned}$$

另外

$$\sqrt{x}\int_0^{\delta} e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt \ge \sqrt{x}\int_0^{\delta} e^{-\frac{1}{2}xt^2}(1-\varepsilon)dt \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-\varepsilon)$$

而不难证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{4}} e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt = 0$$

这里只要用

$$\cos t - 1 = -2\sin^2\frac{t}{2} \le -2\left(\frac{t}{\pi}\right)^2$$

并注意到替换后的反常积分收敛就好，最后，由 ε 的任意性，得

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

□

Example 6.22: 求极限 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\right)$

Solution 设 $\delta = n^{-\frac{2}{5}}$, 则

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \int_{-\delta}^{+\delta}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x + 2\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

因为

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_{\delta}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n)}\\ &= \frac{\pi(2n-3)!!}{2(2n-1)!!}\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\right) &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}e^{\ln\cos x-n\ln(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

因为

$$\ln\cos x - n\ln(1+x^2) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)x^2 + n(x^4),\ x\in[-\delta,+\delta]$$

所以

$$\ln\cos x - n\ln(1+x^2) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)x^2 + o\left(n^{-\frac{8}{5}}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}e^{\ln\cos x-n\ln(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}e^{-(n+\frac{1}{2})x^2}\,\mathrm{d}x\right) \quad y=\sqrt{n+\frac{1}{2}}x\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\int_{-\delta\sqrt{n+\frac{1}{2}}}^{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

◀

Example 6.23: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution 首先令 $\cos x = t$, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} \ln\left(1+\frac{\sqrt{1-t^2}}{\cos^{-1} t}\right) t^n\,\mathrm{d}t$$

令 $f(t) = \dfrac{\cos^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} \ln\left(1+\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{\cos^{-1} t}\right) t^n$ 易知 $f(t)\downarrow \quad t\in[0,1]$ 且 $\lim\limits_{t\to 1} f(t) = \ln 2$
运用积分第二中值定理 $\exists \xi \in (0,1)$, s.t

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t &= f(0)\int_0^{\xi} t^n\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to 1} f(x)\int_{\xi}^1 t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(0)}{n+1}\xi^{n+1} + \frac{\ln 2}{n+1}[1-\xi^{n+1}]\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\ln 2}{n+1} + \frac{n\xi^{n+1}}{n+1}\big(f(0)-\ln 2\big)\right] \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

◀

Example 6.24: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, $n\in\mathbb{N}$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

☞ Proof: 对 $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} |\sin nx|\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=nx} \frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u|\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{n}.$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 应用积分中值定理得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{积分中值定理}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} |\sin nx|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\frac{2}{n} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\frac{\pi}{n} \xlongequal{\text{积分定义}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Example 6.25: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

Proof: 将区间 $[0,1]$ 分成 n 等份, 设分点 $x_k=\frac{k}{n}$, 则 $\Delta x_k=\frac{1}{n}$, 且

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x_k\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(x_k)\right]\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right)\\
\xlongequal{\text{积分中值定理}}&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right),\ \text{其中 } \xi_k\in(x_{k-1},x_k)\\
\xlongequal{\text{拉格朗日中值定理}}&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right),\ \text{其中 } \eta_k\in(\xi_k,x_k)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\left[-\frac{1}{2}(x_{k-1}-x_k)^2\right]\right)\\
=&-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)(x_{k-1}-x_k)\right)\\
=&-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

Example 6.26: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在连续的二阶导数, 则

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)]$$

Proof: 由题, 可将 $f(x)$ 在 x_i $\left(x_i=a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)$ 处进行如下泰勒展开

$$\begin{aligned}
f(x)=&f\left(a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)+f'\left(a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\\
&+\frac{f''(\xi_i)}{2}\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

其中 $x\in\left[a+\frac{i-1}{n}(b-a),a+\frac{i}{n}(b-a)\right]$, ξ_i 介于 x 与 $a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}$ 之间. 设

$$B_n=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)$$

则

$$\begin{aligned}
n^2 B_n &= n^2\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= n^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}\left[f(x)-f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right]\mathrm{d}x\right\} \\
&= n^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}\left[f'\left(a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.+\frac{f''(\xi_i)}{2}\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)^2\right]\mathrm{d}x\right\} \\
&\xlongequal{\text{奇偶性}} n^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}\frac{f''(\xi_i)}{2}\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)^2\mathrm{d}x\right\} \\
&\leqslant \frac{n^2}{6}\sum_{i=1}^{n} M_i\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)^3\Bigg|_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} \\
&= \frac{(b-a)^2}{24}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i
\end{aligned}$$

$f'\left(a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)$ 是关于 $x_i = a+\frac{2i-1}{2n}(b-a)$ 对称的直线

同理可得

$$n^2 B_n \geqslant \frac{(b-a)^2}{24}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$$

其中 M_i, m_i 分别是 $f''(x)$ 在 $\left[a+\frac{i-1}{n}(b-a), a+\frac{i}{n}(b-a)\right]$ 上的最大值，最小值，而 $f''(x)$ 可积，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i = \int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(b)-f'(a)$$

根据夹逼准则，

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right] = \frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)]$$

Note:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{a+\frac{k-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{k}{n}(b-a)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

6.2 微积分基本公式

Example 6.27: 求定积分

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\arccos(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution 由反函数定义我们知

$$\arccos(\cos 狗)=狗,\ 狗\in[0,\pi)$$

结合诱导公式

$$\arccos(\sin x)=\arccos(\cos\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right))=x-\tfrac{\pi}{2}$$

故

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\arccos(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$$

◀

Example 6.28: 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-2$ 则 $f(x)=$ ______

✎ Solution 令 $A=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=3x^2-A-2$, 故

$$A=\int_0^1(3x^2-A-2)\,\mathrm{d}x=8-2(A+2)=4-2A$$

解得 $A=\frac{4}{3}$, 因此 $f(x)=3x^2-\frac{10}{3}$ ◀

Example 6.29: 设函数 $f(x)$ 是连续可导函数, 且

$$f(x)=x+x\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+x^2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

求 $f(x)$

✎ Solution 设 $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=A,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=B$, 则 $f(x)=x(1+A)+Bx^2$

$$A=(1+A)\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+B\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$$
$$B=1+A$$

解得 $A=5,B=6$, 于是得 $f(x)=6x+6x^2$ ◀

Example 6.30: 设 $f(x)$ 满足 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. 求 $f(x)$

☞ Proof: 令 $A=\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $f^2(x)=(3x-A\sqrt{1-x^2})^2$, 故

$$A=\int_0^1(3x-A\sqrt{1-x^2})^2\,\mathrm{d}x=\frac{2A^2}{3}-2A+3$$

解得 $A=\frac{3}{2}$ 或者 $A=3$, 因此 $f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}$ 或 $f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$ □

Example 6.31: 设 $f\in[0,1]$, 若有 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\int_0^1 f^2(x^2)\,\mathrm{d}x$. 求 $f(x)$

☞ Proof:(by 欧阳) 首先有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t^2)\,\mathrm{d}t^2=\int_0^1 2xf(x^2)\,\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_0^1 2xf(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,\mathrm{d}x$$

(凑完全平方公式) 故

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \int_0^1 \left(f(x^2) - x\right)^2 \mathrm{d}x \Longrightarrow f(x^2) = x \Longleftrightarrow f(x) = \sqrt{x}$$

(by 啦啊啦)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x^2=t} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

故

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\right)^2 \leqslant 0$$

当且仅当 $f(x) = \sqrt{x}$ 取 "=" □

Example 6.32: 已知 $f(x) = \int_0^1 \left|\ln|x-t|\right|\mathrm{d}t$, 则 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) =$

Solution

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^1 \left|\ln|x-t|\right|\mathrm{d}t = \int_0^x \left|\ln|x-t|\right|\mathrm{d}t + \int_x^1 \left|\ln|x-t|\right|\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int_0^x \left|\ln(x-t)\right|\mathrm{d}t}_{u=x-t} + \underbrace{\int_x^1 \left|\ln(t-x)\right|\mathrm{d}t}_{u=t-x} \\ &= \int_0^x |\ln u|\,\mathrm{d}u + \int_0^{1-x} |\ln u|\,\mathrm{d}u = -\int_0^x \ln u\,\mathrm{d}u - \int_0^{1-x} \ln u\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$f'(x) = \ln(1-x) - \ln x$, 易知 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = f(\frac{1}{2})$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = f(\tfrac{1}{2}) = -2\int_0^{\frac{1}{2}} \ln u\,\mathrm{d}u = 1 + \ln 2$$

◀

Exercise 6.35: 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调可导函数, 它的反函数为 $f^{-1}(x)$, 且 $f(x)$ 满足等式 $\int_2^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - 9$, 则 $f(x) = (\quad)$

(A) $\sqrt{x} - 1$ (B) $\sqrt{x} + 1$ (C) $2\sqrt{x} - 1$ (D) $2\sqrt{x} + 1$

Solution 令 $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - 9 = 0 \Longrightarrow x = 9$, 又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调可导函数

故 $f(9) = 2$, 代入选项可知 A 正确

令 $f^{-1}(t) = u \Longrightarrow t = f(u) \Longrightarrow \mathrm{d}t = f'(u)\mathrm{d}u$

$$\int_2^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{f^{-1}(t)=u} \int_9^x uf'(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= uf(u)\Big|_9^x - \int_9^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= xf(x) - 9f(9) - \int_9^x f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - 9 \tag{6.4}$$

对 (6.4) 求导

$$xf'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

对上式积分可得

$$f(x) = \sqrt{x} + C$$

代入 $f(9) = 2$ 得 $f(x) = \sqrt{x} - 1$ ◀

Example 6.33: [11] 求解积分方程

$$f(t) = at - \int_0^t \sin(x-t) f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a \neq 0)$$

Proof: 由于 $f(x) * \sin t = \int_0^t f(x)\sin(x-t)\,\mathrm{d}x$, 所以原方程为

$$f(x) = at + f(x) * \sin t\,.$$

记 $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, 因为 $\mathscr{L}[t] = \frac{1}{s^2}$, $\mathscr{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$, 所以对方程两边取拉氏变换得

$$F(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}F(s)\,,$$

即

$$F(s) = a\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\right)\,.$$

取拉氏逆变换得原方程的解为

$$f(t) = a\left(t + \frac{t^3}{6}\right)\,.$$

□

Example 6.34: 已知 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数, 且

$$\int_0^x f(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = e^{2x} - 1\,, \quad x \geqslant 0$$

求 $f(x)$.

Solution(by ytdwdw) 记 $F(s)$ 为 $f(s)$ 的 Laplace 变换, 则

$$F^2(x) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s} = \frac{2}{s(s-2)}\,, \quad s > 2\,.$$

因为 f 非负, 从而 F 非负, 所以

$$F(s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s(s-2)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(s-1)^2 - 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{s-1} \frac{1}{\sqrt{1-(s-1)^{-2}}} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{n} \frac{1}{4^n (s-1)^{2n+1}}, \quad s > 2$$

从而

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} e^x \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{n} \frac{x^{2n}}{4^n (2n)!} \\ &= \sqrt{2} e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n (n!)^2} = \sqrt{2} e^x I_0(x), \quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

其中 $I_0(x)$ 为零阶第一类修正 Bessel 函数 ◀

Example 6.35: 设 $f(x) = \int_0^x \frac{2 \ln u}{1+u} \mathrm{d}u$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) =$ ______

Solution 令 $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则 $g'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$, 注意到

$$g(1) = 2f(1) = \frac{\pi^2}{3}$$

因此

$$g(x) = \int_1^x \frac{2 \ln x}{x} \mathrm{d}x + g(1) = \ln^2 x + \frac{\pi^2}{4}$$

◀

Example 6.36: 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt) \mathrm{d}t$，且 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

Solution 由题设，知 $f(0) = 0$，$g(0) = 0$. 令 $u = xt$，得

$$g(x) = \frac{\int_0^x f(u) \mathrm{d}u}{x} \quad x \neq 0$$

从而

$$g'(x) = \frac{x f(x) - \int_0^x f(u) \mathrm{d}u}{x^2} \quad x \neq 0$$

由导数定义有

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(u) \mathrm{d}u}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2x} = A$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} g'(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{x f(x) - \int_0^x f(u) \mathrm{d}u}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(u) \mathrm{d}u}{x^2} \\ &= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = g'(0) \end{aligned}$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. ◀

Example 6.37: 计算

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{2x} |x - t| \sin t \,\mathrm{d}t}{x^3}$$

✎ Solution 其中 (注意奇偶性)

$$\begin{aligned}\int_0^{2x}\left|x-t\right|\sin t\,\mathrm{d}t &\xlongequal{x-t=u} \int_{-x}^{x}|u|\sin(x-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-x}^{x}|u|(\sin x\cos u-\cos x\sin u)\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^x u\cos u\,\mathrm{d}u\cdot\sin x\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{2x}\left|x-t\right|\sin t\,\mathrm{d}t}{x^3} &= \lim_{x\to0^+}\frac{2\sin x\int_0^x u\cos u\,\mathrm{d}u}{x^3} \\ &= 2\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x u\cos u\,\mathrm{d}u}{x^2} = 2\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x}{2x} = 1\end{aligned}$$

或者

$$\int_0^x u\cos u\,\mathrm{d}u \sim \int_0^x u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2$$

◀

Example 6.38: 设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续, $A<a<b<B$. 试证:

$$\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &\xlongequal{t=x+h}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{h\to0}\left[f(b+h)-f(a+h)\right] \\ &= f(b)-f(a)\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.36: 设 $f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $f'(0)$

✎ Solution1 显然 $f(0)=0$, 所以

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{t}\right) = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(x^2\sin\frac{1}{x}-\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

◀

✎ Solution2 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $0<x<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\displaystyle\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\right| &= \left|\frac{\displaystyle\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}} -\frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u}{x}\right| = \frac{1}{x}\left|\frac{\sin u}{u}\right|_{\frac{1}{x}}^{+\infty} + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \frac{1}{x}\left[\left|-\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\right| + \frac{2}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u\right] \\
&= x\left|\sin\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{+\infty} = x\left|\sin\frac{1}{x}\right| + x \leqslant 2x < 2\sigma = \varepsilon
\end{aligned}$$

同理, 当 $-\delta<x<0$ 时, 也有 $\left|\dfrac{\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\right|<\varepsilon,$

所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=0$$

◀

6.2.1 积分不等式

Theorem 6.1 (柯西 – 斯瓦茨不等式)

设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

♣

☞ Proof: 对任意实数 λ, 有 $\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, 即

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \lambda^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

上式左边是一个关于 λ 的二次三项式, 它非负的条件是其系数判别式非正, 即有

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right) - 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

从而本题得证 □

Example 6.39: 证明不等式

$$\frac{1}{200} < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{100}$$

Proof:一方面

$$\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x > \int_0^{1} \frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x > \frac{1}{101}\int_0^{1} e^{-x}\,\mathrm{d}x > \frac{1}{200}$$

另一方面

$$\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{100}\int_0^{100} e^{-x}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{100}$$

证毕 □

Example 6.40: 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x} - e^{-\cos x}\right)\mathrm{d}x \geqslant 2$$

Proof:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \cdots$$

$$e^{-\sin x} = 1 - \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \cdots$$

所以

$$e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2\sin x + 2\cdot\frac{\sin^3 x}{3!} + \cdots \geqslant 2\sin x$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x} - e^{-\cos x}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x} - e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x = 2
\end{aligned}$$

□

Example 6.41: 试证

$$\left|\int_a^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}, \quad a > 1$$

Proof: 由于

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}d\cos x^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\cos x^2\Big|_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \cos x^2 d\frac{1}{x}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos a^2}{a} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\right],
\end{aligned}$$

所以

$$\left|\int_a^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\cos a^2}{a}\right|+\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \le \frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{a}.$$

□

☞ Proof: 对任何 $A>a$, 根据积分第二中值定理, 存在 $\xi\in[a,A]$, 使得

$$\int_a^A\sin x^2\,\mathrm{d}x=\int_a^A\frac{1}{2x}\cdot 2x\sin x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\int_a^{\xi}2x\sin x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\cos a^2-\cos\xi^2}{2a}.$$

从而

$$\left|\int_a^A\sin x^2\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{a},\forall A>a.$$

因此

$$\left|\int_a^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{a}.$$

□

Example 6.42: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x\ge\frac{\pi}{4+2a\pi}\quad(a>0)$

☞ Proof: 我们考虑

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}(\frac{\pi}{2}\sin x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}\left(\frac{\frac{\pi}{2}\sin 2x}{2\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&\ge\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}\left(\frac{2x}{2\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&\ge\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^a x+ax\tan^{a-1}x\sec^2 x\right)\mathrm{d}x\\&=x\tan^a x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x\ge\frac{\pi}{4+2a\pi}$$

□

Example 6.43: 试证:

$$\frac{16}{9}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x<\frac{418}{225}$$

☞ Proof: 右边 (by tian27546):

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x&\leqslant\sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}1^2\,\mathrm{d}x}\\&=\sqrt{\pi\ln 2\times\frac{\pi}{2}}=\pi\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}\approx 1.849<\frac{418}{225}\approx 1.8577\end{aligned}$$

现在来证明左边更强的式子 (by Hansschwarzkopf)
注意到 $f(u)=e^u$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上严格凸函数和

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{e},$$

得到

$$\exp\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x>\frac{\pi}{2}\exp\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi^2}{2e}\approx 1.81541228>\frac{16}{9}.$$

□

Example 6.44: (18 中科院数分) 证明积分不等式:

$$\frac{1}{5}<\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}<\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

Proof:(by Hansschwarzkopf) 注意到

$$x^2-x+25=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{99}{4}>\frac{99}{4}, a.e. x\in[0,1],$$

从而

$$\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}<\frac{2}{\sqrt{99}}\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

另一方面, 分部积分, 得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}&=\frac{(x-1)e^x}{\sqrt{x^2-x+25}}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})e^x}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{5}+\int_0^1\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})e^x}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}$, $g(x)=(x-1)e^x$, 则

$$f'(x)=\frac{-2x^2+2x+\frac{97}{4}}{\sqrt{(x^2-x+25)^5}}>0,\forall x\in[0,1],\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0, g'(x)=xe^x,$$

因此 f,g 在 $[0,1]$ 上严格递增. 根据 Chebyshev 积分不等式,

$$\int_0^1\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})e^x}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

故

$$\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}>\frac{1}{5}.$$

最后得到

$$\frac{1}{5}<\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}<\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

□

Example 6.45: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=0$

求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Proof: 因为

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

由柯西积分不等式有

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^x 1^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant x\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Example 6.46: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=0,\ f(1)=0$

求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Proof: 因为

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

由柯西积分不等式有

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^x 1^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant x\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} f'^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

又

$$f(x)=f(x)-f(1)=-\int_x^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

同理可得

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Example 6.47: 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 求证:

$$\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{15}{4}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proof:(by 西西) 由 Cauchy–Schwarz 不等式

$$\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 (1+3x^4)^2\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 (1+3x^4) f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

即

$$\sqrt{\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x} \geqslant \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

再利用均值

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\sqrt{3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x}$$

平方即有

$$\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{15}{4}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Example 6.48: 若 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续上凹函数, 且满足 $f(0)=1$, 证明:

$$\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Big)^2$$

Proof:(by 西西) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 利用上凹函数的性质可得

$$\begin{aligned} F(x) &= x\int_0^x f(ux+(1-u)\cdot 0)\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant x\int_0^1 \left[u f(x)+(1-u)\right]\mathrm{d}u = \frac{x f(x)}{2}+\frac{x}{2} \end{aligned}$$

令

$$I=\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x, \quad U=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

则原命题等价于证明 $2U^2-3I\geq 0$, 又

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}F(x) = F(1)-\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant U-\int_0^1\left(\frac{x f(x)}{2}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = U-\frac{I}{2}-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

即 $3I\leqslant 2U-\frac{1}{2}$, 故

$$2U^2-3I \geqslant 2U^2-\left(2U-\frac{1}{2}\right)=2\left(U-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

原命题得证 □

☞ Proof:(by 西西) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 由 $f(x)$ 的上凹性质得

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}\leqslant\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^1\int_0^x\left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\big(xf(x)+x\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x&=F(1)-\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1\big(xf(x)+x\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\right)\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

□

☞ Proof:(by 西西) 设

$$I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x,\quad U=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\quad\Longrightarrow 2U^2-3I\geq 0$$

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 因为

$$f(ax)=f(ax+(1-a)\cdot 0)\geq af(x)+1-a$$

对 $\forall a\in(0,1)$ 积分

$$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t\geq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}\quad 即\ 2F(x)\geq xf(x)+x$$

$$\therefore\quad I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=xF(x)\Big|_0^1-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\leq F(1)-\frac{1}{2}\int_0^1(xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{3}{2}I\leq F(1)-\frac{1}{4}$$

因为 $U=F(1)$，所以

$$2U^2-3I=\frac{16U^2-24I}{8}\geq\frac{(6I+1)^2-24I}{8}=\frac{(6I-1)^2}{8}\geq 0$$

□

Example 6.49: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0\,,\quad\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

求证:

$$\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\geqslant 6+3\sqrt{2}$$

☞ Proof: 首先由题设知对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^1 x(x-\alpha)f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

用反证法. 假设 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|<6+3\sqrt{2}$. 则上式结合 f 的连续性知, 对 $\forall\alpha\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}1=\left|\int_0^1 x(x-\alpha)f(x)\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_0^1\big|x(x-\alpha)f(x)\big|\,\mathrm{d}x\\&<(6+3\sqrt{2})\int_0^1 x(x-\alpha)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由上式知对 $\forall\alpha\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}<\int_0^1|x(x-\alpha)|\,\mathrm{d}x&=\int_0^\alpha x(\alpha-x)\,\mathrm{d}x+\int_\alpha^1 x(x-\alpha)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha\triangleq g(\alpha)\end{aligned}\tag{6.5}$$

然而 $g'(\alpha)=\alpha^2-\frac{1}{2}$, 故 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\in[0,1]$ 为 $g(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值点, 且

$$g\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

此与 (6.5) 式矛盾! □

Example 6.50: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续的一阶导数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\big(f^2(x)+(f'(x))^2\big)\,dx=1$ 证明: $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $|f(x)|<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

☞ Proof:(by 西西) 由条件可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)dx\leq 1\ ,\quad\int_{-\infty}^{+\infty}(f''(x))^2dx\leq 1$$

故知道这两个无穷积分收敛，由 Cauchy-Schwarz 不等式，知道

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)f'(x)|dx\leq 1$$

上面的无穷积分也是收敛的，接着，我们证明

$$\lim_{x\to+\infty}f^2(x)=\lim_{x\to-\infty}f^2(x)=0$$

为此，先看正无穷的情况。由于积分收敛，对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$,
当 $x,y>M$，(不妨设 $x<y$) 有

$$\int_x^y|f(x)f'(x)|dx<\varepsilon$$

因此，对任意的 $x, y > M, (x < y)$, 有

$$|f^2(x) - f^2(y)| = 2\left|\int_x^y f'(t)f(t)dt\right| < 2\int_x^y |f'(t)f(t)|dt < 2\varepsilon$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) = A$, 再次看到无穷积分收敛，故只能有 $A = 0$，因此有

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = 0$$

同理可得

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f^2(x)$$

对 $\forall x \in \mathrm{R}$

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2}(f^2(x) - f(a)) + \frac{1}{2}(f^2(x) - f(-a)) \\
&= \lim_{a\to+\infty}\left(\int_a^x f(y)f'(y)dy + \int_{-a}^x f(y)f'(y)dy\right) \\
&= \int_{+\infty}^x f(y)f'(y)dy + \int_{-\infty}^x f(y)f'(y)dy \\
&\le \int_{-\infty}^x |f(y)f'(y)|dy \\
&\le \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f^2(x) + (f'(x))^2\right)dx\right] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

马上得到

$$|f(x)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

Example 6.51: 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，求证：

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \le 9\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x$$

Proof: 对任意 $0 < \xi < \frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3} < \eta < 1$, 则存在 $\lambda \in (\xi, \eta)$, 使得

$$|f'(\lambda)| = \left|\frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi}\right| \le 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)|$$

因此对任意的 $x \in (0,1)$ 成立

$$|f'(x)| = |f'(\lambda) + \int_\lambda^x f''(t)dt| \le 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)| + \int_0^1 |f''(t)|dt$$

分别对 ξ 在 $(0, \frac{1}{3})$ 上和对 η 在 $(\frac{2}{3}, 1)$ 上积分以上不等式，得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}|f'(x)| &\le \int_0^{\frac{1}{3}} |f(\xi)|d\xi + \int_{\frac{2}{3}}^1 |f(\eta)|d\eta + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|dt \\
&\le \int_0^1 |f(t)|dt + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|dt
\end{aligned}$$

于是

$$|f'(x)| \leq 9\int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |f''(t)|dt, \qquad x \in [0,1]$$

对上式两边在 $[0,1]$ 积分, 得到

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leq 9\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x$$

□

Example 6.52: 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，求

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leq A\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x$$

A 的最小值

Proof:(by Veer) 设 $\min\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(a)|$, 由积分中值定理得

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = |f'(\xi)|\,, \quad \xi \in (0,1)$$

$$f'(\xi) = f'(a) + \int_a^\xi f''(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow |f'(\xi)| \leqslant |f'(a)| + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x \tag{6.6}$$

1° 若存在 x_0 使得 $f(x_0) = 0$. 则 $|f(x)| = |f(x) - f(x_0)|$

$2a9+^\circ$ 若不存在 x_0 使得 $f(x_0) = 0$. 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不变号, 且取 $\min\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(x_0)|$

$$f(x) \geqslant |f(x)| - |f(x_0)| = |f(x) - f(x_0)|$$

所以

$$f(x) \geqslant |f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi_x)||x - x_0| \geqslant |f'(a)||x - x_0|$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x &\geqslant |f'(\xi)| \int_0^1 |x - x_0|\,\mathrm{d}x \\ &= |f'(\xi)| \left(\int_0^{x_0} (x_0 - x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^1 (x - x_0|)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= |f'(\xi)| \left(\frac{1}{2} - x_0(1 - x_0)\right)\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{2} - x_0(1 - x_0) \geqslant \frac{1}{2} - \left(\frac{x_0 + 1 - x_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

所以

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4}|f'(a)| \Longrightarrow |f'(a)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

综合 (6.6) 式得

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leq 4\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x$$

4 是最小值, 因为当 $f(x) = x - \dfrac{1}{2}$ 时

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x = 4\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x$$

□

Example 6.53: 设 $x \leqslant 1$ 且是实数，求证

$$I(x)=\int_0^x \frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t \geqslant e^{x-1}$$

–傲娇小魔王

其中 $\lfloor t\rfloor$ 表示取整函数

Proof: 设 $m<x<m+1$, 则有

$$\begin{aligned} I(x)&=\int_0^1 \frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t+\int_1^2 \frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t+\cdots+\int_{m-1}^m \frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t+\int_m^x \frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t\\ &=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^m}{m!}(x-m)\end{aligned}$$

显然有

$$I'(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}+\frac{x^m}{m!}+\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}(x-m)$$

想减得

$$I'(x)-I(x)=\frac{x^{m-1}}{m!}(x-m)(m+1-x)$$

显然 $m<x<m+1$, 有 $I'(x)-I(x)>0$, 故令

$$G(x)=\ln(I(x)) \Longrightarrow G'(x)>1$$

故由中值定理我们有

$$G(x)=G(m)+(x-m)G'(\xi)>G(m)+x-m$$

由于

$$I(m)\geqslant e^{m-1} \Longrightarrow G(m)\geqslant m-1$$

所以

$$G(x)>x-1 \Longrightarrow I(x)>e^{x-1}$$

其中我们用到了

$$I(m)\geqslant e^{m-1}$$

即证明

$$\sum_{x=0}^{m-1}\frac{m^x}{x!}\geqslant e^{m-1}$$

显然利用

$$\sum_{x=0}^{m-1}\frac{m^x}{x!}=e^m-\frac{e^m}{(m-1)!}\int_0^m e^{-t}t^{m-1}\,\mathrm{d}t$$

则我们需要证明

$$\int_0^m e^{-t}t^{m-1}\,\mathrm{d}t\leqslant (m-1)!\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

假设 $m=k$ 成立，利用分部积分有

$$k^k e^{-k}+\int_0^k e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t \leqslant k!\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

注意到

$$\int_k^{k+1} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t \leqslant \max_{k\leqslant t\leqslant k+1} e^{-t}t^k = e^{-k}k^k$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{k+1} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t &= \int_k^{k+1} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t+\int_0^k e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant k^k e^{-k}+\int_0^k e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t \leqslant k!\left(1-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

□

Exercise 6.37: 当 n 为正整数时，证明：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|\mathrm{d}t < \frac{2+\ln n}{2}$$

Proof:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)|\sin(2n+1)x|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)x|}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\le \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\le \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{2n}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&\le \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}|\sin x|\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\right)\\
&\le \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{2n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= 1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(1+\ln 2)+\frac{2}{\pi^2}\ln n\end{aligned}$$

欲证题中不等式，只需说明

$$2-\pi+2\ln 2+2\ln n < \frac{\pi^2}{2}\ln n$$

而这是显然的

$$2-\pi+2\ln 2+2\ln n \le 4\ln n < \frac{\pi^2}{2}\ln n,(n\ge 2)$$

如果 $n=1$，在前面式子中有

$$I \le \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{\pi}\right)$$

$$= 1 + \frac{3-\pi}{\pi^2} < 1$$

□

☞ Proof:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)|\sin(2n+1)x|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)x|}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{2n}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&\le \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}|\sin x|\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\right) \\
&\le \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{2n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(1+\ln 2)+\frac{2}{\pi^2}\ln n
\end{aligned}$$

当 $n > 1$ 时有:

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(1+\ln 2)+\frac{2}{\pi^2}\ln n-\frac{2+\ln n}{2} \\
=&\frac{1}{\pi^2}\left[\left(2-\frac{\pi^2}{2}\right)\ln n+2+\ln 4-\pi\right] \\
<&\frac{1}{\pi^2}\left[-2\ln n+2+\ln 4-\pi\right]<0
\end{aligned}$$

即

$$1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(1+\ln 2)+\frac{2}{\pi^2}\ln n<\frac{2+\ln n}{2}$$

当 $n = 1$ 时有:

$$I \le \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{\pi}\right)=1+\frac{3-\pi}{\pi^2}<1$$

综上，命题得证。 □

Example 6.54: 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且满足 $\int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 求证:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}M \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}M$$

☞ Proof: 即证

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{M}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

令 $g(x) = \dfrac{f(x)}{M}$, $x = a+(b-a)x$, 从而有 $\max\limits_{x\in[a,b]} g(x) = 1$, 以及

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_0^1 (b-a)g\big[a+(b-a)t\big]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g\big[a+(b-a)t\big]\,\mathrm{d}t$$

再令 $G(t)=g\big[a+(b-a)t\big]$, 且 $\int_0^1 G^3(t)\,\mathrm{d}t=0$ 于是, 欲证的不等式变为:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

又 $\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\big[G(t)-G^3(t)\big]\mathrm{d}t$, 于是令 $G(t)=y\in[-1,1]$

对于函数 $H(y)=y-y^3$ 有 $H'(y)=1-3y^2$, 令 $H'(y)=0\Longrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, 从而

在 $[-1,1]$ 上, $-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant y-y^3\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$, 于是

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant\int_0^1\big[G(t)-G^3(t)\big]\mathrm{d}t\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

从而

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

即成立

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

综上，原不等式得证。 □

Exercise 6.38: 证明

$$I(n)=\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt<\frac{\pi^2n^2}{4}, n\geq 2.$$

Proof: $n=1$ 时直接验证不等式成立. $n\geq 2$ 时, 首先注意到如下不等式:

$$|\sin nt|\leq n\sin t, \forall t\in[0,\pi/2],$$

$$\sin t\geq\frac{2t}{\pi}, \forall t\in[0,\pi/2].$$

故对任意 $\delta\in(0,\pi/2)$,

$$I_1(n)=\int_0^{\delta} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt<n^4\int_0^{\delta} t\,dt=\frac{n^4\delta^2}{2},$$

$$I_2(n)=\int_{\delta}^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt<\frac{\pi^4}{16}\int_{\delta}^{\pi/2}\frac{dt}{t^3}=\frac{\pi^4}{32}\left(\frac{1}{\delta^2}-\frac{4}{\pi^2}\right).$$

因此

$$I(n)=I_1(n)+I_2(n)<\frac{n^4\delta^2}{2}+\frac{\pi^4}{32}\left(\frac{1}{\delta^2}-\frac{4}{\pi^2}\right).$$

易知上式右边在 $\delta=\frac{\pi}{2n}$ 处到达最小值 $\frac{\pi^2n^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}$, 从而

$$I(n)<\frac{\pi^2n^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}, n\geq 2.$$

□

Exercise 6.39: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=0$, 证明: $|f(x)| \leqslant \sqrt{\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}$.

Proof: 因为

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^x |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \sqrt{\left(\int_0^1 |f'(x)|\cdot 1\,\mathrm{d}x\right)^2}$$

且由柯西不等式有

$$\left(\int_0^1 |f'(x)|\cdot 1\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}x\right) = \left(\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)$$

因此

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{\left(\int_0^1 |f'(x)|\cdot 1\,\mathrm{d}x\right)^2} \leqslant \sqrt{\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

□

Exercise 6.40: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，且

$$f(a)=f(b)=0,\ f'(a)=1,\ f'(b)=0,$$

求证:

$$\int_a^b |f''(x)|^2\mathrm{d}x \geq \frac{4}{b-a}$$

Proof:方法 1 由 Schwarz 不等式知

$$\left(\int_a^b (6x-2a-4b)|f''(x)|\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b (6x-2a-4b)^2\mathrm{d}x \int_a^b |f''(x)|^2\mathrm{d}x$$

又

$$\int_a^b (6x-2a-4b)f''(x)\mathrm{d}x = 4(b-a)$$

$$\int_a^b (6x-2a-4b)^2\mathrm{d}x = 4(b-a)^3$$

$$\therefore \int_a^b |f''(x)|^2\mathrm{d}x \geq \frac{\int_a^b (6x-2a-4b)f''(x)\mathrm{d}x)^2}{\int_a^b (6x-2a-4b)^2\mathrm{d}x} = \frac{4}{b-a}$$

方法 2 注意到对 $\forall\ c \in [a,b]$, 有

$$\int_a^b (x-c)f''(x)\mathrm{d}x = (c-a) - \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = c-a,$$

而

$$(c-a)^2 \leq \int_a^b (x-c)^2\mathrm{d}x \cdot \int_a^b |f''(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(b-c)^3+(c-a)^3}{3} \cdot \int_a^b |f''(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

即

$$\begin{aligned}\int_a^b |f''(x)|^2 \mathrm{d}x &\geq \frac{3(c-a)^2}{(b-c)^3+(c-a)^3} \\ &= \frac{3(c-a)^2}{(b-a)\left[(b-c)^2-(b-c)(c-a)+(c-a)^2\right]} \\ &= \frac{3}{(b-a)\left[\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2-\frac{b-c}{c-a}+1\right]}.\end{aligned}$$

取 $\dfrac{b-c}{c-a}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow c=\dfrac{a+2b}{3}$, 我们有

$$\int_a^b |f''(x)|^2 \mathrm{d}x \geq \frac{4}{b-a}.$$

□

Exercise 6.41: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，且

$$f(0)=f(1)=0, M=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|,$$

证明: $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \dfrac{M}{4}$

Proof:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)d(a+x)=(x+a)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 (x+a)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1 f(x)d(a+x)\right| \\ &= \left|(x+a)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 (x+a)f'(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leq M\int_0^1 |x+a|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

取 $a=-\dfrac{1}{2}$ 即得欲证不等式。 □

Exercise 6.42: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 则

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{4}M \quad (M=\max|f'(x)|)$$

Proof:

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

用 $Taylor$ 公式二阶展开

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)\mathrm{d}x|=\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(a)+f'(\xi)(x-a)|\mathrm{d}x$$

$$\le M\int_a^{\frac{a+b}{2}}|x-a|\mathrm{d}x = M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\mathrm{d}x = M(\frac{(a+b)^2}{8}-\frac{ab}{2})$$

同样的方法和步骤得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x \le M(\frac{(a+b)^2}{8}-\frac{ab}{2})$$

上面两个式子相加得

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{4}M \quad (M=\max|f'(x)|)$$

□

Exercise 6.43: 设 $f:[0,1]\to \mathrm{R}$ 是连续可微函数，若 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 0$

求证: $\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x \ge 12\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Big)^2$

Proof: 证法 1

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Big)^2 &= \Big[\int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x)-f(\frac{1}{2}))\mathrm{d}x + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2})\Big]^2\\
&= \Big[\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\Big]^2\\
&= \Big[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\Big]^2\\
&\le 2\Big[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(t)\mathrm{d}t\Big]^2 + 2\Big[\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\Big]^2\\
&\le 2\Big[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2\mathrm{d}t\int_{\frac{1}{2}}^1 f'(t)^2\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}} f'(t)^2\mathrm{d}t\Big]\\
&= \frac{1}{12}\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

整理即得欲证不等式。

证法 2 先看一个更加一般的结论

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x \ge 12\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x\Big)^2$$

利用 Schwarz 不等式

$$\int_0^{\frac{1}{2}}[f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{d}x \ge \Big(\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\Big)^2 = \Big[\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x\Big]^2$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}[f'(x)]^2\mathrm{d}x \ge 24(\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x)^2$$

再利用 Schwarz 不等式

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}[f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)^2\mathrm{d}x \geq \left(-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\Rightarrow \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1}f'(x)^2\mathrm{d}x \geq 24\Big((-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x)^2\Big)$$

二者相加, 利用 $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$ 得

$$\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x \geq 24\Big((\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})-\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x)^2+(-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x)^2\Big)$$
$$\geq 12\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x\Big)^2$$

当 $\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=0$ 时，上式 $=12(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^2$, 故

$$\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x \geq 12(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^2$$

□

Exercise 6.44: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $|f'(x)|\leq M$. 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 对 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 证明:$|F(x)|\leq\dfrac{M(b-a)^2}{8}$.

Proof:证法 1 设 $|F(c)|=\max\limits_{x\in[a,b]}|F(x)|$，则 $F'(c)=f(c)=0$

$$|F(c)|=|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x|=|\int_a^c(f(x)-f(c))\mathrm{d}x|$$
$$=|\int_a^c f'(\xi)(x-c)\mathrm{d}x|$$
$$\leq M\int_a^c(c-x)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(c-a)^2$$

类似的可得

$$|F(c)|\leq M\frac{(b-c)^2}{2}$$

$\Rightarrow$

$$|F(x)|\leq\Big\{\max\Big\{M\frac{(c-a)^2}{2},M\frac{(b-c)^2}{2}\Big\}\Big\}_{\min}\leq M\frac{(b-a)^2}{8}$$

证法 2 令

$$G(t)=F(t)-\frac{(t-a)(t-b)F(x)}{(x-a)(x-b)} \qquad t\in(a,b)$$

则 $G(t)$ 在 (a,b) 上二阶可微，且 $G(a)=G(x)=G(b)=0$

反复运用 $Rolle$ 定理

$$\exists \quad \xi=\xi(x)\in(a,b) \quad st \quad G''(\xi)=0$$

整理后得

$$F(x)=\frac{f'(\xi)}{2}(x-a)(x-b) \qquad x\in(a,b)$$

从而

$$|F(x)| \le \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \le \frac{(b-a)^2}{8}$$

□

Exercise 6.45: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(\frac{a+b}{2})=0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

Proof: 令

$$F_1(x)=\int_x^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|\mathrm{d}t, x\in[a,\frac{a+b}{2}]$$
$$F_2(x)=\int_{\frac{a+b}{2}}^x |f'(t)|\mathrm{d}t, x\in[\frac{a+b}{2},b]$$

则 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 分别在 $[a,\frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2},b]$ 上有连续的导函数, $F_1(\frac{a+b}{2})=F_2(\frac{a+b}{2})=0$, 且

$$F_1'(x)=-|f'(x)|, x\in[a,\frac{a+b}{2}]$$
$$F_2'(x)=|f'(x)|, x\in[\frac{a+b}{2},b]$$

再由 $f(\frac{a+b}{2})=0$ 知

$$f(x)=\int_{\frac{a+b}{2}}^x f'(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$$

从而

$$|f(x)|\le F_1(x), x\in[a,\frac{a+b}{2}]$$
$$|f(x)|\le F_2(x), x\in[\frac{a+b}{2},b]$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \\
&\le -\int_a^{\frac{a+b}{2}} F_1(x)F_1'(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b F_2(x)F_2'(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}F_1^2(a)+\frac{1}{2}F_2^2(b) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\le \frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x \int_a^{\frac{a+b}{2}} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x \int_{\frac{a+b}{2}}^b \mathrm{d}x \\
&= \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Exercise 6.46: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二阶可导,$f'(\frac{a+b}{2})=0$, 证明：若 $f(x)$ 不是常数，那么存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $|f''(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

Proof: 记

$$c=\frac{a+b}{2}, K=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

若对一切 $x\in(a,b)$ 都有 $f''(x)\le K$, 利用 Lagrange 中值定理，

$$|\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}|=|f''(\eta)|\le K$$

即 $|f'(x)|\le K(x-c)$, 于是

$$|f(c)-f(a)|\le\int_a^c|f'(x)|\mathrm{d}x\le K\int_a^c(c-x)\mathrm{d}x=\frac{|f(b)-f(a)|}{2}$$

同理可以得到

$$\int_c^b|f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{|f(b)-f(a)|}{2}$$

于是

$$|f(b)-f(a)|\le|f(b)-f(c)|+|f(c)-f(a)|\le|f(b)-f(a)|$$

利用 $f'(x)$ 的连续性，为使上式中的等号成立必须有 $|f'(x)|=K|x-c|$, 再利用 $f'(c)=0$ 得 $f'(x)=K(x-c)$ 或者 $f'(x)=K(c-x)$, 不论哪种情况都有 $f(b)=f(a)$, 即 $K=0$, 这和 $f(x)$ 不是常数相矛盾. 因此必定存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

□

Exercise 6.47: $f(x)$ 定义在 $[0,1]$,$f(x)$ 有二阶连续导数,$f(0)=f(1)=0$, 证明：

$$\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\ge 4\max|f(x)|$$

Proof: 若 $f(x)\equiv 0$, 结论显然成立. 否则,$\exists x_0\in(0,1), s.t \max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|=|f(x_0)|>0$, 则

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi_1),\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\xi_2)$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x&\ge\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|\mathrm{d}x\ge\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|\\&=|f'(\xi_1)-f'(\xi_2)|=\frac{|f(x_0)|}{x_0(1-x_0)}\\&\ge 4|f(x_0)|=4\max_{0\le x\le 1}|f(x)|\end{aligned}$$

□

Exercise 6.48: 设 $f(x)$ 为凸函数，单调递减趋于 0, 且 $f(1)=1, f(\frac{3}{2})=\frac{2}{3}$, 证明:

$$-\frac{1}{8}<\int_1^{+\infty}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x<-\frac{1}{18}$$

Proof:

$$\because \quad \forall k, \int_k^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})\mathrm{d}x=0$$

$$\therefore \quad \int_1^{+\infty}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x=-(\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\frac{1}{8}f(1))$$

其中

$$a_k=\int_k^{k+\frac{1}{2}}-(x-[x]-\frac{1}{2})(f(x)-f(k))\mathrm{d}x+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+1)-f(x))\mathrm{d}x<0$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{8}<\int_1^{+\infty}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x$$

另一方面，我们作分段线性函数

$$L(x)=2(f(k+1)-f(k+\frac{1}{2}))(x-k-\frac{1}{2})+f(k+\frac{1}{2})$$

由于 $f(x)$ 是凸的，有 $L(x)-f(x)\geq 0, x\in(k,k+1)$，故

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}-(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{\infty}[\int_k^{k+\frac{1}{2}}-(x-[x]-\frac{1}{2})(f(x)-f(k+\frac{1}{2}))\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+\frac{1}{2})-f(x))\mathrm{d}x]\\&>\sum_{k=1}^{\infty}[\int_k^{k+\frac{1}{2}}-(x-[x]-\frac{1}{2})(L(x)-f(k+\frac{1}{2}))\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+\frac{1}{2})-L(x))\mathrm{d}x]\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}(f(k+\frac{1}{2})-f(k+1))\\&>\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(f(k+\frac{1}{2})-f(k+\frac{2}{3}))\\&=\frac{1}{12}f(\frac{3}{2})=\frac{1}{18}\end{aligned}$$

综合即得

$$-\frac{1}{8}<\int_1^{+\infty}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x<-\frac{1}{18}$$

□

Exercise 6.49: 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续可导，$f(0)=0, f(\frac{\pi}{2})=1$, 求证:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)\cdot\sin x+f'(x)|dx\geq 1$$

☞ Proof: 设

$$F(x)=e^{-\cos x}f(x)$$

则

$$F'(x)=e^{-\cos x}\left(f(x)\sin x+f'(x)\right)\Rightarrow F'(x)e^{\cos x}=f(x)\cdot\sin x+f'(x)$$
$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)\cdot\sin x+f'(x)|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|e^{\cos x}F'(x)|dx$$

注意到

$$e^{\cos x}\geq 1,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|e^{\cos x}F'(x)|dx\geq\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}F'(x)dx\right|=1$$

□

Exercise 6.50: 设 $f(x)\in C$ 是实值函数，且满足

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=\cdots=\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx=1$$

证明:

$$\int_0^1(f(x))^2dx\geq n^2$$

☞ Proof: 首先，我们考虑多项式 $P(x)$

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

若多项式 $P(x)$ 也满足上面的条件，那么

$$\int_0^1(P(x))^2dx=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$$

为了求出系数 a_i 我们再次利用条件.

$$\int_0^1 x^kP(x)dx=1\qquad k=0,1,\ldots n-1$$
$$\Rightarrow\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{k+n}=1\qquad k=0,1,\ldots n-1$$

设

$$H(x)=\frac{a_0}{x+1}+\frac{a_1}{x+2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x+n}-1$$

则显然有

$$H(0)=H(1)=\cdots=H(n-1)=0$$

$H(x)$ 应该有

$$H(x)=\frac{A\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-n+1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

通过对比系数得 $A=-1$, 及

$$a_k=(-1)^{n-k-1}\frac{(n+k)!}{(k!)^2\cdot(n-k-1)!}\qquad k=0,1,\ldots n-1$$

用数学归纳法不难证明 $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = n^2$, 所以，若多项式 $P(x)$ 满足上面的性质，则

$$\int_0^1 (P(x))^2 dx = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = n^2$$

取满足以上条件的多项式 $P(x)$ 应用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_0^1 (P(x))^2 dx \int_0^1 (f(x))^2 dx \geq \left(\int_0^1 P(x) f(x) dx\right)^2 = n^4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f(x))^2 dx \geq n^2$$

□

Exercise 6.51: 求所有的连续可导函数 $f : [0,1] \to (0,\infty)$, 满足 $f(1) = ef(0)$, 且

$$\int_0^1 \frac{dx}{(f(x))^2} + \int_0^1 (f'(x))^2 dx \leq 2$$

Proof: 注意

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \left(f'(x) - \frac{1}{f(x)}\right)^2 dx = \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx + \int_0^1 \frac{dx}{(f(x))^2} \\ &= \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 \frac{dx}{(f(x))^2} dx\right) - 2\int_0^1 (\ln f(x))' dx \\ &= \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 \frac{dx}{(f(x))^2} dx\right) - 2\ln\frac{f(1)}{f(0)} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

所以 $f(x)f'(x) = 1 \Longrightarrow f(x) = \sqrt{2x + C}$, $C > 0$, 由于

$$\frac{f(1)}{f(0)} = e \Longrightarrow C = \frac{2}{e^2 - 1}$$

故 $f(x) = \sqrt{2x + \dfrac{2}{e^2-1}}$ □

Exercise 6.52: 是连续的, 且 $f, \dfrac{g}{f}$ 递增的, 求证:

$$\int_0^1 \left(\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\right) dx \leq 2\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

并说明右边系数 2 是最佳的.

Proof: 由切比雪夫不等式有

$$\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)\left(\frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)} dt\right) \leq \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$$

即

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \le \frac{x}{\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}dt}$$

另外由 Cauchy-Schwarz 有

$$\left(\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}dt\right)\left(\int_0^x \frac{t^2 f(t)}{g(t)}dt\right) \ge \left(\int_0^x t dt\right)^2 = \frac{x^4}{4}$$

即

$$\frac{1}{\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}dt} \le \frac{4}{x^4}\int_0^x \frac{t^2 f(t)}{g(t)}dt$$

所以有

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \le \frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t^2 f(t)}{g(t)}dt$$

故有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}dx &\le \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{4t^2 f(t)}{x^3 g(t)}dt\right)dx = \int_0^1 \left(\int_t^1 \frac{4t^2 f(t)}{x^3 g(t)}dx\right)dt \\ &= \int_0^1 \frac{4t^2 f(t)}{g(t)}\left(\int_t^1 \frac{dx}{x^3}\right)dt \\ &= 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}(1-t^2)dt \\ &\le 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}dt\end{aligned}$$

另外一方面: 我们令 $f(t) = 1, g(t) = t + \varepsilon, \varepsilon > 0$ 则

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}dx = \int_0^1 \frac{x}{\frac{1}{2}x^2 + \varepsilon x}dx = 2\ln(1+2\varepsilon) - 2\ln 2 - 2\ln\varepsilon$$

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}dt = \int_0^1 \frac{dt}{t+\varepsilon} = \ln(1+\varepsilon) - \ln\varepsilon$$

所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\ln(1+2\varepsilon) - 2\ln 2 - 2\ln\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon) - \ln\varepsilon} = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\frac{\ln(1+2\varepsilon)}{\ln\varepsilon} + \frac{\ln 2}{\ln\varepsilon} + 1}{-\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln\varepsilon} + 1} = 2$$

□

Example 6.55: 设 $f : [0,1] \to R$ 是连续可导函数，若 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 0$, 求证:

$$\int_0^1 f'(x)^2 dx \ge 12\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

☞ Proof:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 &= \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x)-f(\frac{1}{2}))dx + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2})\right]^2 \\ &= \left[\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)dtdx + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx\right]^2 \\ &= \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx\right]^2 \\ &\le 2\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(t)dt\right]^2 + 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx\right]^2 \\ &\le 2\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2dt\int_{\frac{1}{2}}^1 f'(t)^2dt + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx\int_0^{\frac{1}{2}} f'(t)^2dt\right] \\ &= \frac{1}{12}\int_0^1 f'(x)^2dx\end{aligned}$$

□

Exercise 6.53: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可导且可积，若 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx = 0$

求证：

$$\int_0^1 (f'(x))^2dx \ge 27\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

☞ Proof: 考虑

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ 1-2x, & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ x-1, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \end{cases}$$

由 Cauchy-Schwarz 容易证明. 以下略 □

Exercise 6.54: 若 $f(x):[0,1] \to R$ 是连续可导函数，且 $\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$, 则有:

$$\int_0^1 (f'(x))^2dx \ge \frac{12n^2}{4n^2-10n+7}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

☞ Proof: 提示：设

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ 1-(2n-1)x, & x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ x-1, & x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

然后仿照上面一样用 Cauchy-Schwarz □

Exercise 6.55: 若 $f(x):[a,b]\to R$ 是连续可导函数，且 $\int_a^b f(x)dx=0$, 则有:

$$\int_a^{2b-a}(f'(x))^2dx\geq\frac{3}{2(b-a)^3}\left(\int_a^{2b-a}f(x)dx\right)^2$$

Proof: 设

$$g(x)=\begin{cases}x-a, & x\in[a,b]\\ 2b-a-x, & x\in[b,2b-a].\end{cases}$$

然后仿照上面一样用 Cauchy-Schwarz □

Exercise 6.56: 若 $f(x):[0,1]\to R$ 是连续可导函数，且 $\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{2}{2n+1}} f(x)dx=0$, 则有:

$$\int_0^1(f'(x))^2dx\geq\frac{3(2n+1)^2}{4n^2-6n+3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

Proof: 设

$$g(x)=\begin{cases}x, & x\in\left[0,\frac{1}{2n+1}\right]\\ 1-2nx, & x\in\left[\frac{1}{2n+1},\frac{2}{2n+1}\right]\\ x-1, & x\in\left[\frac{2}{2n+1},1\right].\end{cases}$$

然后仿照上面一样用 Cauchy-Schwarz □

Exercise 6.57: 设 $f(x)$ 是在 $[0,1]$ 非负的连续的凹函数，且 $f(0)=1$, 求证:

$$2\int_0^1 x^2f(x)dx+\frac{1}{12}\leq\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

Proof: 设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 由于 $f(x)$ 是凹函数，所以有

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\geq\frac{f(x)-f(0)}{x-0},\qquad t\in(0,x)$$

$$\Rightarrow f(t)\geq\frac{t}{x}(f(x)-1)+1$$

故

$$\begin{aligned}I=\int_0^1 x^2f(x)dx&=\int_0^1 x^2dF(x)\\&=F(1)-2\int_0^1 x\int_0^x f(t)dtdx\\&\leq F(1)-I-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

所以 $2I\leq F(1)-\frac{1}{3}$, 只要证明

$$F(1)-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\leq F^2(1)$$

$$\Leftrightarrow \left(F(1)-\frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$$

显然成立。 □

Exercise 6.58: 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数且满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ 与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. 证明：当 $0 \leqslant x \leqslant 13$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 11$$

并给出取等号的条件。

Proof: 由条件 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}$$

利用离散柯西不等式, 即 $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 \sum\limits_{i=1}^n b_i^2$, 等号当 a_i 与 b_i 对应成比例时成立. 有

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x} &= 1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(x+27)}+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}\\ &\leqslant \sqrt{1+2+\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{2}(x+27)+\frac{3}{2}(13-x)} = 11\end{aligned}$$

且等号成立的充分必要条件是:

$$x = \frac{1}{2}(x+27) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}\ , \quad \text{即 } x = 9$$

所以

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 11$$

特别当 $x=9$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

根据周期性, 以及 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, 有

$$\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 11\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 11$$

所以取等号的充分必要条件是 $x=9$ □

Example 6.56: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续可导函数, 若 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 求证

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)' \geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Solution 由条件我们有

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

由牛顿–莱布尼茨公式和 Cauchy–Schwarz 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \\
&= \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \\
&= \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \\
&\leqslant 2\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 + 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \\
&\leqslant 2\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2\,\mathrm{d}t \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{12}\int_0^1 \left(f'(x)\right)'
\end{aligned}$$

由此, 不等式得证 ◀

Example 6.57: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导数, 且 $f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^x \left[f'(t)\right]^2\mathrm{d}t$$

Solution(by 向禹)

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \left(\int_a^x \mathrm{d}t \int_a^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \left((x-a)\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

◀

Example 6.58: 设 $a>0$, 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t-\cos t}{1+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^a}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x-\sin x)\left(1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^a\right)+(\sin t-\cos t)(1+x^a)}{(1+x^a)\left(1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^a\right)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(\left(1-\frac{\pi}{2x}\right)^a-1\right)x^a}{(1+x^a)\left(1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^a\right)}\,\mathrm{d}x$$

$$> 0$$

◀

Exercise 6.59: 证明:

$$\begin{vmatrix} \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x & \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x & \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x & \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x \\ \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x & \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x & \int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x & \int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x \\ \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x & \int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x & \int_0^1 x^6\,\mathrm{d}x & \int_0^1 x^3e^x\,\mathrm{d}x \\ \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x & \int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x & \int_0^1 x^3e^x\,\mathrm{d}x & \int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} < \frac{e^2-1}{210}$$

Solution ◀

Exercise 6.60: 证明:

$$\begin{vmatrix} \int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x & \int_{-1}^1 (x^3+2x^3\sin x)\,\mathrm{d}x & \int_{-1}^1 (x^4+2x^4\sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\ \int_{-1}^1 (x^3-2x^3\sin x)\,\mathrm{d}x & \int_{-1}^1 x^4\,\mathrm{d}x & \int_{-1}^1 (x^5+2x^5\sin^3 x)\,\mathrm{d}x \\ \int_{-1}^1 (x^4-2x^4\sin^2 x)\,\mathrm{d}x & \int_{-1}^1 (x^5-2x^5\sin^3 x)\,\mathrm{d}x & \int_{-1}^1 x^6\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} > \frac{32}{2625}$$

Solution ◀

Example 6.59: Prove that

$$\int_0^1 \sin(\pi x)x^x(1-x)^{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi e}{4!}$$

Proof: First, we use $z^z = \exp(z\log z)$ where $\log z$ is defined for $-\pi \le \arg z < \pi$.
For $(1-z)^{1-z} = \exp((1-z)\log(1-z))$, we use $\log(1-z)$ defined for $0 \le \arg(1-z) < 2\pi$.
Then, let $f(z) = \exp(i\pi z + z\log z + (1-z)\log(1-z))$.
As shown in the Ex VI in the wikipedia link, we can prove that f is continuous on $(-\infty, 0)$ and $(1, \infty)$, so that the cut of $f(z)$ is $[0,1]$. We use the contour: (consisted of upper segment: slightly above $[0,1]$, lower segment: slightly below $[0,1]$, circle of small radius enclosing 0, and

circle of small radius enclosing 1, that looks like a dumbbell having knobs at 0 and 1, can someone edit this and include a picture of it please? In fact, this is also the same contour as in Ex VI, with different endpoints.)

On the upper segment, the function f gives, for $0 \le r \le 1$,

$$\exp(i\pi r)r^r(1-r)^{1-r}\exp((1-r)2\pi i).$$

On the lower segment, the function f gives, for $0 \le r \le 1$,

$$\exp(i\pi r)r^r(1-r)^{1-r}.$$

Since the functions are bounded, the integrals over circles vanishes when the radius tend to zero.

Thus, the integral of $f(z)$ over the contour, is the integral over the upper and lower segments, which contribute to

$$\int_0^1 \exp(i\pi r)r^r(1-r)^{1-r}\,\mathrm{d}r - \int_0^1 \exp(-i\pi r)r^r(1-r)^{1-r}\,\mathrm{d}r$$

which is

$$2i\int_0^1 \sin(\pi r)r^r(1-r)^{1-r}\,\mathrm{d}r.$$

By the Cauchy residue theorem, the integral over the contour is

$$-2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}).$$

From a long and tedious calculation of residue, it turns out that the value on the right is

$$2i\frac{\pi e}{24}.$$

Then we have the result:

$$\int_0^1 \sin(\pi r)r^r(1-r)^{1-r}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi e}{4!}.$$

□

Example 6.60:

Solution

◀

6.3 定积分的换元法和分部积分法

Theorem 6.2

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 则

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

Theorem 6.3 周期性

设 $f(x)$ 是连续的周期性函数, 周期为 T, 则

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_a^{a+nT} f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$

Example 6.61: 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} \frac{\sin t}{\sin^2 t + 1}\,\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$

Solution

$$F(x) = \int_x^{x+2\pi} \frac{\sin t}{\sin^2 t + 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\sin^2 t + 1}\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{u=t-\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} \frac{\sin u}{\sin^2 u + 1}\,\mathrm{d}u = 0$$

Note: $f(x)$ 是连续的周期性函数, 周期为 T, 则

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Theorem 6.4 区间代换

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(x + \frac{b+a}{2}\right)\mathrm{d}x$$

Example 6.62: 计算积分

$$\int_1^2 \frac{2x-3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{2x-3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{t=x-\frac{3}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2\left(t+\frac{3}{2}\right)-3}{\sqrt{-\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+3\left(t+\frac{3}{2}\right)-2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{\sqrt{-t^2+\frac{11}{4}}}\,\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

◀

Example 6.63: 计算: $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$

Exercise 6.61: 计算积分:

$$\int_0^{\pi} \left(\sin x \ln\left|\frac{x-\pi}{x}\right| + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi-x}+\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$$

Solution ◀

Theorem 6.5 华里士公式

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases}
\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数},\ I_0=\dfrac{\pi}{2} \\
\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于 1 的正奇数},\ I_1=1
\end{cases}
\end{aligned}$$

Proof: 首先, 作代换 $x=t+\frac{\pi}{2}$, 由换元积分法得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n t\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

其次,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}(-\cos x) \\
&= \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}(\sin^{n-1} x) \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,
\end{aligned}
$$

从而得递推公式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

注意到

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1,$$

当 n 为偶数时,

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

而当 n 为奇数时,

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1 = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3},
\end{aligned}
$$

结论获证. □

Theorem 6.6 Froullani 积分公式

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,$a>0, b>0$, 有

1. 若 $f(0), f(+\infty)$ 存在，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = [f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$;
2. 若 $f(0)$ 存在，且 $\forall > 0$, $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\, dx$ 存在，则
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = f(0)\ln\frac{b}{a}$$
3. 若 $f(+\infty)$ 存在，且 $\forall > 0$, $\displaystyle\int_0^{A}\frac{f(x)}{x}\, dx$ 存在，则
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$$

Note:

$$\frac{1}{\binom{m+n}{m}} = m\int_0^1 (1-x)^n x^{m-1}\, dx$$

Note:

$$\frac{1}{(1+x)^y}=\frac{1}{\Gamma(y)}\int_0^{+\infty}t^{y-1}e^{-xt-t}\,\mathrm{d}t$$

Example 6.64:

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\in\infty,\ f\in C^{(2)}([0,1])$$

Proof: 由分部积分法，我们有 $(0<\xi<1$, 参阅积分中值定理)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{f(1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{f(1)}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x^{n+2}\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)}{n(n+1)}-\frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}f''(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)}{n(n+1)}-\frac{f'(1)}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n+2}\right)+\frac{f''(\xi)}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{n+3}\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n(n+1)}+\frac{2f'(1)}{n(n+1)(n+2)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+\frac{f(1)f'(1)}{n^2(n+1)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty)
\end{aligned}$$

Note:

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x\sim\frac{f(1)}{n+1}-\frac{f'(1)}{(n+1)^2}$$

□

Exercise 6.62: 计算积分

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin^2 t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}\,\mathrm{d}t=\pi$$

◀

Example 6.65: 证明: $\displaystyle\int_0^{2017}\frac{1}{x}\left[1-\left(1-\frac{x}{2017}\right)^{2017}\right]\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2017}$

Proof:

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{2017}\frac{1}{x}\left[1-\left(1-\frac{x}{2017}\right)^{2017}\right]\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{u=\frac{x}{2017}}\int_0^1\frac{1-(1-u)^{2017}}{u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{1-u^{2017}}{1-u}\,\mathrm{d}u\\
&=\int_0^1\sum_{i=0}^{2016}u^i\,\mathrm{d}u=\sum_{i=0}^{2016}\int_0^1 u^i\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{2016} \frac{1}{i+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2017}$$

□

Example 6.66: 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 试证明:

$$I = \int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} f(2)$$

Solution 令 $\frac{2}{1+t} = 1 + x$, 得

$$I = \int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x \xlongequal{\frac{2}{1+t}=1+x} \int_1^0 \frac{f\left(\frac{2}{1+t}\right)}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} \times \left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{f\left(\frac{2}{1+t}\right)}{1+t^2} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

由题 $f(xy) = f(x) + f(y)$

$$I = \int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(2)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} f(2)$$

◀

Exercise 6.63: 计算积分

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right)}{2x-\pi} \mathrm{d}x$$

Solution(西西)

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right)}{2x-\pi} \mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{t=2x-\pi} \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(t+\pi)\sin t \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{t} \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{x=\sin\frac{t}{2}} \int_{-1}^{1} x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^1 x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{d}x$$
$$= 2\Big[-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{d}x$$
$$= 2\Big[\frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big]_0^1$$
$$= \frac{8}{\pi^2}$$

◀

Example 6.67: 求定积分

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^2 x}\, dx$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^2 x}\, dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x(1-\sin x)}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x|\cos x|}{\sqrt{\sin x(1+\sin x)}} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin x(1+\sin x)}} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin x(1+\sin x)}} dx \\
&\overset{t=\sin x}{=\!=} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t(1+t)}} dt - \int_1^0 \frac{t}{\sqrt{t(1+t)}} dt \\
&= \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{t(1+t)}} dt = \int_0^1 \frac{(2t+1)-1}{\sqrt{t(1+t)}} dt \\
&= \int_0^1 \frac{d\big(t(1+t)\big)}{\sqrt{t(1+t)}} - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} dt \\
&= \left[2\sqrt{t(1+t)}\right]_0^1 - \left[\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{t(1+t)}\right)\right]_0^1 \\
&= 2\sqrt{2} - \ln(3 + 2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.64: 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}} dx$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}} dx &\overset{x=\frac{\pi}{2}-x}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sqrt{\sin 2t}} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{1+\sqrt{\sin 2x}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{1+\sqrt{(\sin x - \cos x)^2 - 1}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x - \cos x)}{1+\sqrt{(\sin x - \cos x)^2 - 1}} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{1+\sqrt{u^2-1}} \\
&\overset{x=\sin t}{=\!=} \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{1+\cos t} dt = \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.65: 计算积分: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+x+1} dx$

✎ Solution 在 $\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ 中做倒代换即有

$$\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

其中利用了恒等式 $\arctan\frac{1}{x}+\arctan x=\frac{\pi}{2}$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x&=\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.66: 令 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$，计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\frac{2n!\sin x-n!e^{2x}+x^n}{e^{2x}+\sin x+\cos x+P_n(x)}\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution 令

$$f(x)=e^{2x}+\sin x+\cos x+P_n(x)=e^{2x}+\sin x+\cos x+\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

则

$$f'(x)=2e^{2x}+\cos x-\sin x+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$$

那么有

$$f(x)-f'(x)=-e^{2x}+2\sin x+\frac{x^n}{n!}$$

故

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\frac{2n!\sin x-n!e^{2x}+x^n}{e^{2x}+\sin x+\cos x+P_n(x)}\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{f(x)-f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}(f(x))\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\Big[x\Big]_0^1-\Big[\ln(f(x))\Big]_0^1\right\}\\&=1-\ln(e^2+\sin 1+\cos 1+e)\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.67: 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ln^2\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

Solution 注意到

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

以及 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)=\dfrac{1}{1+\cos x}$, 故

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ln^2\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\ln^2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\frac{\sin x}{1+\cos x}=t}4\int_0^1\ln^2 t\,\mathrm{d}t\\&=8\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.68: 计算积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\cdot\frac{a+\cos x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\mathrm{d}x$$

Solution

$$原式=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\mathrm{d}x$$

其中

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x}\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x\cdot\ln(\tan x)}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\sin t\cdot\ln(\tan t)}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\cdot\frac{a+\cos x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\mathrm{d}x=\frac{a\pi}{4}$$

◀

Exercise 6.69: 计算积分: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x$

✎ Solution 在 $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+9}\,\mathrm{d}x$ 中做代换 $x=3u$ 有

$$3\int_0^{\infty}\frac{\ln(3u)}{9u^2+9u+9}\,\mathrm{d}u=\frac{\ln 3}{3}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u+\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u$$

如果在 $\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u$ 做代换 $u=\frac{1}{t}$ 即得

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}\frac{\ln\frac{1}{t}}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u=0$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+9}\,\mathrm{d}x&=\frac{\ln 3}{3}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u=\frac{\ln 3}{3}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{\ln 3}{3}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(u+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right]_0^{\infty}=\frac{2\ln 3}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{2\pi\ln 3}{9\sqrt{3}}\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.70: 计算:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution 记 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}I_n-I_{n-1}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx-\sin^2(n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[\sin nx-\sin(n-1)x][\sin nx+\sin(n-1)x]}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2n-1}\end{aligned}$$

因此

$$I_n=\frac{1}{2n-1}+\cdots+\frac{1}{3}+1$$

◀

Example 6.68: 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\,\mathrm{d}x$ (n 为自然数)

✎ Solution

$$I_n=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\big[\sin(n-1)x+\sin(n+1)x\big]\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}I_{n-1} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x\big(\sin nx\cos x + \cos nx\sin x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(I_{n-1}+I_n) - \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\,\mathrm{d}(\cos^n x) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}I_{n-1} \quad (\text{分部积分}) \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}I_{n-2}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}\cdot 2} + \frac{1}{2^{n-1}}I_1 \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}\cdot 2} + \frac{1}{2^n}\left(I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

◀

Example 6.69: 计算定积分: $\int_0^2 \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$

Solution 当 $x \in [0,2]$ 恒有 $2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} + \arcsin(1-x) = \frac{\pi}{2}$

$$
\Longrightarrow \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\arcsin(1-x)
$$

故有

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\arcsin(1-x)}{(1-x)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{u=x-1} \int_{-1}^1 \frac{\frac{\pi}{4}}{u^2+1}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-1}^1 \frac{\arcsin u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u}_{\text{奇偶性}} \\
&= \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

◀

Solution

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal[x=2\sin^2 t]{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}=t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t\sin 2t}{(2\sin^2 t-1)^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t\sin 2t}{\cos^2 2t+1}\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{2t=u} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{u\sin u}{\cos^2 u+1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} u\,\mathrm{d}(\arctan\cos u) \\
&= -\frac{1}{2}u\arctan\cos u\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\arctan\cos u\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\cos u=x} \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-1}^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}_{\text{奇偶性}} \\
&= \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

◀

Example 6.70: 求定积分

$$
\int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}} \frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x
$$

–傲娇小魔王 ˅

✎ Solution

$$I=\int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{29\pi}{4}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{29\pi}{4}}=3\int_{-\pi}^{\pi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=-t}\int_{0}^{\pi}\frac{2^{\sin x}}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}&=\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\\&=\int_{0}^{\pi}\frac{2^{\sin x}}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\pi-t}\int_{0}^{\pi}\frac{2^{\cos x}}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\frac{2^{\cos x}}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{2^{\sin x}}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\pi-t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{2^{\cos x}}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$I=\int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}}\frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x=3\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$

◀

Exercise 6.71: 计算积分:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}\}\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}\}\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\=&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x[(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}]}{[(2x+1)^2(x^2-x+1)-(2x-1)^2(x^2+x+1)]\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\=&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x[(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}]}{6x\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{d(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}}\\
&=\frac{1}{3}\left[\sqrt{x^2+x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\left[\sqrt{x^2-x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 6.72: 计算积分:

$$\int_0^1\frac{x}{\{(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}+(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}\}\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$a(x)=\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}},\Rightarrow a'(x)=\frac{x+\frac{1}{2}}{a(x)}$$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x}{[(x-\frac{1}{2})a(x)+(x+\frac{1}{2})a(-x)]a(x)a(-x)}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x}{a^2(x)(a^2-x)[a'(x)-a'(-x)]}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x[a'(x)+a'(-x)]\,\mathrm{d}x}{a^2(x)a^2(-x)\{[a'(x)]^2-[a'(-x)]^2\}}\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x[a'(x)+a'(-x)]\,\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{2})^2a^2(-x)^2-(x-\frac{1}{2})^2a^2(x)}=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{x[a'(x)+a'(-x)]\,\mathrm{d}x}{2x}\\
&=\frac{1}{3}\int_0^1[a'(x)+a'(-x)]=\frac{a(1)-a(-1)}{3}=\frac{\sqrt{3}-1}{3}
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 6.73: 计算积分: $\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$

Solution 在 $\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ 中作代换 $x=\sqrt{2}u$ 得:

$$\sqrt{2}\int_0^\infty\frac{\ln(\sqrt{2}u)}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{2}\int_0^\infty\frac{1}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\,\mathrm{d}x+\sqrt{2}\int_0^\infty\frac{\ln u}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\,\mathrm{d}x$$

其中后者积分为 0, 所以

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x&=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\int_0^\infty\frac{1}{u^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}u+1}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\int_0^\infty\frac{1}{(u^2+\frac{3\sqrt{2}}{4})^2-\frac{1}{8}}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\int_{\frac{3\sqrt{2}}{4}}^\infty\frac{1}{x^2-\frac{1}{8}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\int_{\frac{3\sqrt{2}}{4}}^{\infty}\frac{1}{x^2-\frac{1}{8}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\left(\sqrt{2}\ln 2\right) = \frac{\ln^2 2}{2}$$

◀

Exercise 6.74: 计算积分

$$I = \int_0^1 \ln(1+x)\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

Solution 因为

$$\ln(1+x)\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n - H_{2n} - \frac{1}{2n}}{n}x^{2n}$$

所以

$$\int_0^1 \ln(1+x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n - H_{2n}}{n(2n+1)} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(2n+1)}$$

Since

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \ln(2-x)\ln x\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 x\Big[\frac{\ln(2-x)}{x} - \frac{\ln x}{2-x}\Big]\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - 2\ln 2 + \int_0^1 \frac{x\ln x}{2-x}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - 2\ln 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(2x)\ln(2x)}{2-2x}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - 3\ln 2 + 2\ln^2 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - 3\ln 2 + 2\ln^2 2 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{k+1}\ln x\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - 3\ln 2 + 2\ln^2 2 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ln 2}{(k+2)2^{k+1}} + \frac{1}{(k+2)^2 2^{k+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - 3\ln 2 + 2\ln^2 2 - \ln 2[2\ln 2 - 1] - \frac{\pi^2}{6} + \ln^2 2 + 1 \qquad \text{The value of } \mathrm{Li}_2(\frac{1}{2}) \\
&= 2 - \frac{\pi^2}{6} - 2\ln 2 + \ln^2 2
\end{aligned}$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(2n+1)} = \frac{\pi^2}{6} + 4\ln 2 - 4$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n} - H_n}{n(2n+1)} = \frac{\pi^2}{12} - \ln^2 2$$

◀

Exercise 6.75: 计算积分:

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Solution 方法 1

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln(1-x)\ln x\, d\,\mathrm{Li}_2(x)\\ &= \int_0^1 \mathrm{Li}_2(x)\frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{Li}_2(x)\frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2^2(1) - \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2^2(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\\ &= -\frac{\pi^4}{72} + \frac{\pi^4}{120} = -\frac{\pi^4}{180}\end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln^2 x\ln^2(1-x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\ln^2 x\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k-1}H_k x^k\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k-1}H_k\int_0^1 x^k\ln^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k-1}\frac{H_k}{(k+1)^3}\\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k-1}\left[\frac{H_{k+1}}{(k+1)^3} - \frac{1}{(k+1)^4}\right]\\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k-1}\left[\frac{H_k}{k^3} - \frac{1}{k^4}\right]\\ &= -\frac{\pi^4}{36} + \frac{\pi^4}{45} = -\frac{\pi^4}{180}\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.76: 计算积分:

$$\int_0^1 \frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Solution 此题需用到

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 \frac{\ln x}{2-x}\,\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{2-x=t} \int_2^1 \frac{1}{t}\ln(2-t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_1^2 \frac{\ln 2}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 \frac{\ln(1-\frac{t}{2})}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= -(\ln 2)^2 + \int_1^2 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-\frac{t}{2})^n}{n}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= -(\ln 2)^2 + \int_1^2 \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^t\cdot n}\,\mathrm{d}t \\
&= -(\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n^2}\Big|_1^2 = -(\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2} \\
&= -(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2} \\
&= -(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}
\end{aligned}
$$

Note: 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, 当 $x \in (0,1)$ 时, 有:$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Exercise 6.77: 计算积分:

$$\int_0^1 \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^3 \mathrm{d}x$$

Solution 这里需要一些公式

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\cot x = -\csc^2 x,\ \frac{d}{\mathrm{d}x}\csc x = -\cot x\csc x,\ \csc^2 x = \cot^2 x + 1$$

做代换 $x = \sin u$, 有

$$\int_0^1 \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^3 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3\frac{\cos u}{\sin^3 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3\cot u\csc^2 u\,\mathrm{d}u$$

利用分布积分

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3\cot u\,d(\cot u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3u^2\cot u - u^3\csc^2 u)\cot u\,\mathrm{d}u$$

其中利用了 $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ 这个值所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3\cot u\csc^2 u\,\mathrm{d}u = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\cot^2 u\,\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3\cot u\csc^2 u\,\mathrm{d}u$$

移项:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3\cot u\csc^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\cot^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(\csc^2 u - 1)\,\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 d(\cot u)-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,\mathrm{d}u=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\cot u\,\mathrm{d}u-\frac{\pi^3}{16}$$

留意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\cot u\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u d(\ln(\sin u))=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

做代换 $x=\frac{\pi}{2}-u$ 有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$ 所以

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{\sin 2x}{2})\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\cot u\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

最后就有

$$\int_0^1\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{2}\ln 2-\frac{\pi^3}{16}$$

◀

Exercise 6.78: 计算积分:

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+(1+2\sqrt{2})x+1][1-x+x^2+\cdots+x^{50}]}$$

✎ Solution 先计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]\sum\limits_{k=0}^{n}(-x)^k}\tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]\sum\limits_{k=0}^{n}(-x)^k}\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1-(-x)^{n+1}}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]\sum\limits_{k=0}^{n}(-x)^k}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+x}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{x^4+ax^2+1}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2+a}d(x-\frac{1}{x})\\&=\frac{1}{\sqrt{2+a}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2+a}}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2+a}}\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+(1+2\sqrt{2})x+1][1-x+x^2+\cdots+x^{50}]}=\frac{\pi}{\sqrt{2+a}}$$

◀

Exercise 6.79: 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

Solution 利用分布积分，我们有

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^n x\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{n}{a}e^{-ax}\sin^n(x)\Big|_0^{+\infty}+\frac{n}{a}\int_0^{+\infty}\sin^{n-1}(x)\cos(x)e^{-ax}\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow I_n &= \frac{n}{a}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^{n-1}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow I_n &= \frac{n}{a}\left[\frac{-1}{a}e^{-ax}\sin^{n-1}(x)\cos(x)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{a}\left((n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)-\sin^n(x)\right)\mathrm{d}x\right]\\
\Rightarrow I_n &= \frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x-\frac{n^2}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow I_n &= \frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}-\frac{n^2}{a^2}I_n
\end{aligned}$$

解出 I_n

$$I_n\left(1+\frac{n^2}{a^2}\right)=\frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}\Rightarrow I_n=\frac{n(n-1)}{n^2+a^2}I_{n-2}$$

所以, 当 n 为偶数时

$$I_n=\frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{(n-2)^2+a^2}\cdots\frac{2\cdot 1}{2^2+a^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{a}}_{I_0}$$

当 n 为奇数时

$$I_n=\frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{(n-2)^2+a^2}\cdots\frac{3\cdot 2}{a^2+1}\cdot\underbrace{\frac{1}{a^2+1}}_{I_1}$$

综上我们有

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(2m)!}{a\cdot\prod\limits_{k=1}^{m}(4k^2+a^2)}=\dfrac{\pi\cdot\operatorname{csch}\left(\frac{\pi a}{2}\right)\cdot(2m)!}{2^{2m+1}\Gamma\left(m-\frac{ai}{2}+1\right)\Gamma\left(m+\frac{ai}{2}+1\right)}\\[2ex]\dfrac{(2m+1)!}{\cdot\prod\limits_{k=1}^{m}\left((2k+1)^2+a^2\right)}=\dfrac{\pi\cdot\operatorname{sech}\left(\frac{\pi a}{2}\right)\cdot(2m+1)!}{4^{m+1}\Gamma\left(m-\frac{ai}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{ai}{2}+\frac{3}{2}\right)}\end{cases}$$

◀

Exercise 6.80: 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x\ln\cos x dx = \frac{(\pi\ln 2)^2}{8} - \frac{\pi^4}{192}$$

Solution 首先，我们设 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x\ln\cos x dx$ 很显然，

$$A=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\ln\cos x dx$$

所以，只需要求 $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\ln\cos x dx$ 由傅里叶级数不难得到

$$\ln(2\cos\frac{x}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n},\quad -\pi<x<\pi$$

由 $2x$ 替换 x, 得到

$$\ln(2\cos x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{n},\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

而另一方面

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2nx\ln\sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x d\frac{\sin 2nx}{2n}\\ &= \frac{1}{2n}\sin 2nx\cdot\ln\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\cdot\sin 2nx}{\sin x}dx\\ &= -\frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x}{\sin x}dx\\ &= -\frac{\pi}{4n}\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\cos x\cdot\ln\sin x dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi}{4n^2} = B+\ln 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$$

马上看到

$$B=\frac{\pi}{2}\ln^2 2-\frac{1}{48}\pi^3\quad A=\frac{(\pi\ln 2)^2}{8}-\frac{\pi^4}{192}$$

◀

Exercise 6.81: 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 存在，并求极限

Solution 因为

$$\frac{1}{\sin^4 x} = \frac{1}{x^4}+\frac{2}{3x^2}+o(1)$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\frac{\sin nx}{\sin x})^4\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{u}\mathrm{d}x+o(1)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\,\mathrm{d}x&=n^2\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\,\mathrm{d}x\\&=n^2\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\,\mathrm{d}x+n^2\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{n^2}{2}\int_0^{\infty}\sin^4 t\left(\int_0^{\infty}x^2e^{-tx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t+o(1)\\&=12n^2\int_0^{\infty}\frac{x}{(x^2+4)(x^2+16)}\,\mathrm{d}x+o(1)\\&=n^2\ln 2+o(1)\end{aligned}$$

因为

$$\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2}\pi}\frac{\sin^4 x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln n+o(1)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\ln 2+\frac{1}{4}\ln n}{n^2}=\ln 2$$

◀

Exercise 6.82: 计算积分

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\tan\frac{\theta}{2}}\ln^2(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sqrt{\tan\frac{\theta}{2}}\ln^2(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta&=\int_0^{\infty}\frac{2\sqrt{t}}{1+t^2}\ln^2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\quad t=\tan\frac{\theta}{2}\\&=\int_0^{\infty}\frac{2\sqrt{1/t}}{1+t^2}\ln^2\left(\frac{2}{t+1/t}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{1/t}+\sqrt{1/t^3}}{t+1/t}\ln^2\left(\frac{2}{t+1/t}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{x^2+2}\ln^2\left(\frac{2}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x\\&=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\left(\cos^2 u\right)\mathrm{d}u\quad x=\sqrt{2}\tan u\\&=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\sin u\,\mathrm{d}u=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2\mathrm{d}u\\&=8\sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2 2\mathrm{d}u+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4kx}{2}\mathrm{d}x\right)\\&=4\sqrt{2}\pi\ln^2 2+2\sqrt{2}\pi\zeta(2)=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi^3+4\sqrt{2}\ln^2 2.\end{aligned}$$

Theorem 6.7

设 $\varphi(n)$ 是欧拉函数，且 f 是连续函数，求证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\varphi(k)=\frac{6}{\pi^2}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$$

实际上这个结果利用

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)=\frac{3}{\pi^2}\text{ 和 }\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)a_k=A\int_0^1 ax^{a-1}f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n}, a_i>0, a>0$ 拼一起

6.3.1 Euler 积分

Example 6.71: 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$$

Solution(法 1)

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-u}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-\mathrm{d}u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
J&=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{u=2x}-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln\sin u\,\mathrm{d}u\\
&=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\,\mathrm{d}u+\frac{1}{4}\overbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin u\,\mathrm{d}u}^{t=u-\frac{\pi}{2}}\\
&=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\,\mathrm{d}u+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,\mathrm{d}t\\
&=-\frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

(法 2)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x &\xlongequal{x=2t} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t \mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln \sin x + \ln \cos x)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \mathrm{d}t + 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t \mathrm{d}t}_{u=\frac{\pi}{2}-t} \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-\mathrm{d}u) \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u \mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2
$$

(法 3) **含参积分 + 特殊函数**

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\partial}{\partial T}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^T\,\mathrm{d}x\bigg|_{T=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial T} B\left(\frac{T+1}{2}, \frac{1}{2}\right)\bigg|_{T=0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\Gamma\left(\frac{T+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{T}{2}+1\right)}\bigg|_{T=0} \\
&= \lim_{T\to 0}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{T+1}{2}\right)\frac{\psi_0\left(\frac{T+1}{2}\right) - \psi_0\left(\frac{T}{2}+1\right)}{2\Gamma\left(\frac{T}{2}+1\right)}\bigg|_{T=0} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\psi_0\left(\frac{1}{2}\right) - \psi_0(1)}{2\Gamma(1)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\big((-\gamma - 2\ln 2) - (-\gamma)\big) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}(-2\ln 2) = -\frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 6.83: **计算积分**

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \mathrm{d}x
$$

✎ Solution

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,\mathrm{d}(-\cot x) \\
&= \Big[-x^2\cot x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}(\ln\sin x)\\&= \Big[2x\ln\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x\\&= 0 - 2\times\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)\\&= \pi\ln 2\end{aligned}$$

◀

Example 6.72: [12] 计算积分: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\tan t} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{t=\frac{\pi}{4}-u} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u\\&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u\\&= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

◀

6.3.2 留数在定积分计算中的应用

Example 6.73: 求定积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

Proof:首先有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{t=x+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t-1)}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t\\&= \cos 1\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x - \sin 1\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

容易验证，函数 $f(z) = \dfrac{e^{2\mathrm{i}z}}{z^2+\frac{3}{4}}$ 满足若尔当引理的条件，其中，$g(z) = \dfrac{1}{z^2+\frac{3}{4}}$ 函数 $f(z)$ 在上半平面内只有一个简单极点 $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ ($z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 在下半平面).

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\mathrm{i}z}}{z^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[f(z), \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right]\\&= 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\frac{e^{2\mathrm{i}z}}{z^2+\frac{3}{4}} = 2\pi\mathrm{i}\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\mathrm{i}} = \frac{2e^{-\sqrt{3}}\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

比较实部虚部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{2e^{-\sqrt{3}}\pi}{\sqrt{3}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = 0$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{2e^{-\sqrt{3}}\pi \sin 1}{\sqrt{3}}$$

□

6.3.3 定积分在经济学中的应用

Exercise 6.84: 已知某商品边际收益为 $R'(q) = -0.08q + 25$(万元/t)，边际成本为 $= 5$(万元/t)，求产量从 250t 增加到 300t 时的销售收益 $R(q)$、总成本 $C(q)$、利润 $L(q)$ 的改变量 (增量).

Solution 边际利润

$$
\begin{aligned}
L'(q) &= R'(q) - C'(q) = -0.08q + 20, \\
R(300) - R(250) &= \int_{250}^{300} (-0.08q + 25)\mathrm{d}q = 150(\text{万元}), \\
C(300) - C(250) &= \int_{250}^{300} 5\mathrm{d}q = 250(\text{万元}), \\
L(300) - L(250) &= \int_{250}^{300} (-0.08q + 20)\mathrm{d}q = -100(\text{万元}).
\end{aligned}
$$

◀

6.4 反常积分的审敛法 Γ 函数

6.4.1 无穷限反常积分的审敛法 [2]

Theorem 6.8 比较审敛原理

设 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ $(a \leqslant x < \infty)$. 则

(1) $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

(2) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散

♣

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & p > 1 \\ +\infty & p \leqslant 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

Theorem 6.9 比较审敛法 1– 与 p– 积分进行比较 (不等式形式)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上连续, 且 $f(x)\geqslant 0$.

(1) $\exists M>0, p>1,$ s.t $f(x)\leqslant \dfrac{M}{x^p} \Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $\exists N>0,$ s.t $f(x)\geqslant \dfrac{N}{x} \Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散;

Theorem 6.10 极限审敛法 1

$$\lim_{x\to+\infty} x^p \underbrace{f(x)}_{f(x)\geqslant 0} = l \neq 0 \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{收敛} & p>1 \\ \text{发散} & p\leqslant 1 \end{cases}$$

Exercise 6.85: 证明反常积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

当 $p\le \frac{1}{2}$ 时发散，$\frac{1}{2}<p\le 1$ 时条件收敛，$p>1$ 时绝对收敛.

Proof: 若 $p>0$, 则当 $x\to+\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x^p+\sin x} &= \frac{\sin x}{x^p\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right) \\ &= -\frac{1}{2x^{2p}} + \frac{\sin x}{x^p} + \frac{\cos 2x}{2x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right).\end{aligned}$$

故

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{x^p+\sin x}\text{收敛} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^{2p}}\text{收敛} \Longleftrightarrow p>\frac{1}{2}.$$

若 $p>0$, 则当 $x\to+\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right| &= \frac{|\sin x|}{x^p} - \frac{|\sin x|\sin x}{x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right) \\ &= \frac{2}{\pi x^p} + \frac{|\sin x|-2/\pi}{x^p} - \frac{|\sin x|\sin x}{x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right).\end{aligned}$$

故

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\mathrm{d}x\text{收敛} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}x}{\pi x^p}\text{收敛} \Longleftrightarrow p>1.$$

即

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{x^p+\sin x}\text{绝对收敛} \Longleftrightarrow p>1.$$

□

Theorem 6.11 无穷积分的 Abel 判别法

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛; $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

Theorem 6.12 无穷积分的 Dirichlet 判别法

若 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$; $F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

Exercise 6.86:

Proof:

□

6.4.2 无界函数的反常积分的审敛法 [2]

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{1-q} & 0<q<1\\ +\infty & q\geqslant 1\end{cases} \Longrightarrow \int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q} & 0<q<1\\ +\infty & q\geqslant 1\end{cases}$$

Theorem 6.13 比较审敛法 2– 与 p– 积分进行比较 (不等式形式)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geqslant 0$, $x=a$ 为瑕点.

(1) $\exists M>0, q<1$, s.t $f(x)\leqslant \dfrac{M}{(x-a)^p} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $\exists N>0$, s.t $f(x)\geqslant \dfrac{N}{x-a} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散;

Theorem 6.14 极限审敛法 2

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geqslant 0$, $x=a$ 为暇点.

(1) $\exists 0<q<1$, s.t $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=l \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0\ (d=+\infty) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散;

Example 6.74: 判断反常积分 $\int_1^3 \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$ 的敛散性

Proof: 这里 $x=1$ 是被积函数的暇点. 由洛必达法则知

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1>0$$

根据极限审敛法 2, 知所给反常积分发散 □

Example 6.75: 判断反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性, 其中 m,n 是正整数

Proof:(by 蓝兔兔) 这里 $x=0$, $x=1$ 是被积函数的暇点. 分开考虑

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$$

对于 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$, 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\frac{\sqrt[m]{x^2}}{\sqrt[n]{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}},\ x\to 0$$

由于 $n\geqslant 1\implies \frac{1}{n}\in(0,1]$, 而 $\frac{2}{m}>0$, 所以 $\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$, 即 $p<1$,

于是可知 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛

对于 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$, 因为

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{1-x=e^t} \int_{-\infty}^{-\ln 2}\frac{\sqrt[m]{t^2}e^t}{\sqrt[n]{1-e^t}}\mathrm{d}t=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\sqrt[m]{t^2}e^{-t}}{\sqrt[n]{1-e^{-t}}}\mathrm{d}t$$

注意到

$$\frac{\sqrt[m]{t^2}e^{-t}}{\sqrt[n]{1-e^{-t}}}\sim t^{\frac{2}{m}}e^{-t},\ x\to+\infty$$

而 $\int_{\ln 2}^{+\infty} t^{\frac{2}{m}}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ 收敛 $\implies \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$收敛

综上得 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛 □

Example 6.76: 设 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x} \mathrm{d}x$, 其中 p 为正的常数

判定反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x} \mathrm{d}x$ 是否收敛

Solution 由于 $\frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x} > 0$, 只需考察无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x} \mathrm{d}x$

的敛散性, 设当 $(n-1)\pi \leqslant x \leqslant n\pi$ 时,

$$\frac{(n-1)\pi}{\cos^2 x + (n\pi)^p \sin^2 x} \leqslant \frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x} \leqslant \frac{n\pi}{\cos^2 x + (n\pi - \pi)^p \sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}
\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{(n-1)\pi}{\cos^2 x + (n\pi)^p \sin^2 x} \mathrm{d}x &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{(n-1)\pi}{1 + \left[(n\pi)^p - 1\right] \sin^2 x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \frac{(n-1)\pi}{1 + \left[(n\pi)^p - 1\right] \sin^2 x} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n-1)\pi}{1 + \left[(n\pi)^p - 1\right] \sin^2 x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2(n-1)\pi}{\sqrt{(n\pi)^p - 1}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{(n\pi)^p - 1}} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}^+} \\
&= \frac{(n-1)\pi^2}{\sqrt{(n\pi)^p - 1}}
\end{aligned}$$

同理

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{n\pi}{\cos^2 x + ((n-1)\pi)^p \sin^2 x} \mathrm{d}x = \frac{n\pi^2}{\sqrt{((n-1)\pi)^p - 1}}$$

$$\frac{(n-1)\pi^2}{\sqrt{(n\pi)^p - 1}} \leqslant \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{n\pi^2}{\sqrt{((n-1)\pi)^p - 1}}$$

当 $n \to +\infty$,

$$\frac{(n-1)\pi^2}{\sqrt{(n\pi)^p - 1}} \sim \frac{\pi^{2-\frac{p}{2}}}{n^{\frac{p}{2}-1}} \sim \frac{n\pi^2}{\sqrt{((n-1)\pi)^p - 1}}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim \frac{\pi^{2-\frac{p}{2}}}{n^{\frac{p}{2}-1}}$$

当 $\frac{p}{2} - 1 \leqslant 1$ 时, 即 $p \leqslant 4$ 原积分发散; 当 $\frac{p}{2} - 1 > 1$ 时, 即 $p > 4$ 原积分收敛. ◀

Theorem 6.15 有界瑕积分的 A–D 判别法

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个奇点 b

1. (Abel 判别法) 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛; $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界,
   则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛
2. (Dirichlet 判别法) 若 $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界, 且 $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0$;
   $F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,b-a)$ 上有界, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

Exercise 6.87: 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛

Solution

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ,0<x\leqslant 1\\ 1 & ,x=0\end{cases}$, 因为 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\dfrac{\sin x}{x}=1$ 故 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,
所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

即 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 存在. 下面往证 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛
$f(x)=\sin x$ 在 $[1,+\infty)$ 连续, 且对 $\forall x\in[1,+\infty)$, 有

$$F(u)=\int_1^u \sin x\,\mathrm{d}x=\cos 1-\cos u$$

$$|F(u)|=|\cos 1-\cos u|\leqslant 2$$

而 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减并趋向于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛
在证无穷积分 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散
已知 $\forall x\in[1,+\infty)$, 有 $|\sin x|\geqslant\sin^2 x$, 从而

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}$$

同理可证明无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ 发散
由于 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}\right)\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法可知 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散
综上所述, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛 ◀

Example 6.77: 求反常积分: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} \mathrm{d}x$

Solution 对于 $x > 0$ 有展开式

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x}\left(1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin x \,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{e^{-nx}(n \sin x + \cos x)}{n^2 + 1}\right]_0^{+\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \\
&\xlongequal[14.5.3]{\text{傅里叶}} \frac{1}{2}(\pi \coth(\pi) - 1) \approx 1.0766774....
\end{aligned}$$

◀

6.5 Γ 函数

Definition 6.3 Bohr-Mollerup 命题

如果定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 f 满足以下三个条件:

(1) $f(x) > 0$, 且 $f(1) = 1$,

(2) $f(x + 1) = x f(x)$,

(3) $\ln f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 内的下凹函数

则 $f(x) \equiv \Gamma(x)$, $x \in (0, +\infty)$

Definition 6.4 Γ 函数

Γ 函数的定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

Properties: **Γ 函数的导数**

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \ln t \,\mathrm{d}t \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

特别的， $\Gamma'(1)=\gamma$

$$\Gamma''(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\ln^2 t\,\mathrm{d}t \quad (\operatorname{Re} z>0)$$

特别的， $\Gamma''(1)=\gamma^2+\dfrac{\pi^2}{6}$

Theorem 6.16 Euler-Gauss 公式

$\forall z>0$, 有

$$\Gamma(z)=\lim_{m\to+\infty}\frac{m^z m!}{z(z+1)\cdots(z+m)} \quad (\operatorname{Re} z>0)$$

Properties:

(1) **递推公式** $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),(x>0)$

(2) $\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x)$

(3) $\Gamma(x)\Gamma(-x)=-\dfrac{\pi}{x\sin\pi x}$ (x 为非整数)

(4) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=-\dfrac{\pi}{\cos\pi x}$

(5) $\dfrac{1}{x^p}=\dfrac{1}{\Gamma(p)}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-xt}\mathrm{d}t$

Theorem 6.17 余元公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x} \quad x\text{ 为非整数}$$

Theorem 6.18 Legendre 加倍公式

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2s)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right), s>0$$

其中 Γ 是 Gamma 函数,

☞ Proof: 记

$$I(s)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}}.$$

令 $x=\tan^{2s}t$, 则 $\mathrm{d}x=2s\tan^{2s-1}t\sec^2t\mathrm{d}t=\sin^{2s-1}t\cos^{-2s-1}t\mathrm{d}t$, $(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}=\sec^{4s}t$, 从而

$$\begin{aligned}I(s)&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}}=2s\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t\cos t)^{2s-1}\mathrm{d}t\\&=s2^{1-2s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2s-1}u\mathrm{d}u=2^{-2s}sB(\frac{1}{2},s)\\&=2^{-2s}s\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}=2^{-2s}\sqrt{\pi}s\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}.\end{aligned}$$

另一方面

$$I(s)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}},$$

从而

$$I(s)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}}=s\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^{2s-1}\mathrm{d}t=\frac{s\mathrm{B}(s,s)}{2}=\frac{s\Gamma^2(s)}{2\Gamma(2s)}.$$

因此

$$2^{-2s}\sqrt{\pi}s\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}=\frac{s\Gamma^2(s)}{2\Gamma(2s)}.$$

从而

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2s)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right),s>0.$$

□

Properties:

(1) 一般地, 对于任何正整数 n 有 $\Gamma(n+1)=n!$

(2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}=\left(-\frac{1}{2}\right)!$

(3) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)!$

(4) $\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(4i-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1\cdot5\cdot9\cdot13\cdot\cdots\cdot(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(5) $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\approx3.6256099082\cdots$

(6) $\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(3i-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(7) $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\approx2.6789385347\cdots$

(8) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(2i-1)}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(9) $\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(3i-1)}{3^n}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(10) $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\approx 1.3541179394\cdots$

(11) $\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(4i-1)}{4^n}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdot\cdots\cdot(4n-1)}{4^n}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(12) $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\approx 1.2254167024\cdots$

Theorem 6.19 斯特林 (stirling) 公式

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12n}}\quad(0<\theta<1,x>0)$$

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\exp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}x^{1-2n}}{2n(2n-1)}$$

$$=\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4}+o(x^{-4})\right)$$

Theorem 6.20 斯特林 (stirling) 公式

1. $n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,\ n\to+\infty$
2. $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, 其中 $0<\theta_n<1$
3. $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}-\frac{571}{2488320n^4}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$
4. $\ln n!=n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln(2\pi n)+\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\frac{1}{1680n^7}+\cdots$

Example 6.78: 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{i}}}{\left(1+\frac{1}{i}\right)^i}$

Proof: 利用斯特林 (Stiring) 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\ \text{其中} 0 < \theta_n < 1$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{1-\frac{1}{i}}}{\left(1+\frac{1}{i}\right)^i} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \frac{\exp\left[n - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]}{\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}n!\exp\left[n - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]}{(n+1)^n} \\
&\xlongequal{\text{Stiring}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}}} \lim_{n\to\infty} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-\ln n}} \\
&= \sqrt{2\pi}e^{-(1+\gamma)}
\end{aligned}$$

其中 γ 为欧拉常数 □

Definition 6.5 Beta 函数

B 函数 (Beta function) 的定义为

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0)$$

上式的右边称为第一类欧拉 (Euler) 积分

其它形式

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta \mathrm{d}\theta \quad (\mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0)$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0)$$

Exercise 6.88: f $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$ then

$$\frac{\Gamma(\beta_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\alpha_n)} = \prod_{k\geqslant 0} \frac{(k+\alpha_1)\cdot\cdots\cdot(k+\alpha_n)}{(k+\beta_1)\cdot\cdots\cdot(k+\beta_n)}$$

Proof: according to Euler's definition for the gamma function

$$\Gamma(z) = \frac{m^z m!}{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+m)} \tag{6.8}$$

therefore we have

$$\frac{\Gamma(\beta_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\alpha_n)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\beta_j)}{\Gamma(\alpha_j)} = \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\frac{m^{\beta_j} m!}{\beta_j(\beta_j+1)\cdot\cdots\cdot(\beta_j+m)}}{\frac{m^{\alpha_j} m!}{\alpha_j(\alpha_j+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha_j+m)}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{n} m^{\beta_j-\alpha_j}\prod_{k=0}^{m}\frac{\alpha_j+k}{\beta_j+k}$$
$$= \lim_{m\to\infty}\prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j+k}{\beta_j+k}$$
$$= \lim_{m\to\infty}\prod_{k=0}^{m}\frac{(k+\alpha_1)\cdot\cdots\cdot(k+\alpha_n)}{(k+\beta_1)\cdot\cdots\cdot(k+\beta_n)}$$

□

Exercise 6.89: 计算积分:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-e^{-6x})}{x(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+e^{-8x})}\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-e^{-6x})}{x(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+e^{-8x})}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-e^{-6x})(1-e^{-2x})}{x(1-e^{-10x})}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\infty \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-10kx}\cdot e^{-x}(1-e^{-6x})(1-e^{-2x})\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-(10k+1)x}-e^{-(10k+3)x}-e^{-(10k+7)x}+e^{-(10k+9)x}}{x}\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^\infty \left[\frac{e^{-(10k+1)x}-e^{-(10k+3)x}}{x}+\frac{-ee^{-(10k+9)x}-(10k+7)x}{x}\right]\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(f(0)\ln\left[\frac{-(10k+3)}{-(10k+1)}\right]+f(0)\ln\left[\frac{-(10k+7)}{-(10k+9)}\right]\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\ln\left(\frac{10k+3}{10k+1}\right)+\ln\left(\frac{10k+7}{10k+9}\right)\right)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\ln\frac{(10k+3)(10k+7)}{(10k+1)(10k+9)}\\
&=\ln\prod_{k=0}^{\infty}\frac{(10k+3)(10k+7)}{(10k+1)(10k+9)}=\ln\prod_{k=0}^{\infty}\frac{(k+\frac{3}{10})(k+\frac{7}{10})}{(k+\frac{1}{10})(k+\frac{9}{10})}\\
&=\ln\frac{\Gamma(\frac{1}{10})\Gamma(\frac{9}{10})}{\Gamma(\frac{3}{10})\Gamma(\frac{7}{10})}=\ln\frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\approx 0.962424
\end{aligned}$$

Theorem 6.21 Froullani 积分公式

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,$a>0,b>0$, 有

1. 若 $f(0),f(+\infty)$ 存在，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$;
2. 若 $f(0)$ 存在，且 $\forall>0$, $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 存在，
   则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$;
3. 若 $f(+\infty)$ 存在，且 $\forall>0$, $\displaystyle\int_0^{A}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 存在，
   则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$;

◀

Exercise 6.90: 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}x^3\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}x^3e^{-nx}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}\,\mathrm{d}t\ ,\ t=nx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\Gamma(4)=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\\&=16\times\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{15}\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.91: 计算积分:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$$

Solution 我们有

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x\overset{x^4=t}{=\!=\!=}\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{\pi}}$$

对积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$ 做变量替换，令 $t=\frac{1}{x}$，可得

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$$

由此知

$$J=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t=2I$$

所以

$$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x=\frac{J}{2}=\frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{8\sqrt{\pi}}$$

◀

Exercise 6.92: 计算积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x&=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x^2\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)\\&=\left.\frac{2x^2}{e^x+1}\right|_0^{+\infty}-4\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x\\&=4\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x=4\int_0^{+\infty}xe^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^ne^{-nx}\,\mathrm{d}x\\&=4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}xe^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\int_0^{+\infty}te^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{3}\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.93: 计算积分:

$$\lim_{n\to 0}\sqrt[n]{n!}$$

Solution

$$\begin{aligned}\lim_{n\to 0}\sqrt[n]{n!}&=\lim_{n\to 0}\exp\left\{\frac{\ln(n!)}{n}\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{n\to 0}\frac{\ln\Gamma(n+1)}{n}\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\Gamma(x+1)}{x}\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}\right\}\\&=e^{\psi(1)}=e^{-\gamma}\end{aligned}$$

Exercise 6.94: 计算积分:

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution 本题需用到的公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}, x\in(0,1) \qquad \text{——余元公式}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=1-x} -\int_1^0 \ln\Gamma(1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln\Gamma(1-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (\ln\Gamma(x)+\ln\Gamma(1-x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \ln\pi\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x = \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\pi x=t} \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \ln\pi - \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t}_{=-\frac{\pi}{2}\ln 2} - \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin t\,\mathrm{d}t}_{u=\pi-t} \\
&= \ln\pi + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \ln\pi + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \ln(2\pi)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

Exercise 6.95: 计算积分:

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{(x^2+1)\ln x}\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2-1}{(x^2+1)\ln x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\int_0^1 x^t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^{t+1}+x^t}{x^2+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\cdots\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}\right)-\left(\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}\right)+\cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln\frac{3}{1} - \ln\frac{5}{3} + \ln\frac{7}{5} - \ln\frac{9}{7} + \ln\frac{11}{9} - \cdots \\
&= \ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{9}\cdots\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\ln\left\{\frac{\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma^2\left(\frac{4n+3}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma^2\left(\frac{4n+5}{4}\right)}(4n+3)\right\} \\
&= 2\ln\left\{\frac{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right\}
\end{aligned}
$$

最后用了 Gautschi's inequality. ◀

Exercise 6.96: 计算积分:

$$\int_0^1 \frac{5x^4(1+x^{10075})}{(1+x^5)^{2017}}\mathrm{d}x$$

Solution 因为

$$\mathrm{Beta}(x,y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t \quad (Re\ \ x>0, Re\ \ y>0)$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{5x^4(1+x^{10075})}{(1+x^5)^{2017}}\mathrm{d}x &\xlongequal{x^5=t} \int_0^1 \frac{1+t^{2015}}{(1+t)^{2017}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{x^{1-1}+t^{2016-1}}{(1+t)^{2017}}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{B}(1,2016) \\
&= \frac{0!2015!}{2016!} = \frac{1}{2016}
\end{aligned}
$$

Note: 用到的公式

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ (x>0, y>0)$$

◀

Exercise 6.97: 计算积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x\,\mathrm{d}x$$

Solution 因为

$$\mathrm{Beta}(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta \quad (Re\ \ x>0, Re\ \ y>0)$$

所以

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{6\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{5\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \approx 0.718884$$

Note: 用到的公式

$$\text{Beta}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ (x>0, y>0) \tag{6.9}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(4i-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot\dots\cdot(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\ \ (n=1,2,3,\cdots) \tag{6.10}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(4i-1)}{4^n}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdot\dots\cdot(4n-1)}{4^n}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\ \ (n=1,2,3,\cdots) \tag{6.11}$$

特殊值

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\right)! \tag{6.12}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.6256099082\cdots \tag{6.13}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \approx 1.2254167024\cdots \tag{6.14}$$

◀

Exercise 6.98: 求极限:

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Solution 由于

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}t\\ &\xlongequal{u=t\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\\ &\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{1-x}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.99: 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]}\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\int_0^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right) \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = e^{\frac{b^2}{4a}}\frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}
\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.100: 计算积分:

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x^2=t} \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{2\Gamma(3)} \\
&= \frac{3\pi}{16} \approx 0.58905
\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.101: 求定积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}e^{\beta i x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2+\beta i x}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\left[\left(x^2-\frac{\beta i}{\alpha}x+\left(\frac{\beta i}{2\alpha}\right)^2\right)-\left(\frac{\beta i}{2\alpha}\right)^2\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\,e^{-\frac{\beta i^2}{4\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{\beta i}{2\alpha}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{\beta i}{2\alpha}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{Re}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, \mathrm{d}t$$
$$= e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

◀

Exercise 6.102: 计算积分:

$$\int_0^1 \sin(\pi x) \log \Gamma(x) \mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\int_0^1 \sin(\pi x) \log \Gamma(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(1 + \log\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \sin(\pi x) \log \Gamma(x)\, \mathrm{d}x \xlongequal{t=1-x} -\int_1^0 \sin(t\pi) \log \Gamma(1-t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sin(t\pi) \log \Gamma(1-t)\, \mathrm{d}t \\
I &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \sin(\pi x) \log \Gamma(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^1 \sin(x\pi) \log \Gamma(1-x)\, \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\pi x) \log\left(\Gamma(x) + \Gamma(1-x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\pi x) \log\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.103: 计算

$$\int_0^\infty \sin\left(x^n\right) \mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sin\left(x^n\right) \mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int_0^\infty x^{\frac{1}{n}-1} \sin(x)\ \mathrm{d}x \quad (x^n \mapsto x) \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty u^{-\frac{1}{n}} e^{-xu}\, \mathrm{d}u\right) \sin(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{n}} \left(\int_0^\infty e^{-xu} \sin(x)\ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{n}}}{1+u^2} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{1}{n}}(\theta) d\theta \quad (u = \tan\theta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{n}}(\theta)\cos^{\frac{1}{n}}(\theta)d\theta\\
&=\frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\mathrm{B}\left(\frac{1-n}{2},\frac{1+n}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2n}\right)\\
&=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2n\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\\
&=\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 6.104: **计算积分:**

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x$$

Solution 令 $t=\ln(\tan x)$ 则: $\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{\tan x}+\tan x\right),\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}\right)\mathrm{d}x$ **原积分**

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\ln t}{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\ln t}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln t\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-2kt}\mathrm{d}t$$

所以有

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\ln(\tan x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(2k+1)t}\ln t\,\mathrm{d}t\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\
&=-\frac{\pi}{4}\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}=-\frac{\pi}{4}\gamma+\left[\frac{\pi}{4}\gamma+\frac{\pi}{4}\ln\frac{\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi}\right]
\end{aligned}
$$

再由公式

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{2}\pi$$

故

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\left[\frac{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right]$$

◀

Exercise 6.105:

Solution ◀

6.5.1 Euler-Poisson 积分

Exercise 6.106: 计算

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Solution

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t]{x^2=t} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

◀

Solution An alternative derivation is to show that

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}y = I,$$

where I is your integral:

$$I := \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

and then evaluate I^2 by reversing the order of integration. $If\,x > 0$, then

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}y = x\int_0^{\infty} e^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y = x\int_0^{\infty} e^{-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{x} = \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = I.$$

Thus

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\infty} xe^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{\infty} xe^{-x^2}e^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{\infty} xe^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\mathrm{d}y\frac{1}{2\,(1+y^2)}\left[-e^{-x^2(1+y^2)}\right]_{x=0}^{\infty} \\ &= \int_0^{\infty}\frac{1}{2\,(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\big[\arctan y\big]_{y=0}^{\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

So

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

◀

Solution Another proof, from G.M. Fichtengoltz, Calculus Course, page 612.

$$K = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

It easy to see (and prove) that, $\max\{(1+t)e^{-t}\} = 1$ at $t = 0$, hence for all $t \in \mathbb{R}$:

$$(1+t)e^{-t} < 1$$

Substitution of $t = \pm x^2$, leads us to:

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1 \quad \text{and} \quad (1+x^2)e^{-x^2} < 1$$

So,

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad (x > 0)$$

Now, at the left inequality we restrict our x to be in $(0, 1)$ (so that, $1 - x^2 > 0$), and in the right inequality let $x > 0$. Raising all the inequalities with natural number n, we get,

$$(1-x^2)^n \underset{x\in(0,1)}{<} e^{-nx^2} \quad \text{and} \quad e^{-nx^2} \underset{x>0}{<} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Integrating the first inequality from 0 to 1, and the second inequality from 0 to $+\infty$ we'll get:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x < \int_0^1 e^{-nx^2} \, \mathrm{d}x < \int_0^\infty e^{-nx^2} \, \mathrm{d}x < \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$$

But,

$$\int_0^\infty e^{-nx^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} K \quad (\text{substitution}\, u = \sqrt{n}x),$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(v) \, \mathrm{d}v = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (\text{substitution}\, x = \cos(v))$$

and, finally,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(v) \, \mathrm{d}v = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \, (\text{substitution}\, x = \mathrm{ctg}(v))$$

Hence, our unknown, K is bound:

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

or,

$$\frac{n}{2n+1} \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)} < K^2 < \frac{n}{2n-1} \frac{((2n-3)!!)^2(2n-1)}{((2n-2)!!)^2} (\frac{\pi}{2})^2$$

Now, the final step - Wallis Formula :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

Then, when n tends to ∞ in our last inequality, we get:

$$K^2 = \frac{\pi}{4}$$

and,

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{as}\, K > 0$$

◀

✎ **Solution** We perform a change of variables $u = t^{1/2}$ and $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}t^{-1/2}\,\mathrm{d}t$. The integral then becomes:

$$\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty 2e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Now let us consider the well-known integral:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

We can expand the right hand side into a double integral:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y(1+x^2)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y-yx^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Reversing the order of integration:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y-yx^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y-yx^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Now, we can perform a change of variables $x^2 = \frac{u^2}{y}$ and $2x\,\mathrm{d}x = \frac{2u}{y}\,\mathrm{d}u$ or $\mathrm{d}x = y^{-1/2}\,\mathrm{d}u$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y-yx^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty\int_0^\infty y^{-1/2}e^{-y-u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty y^{-1/2}e^{-y}\,\mathrm{d}y\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Because of what was established earlier:

$$\int_0^\infty y^{-1/2}e^{-y}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty 2e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\left(\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2$$

Thus,

$$\frac{\pi}{4} = \left(\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

◀

✎ **Solution** This is similar to user17762's answer, but uses Plancherel's Theorem instead of Poisson summation. Define the Fourier transform by

$$\mathcal{F}[f](y) = \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-ixy}\ \mathrm{d}x$$

Now,

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{1}{2}x^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{1}{2}x^2}e^{-ixy}\ \mathrm{d}x = \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{1}{2}(x+iy)^2}\ \mathrm{d}x$$

Now, consider the contour integral of $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ over the rectangular contour with corners at $\pm R$ and $\pm R+iy$. This integral must be 0, since $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ is analytic. Taking the limits as $R\to+\infty$, the contributions from the vertical edges go to 0, so we find that

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}\,\mathrm{d}x$$

Thus,

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{1}{2}x^2}](y)=\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$$

By Plancherel's Theorem,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

dividing through by $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, we find

$$1=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

so,

$$\sqrt{2\pi}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$$

Changing variables and observing that $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, we find that

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

◀

6.5.2 特殊函数

Definition 6.6 digamma 函数

ψ 函数的定义为对 Γ 的对数微商，即 $\psi(x)=\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\ln\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

Example 6.79: 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\Gamma(x)-\frac{1}{x}+\gamma\right)$$

Solution

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\Gamma(x)-\frac{1}{x}+\gamma\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)-1+\gamma x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)\psi(x+1)+\gamma}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)\psi^2(x+1)+\psi'(x+1)\Gamma(x+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}\right)\end{aligned}$$

◀

Example 6.80: 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(\Gamma(x)-2\Gamma(2x)\right)=\gamma$$

Solution

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\Gamma(x)-2\Gamma(2x)\right) &= \lim_{x\to 0}\Gamma\left(1-\frac{4^x\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{4^x\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)\\ &= \cdots = \gamma\end{aligned}$$

◀

Definition 6.7 不完全 Γ 函数

不完全 Γ 函数的定义为

$$\gamma(a,x)=\int_0^x e^{-t}t^{a-1}\,\mathrm{d}t\quad(\mathrm{Re}\ a>0)$$

不完全 Γ 函数的补余不完全 γ 函数定义为

$$\Gamma(a,x)=\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{a-1}\,\mathrm{d}t\quad(\mathrm{Re}\ a>0)$$

♡

Definition 6.8 β 函数

定义

$$\beta(x)=\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{x+1}{2}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$\beta(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\quad(\mathrm{Re}\,x>0)$$

♡

Definition 6.9 多重对数函数

$$\mathrm{Li}_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^n}=\int_0^x\frac{\mathrm{Li}_{n-1}(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,,\quad |x|\leqslant 1$$

Properties:

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\mathrm{Li}_n(x)=\frac{1}{x}\mathrm{Li}_{n-1}(x)$$

Definition 6.10 二重对数函数

$$\mathrm{Li}_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}=-\int_0^x\frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Li}_2(-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k^2}=-\int\frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Theorem 6.22

几个关于二重对数函数的等式

(1) $\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(-x)=\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(x^2)$

(2) $\mathrm{Li}_2(1-x)+\mathrm{Li}_2(1-x^{-1})=-\frac{1}{2}(\ln x)^2$

(3) $\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(1-x)=\frac{1}{6}\pi^2-(\ln x)\ln(1-x)$

(4) $\mathrm{Li}_2(-x)+\mathrm{Li}_2(1-x)+\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(1-x^2)=-\frac{1}{12}\pi^2-(\ln x)\ln(x+1)$

Exercise 6.107: 计算积分:

$$\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln(1-x)\ln x d\,\mathrm{Li}_2(x) \\
&= \int_0^1 \mathrm{Li}_2(x)\frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{Li}_2(x)\frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2^2(1) - \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2^2(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \\
&= -\frac{\pi^4}{72} + \frac{\pi^4}{120} = -\frac{\pi^4}{180}
\end{aligned}$$

◀

Exercise 6.108: 计算积分:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$$

✎ Solution(tian_275461)

$$I = \int_0^{\pi} xd\arctan(\sin x) = -\int_0^{\pi}\arctan(\sin x)dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(\sin x)dx$$

注意到

$$\arctan\left(\frac{\sin x}{+\infty}\right) - \arctan\left(\frac{\sin x}{1}\right) = -\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{y^2+\sin^2 x}dy$$

故

$$\begin{aligned}
I &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{y^2+\sin^2 x}dydx \\
&= -2\int_1^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{y^2+\sin^2 x}dxdy \\
&= -2\int_1^{+\infty}\int_0^1\frac{1}{y^2+1-t^2}dtdy \qquad (t=\cos x) \\
&= -\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\ln\left(\frac{\sqrt{y^2+1}+1}{\sqrt{y^2+1}-1}\right)dy \\
&= -\int_{\mathrm{arcsinh}1}^{+\infty}\ln\left(\frac{\cosh z+1}{\cosh z-1}\right)dz \qquad (y=\sinh z) \\
&= 2\int_{\mathrm{arcsinh}1}^{+\infty}\ln\left(\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\right)dz \\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{\ln(1-t)-\ln(1+t)}{t}dt \qquad (t=e^{-z}) \\
&= 2\mathrm{Li}_2(1-\sqrt{2}) - 2\mathrm{Li}_2(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

套用多重对数函数的性质 (6.15)(6.16)(6.17)

$$\mathrm{Li}_2(1-x)+\mathrm{Li}_2\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}\ln^2 x \tag{6.15}$$

$$\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(1-x)=\frac{1}{6}\pi^2-\ln x\cdot\ln(1-x) \tag{6.16}$$

$$\mathrm{Li}_2(-x)-\mathrm{Li}_2(1-x)+\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(1-x^2)=-\frac{1}{12}\pi^2-\ln x\cdot\ln(x+1) \tag{6.17}$$

故

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\ln^2(\sqrt{2}+1)-\frac{\pi^2}{4}$$

◀

Exercise 6.109: 求

$$\int_0^{\pi}\frac{x^2}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Solution 令 $t=x-\frac{\pi}{2}$，我们有

$$\begin{aligned}
J&=\int_0^{\pi}\frac{x^2}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^2}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^2}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t+\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^2}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t+\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 t+2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^2}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t+\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2 t+2}d\left(\tan t\right)\\
&=\frac{\sqrt{2}}{24}\pi^3+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{Li}_2\left(3-2\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^3\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{Li}_2\left(3-2\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi^3.
\end{aligned}$$

◀

Example 6.81: 计算积分:

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Solution 令

$$f(t)=\int_0^1\frac{\ln(1+tx^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
f'(t)&=\int_0^1\frac{x^2}{(1+x)(1+tx^2)}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{t+1}\int_0^1\frac{x-1}{1+tx^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{t+1}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{t+1}\left[\frac{1}{2t}\ln(1+tx^2) - \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan(\sqrt{t}x) + \ln(x+1)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{t+1}\left[\frac{1}{2t}\ln(1+t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\sqrt{t} + \ln 2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow f(t) = \frac{1}{2}\left[-\operatorname{Li}_2(-t) - \frac{1}{2}\ln^2(t+1)\right] - \arctan^2\sqrt{t} + \ln 2\ln(t+1)
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= f(1) \\
&= \frac{1}{2}\left[-\operatorname{Li}_2(-1) - \frac{1}{2}\ln^2 2\right] - \frac{\pi^2}{16} + \ln^2 2 \\
&= \frac{3}{4}\ln^2 2 - \frac{\pi^2}{48}
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 6.110: 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$$

Solution 由方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，为了简单起见，我们记

$r_1=\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1-\varphi,$

且 $r_1-r_2=\sqrt{5}, \varphi^2=\varphi+1, \dfrac{\varphi-1}{\varphi}=\dfrac{1}{\varphi^2}$ 则有

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{r_1-r_2}\int_0^1 \ln x\left(\frac{1}{x-\varphi}-\frac{1}{x-(1-\varphi)}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^1 \ln x\left(\frac{1}{x-\varphi}-\frac{\varphi}{\varphi x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^1\frac{\ln x}{x-\varphi}\,\mathrm{d}x-\frac{\varphi}{\sqrt{5}}\int_0^1\frac{\ln y}{\varphi y+1}\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln \varphi u}{u-1}\,\mathrm{d}u-\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{\varphi}\frac{\ln\frac{u}{\varphi}}{u+1}\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{\ln\varphi}{\sqrt{5}}\left(\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{1}{u-1}\,\mathrm{d}u+\int_0^{\varphi}\frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int_0^{\varphi}\frac{\ln u}{1+u}\,\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right)\\
&=\frac{\ln\varphi}{\sqrt{5}}\ln\frac{\varphi^2-1}{\varphi}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int_0^{\varphi}\frac{\ln u}{1+u}\,\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right)\\
&=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int_0^{\varphi}\frac{\ln u}{1+u}\,\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int_1^{1+\varphi}\frac{\ln(u-1)}{u}\,\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right)\\
&=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int_1^{\varphi^2}\frac{\ln(u-1)}{u}\,\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right)\\
&=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int_{\frac{1}{\varphi^2}}^{1}\frac{\ln(1-u)-\ln u}{u}\,\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right)\\
&=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln u-\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right)\\
&=-\frac{2}{\sqrt{5}}\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u+\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln(1-u)}{1-u}\,\mathrm{d}u\\
&=-\frac{2}{\sqrt{5}}\int_0^{\frac{1}{\varphi}}\frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u-\frac{2}{\sqrt{5}}\ln^2\varphi=-\frac{2}{\sqrt{5}}\int_{\frac{1}{\varphi^2}}^{1}\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u-\frac{2}{\sqrt{5}}\ln^2\varphi\\
&=-\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\int_0^1\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{1}{\varphi^2}}\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u\right)-\frac{2}{\sqrt{5}}\ln^2\varphi\\
&=\frac{\pi^2}{3\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)-\frac{2}{\sqrt{5}}\ln^2\varphi\\
&=\frac{\pi^2}{3\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi^2}{15}-\ln^2\varphi\right)-\frac{2}{\sqrt{5}}\ln^2\varphi=\frac{\pi^2}{5\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

最后一步用了 dilogarithm 函数的性质，详细可以参见 http://mathworld.wolfram.com/Dilogarithm.html ◀

Definition 6.11 黎曼 (Riemann) ζ 函数

Euler 公式 $\zeta(2k)=\beta_{2k}\pi^{2k}=\frac{(-1)^{k+1}2^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}\pi^{2k}\quad(k\in\mathbb{N}_+)$

Properties: 当 n 是偶数时 $(n\geq 2)$, $\zeta(n)=\frac{2^{n-1}|B_n|\pi^n}{n!}$, B_n 为伯努利数

Note:

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{(k+1)^m}=m\zeta(m+1)-\sum_{k=1}^{m-2}\zeta(m-k)\zeta(k+1)$$

Exercise 6.111: 求极限 $\lim_{s\to 0^+}\zeta(s)$

Solution

$$\begin{aligned}
\zeta(0)&=\lim_{s\to 0^+}\zeta(s)\\
&=\lim_{s\to 0^+}2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\\
&=\lim_{s\to 0^+}2^s\pi^{s-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{2n+1}\right)\Gamma(1-s)\left(\frac{1}{(1-s)-1}+1-(1-s)\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{(1-s)+1}}\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\lim_{s\to 0^+}2^s\pi^{s-1}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{2n}\right)\Gamma(1-s)\left(\frac{1}{-s}+1-(1-s)\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{2-s}}\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\lim_{s\to 0^+}2^s\pi^{s-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{2n}\right)\Gamma(1-s)s\left(\frac{-1}{s}+1-(1-s)\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{2-s}}\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\lim_{s\to 0^+}2^{s-1}\pi^{s}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{2n}\right)\Gamma(1-s)\left(-1+s-s(1-s)\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{2-s}}\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\left(\lim_{s\to 0^+}2^{s-1}\pi^{s}\Gamma(1-s)\left(-1+s-s(1-s)\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{2-s}}\,\mathrm{d}x\right)\right)\left(\lim_{s\to 0^+}1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{2n}\right)\\
&=\left(2^{0-1}\pi^{0}\Gamma(1-0)\left(-1+0-0(1-0)\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{2-0}}\,\mathrm{d}x\right)\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)^{2n}\right)\\
&=\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\Gamma(1)\cdot(-1+0-0)\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}0\right)\\
&=\frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Exercise 6.112: 设 (对于 $a>0$ 并且 $s>1$) $\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^s}$

试证

$$\lim_{s\to 1^+}\left[\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}\right]=-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

✎ Solution 注意到

$$\zeta(s,a)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

因此

$$\begin{aligned}\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}&=\frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x-\Gamma(s-1)\right\}\\&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}x^{s-1}\left[\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-x}}{x}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

特别的，当 $a=1$ 时就得到

$$\lim_{s\to1^+}\left[\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right]=\gamma$$

◀

Exercise 6.113: 求极限

$$\lim_{s\to1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma$$

✎ Solution For $s>1$, write

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^s}\right).$$

Assuming this, we have

$$\lim_{s\to1^+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right).$$

The sum of the first N terms of the above is

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\int_1^{N+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N+1).$$

So

$$\lim_{s\to1^+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N+1)\right)=\gamma$$

◀

Exercise 6.114: 求极限

$$\lim_{x\to1}\left(\zeta(x)-\frac{1}{x^x-1}\right)$$

✎ Solution Built around $x=1$, we have

$$\zeta(x)=\frac{1}{x-1}+\gamma-\gamma_1(x-1)+O\left((x-1)^2\right)$$

where appears the Stieltjes constant. On the other hand, starting from

$$x^x=1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+O\left((x-1)^4\right)$$

$$\frac{1}{x^x-1}=\frac{1}{x-1}-1+\frac{x-1}{2}+O\left((x-1)^2\right)$$

So,

$$\zeta(x)-\frac{1}{x^x-1}=(1+\gamma)-\left(\gamma_1+\frac{1}{2}\right)(x-1)+O\left((x-1)^2\right)$$

and then the result.

Edit

Making the problem more general, it is quite simple to show that

$$\zeta(x)-\frac{1}{x^{x^n}-1}=(n+\gamma)-\left(\gamma_1+\frac{n^2}{2}\right)(x-1)+O\left((x-1)^2\right)$$

◀

Definition 6.12

定义: 超几何方程

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[c-(1+a+b)x\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-aby=0$$

的解为超几何函数

$$F(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}\quad\left(\left|x\right|<1,c\neq 0,-1,-2,\cdots\right)$$

通常用符号

$${}_2F_1(a,b;c;x)\equiv F(a,b;c;x)$$

注:

$$(s)_n=s(s+1)\cdots(s+n-1)=\frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)}\quad(n\geq 1)$$

$$(s)_0=1,\ (s)_1=s$$

Theorem 6.23

有关公式

$$F(a,b;c;x)=F(b,a;c;x)$$

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\quad(c-a-b>0)$$

Definition 6.13 广义超几何函数

定义

$$ {}_pF_q(a_1,a_2,\cdots,a_p;c_1,c_2,\cdots,c_q;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n}{(c_1)_n(c_2)_n\cdots(c_q)_n}\frac{x^n}{n!} $$

这里，p 和 q 都是正整数，而且 $c_k(k=1,2,\cdots,q)$ 不为 0 或负整数

Definition 6.14 贝塞尔函数

$$ I_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{z\cos\theta}\cos(n\theta)\,d\theta $$

Exercise 6.115: 计算积分:

$$ \int_0^1\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x $$

Solution 因为

$$ I_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{z\cos\theta}\cos(n\theta)\,d\theta $$

$$ \begin{aligned}\int_0^1\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x&\xlongequal{令x=\cos t}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-\cos^2t}\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{令u=\frac{\pi}{2}-t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\sin^2u}\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{1-\cos 2u}{2}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{e}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{1}{2}\cos 2u}\,\mathrm{d}u\\&\xlongequal{令\theta=2u}\frac{1}{2\sqrt{e}}\int_0^{\pi}e^{\frac{1}{2}\cos\theta}\,d\theta\\&=\frac{\pi I_0\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{e}}\end{aligned} $$

◀

Exercise 6.116: 证明:

$$ \int_0^{2\pi}e^{\sin x}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}e^{\sin x}\cos^2x\,\mathrm{d}x=2\pi I_1(1) $$

Solution

$$ \begin{aligned}\int_0^{2\pi}e^{\sin x}\sin x\,\mathrm{d}x&=\int_0^{2\pi}e^{\sin x}\,\mathrm{d}(-\cos x)\\&=\Big[-e^{\sin x}\cos x\Big]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}e^{\sin x}\cos^2x\,\mathrm{d}x\end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \int_0^{2\pi} e^{\sin x} \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\sin x} \cos^2 x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

又因为

$$
I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z\cos\theta} \cos(n\theta)\, d\theta
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{\sin x} \sin x \,\mathrm{d}x &= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin x \,\mathrm{d}x}_{u=\frac{\pi}{2}+x} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\sin x} \sin x \,\mathrm{d}x}_{t=x-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{\sin x} \sin x \,\mathrm{d}x}_{t=x-\frac{\pi}{2}} \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\cos u} \cos u \,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi} e^{\cos t} \cos t \,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\cos t} \cos t \,\mathrm{d}t}_{v=t-\pi} \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\cos t} \cos t \,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} e^{\cos t} \cos t \,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\cos v} \cos v \,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{\pi} e^{\cos t} \cos t \,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^{\pi} e^{-\cos t} \cos t \,\mathrm{d}t}_{x=\pi-t} \\
&= \int_0^{\pi} e^{\cos t} \cos t \,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{0} e^{\cos x} \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\pi} e^{\cos t} \cos t \,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi I_1(1) \approx 3.551
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 6.117: 证明:

$$
\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos x \,\mathrm{d}x > 0
$$

Solution

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos x \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} e^{\cos x} \cos x \,\mathrm{d}x + \overbrace{\int_{\pi}^{2\pi} e^{\cos x} \cos x \,\mathrm{d}x}^{t=2\pi-x} \\
&= \int_0^{\pi} e^{\cos x} \cos x \,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{0} e^{\cos t} \cos t \,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\pi} e^{\cos x} \cos x \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} e^{\cos x} \,\mathrm{d}(\sin x) \\
&= 2\sin x e^{\cos x}\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x \,\mathrm{d}x \\
&> 0
\end{aligned}
$$

又因为

$$
I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z\cos\theta} \cos(n\theta)\, \mathrm{d}\theta
$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x + \overbrace{\int_{\pi}^{2\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x}^{t=2\pi-x} \\ &= \int_0^{\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{0} e^{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi I_1(1) \approx 3.551\end{aligned}$$

◀

Example 6.82: 计算积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$$

Solution 我们知道卡特兰常数 G 有一个定义

$$\mathrm{G} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x \qquad \text{(a)}$$

令 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=2t} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}&= 2[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\ln 2] \\ &= 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x) + \frac{\pi}{2}\ln 2 = -\frac{\pi}{2}\ln 2\end{aligned}$$

得到 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2 \quad \text{(b)}$

结合 a, b 得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\ln 2 + G\right) \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2 + G\right)\end{aligned}$$

◀

Example 6.83: 计算积分: $\int_0^1 \ln(1-x)\ln x\ln(1+x)\mathrm{d}x$

Solution

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \ln(1-x)\ln x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \ln(1-x)\ln(1+x)d(x\ln x - x + 1) \\ &= \int_0^1 (x\ln x - x + 1)\left[\frac{\ln(1+x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{1+x}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&2\int_0^1 (x\ln x - x + 1)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(H_{2n+1}-H_n)x^{2n+1}\right]\mathrm{d}x \qquad (H_0=0)\\
=&2\sum_{n=0}^{\infty}(H_{2n+1}-H_n)\int_0^1 (x\ln x - x+1)x^{2n+1}\,\mathrm{d}x\\
=&2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{2n+1}-H_n}{(2n+3)(2n+2)}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{2n+1}-H_n}{(2n+3)^2}\\
=&\frac{\pi^2}{6}-\ln^2 2-2+2\ln 2-2\left[\frac{7\zeta(3)}{16}+2-\ln 2-\frac{\pi^2}{8}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^2}\right]\\
=&\frac{5\pi^2}{12}-\ln^2 2-6+4\ln 2+\frac{21\zeta(3)}{8}-\frac{\pi^2\ln 2}{2}
\end{aligned}
$$

◀

Example 6.84: 求定积分

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Solution(by Renascence_5)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1 \frac{\ln^2(1-y^2)}{1+\mathrm{i}y}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln^2(1+e^{\mathrm{i}2\theta})}{1+e^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\
=&\underbrace{\int_0^1\frac{y\ln^2(1-y^2)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y}_{I_1}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\ln^2(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta}_{I_2}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\ln(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta}_{I_3}-\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta}_{I_4}
\end{aligned}
$$

Evaluation of I_1:

$$
\begin{aligned}
I_1&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(1-y)}{1+y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\ln^2 y}{1-y/2}\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_0^1 y^2\ln^2 y\,\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^3}\\
&=\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{\pi^2}{12}\ln 2+\frac{1}{6}\ln^3 2
\end{aligned}
$$

Evaluation of I_2:

$$
\begin{aligned}
I_2&=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\ln^2\left(2\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}\ln^2\left(2\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2 x}{1+x}\,\mathrm{d}x+\ln 2\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\ln^2 2\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\ln^2 x\,\mathrm{d}x+\ln 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\ln^3 2
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3} - \ln 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} + \frac{1}{2} \ln^3 2$$
$$= \frac{3}{4}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{12} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln^3 2$$

Evaluation of I_3:

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos(2n\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \\ &= -\frac{7}{16}\zeta(3) \end{aligned}$$

Evaluation of I_4:

$$\begin{aligned} I_4 &= \left[\theta^2 \ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{\pi^2}{8} \ln 2 + 2\ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\, \mathrm{d}\theta - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos(n\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi^2}{8} \ln 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(n\pi/2)}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(n\pi/2)}{n^2} \\ &= \frac{21}{16}\zeta(3) - \pi \mathrm{G} + \frac{\pi^2}{8} \ln 2 \end{aligned}$$

Result:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x^2)}{1+x}\, \mathrm{d}x &= \left(\frac{7}{8} + \frac{3}{4} - \frac{7}{16} + \frac{21}{16}\right)\zeta(3) - \pi\mathrm{G} + \left(-\frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{8}\right)\ln 2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)\ln^3 2 \\ &= \frac{5}{2}\zeta(3) - \pi\mathrm{G} - \frac{\pi^2}{24} \ln 2 + \frac{2}{3} \ln^3 2 \end{aligned}$$

◀

第 7 章 定积分的应用

7.1 平面图形的面积

7.1.1 直角坐标类型

Theorem 7.1

若 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b\},\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 连续, 则 D 的面积为

$$S_D=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,\mathrm{d}x$$

Theorem 7.2

若 $D=\{(x,y)|\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),c\leqslant y\leqslant d\},\psi_1(y),\psi_2(y)$ 连续, 则 D 的面积为

$$S_D=\int_c^d[\psi_2(y)-\psi_1(y)]\,\mathrm{d}y$$

Theorem 7.3

曲线 l 绕直线 $ax+by+c=0$ 旋转而成的旋转曲面面积为

$$S=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_L|ax+by+c|\,\mathrm{d}s$$

Example 7.1: 曲线 $L_1: y=\dfrac{1}{3}x^3+2x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2: y=\dfrac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积 ________

Solution 在曲线 L_1 上取点 $P(x,y)$, 该点到旋转轴 L_2 的距离为

$$d=\frac{1}{5}(x^3+2x)$$

弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

旋转曲面的面积微元

$$\mathrm{d}A = 2\pi d\,\mathrm{d}s = \frac{2}{5}\pi\sqrt{1+(x^2+2)^2}(x^3+2x)\,\mathrm{d}x$$

旋转曲面的面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \mathrm{d}A = \frac{2}{5}\pi\int_0^1 \sqrt{1+(x^2+2)^2}(x^3+2x)\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{x^2+2=t} \frac{\pi}{5}\int_2^3 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{15}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^3 = \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi \end{aligned}$$

◀

Example 7.2: 计算由方程 $x^2+\left(y-\sqrt[3]{x^2}\right)^2=1$ 围成的面积

Solution 令 $y-\sqrt[3]{x^2}=\sin t$, 那么 $x=\cos t$, 即 $y=\sin t+(\cos t)^{\frac{3}{2}}$

计算 t 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的定积分即为面积的一半

$$S_1 = \int_{D_1} y\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + (\cos t)^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}\cos t = \frac{\pi}{2}$$

所以整个图形的面积为 π ◀

7.1.2 极坐标类型

Theorem 7.4

设平面图形由曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 所围成, 求其面积 S。

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left[\rho(\theta)\right]^2\mathrm{d}\theta$$

♣

7.2 体积

Theorem 7.5 切片法

设立体 Ω 介于平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间, $\forall x\in(a,b)$, 过点 x 且与 x 轴垂直的平面截立体 Ω 的截面面积为连续函数 $A(x)$, 则立体的体积为

$$V_\Omega = \int_a^b \mathrm{d}V_\Omega = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

♣

Theorem 7.6 柱壳法

将由 x 轴, 直线 $x=a, x=b\ (a<b)$, 及连续曲线 $y=f(x)\,(f(x)\geqslant 0)$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体的体积

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$$

Example 7.3: 求 $y=\sin x$ 与 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴所得的旋转体的体积

Solution

$$V_x=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$$

$$V_y=2\pi\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x=2\pi^2$$

$$V_y=\pi\int_0^1\left((\pi-\arcsin y)^2-\arcsin^2 y\right)\mathrm{d}y=2\pi^2$$

◀

Theorem 7.7 [13]

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数其绕直线 $l:\ y=kx+b,(k\neq 0)$ 旋转所成的立体的体积为

$$V_l=\frac{\pi}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b\left[f(x)-kx-b\right]^2\left|1+kf'(x)\right|\mathrm{d}x$$

Proof: 记曲线 $f(x)$ 上的点 $(x,f(x))$ 为 P, 它到直线 $y=kx+b$ 上的距离为 $\overline{PQ}=h, Q\in l$, 则

$$h=\frac{|kx+b-f(x)|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

此外, 记点 P 处曲线小段弧微分为 $\mathrm{d}s$, 相应地在 $y=kx+b$ 上点 Q 处记为 $\mathrm{d}\xi$, Ox 轴上点 $(x,0)$ 处的小段弧微分记为 $\mathrm{d}x$. 又记 l 与 Ox 轴的夹角为 α, 点 P 处曲线 $f(x)$ 的切线与 Ox 轴之交角为 β, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\xi&=\mathrm{d}s\cdot\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cdot\cos\alpha(1+\tan\alpha\cdot\tan\beta)\,\mathrm{d}s\\
&=\frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x\\
&=\frac{1+kf'(x)}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+f'(x)^2}}\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1+kf'(x)}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

从而我们有 (ξ_1, ξ_2 是相应于 Ox 轴上 a, b 的 l 上的位置)

$$V_l = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \pi h^2 \,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b \left[f(x) - kx - b\right]^2 \left|1 + kf'(x)\right| \mathrm{d}x$$

□

Example 7.4: 求曲线 $C: y = x^2$ 与直线 $L: y = x$ 所围成图形绕直线 L 旋转所成旋转体的体积.

Solution 在曲线上取点 $P(x, y)$, 该点到旋转轴的距离为 $d = \dfrac{|x^2 - x|}{\sqrt{2}}$
过该点垂直于旋转轴的截面面积为 πd^2, 沿旋转轴个截面的一个厚度 $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}l$ 在 x 轴上的投影为 $\mathrm{d}x$, 则 $\mathrm{d}l = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$, 于是体积微元为

$$\mathrm{d}V = \pi d^2 \,\mathrm{d}l = \frac{\sqrt{2}\pi(x^2 - x)^2}{2} \mathrm{d}x$$

于是

$$V = \int_0^1 \mathrm{d}V = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}\pi(x^2 - x)^2}{2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{30\sqrt{2}}$$

◀

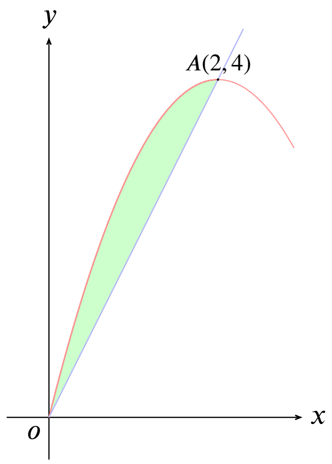
Example 7.5: 求由 $y = 2x$ 与 $y = 4x - x^4$ 所围区域绕 $y = 2x$ 旋转所得旋转体体积.

Solution 曲线与直线的交点坐标为 $A(2, 4)$, 曲线上任一点 $P(x, 4x - x^2)$ 到直线 $y = 2x$ 的距离为

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{5}}|x^2 - 2x|$$

以 $y = 2x$ 为数轴 u (如图), 则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \pi\rho^2 \,\mathrm{d}u \qquad \mathrm{d}u = \sqrt{5}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \frac{1}{5}(x^2 - 2x)^2 \cdot \sqrt{5}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$



故所求旋转体体积为

$$V = \pi \int_0^2 \frac{1}{5}(x^2 - 2x)^2 \sqrt{5}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{75}\sqrt{5}\pi$$

◀

Example 7.6: 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$y \geqslant 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$. 试确定 a, b ,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

Solution 因抛物线过原点，故 $c = 1$ 由题设有

$$\int_0^1 (ax^2 + bx)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \Longrightarrow b = \frac{2}{3}(1 - a)$$

而

$$V = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2\right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}(1-a)^2 \right]$$

令

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} = \pi \left[\frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1-a) = 0 \right],$$

得 $a = -\frac{5}{4}$, 代入 b 的表达式得 $b = \frac{3}{2}$. 所以 $y \geqslant 0$
又因

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}^2a}\right|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \right] = \frac{4}{135}\pi > 0$$

及实际情况，当 $a = -\frac{5}{4}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 1$ 时，体积最小 ◀

Exercise 7.1: 底面由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 围成，且垂直与 x 轴的所有截面都是正方形的立体体积为 (　)

Solution(法 1) $x > 0$ 时, 对于任一 x 的取值
正方形边长 $= 2\sqrt{4-x^2}$, 正方形面积 $= \left(2\sqrt{4-x^2}\right)^2$
所求体积

$$V = 2\int_0^2 \left(2\sqrt{4-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = 42\frac{2}{3}$$

(法 2) 所求体积

$$V = 2\int_0^2 \left(2\sqrt{4-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = 42\frac{2}{3}$$

◀

7.3 平面曲线的弧长

Example 7.7: 求摆线的一拱

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的弧长, 其中 $a > 0$.

Proof:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(1-\cos t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\sin t,$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

于是

$$s = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 4a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a.$$

□

Example 7.8: 求抛物线 $y = \frac{x^2}{2}$ 对应于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 一段的弧长.

Proof:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

于是

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

□

Example 7.9:

Solution

◀

第 8 章 微分方程

8.1 微分方程的基本概念

8.2 可分离变量的微分方程

Exercise 8.1: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 对任何 x, y 恒有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

又 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=1$, 求 $f(x)$ 的表达式

Solution 首先在等式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

令 $x=y=0$ 得到 $f(0)=0$.
对固定的 x 以及任意的 $y \neq 0$ 都有

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x$$

即

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)-f(0)}{y-0}+2x$$

令 $y \rightarrow 0$, 由 $f'(0)=1$ 则得到 $f'(x)=2x+1$ 解这个微分方程并注意到 $f'(0)=1$
就有 $f(x)=x^2+x$ ◀

Exercise 8.2: 在某池塘内养鱼，由于条件限制最多只能养 1000 条．在时刻 t 的鱼数 y 是时间 t 的函数 $y=y(t)$，其变化率与鱼数 y 和 $1\,000-y$ 的乘积成正比．现已知池塘内放养鱼 100 条，3 个月后池塘内有鱼 250 条，求 t 月后池塘内鱼数 $y(t)$ 的公式．问 6 个月后池塘中有鱼多少?

Solution: 由已知

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\lambda y(1\,000-y)\\ y(0)=100\\ y(3)=250\end{cases},$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(1\,000-y)}=\lambda \mathrm{d}t,$$

两边积分

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1\ 000-y)} = \lambda \int \mathrm{d}t,$$

得

$$\frac{y}{1\ 000-y} = C\mathrm{e}^{1\ 000\lambda t},$$

将 $y(0)=100$，$y(3)=250$ 代入得

$$\begin{cases} \dfrac{100}{1\ 000-100} = C \\ \dfrac{250}{1\ 000-250} = C\mathrm{e}^{3\ 000\lambda} \end{cases},$$

解得 $C=\frac{1}{9}$，$\lambda=\frac{\ln 3}{3\ 000}$，即 t 个月后鱼与时间 t 的关系为

$$\frac{y}{1\ 000-y} = \frac{1}{9}\times 3^{\frac{t}{3}},$$

即

$$y = \frac{1\ 000\times 3^{\frac{t}{3}}}{9+3^{\frac{t}{3}}}.$$

当放养 6 个月后，鱼塘中鱼的数量为

$$y = \frac{1\ 000\times 3^2}{9+3^2} = 500(\text{条}).$$

□

Exercise 8.3: 设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x,y)$，$f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(0,\ y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n = e^{\cot y}$$

则 $f(x,y)=$ ________

Solution 利用偏导数的定义

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(0,\ y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f\left(0,\ y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{f(0,y)}\right)^n$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(0,\ y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{\frac{1}{n}f(0,y)}} = \mathrm{e}^{\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}}$$

所给等式化为

$$\mathrm{e}^{\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}} = \mathrm{e}^{\cot y}, \text{ 即 } \frac{f_y(0,y)}{f(0,y)} = \cot y$$

对 y 积分得

$$\ln f(0,y) = \ln\sin y + \ln C, \text{ 即 } f(0,y) = C\sin y$$

又已知 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x,\tilde{\ }y)$, 解得

$$f(x,y) = \varphi\tilde{\ }\mathrm{e}^{-x}\ (\varphi(y)\text{ 为待定函数})$$

由 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$, 得 $\varphi(y)=\sin y$, 故 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y$ ◀

8.3 齐次方程

8.4 一阶线性微分方程

Definition 8.1 伯努利 (Bernoulli) 方程

伯努利 (Bernoulli) 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

两边同除以 y^n, 并令 $z=y^{1-n}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

Example 8.1: **求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解**

Solution 两端同除以 y^2, 得

$$y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}(y^{-1})}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x$$

令 $z=y^{-1}$, 则上述方程变为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-a\ln x$$

由常数变易法可得

$$z=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right].$$

以 y^{-1} 代 z, 得所求方程的通解

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1.$$

Example 8.2: **求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+1}{2xy}\cos^2(xy^2)-\frac{y}{2x}$ 的通解**

Solution 法 1 两边同乘 $2xy$ 得

$$2xyy'=(2x+1)\cos^2(xy^2)-y^2$$

移项

$$2xyy'+y^2=(2x+1)\cos^2(xy^2)$$

注意到

$$(xy^2)' = 2xyy' + y^2$$

故

$$(xy^2)' \sec^2(xy^2) = 2x + 1$$

即

$$\left[\tan(x^2y)\right]' = 2x + 1$$

上式两边对 x 积分可得

$$\tan(x^2y) = x^2 + x + C$$

◀

Solution 法 2 令 $xy^2 = u$, 则 $2xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ◀

Note:

$$\text{分离变量} = \begin{cases} 1 & \text{能分} \longrightarrow \text{分} \\ 2 & \text{不能分} \longrightarrow \text{代} \end{cases}$$

Example 8.3: 求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x + \tan(x+y) = 0$ 的通解

Solution

$$x + y = u \Longrightarrow 1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入原方程

$$x\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 1\right) + x + \tan u = 0$$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u} = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

两边同时积分

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\tan u} = -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

积分可得

$$\ln\sin u = -\ln x + C \Longrightarrow x\sin u = C$$

将 $x + y = u$ 代入得原方程解为

$$x\sin(x+y) = C \Longleftrightarrow y = \arcsin\frac{C}{x} - x$$

◀

Example 8.4: 求微分方程 $(x - e^y)y' = 1$ 的通解

Solution

$$(x - e^y)y' = 1 \Longrightarrow \frac{1}{x - e^y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x - e^y$$

故

$$x = e^{\int \mathrm{d}y}\left[-\int e^y \cdot e^{-\int \mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C\right] = e^y(c-y)$$

◀

Example 8.5: 求微分方程的通解

$$y^2(x-3y)\,\mathrm{d}x + (1-3xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

Solution 由题易得

$$y^2(3y-x) + (3xy^2-1)y' = 0$$

两边同除以 y^2

$$3y - x + 3xy' - \frac{y'}{y^2} = 0$$

移项

$$3(xy'+y) = x + \frac{y'}{y^2}$$

两边同时积分

$$3xy + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{y}$$

◀

Example 8.6: 求微分方程

$$x\ln x\sin y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \cos y(1 - x\cos y) = 0$$

Solution(by 西西)

$$x\ln x\tan y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\cos y - 1$$

即

$$x\ln x\tan y \cdot \sec x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - \sec y$$

即

$$x\ln x\frac{\mathrm{d}(\sec y)}{\mathrm{d}x} + \sec y = x$$

设 $\sec y = u$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{u}{x\ln x} = \frac{1}{\ln x}$$

代入公式得

$$u = \sec y = \frac{x+C}{\ln x}$$

◀

Example 8.7: 求微分方程的全部解

$$y' = \frac{1}{1 - y^3 + 2xy^2 - x^2y}.$$

Solution 首先有

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}=1-y^3+2xy^2-x^2y=-y\left(x-y\right)^2+1.$$

令 $z\left(y\right)=x\left(y\right)-y$, 我们得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dz}{dy}+1=-yz^2+1,\quad \frac{dz}{dy}=-yz^2,$$

从而

$$\frac{dz}{z^2}=-ydy\Rightarrow\frac{-1}{z}=-\frac{1}{2}y^2+C\Rightarrow\frac{-1}{x-y}=-\frac{1}{2}y^2+C,$$

即

$$x=y+\frac{2}{y^2-2C}.$$

显然 $y=x$ 也满足题意. ◀

8.5 恰当方程与积分因子

8.5.1 恰当方程

Definition 8.2 恰当方程

假设 $M(x,y),N(x,y)$ 在某矩形内是 x,y 的连续函数, 且具有连续的一阶偏导数, 有

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{8.1}$$

如果方程 (8.1) 的左端恰好是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y\equiv\mathrm{d}u(x,y)\equiv\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$$

称 (8.1) 为恰当方程.

容易验证 (8.1) 的通解为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=C$$

这里 C 为任意常数

Theorem 8.1

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 是 (8.1) 为恰当方程的充分必要条件

Note: 一些简单二元函数的全微分, 如

$$
\begin{aligned}
y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y &= \mathrm{d}(xy) \\
\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2} &= \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) \\
\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2} &= \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) \\
\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{xy} &= \mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right) \\
\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right) \\
\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2-y^2} &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)
\end{aligned}
$$

Exercise 8.4: 求微分方程: $(3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解

Solution 这里 $M(x,y) = 3x^2+6xy^2, N(x,y) = 6x^2y+4y^3$, 这时

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$$

因此方程是恰当方程

现在求 $u(x,y)$ 使它同时满足如下两个方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2+6xy^2 \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y+4y^3 \tag{8.3}$$

由 (8.2) 对 x 积分, 得到

$$u = x^3+3x^2y^2+\varphi(y) \tag{8.4}$$

为了确定 $\varphi(y)$, 将 (8.4) 对 y 求导数, 并使它满足 (8.5.1), 即得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y} = 6x^2y+4y^3$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y} = 4y^3$$

积分后可得

$$\varphi(y) = y^4$$

将 $\varphi(y)$ 代入 (8.4) 得到

$$u(x,y) = x^3+3x^2y^2+y^4$$

因此, 方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4 = C$$

这里 C 为任意常数 ◀

✎ Solution2 这里 $P(x,y)=3x^2+6xy^2, Q(x,y)=6x^2y+4y^3$, 这时

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=12xy$$

因此方程是恰当方程

并由题得

$$3x^2\mathrm{d}x+4y^3\mathrm{d}y+6xy^2\mathrm{d}x+6x^2y\mathrm{d}y=0$$

即

$$\mathrm{d}x^3+\mathrm{d}y^4+3y^2\mathrm{d}x^2+3x^2\mathrm{d}y^2=0$$

或者写成

$$\mathrm{d}(x^3+y^4+3x^2y^2)=0$$

于是, 方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C$$

这里 C 为任意常数 ◀

✎ Solution3 这里 $M(x,y)=3x^2+6xy^2, N(x,y)=6x^2y+4y^3$, 这时

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy$$

因此方程是全微分方程

取 $x_0=0, y_0=0$, 有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y\\&=\underbrace{\int_0^x(3x^2)\,\mathrm{d}x}_{(0,0)\to(x,0)}+\underbrace{\int_0^y(6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y}_{(x,0)\to(x,y)}\\&=x^3+3x^2y^2+y^4\end{aligned}$$

于是, 方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C$$

◀

Example 8.8: 设 $\mathrm{d}u=\dfrac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$, 求 $u(x,y,z)$

✎ Solution[14]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\\&=\frac{(x+y)\,\mathrm{d}(x+y)+z\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}(x+y)+(x+y)\,\mathrm{d}z}{(x+y)^2+z^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\big((x+y)^2+z^2\big)}{(x+y)^2+z^2} + \frac{(x+y)\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2\Big(1+\frac{z^2}{(x+y)^2}\Big)}$$

$$= \mathrm{d}\Big(\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}\Big) + \frac{\frac{(x+y)\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2}}{1+\big(\frac{z}{x+y}\big)^2}$$

$$= \mathrm{d}\Big(\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}\Big) + \frac{\mathrm{d}\big(\frac{z}{x+y}\big)}{1+\big(\frac{z}{x+y}\big)^2}$$

$$= \mathrm{d}\left(\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2} + \arctan\frac{z}{x+y}\right)$$

所以

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln\big((x+y)^2+z^2\big) + \arctan\frac{z}{x+y}$$

◀

8.5.2 积分因子法

Exercise 8.5: 求微分方程: $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解

✎ Solution 两边同乘 $u(x)$, 原方程变为

$$u(x)y' + u(x)P(x)y = u(x)Q(x)$$

使得

$$[u(x)y]' = u(x)y' + u'(x)y = u(x)y' + u(x)P(x)y$$

于是

$$u'(x) = u(x)P(x) \Longrightarrow u(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

于是, 我们得到如下积分因子法

方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 两端同乘以积分因子 $u(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$, 得

$$e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}y' + P(x)ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\Longrightarrow \Big(ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\Big)' = Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

上式两端同时积分可得

$$ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$$

即

$$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

◀

8.6 可降阶的高阶微分方程

8.7 高阶线性微分方程

Theorem 8.2 刘维尔公式

若 $y_1(x)$ 是二阶线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个解，则该方程与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个解为

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

Example 8.9: 求方程 $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1$ 的通解。

Solution 因为

$$1+\frac{x}{1-x}-\frac{1}{1-x}=0$$

对应齐次方程一特解为 $y_1=e^x$ ，由刘维尔公式

$$y_2=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{-\int\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=x$$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1x+C_2e^x$ ◀

Example 8.10: 已知方程 $x^2y''+xy'-y=0$ 的一个特解为 $y=x$, 于是方程的通解为

Solution 化简可得

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$$

由刘维尔公式，另一个特解

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\\&=x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x}\end{aligned}$$

于是求出通解为

$$y=C_1x+\underbrace{C_2\left(-\frac{1}{2x}\right)}_{C_2\times(-\frac{1}{2})\text{仍是常数}}=C_1x+C_2\frac{1}{x}$$

◀

Example 8.11: 方程 $(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+(2x-2)y=0$ 的通解为

Solution 易知其中一个特解为 $y_1(x)=e^x$, 化简可得

$$y''-\frac{x^2-2}{x^2-2x}y'+\frac{2x-2}{x^2-2x}=0$$

由刘维尔公式，另一个特解

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
&= e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int \frac{2-x^2}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = x^2
\end{aligned}
$$

于是求出通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 x^2$$

◀

Exercise 8.6: 设 f 是二次可微函数, 对于任何实数 x, y 都满足函数方程

$$f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)f(x-y)$$

试求 f 的表达式

Solution 首先在等式

$$f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)f(x-y)$$

令 $x = y = 0$ 得到 $f(0) = 0$.
又对其两边关于 x, y 先后求两次偏导数得

$$2f(x)f'(x) = f'(x+y)f(x-y) + f(x+y)f'(x-y)$$

$$0 = f''(x+y)f(x-y) - f(x+y)f''(x-y)$$

作变量代换 $x+y=u, x-y=v$ 则对于任何实数 u, v 都有

$$f''(u)f(v) = f(u)f''(v)$$

如果 $f(v) \equiv 0$, 则该函数方程的解为 $f(x) \equiv 0$.
若 $f(v) \not\equiv 0$, 存在一点 v_0 使得 $f(v_0) \neq 0$, 则可令 $c = \dfrac{f''(v_0)}{f(v_0)}$, 即化为 $f''(u) = cf(u)$. 根据初始条件 $f(0) = 0$ 即可求得解为

$$f(u) = \begin{cases} A\sinh\sqrt{c}x, & c > 0 \\ Au, & c = 0,\ \text{其中}A\text{是任意常数} \\ A\sin\sqrt{-c}x, c < 0 \end{cases}$$

◀

Exercise 8.7: 求微分方程: $y'' - (y')^2 + y' = 0$ 的通解

Solution 变形得:

$$y'' - (y')^2 + y' = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'' - (y')^2}{y^2} = -\frac{y'}{y^2}$$

对上式积分得:

$$\Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{y} + C_1$$

整理得:

$$\Longrightarrow y' - C_1 y = 1$$

左右同乘 $e^{-C_1 x}$

$$\Longleftrightarrow e^{-C_1 x} y' - C_1 e^{-C_1 x} y = e^{-C_1 x}$$

对上式积分得:

$$e^{-C_1 x} y = -\frac{1}{C_1} e^{-C_1 x} + C_2$$

通解为:

$$y = C_2 e^{C_1 x} - \frac{1}{C}$$

◀

Exercise 8.8: 求微分方程: $y'' = 1 + y'^2$ 的通解

Solution 移项得

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = 1$$

对上式积分得

$$\arctan y' = x + c_1$$

所以

$$y' = \tan(x + c_1)$$

对上式积分得

$$y = -\ln|\cos(x + c_1)| + c_2$$

◀

8.8 常系数齐次线性微分方程

Example 8.12: 求方程 $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解。

Solution 特征方程: $\lambda^5 - \lambda^4 = 0$. 特征根:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0\,, \quad \lambda_5 = 1$$

原方程通解:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^x$$

◀

Example 8.13: 求方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ 的通解。

Solution 特征方程: $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$. 即 $(\lambda^2+1)^2=0$

特征根:

$$\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}\,,\quad \lambda_{3,4}=\pm\mathrm{i}$$

原方程通解:

$$y=(C_1+C_3x)\cos x+(C_2+C_4x)\sin x$$

◀

Example 8.14: 求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解。

Solution 特征方程:

$$\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2=0.$$

特征根:

$$\lambda_{1,2}=0\,,\quad \lambda_{3,4}=1\pm 2\mathrm{i}$$

原方程通解:

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

◀

8.9 常系数非齐次线性微分方程

8.9.1 非齐次线性微分方程的解的叠加原理

Definition 8.3 解的叠加原理

设 y_1^* 和 y_2^* 分别是非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f_1(x) \tag{8.5}$$

和

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f_2(x) \tag{8.6}$$

的特解, 则 $y_1^*+y_2^*$ 是非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f_1(x)+f_2(x) \tag{8.7}$$

的特解

Definition 8.4 复数解的叠加原理

设线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)+ig(x) \tag{8.8}$$

(其中 $a_i(x)$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为实函数) 有复数解 $y=u^*+iv^*$, 则这个解的实部 u^* 和虚部 v^* 分别是线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x) \tag{8.9}$$

和

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=g(x) \tag{8.10}$$

的解

Example 8.15: 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^x-e-x$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

Solution 根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：
e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解.
因此可以用下述两种解法
解法一：故此方程式 $y''-y'-2y=f(x)$, 将 $y=xe^x$ 代入上式，得

$$\begin{aligned} f(x) &= (xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x=2e^x+xe^x-e^x-xe^x-2xe^x \\ &= e^x-2xe^x \end{aligned}$$

因此所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.
解法二：故 $y=xe^x+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ ，是所求方程的通解，由

$$\begin{cases} y'=e^x+xe^x-2c_1e^{2x}-c_2e^{-x} \\ y''=2e^x+xe^x+4c_1e^{2x}+c_2e^{-x} \end{cases},$$

消去 c_1, c_2 得所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$. ◀

8.9.2 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$ 的特解形式为：

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x} \qquad k=\begin{cases} 0 & \text{当 } \lambda \text{ 不是特征根} \\ 1 & \text{当 } \lambda \text{ 是特征单根} \\ 2 & \text{当 } \lambda \text{ 是特征重根} \end{cases}$$

8.9.3 $f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x\right]$ 型

$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x\right]$ 特解的设法：
设 $m = \max\{l, n\}$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[Q_m(x)\cos\omega x + R_m(x)\sin\omega x\right] \qquad k = \begin{cases} 0 & 当\ \lambda + \omega i\ 不是特征根 \\ 1 & 当\ \lambda + \omega i\ 是特征根 \end{cases}$$

Example 8.16: 求通解 $y'' + y = x\cos 2x$

Solution 特征方程

$$r^2 + 1 = 0$$

特征根

$$r = \pm i$$

对应齐次方程的通解

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$l = 1, n = 0, m = \max\{1, 0\} = 1, \lambda = 0, \omega = 2, \lambda + \omega i = 2i$$

$\lambda + \omega i = 2i$ 不是特征根，故设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x$$

求导为:

$$\begin{aligned} y^{*\prime} &= a\cos 2x - 2(ax + b)\sin 2x + c\sin 2x + 2(cx + d)\cos 2x \\ &= (a + 2cx + 2d)\cos 2x + (c - 2ax - 2b)\sin 2x \end{aligned}$$

再次求导

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime} &= 2c\cos 2x - 2(a + 2cx + 2d)\sin 2x - 2a\sin 2x + 2(c - 2ax - 2b)\cos 2x \\ &= 4(c - ax - b)\cos 2x - 4(a + cx + d)\sin 2x \end{aligned}$$

带入原方程, 得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较 $\cos 2x$, $\sin 2x$ 的系数, 得

$$-3ax - 3b + 4c = x, -(3cx + 3d + 4a) = 0$$

$$-3a = 1, -3b + 4c = 0, c = 0, 3d + 4a = 0$$

解得

$$a = -\frac{1}{3}, b = c = 0, d = \frac{4}{9}$$

特解为

$$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+)\sin 2x$$
$$= -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$$

故所求通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$$

◀

Exercise 8.9: 求通解 $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$

✎ Solution 特征方程

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

特征根

$$r_1 = -1 - 2i, r_2 = -1 + 2i$$

对应齐次方程的通解

$$Y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

$$l = 0, n = 0, m = \max\{0, 0\} = 0, \lambda = 0, \omega = 2, \lambda + \omega i = 2i$$

$\lambda + \omega i = 2i$ 不是特征根，故设特解为

$$y^* = a\cos 2x + b\sin 2x$$

求导为:

$$y^{*\prime} = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$$

再次求导

$$y^{*\prime\prime} = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$$

带入原方程, 得

$$(-4a + 4b + 5a)\cos 2x + (-4b - 4a + 5b)\sin 2x = \sin 2x$$

比较 $\cos 2x$, $\sin 2x$ 的系数, 得

$$a + 4b = 0, b - 4a = 1$$

解得

$$b = \frac{1}{17}, a = -\frac{4}{17}$$

特解为

$$\begin{aligned} y^* &= a\cos 2x + b\sin 2x \\ &= -\frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x \end{aligned}$$

故所求通解为

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x$$

◀

Exercise 8.10: 求通解 $y'' + 2y' + 10y = xe^{-x}\cos 3x$

Solution

$$l = 1, n = 0, m = \max\{1, 0\} = 1, \lambda = -1, \omega = 3, \lambda + \omega i = -1 + 3i$$

$\lambda + \omega i = -1 + 3i$ 是特征根，故设特解为

$$y^* = xe^{-x}((ax + b)\cos 3x + (cx + d)\sin 3x)$$

求导为:

$$\begin{aligned} y^{*\prime} =& e^{-x}\Big(\big((-a + 3c)x^2 + (3d + 2a - b)x + b\big)\cos 3x \\ &+ \big(-(3a + c)x^2 + (2c - 3b - d)x + d\big)\sin 3x\Big) \end{aligned}$$

再次求导

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime} =& e^{-x}\Big(\big((-8a - 6c)x^2 + (-4a - 8b + 12c - 6d)x + (2a - 2b + 6d)\big)\cos 3x \\ &+ \big((6a - 8c)x^2 + (-12a + 6b - 4c - 8d)x + (-6b + 2c - 2d)\big)\sin 3x\Big) \end{aligned}$$

带入原方程, 得

$$\big(12cx + (2a + 6d)\big)\cos 3x + \big(-6b + 2c\big)\sin 3x = x\cos 3x$$

比较 $\cos 3x$, $\sin 3x$ 的系数, 得

$$\begin{cases} 12c = 1 \\ 2a + 6d = 0 \\ -6b + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = -3d \\ b = \dfrac{1}{36} \\ c = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

特解为

$$y^* = xe^{-x}((ax + b)\cos 3x + (cx + d)\sin 3x)$$

$$= xe^{-x}\left(\frac{1}{36}\cos 3x + \frac{1}{12}x\sin 3x\right)$$

故所求通解为

$$y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + xe^{-x}\left(\frac{1}{36}\cos 3x + \frac{1}{12}x\sin 3x\right)$$

◀

✎ Solution2 特征方程

$$r^2 + 2r + 10 = 0$$

特征根

$$r_1 = -1 - 3i, r_2 = -1 + 3i$$

对应齐次方程的通解

$$Y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$$

◀

8.9.4 朗斯基 Wronskian 行列式 [3]

Theorem 8.3

微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$, 设 $\bar{Y} = C_1A(x) + C_2B(x)$,
那么对于方程的两个独立解: $A(x), B(x)$

$$\text{Wronskian } W(x) = \begin{vmatrix} A(x) & B(x) \\ A'(x) & B'(x) \end{vmatrix} = A(x)B'(x) - A'(x)B(x)$$

设

$$v_1(x) = -\int \frac{f(x)B(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x \qquad v_2(x) = \int \frac{f(x)A(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x$$

方程的特解由下面式子给出:

$$y^* = v_1A(x) + v_2B(x)$$

方程的通解为

$$y = \bar{Y} + y^* = C_1A(x) + C_2B(x) + v_1A(x) + v_2B(x)$$

♣

Example 8.17: 求通解 $y'' + y = \sec x$

✎ Solution 特征方程 $r^2+1=0$, 特征根 $r=\pm i$

对应齐次方程的通解

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

朗斯基行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ (\cos x)' & (\sin x)'\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

其中

$$v_1(x)=-\int\frac{\sec x\sin x}{1}\,\mathrm{d}x=\ln|\cos x|$$

$$v_2(x)=-\int\frac{\sec x\cos x}{1}\,\mathrm{d}x=x$$

故特解为

$$y^*=\cos x\ln(\cos x)+x\sin x$$

那么所求通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln(\cos x)+x\sin x$$

◀

Example 8.18: 求通解: $y''+y'-2y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

✎ Solution 特征方程 $r^2+r-2=0$, 特征根 $r=-2$ 或 $r=1$

对应齐次方程的通解

$$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$$

朗斯基行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix}e^{-2x} & e^x\\ (e^{-2x})' & (e^x)'\end{vmatrix}=3e^{-2x}e^x$$

其中

$$\begin{aligned}v_1(x)&=-\int\frac{f(x)B(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{\frac{e^x}{1+e^x}e^x}{3e^{-2x}e^x}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{6}e^x(e^x-2)-\frac{1}{3}\ln(e^x+1)+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_1(x)&=-\int\frac{f(x)B(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{\frac{e^x}{1+e^x}e^{-2x}}{3e^{-2x}e^x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\ln(e^x+1)+C\end{aligned}$$

故特解为

$$y^*=v_1A(x)+v_2B(x)$$

$$= \frac{xe^x}{3} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x+1) - \frac{1}{3}e^x\ln(e^x+1) - \frac{1}{6}$$

那么所求通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= Y + y^* \\ &= C_1e^{-2x} + C_2e^x + \frac{xe^x}{3} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x+1) - \frac{1}{3}e^x\ln(e^x+1) - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

◀

8.10 欧拉方程

Definition 8.5 欧拉方程

形如

$$x^ny^{(n)} + p_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}xy' + p_ny = f(x) \tag{8.11}$$

的方程（其中 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 为常数），叫做欧拉方程

作变换令 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$，将自变量 x 换成 t，我们有

$$x = \ln t \Longrightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(-\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\ \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} &= \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \end{aligned}$$

采用记号 D 表示对 t 求导的运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，那么上述计算结果可以写成

$$\begin{aligned} xy' &= Dy \\ x^2y'' &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)y = (D^2 - D)y = D(D-1)y \\ x^3y''' &= \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y \end{aligned}$$

一般地，有

$$x^ky^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$$

将它带入欧拉方程 (8.11) 便得到一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程. 在求出这个解后，把 t 换成 $\ln x$，即得原方程的解.

第 9 章 差分方程

9.1 差分方程概述

Definition 9.1

设自变量 t 取离散的整数值 $t=0,1,2,\cdots$，而 y 是 t 的函数，记为 $y_t=f(t)$。当自变量从 t 变到 $t+1$ 时，相应的函数值的改变量称为函数 $y(t)$ 在 t 处的一阶差分，记为

$$\Delta y_t = y(t+1)-y(t)$$

或

$$\Delta y_t = y_{t+1}-y_t$$

函数 $y(t)$ 在 t 处的二阶差分记为

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$$

函数 $y(t)$ 在 t 处的n 阶差分记为

$$\Delta^n y_t = \Delta(\Delta^{n-1}y_t) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i(-1)^i y_{t+n-i}$$

Example 9.1: 求 $y_t=C$ 的各阶差分

Solution: $\Delta y_t = y_{t+1}-y_t=0$，且其各阶差分都为 0 □

Properties: 当 a,b,C 为常数，u_t 和 v_t 为 t 的函数时，有以下结论成立

(1) $\Delta(C)=0$;

(2) $\Delta(Cy_t)=C\Delta y_t$;

(3) $\Delta(au_t+bv_t)=a\Delta u_t+b\Delta v_t$;

(4) $\Delta(u_tv_t)=u_t\Delta v_{t+1}+v_{t+1}\Delta u_t$;

(5) $\Delta\left(\dfrac{u_t}{v_t}\right)=\dfrac{v_t\Delta u_t-u_t\Delta v_t}{v_tv_{t+1}}$;

Definition 9.2 差分方程

一般地，含未知函数有和未知函数差分的方程称为差分方程
差分方程的一般形式为

$$F\left(t, y_t, y_{t+1}, \cdots, y_{t+n}\right)=0$$

或

$$G\left(t, y_t, \Delta y_t, \cdots, \Delta^n y_t\right)=0$$

其中 F，G 为表达式，t 是自变量

差分方程中含有未知的最高阶数称为差分方程的阶

满足差分方程的函数称为差分方程的解

一般地，不含有任意常数的解称为特解，n 阶差分方程的含有 n 个彼此独立的任意常数的解称为差分方程的通解

Definition 9.3

n 阶非齐次线性差分方程形如

$$a_0(t) y_{t+n}+a_1(t) y_{t+n-1}+\cdots+a_n(t) y_t=f(t)$$

其中右端项 $f(t)$ 和各项系数 $a_0(t), a_1(t), \cdots, a_n(t)$ 为已知函数。相应的齐次线性差分方程为

$$a_0(t) y_{t+n}+a_1(t) y_{t+n-1}+\cdots+a_n(t) y_t=0$$

Definition 9.4

设有二阶非齐次线性差分方程

$$y_{t+2}+a(t) y_{t+1}+b(t) y_t=f(t) \tag{9.1}$$

相应的齐次线性差分方程为

$$y_{t+2}+a(t) y_{t+1}+b(t) y_t=0 \tag{9.2}$$

其中系数 $b(t) \neq 0$

Theorem 9.1

若 $y_t^{(1)}$ 和 $y_t^{(2)}$ 都是方程 (9.2) 的解，则对任意常数 C_1，C_2，$C_1 y_t^{(1)} + C_2 y_t^{(2)}$ 也是方程 (9.2) 的解。

Theorem 9.2

若 $y_t^{(1)}$ 和 $y_t^{(2)}$ 是 (9.2) 的线性无关的特解，则对任意常数 C_1，C_2，$C_1 y_t^{(1)} + C_2 y_t^{(2)}$ 是它的通解

Theorem 9.3

若 $y_t^{(1)}$ 和 $y_t^{(2)}$ 都是非齐次方程 (9.1) 的解，则 $y_t^{(1)} - y_t^{(2)}$ 是齐次方程 (9.2) 的解

Theorem 9.4

若 $y^{(c)}$ 是齐次方程 (9.2) 的通解，$\bar{y}$ 是非齐次方程 (9.1) 特解，则 $y = y^{(c)} + \bar{y}$ 是非齐次方程 (9.1) 的通解

9.2 一阶常系数线性差分方程

9.2.1 迭代法

一阶常系数非齐次线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1} - p y_t = f(t) \tag{9.3}$$

其中常数系数 $p \neq 0$，未知函数项 y_{t+1} 和 y_t 为一次的，右端项 $f(t)$ 为已知函数。与其相应的齐次方程为

$$y_{t+1} - p y_t = 0 \tag{9.4}$$

齐次差分方程 (9.4) 的通解为

$$y_t = C p^t, t = 0, 1, 2, \cdots \tag{9.5}$$

当 $f(t)=b$ 为常数，非齐次差分方程 (9.3) 的通解为

$$y_t=\begin{cases}Cp^t+\dfrac{b}{1-p}, & p=1,\\ C+bt, & p=1.\end{cases} \tag{9.6}$$

9.2.2 待定系数法

1. 设非齐次差分方程 (9.3) 的右端为 $f(t)=P_n(t)$

   (1) 当 $p=1$ 时，设其为

$$y_t=t\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n\right)$$

   (2) 当 $p\neq 1$ 时，设其为

$$y_t=b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n$$

2. 设非齐次差分方程 (9.3) 的右端为 $f(t)=\lambda^tP_n(t)$
   其中：λ 为已知常数，$P_n(t)$ 为的 n 次多项式
   设所求特解为

$$y_t=t^k\lambda^t\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n\right)$$

   其中当 $p=\lambda$ 时 $k=1$，当 $p\neq\lambda$ 时 $k=0$

Example 9.2: 求 $y_{t+1}-5y_t=3$ 的通解和满足 $y\Big|_{t=0}=\dfrac{7}{3}$ 的特解

Solution: 该差分方程中 $p=5$，$b=3$，由式 (9.6) 得到方程通解

$$y_t=C\cdot 5^t+\frac{3}{1-5}=C\cdot 5^t-\frac{3}{4}$$

将 $y_0=\dfrac{7}{3}$ 带入上式得到 $C=\dfrac{37}{12}$，故所求特解为

$$y_t=\frac{37}{12}\cdot 5^t-\frac{3}{4}$$

□

Example 9.3: 求 $y_{t+1}-y_t=3+2t$ 的通解

Solution: 由式 (9.5) 得到齐次方程的通解为 $y_t=C$

$$y_t=C\cdot 5^t+\frac{3}{1-5}=C\cdot 5^t-\frac{3}{4}$$

因为 $p=1$ 故设所求方程的特解为 $\bar{y}_t=t(b_0+b_1t)$
代入方程得

$$(t+1)\big(b_0+b_1(t+1)\big)-t(b_0+b_1t)=3+2t$$

所以

$$\begin{cases}2b_1=2\\ b_0+b_1=3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}b_1=1\\ b_0=2\end{cases}$$

故所求通解为

$$y_t=C+2t+t^2$$

□

Example 9.4: 求 $y_{t+1}-3y_t=7\cdot 2^t$ 的通解

Solution: 由式 (9.5) 得到齐次方程的通解为 $y_t=C\cdot 3^t$，C 为常数

$$y_t=C\cdot 5^t+\frac{3}{1-5}=C\cdot 5^t-\frac{3}{4}$$

因为 $3=p\neq\lambda=2$ 故设所求方程的特解为 $y_t^*=b\cdot 2^t$
代入方程得

$$b\cdot 2^{t+1}-3b\cdot 2^t=7\cdot 2^t$$

解得

$$b=-7$$

故所求方程特解为

$$\bar{y}_t=-7\cdot 2^t$$

通解为

$$y_t=C\cdot 3^t-7\cdot 2^t$$

□

9.3 二阶常系数线性差分方程

二阶常系数非齐次线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=f(t) \tag{9.7}$$

其中 p,q 为常数系数 $(q\neq 0)$，未知函数项 y_{t+2},y_{t+1} 和 y_t 为一次的，右端项 $f(t)$ 为已知函数。与其相应的齐次方程为

$$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=0 \tag{9.8}$$

将 $y_t=\lambda^t$ 代入 (9.8) 得到

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{9.9}$$

容易证明 $y_t=\lambda^t$ 为 (9.8) 的解，当且仅当 λ 为 (9.9) 的解，因此称二次代数方程 (9.9) 为 (9.7) 和 (9.8) 的特征方程，其根为特征根。特征根有两个

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-p\pm\sqrt{p^2-4q}\right)$$

1. 当 $p^2>4q$ 时，特征方程有一对互异实根
   $\lambda_1=\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{p^2-4q}\right),\lambda_2=\frac{1}{2}\left(-p-\sqrt{p^2-4q}\right)$
   (9.8) 通解为$y_t=C_1\lambda_1^t+C_2\lambda_2^t$，其中 C_1,C_2 为任意常数
2. 当 $p^2=4q$ 时，特征方程有二重实根 $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{p}{2}$，
   (9.8) 通解为$y_t=(C_1+C_2t)\left(-\frac{p}{2}\right)^t$，其中 C_1，C_2 为任意常数
3. 当 $p^2<4q$ 时，特征方程有共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$
   特征根的实部 $\alpha=-\frac{p}{2}$，
   特征根的虚部 $\beta=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$
   $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ 其中 $\cos\theta=\frac{\alpha}{r},\sin\theta=\frac{\beta}{r},\theta\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
   (9.8) 通解为$y_t=r^t\left(C_1\cos(\theta t)+C_2\sin(\theta t)\right)$，其中 C_1，C_2 为任意常数

9.3.1 求二阶常系数非齐次线性差分方程的特解

1. 设 $f(t)=P_n(t)$，即 (9.7) 右端为一个已知的 n 次多项式

$$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=P_n(t)$$

方程可改写为

$$\Delta^2y_t+(p+2)\Delta y_t+(1+p+q)y_t=P_n(t)$$

   (a) 当 $1+p+q\neq 0$ 时，
   设

$$y_t=b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n$$

   (b) 当 $1+p+q=0,p+2\neq 0$ 时，
   设

$$y_t=t\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n\right)$$

(c) 当 $1+p+q=0, p+2=0$ 时，
设
$$y_t=t^2\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n\right)$$

2. 设 $f(t)=\lambda^tP_n(t)$，此时有
$$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=\lambda^tP_n(t)$$
设 (9.7) 有特解
$$y_t=\lambda^tt^k\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n\right)$$
其中 k 等于 λ(作为特征根) 的重数

Example 9.5: 求 $y_{t+2}+5y_{t+1}+4y_t=0$ 的通解

Solution: 其特征方程为
$$\lambda^2+5\lambda+4=0$$
有特征根 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-4$
所求通解为
$$y_t=C_1(-1)^t+C_2(-4)^t$$
其中 C_1，C_2 为任意常数 □

Example 9.6: 求 $y_{t+2}-6y_{t+1}+9y_t=0$ 的通解

Solution: 其特征方程为
$$\lambda^2-6\lambda+9=0$$
有特征根
$$\lambda_1=\lambda_2=3$$
所求通解为
$$y_t=\left(C_1+tC_2\right)3^t$$
其中 C_1，C_2 为任意常数 □

Example 9.7: 求 $y_{t+2}+4y_t=0$ 的通解解

Solution: 其特征方程 $\lambda^2+4=0$，特征根 $\lambda=\pm2i$
实部
$$\alpha=-\frac{p}{2}=0$$
虚部
$$\beta=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}=2$$
$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2,\sin\beta=\frac{\beta}{r}=1$$

故所求通解为

$$y_t = 2^t\left(C_1 \sin\frac{\pi}{2}t + C_2 \sin\frac{\pi}{2}t\right)$$

其中 C_1，C_2 为任意常数 □

Example 9.8: (18 数 3) 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解是 $\underline{\quad C2^x - 5 \quad}$

Solution 根据二阶差分的定义可得

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_x &= \Delta y_{x+1} - \Delta y_x = (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x)\\ &= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x\end{aligned}$$

由 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 得

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} = 5$$

先求齐次方程的通解, 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, 齐次方程通解为 $Y = C2^x$.
由于 $1 + p + q = 1 + (-2) + 0 \neq 0$, 故设原差分方程的特解为 $y^* = a$,
将特解带入非齐次方程

$$a - 2a = 5 \Longrightarrow a = -5$$

于是原方程的通解为

$$y_x = Y + y^* = C2^x - 5$$

◀

Example 9.9: 求 $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_4 = 4$ 的通解

Solution: 特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$，特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
对应的齐次方程的通解

$$y_t = C_1 + C_2 2^t$$

因 $1 + p + q = 1 - 3 + 2 = 0, p + 2 = -3 + 2 = -1 \neq 0$
故设非齐次方程的特解为 $\bar{y}_t = bt$
将其代入差分方程得

$$b(t+2) - 3b(t+1) + 2bt = 4$$

解得 $b = -4$，所求通解为

$$y_t = C_1 + C_2 2^t - 4t$$

其中 C_1，C_2 为任意常数 □

Example 9.10: 求 $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_4 = 12t$ 的通解

Solution: 其特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

特征根

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

对应的齐次方程的通解

$$y_t = C_1 + C_2(-2)^t$$

因为

$$1 + p + q = 1 + 1 - 2 = 0, p + 2 = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

故设非齐次方程的一个特解为

$$\bar{y}_t = t(b_0 + b_1 t)$$

将其代入差分方程得

$$(t + 2)(b_0 + b_1(t + 2)) + (t + 1)(b_0 + b_1(t + 1)) - 2t(b_0 + b_1 t) = 12t$$

整理得

$$6b_1 t + 3b_0 + 5b_1 = 12x$$

比较系数，得

$$\begin{cases} 6b_1 = 12, \\ 3b_0 + 5b_1 = 0, \end{cases}$$

解得 $b_0 = -\frac{10}{3}, b_1 = 2$
故所求通解为

$$y_t = C_1 + C_2(-2)^t - \frac{10}{3}t + 2x^2$$

其中 C_1，C_2 为任意常数 □

Example 9.11: 求 $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 3^t$ 的通解

Solution: 特征方程为

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

有特征根

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$f(t) = 3^t P_0(t)$，因 $\lambda = 3$ 为二重根，故设特解为 $\bar{y}_t = bt^2 3^t$
将其代入差分方程得

$$b(t + 2)^2 3^{t+2} - 6b(t + 1)^2 3^{t+1} + 9b^2 3^t = 3^t$$

解得 $b = \frac{1}{18}$，特解为 $\bar{y}_t = \frac{1}{18}t^2 3^t$ 所求通解为

$$y_t = (C_1 + C_2 t)3^t + \frac{1}{18}t^2 3^t$$

□

Example 9.12: 求 $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 5^t$ 的通解

Solution: 特征方程为

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

有特征根

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$f(t) = 5^t P_0(t)$，因 $\lambda = 5$ 不是特征根，故设特解为 $\bar{y}_t = b3^t$
将其代入差分方程得

$$b3^{t+2} - 4b3^{t+1} + 4b3^t = 5^t$$

解得 $b = \dfrac{1}{9}$，非齐次方程的特解为 $\bar{y}_t = \dfrac{1}{9}5^t$
所求通解为

$$y_t = (C_1 + C_2 t)2^t + \frac{1}{9}5^t$$

其中 C_1，C_2 为任意常数 □

Example 9.13: 求 $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 2^t$ 的通解

Solution: 特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

有特征根

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$f(t) = 2^t P_0(t)$，因 $\lambda = 2$ 是单特征根，故设特解为 $\bar{y}_t = bt2^t$
将其代入差分方程得

$$b(t+2)2^{t+2} - 3(t+1)b3^{t+1} + 2bt3^t = 2^t$$

解得 $b = \dfrac{1}{2}$，非齐次方程的特解为 $\bar{y}_t = \dfrac{1}{2}2^t = 2^{t-1}$
所求通解为

$$y_t = C_1 + \left(C_2 + \frac{1}{2}\right)2^t$$

其中 C_1，C_2 为任意常数 □

Exercise 9.1:

Solution ◀

9.4 差分方程应用举例

Example 9.14: 广州公积金贷款年利率为 3.25%．现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年．采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少?

Solution 设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r．
则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 50000$$

该差分方程的解为

$$y_x = \frac{y_0 - \frac{m}{r}}{(1+r)^x} + \frac{m}{r}$$

从而可以解出

$$m = \frac{r\left[y_0(1+r)^x - y_x\right]}{(1+r)^x - 1}$$

当 $x = 240$ 时，$y_x = 0$，代入得到 $m = 2835.97$. ◀

Example 9.15: (筹措教育经费模型) 某家庭现在起每月从工资中拿出一部分资金存入银行，用于投资子女的教育. 并计划 20 年后开始从投资帐户中每月支取 1000 元，直到 10 年后子女大学毕业用完全部资金. 要实现这个投资目标，每月要向银行存入多少钱？ 20 年内共要筹措多少资金？(假设投资的月利率为 0.5%)

Solution 设第 n 个月投资帐户资金为 S_n 元，每月存入资金为 a 元. 于是，
20 年后关于 S_n 的差分方程模型为

$$S_{n+1} = 1.005S_n - 1000 \tag{9.10}$$

并且 $S_{120} = 0$, $S_0 = x$, 解方程 (9.10) ，易得其通解为

$$S_n = 1.005^n C - \frac{1000}{1-1.005} = 1.005^n C + 200000$$

以及

$$S_{120} = 1.005^{120} C + 200000 = 0$$

$$S_0 = C + 200000 = x$$

从而有

$$x = 200000 - \frac{200000}{1.005^120} = 90073.45$$

从现在到 20 年内，S_n 满足的差分方程为

$$S_{n+1} = 1.005S_n + a \tag{9.11}$$

且 $S_0 = 0$, $S_{240} = 90073.45$. 解方程 (9.11) ，易得通解为

$$S_n = 1.005^n C + \frac{a}{1-1.005} = 1.005^n C - 200a$$

以及

$$S_{240} = 1.005^{240} C - 200a = 90073.45\,, \quad S_0 = C - 200a = 0$$

从而有

$$a = 194.95$$

即要达到投资目标，20 年内要筹措资金 90073.45 元，平均每月要存入银行 194.95 元.
◀

Example 9.16: 数列 $F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$ 如果满足条件

$$F_1 = F_2 = 1\ ; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n+2}(对所有的正整数 n \geqslant 3)$$

则称此数列为斐波那契 (Fibonacci) 数列.

Solution

◀

第 10 章 向量代数与空间解析几何

10.1 向量及其线性运算

Exercise 10.1: 设 $\boldsymbol{a}=(3,4,5)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Solution $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3-8+15=10$ $(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{10}{\sqrt{14}}$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&4&5\\1&-2&3\end{vmatrix}=(22,-4,-10).$$

10.2 数量积向量积混合积

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$\overbrace{\underbrace{[\boldsymbol{acb}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{abc}]}_{\text{轮换性}}}^{\text{对换变号: }[\boldsymbol{abc}]=-[\boldsymbol{bac}]}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

Theorem 10.1 四面体的体积

不共面四点 A,B,C,D 所构成的四面体的体积为: $V=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right]\right|$

10.3 平面及其方程

Example 10.1: 求过点 $A(1,2,-1)$, $B(2,3,0)$, $C(3,3,2)$ 的三角形 $\triangle ABC$ 的面积和它们确定的平面方程.

✎ Solution 由题设 $\overrightarrow{AB}=(1,1,1), \overrightarrow{AC}=(2,1,3)$,
故

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=(2,-1,-1)$$

三角形 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\mid\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\mid=\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

所求平面的方程为 $2(x-2)-(y-3)-z=0$, 即 $2x-y-z-1=0$ ◀

Example 10.2: 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 ________

✎ Solution 因平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量为 $(2,2,-1)$ ，而曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 在 (x_0,y_0) 处的法向量为

$$\big(z_x(x_0,y_0), z_y(x_0,y_0), -1\big)$$

故 $\big(z_x(x_0,y_0), z_y(x_0,y_0), -1\big)$ 与 $(2,2,-1)$ 平行，
因此，由 $z_x=x,\ z_y=2y$，知

$$2=z_x(x_0,y_0)=x_0\,,\ 2=z_y(x_0,y_0)=2y_0$$

即 $x_0=2,\ y_0=1$，又 $z(x_0,y_0)=z(2,1)=1$,
于是曲面 $2x+2y-z=0$ 在 $(x_0,y_0,z(x_0,y_0))$ 处的切平面方程是

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-1)=0$$

即曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面的切平面方程是

$$2x+2y-z-5=0$$

◀

Theorem 10.2

平面 $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$ 与坐标面 $z=0$ 的夹角余弦为

$$\cos\theta=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

♣

Theorem 10.3 两平面之间的夹角

$$\prod_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$$

$$\prod_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\ \boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$$

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

10.4 空间直线及其方程

10.4.1 空间直线的方程

L 为过一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与向量 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ 平行的直线

L 的参数方程: $\begin{cases}x=x_0+tm\\ y=y_0+tn\quad(-\infty<t<+\infty)\\ z=z_0+tp\end{cases}$

L 的对称式方程: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

L 的交面式方程 (一般方程)两张不平行的平面相交成一条直线

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

L 的对称式方程:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1&A_1\\C_2&A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}}$$

Definition 10.1 两点式方程

过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

10.4.2 两直线之间的关系

10.4.3 直线与平面之间的关系

Example 10.3: (1990 数学 1) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是__________

Solution 平面的法向量就是直线的方向向量，为

$$\vec{n}=\{-1,3,1\}$$

平面的点法式方程:

$$-1(x-1)+3(y-2)+1(z-(-1))=0 \Longrightarrow x-3y-z+4=0$$

◀

Example 10.4: (1991 数学 1) 已知两条直线的方程是

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},\ L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$

且过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是__________

Solution 平面经过点 $(1,2,3)$，且与向量 $\{1,0,-1\}$ 和 $\{2,1,1\}$ 都垂直。
平面的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n}&=\{1,0,-1\}\times\{2,1,1\}\\&=\left\{\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\right\}=\{1,-3,1\}\end{aligned}$$

平面的点法式方程:

$$1(x-1)-3(y-2)+1(z-3)=0 \Longrightarrow x-3y+z+2=0$$

◀

10.5 曲面及其方程

Example 10.5: 过单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases} x=0 \\ 3y+z=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程为 ________

✎ Solution 在 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} - 2z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ 中消去 z, 得

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - 2(4 - x^2 - y^2) = 1, \quad 即 \ 9x^2 + 10y^2 = 36$$

直线 $\begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$ 的一个方向向量为

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{1, 0, 0\} \times \{0, 3, 1\} = \{0, -1, 3\}$$

并且所求平面方程与直线垂直, 故所求平面方程的一条法线向量为

$$\vec{n} = \{0, -1, 3\}$$

交线上其中一点为 $(2, 0, 0)$, 因此所求平面方程为

$$-y + 3z = 0$$

◀

10.5.1 旋转曲面

1. 曲线 C $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一周得旋转曲面 $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
2. 曲线 C $f(y, z) = 0$ 绕 y 轴旋转一周得旋转曲面 $f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$

10.5.2 柱面

10.5.3 二次曲面

10.6 空间曲线及其方程

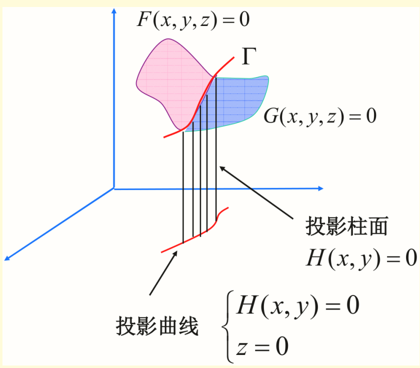
Definition 10.2 xoy 面上的投影曲线

设空间曲线的一般方程: $\begin{cases} F(x, y, z = 0) \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

消去变量 z 后得: $H(x, y) = 0$

$H(x, y) = 0$为曲线关于 xoy 的投影柱面

空间曲线在 xoy 面上的投影曲线: $\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$



Example 10.6:

Proof:

□

第 11 章 多元函数微分法及其应用

11.1 多元函数的基本概念

Example 11.1: 求证

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

Proof: $\forall\,\varepsilon>0$, 要使得

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\varepsilon$$

即

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2\leqslant\varepsilon$$

只要 $\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{\varepsilon}$, 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2\leqslant\varepsilon$$

原结论成立. □

Example 11.2: 求极限

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

Solution

$$\begin{aligned}0<\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}&=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{2\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}<\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}\\&<\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}+\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^{y^2}}\\&\overset{\text{洛必达}}{=\!=}0\end{aligned}$$

◀

Exercise 11.1: 设实数 x,y,z 满足

$$e^x+e^y+e^z=2+e^{x+y+z}$$

求极限

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{12}\right)$$

Solution 注意

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{e^y-1}+\frac{1}{e^z-1}=-1$$

且由泰勒或者伯努利函数得

$$\frac{1}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^{k-1}$$

其中 B_k 表示第 k 个伯努利数. 即有

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{e^y-1}+\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}+\frac{1}{y}-\frac{1}{2}+\frac{y}{12}+\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{z}{12}$$

即

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{12}\right)=\frac{1}{2}$$

◀

✎ Solution 显然 $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x+y+z}{12}=0$, 故仅需求 $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$
由 $e^x+e^y+e^z=2+e^{x+y+z}$ 得

$$(e^x-1)+(e^y-1)+(e^z-1)=e^{x+y+z}-1 \tag{11.1}$$

由此令 $r=e^x-1,\ s=e^y-1,\ t=e^z-1$, 则

$$(x,y,z)\to(0,0,0)\iff(r,s,t)\to(0,0,0) \tag{11.2}$$

且由 (11.1) 式可得

$$r+s+t=(1+r)(1+s)(1+t)-1\Longrightarrow\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=-1$$

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{12}\right)\\
=&\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{\ln(1+r)}+\frac{1}{\ln(1+s)}+\frac{1}{\ln(1+t)}\right)\\
=&\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{r-\frac{r^2}{2}+o(r^2)}+\frac{1}{s-\frac{s^2}{2}+o(s^2)}+\frac{1}{t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}\right)\\
=&\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{r}\left(1+\frac{r}{2}+o(r)\right)+\frac{1}{s}\left(1+\frac{s}{2}+o(s)\right)+\frac{1}{t}\left(1+\frac{t}{2}+o(t)\right)\right)\\
=&\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{3}{2}+\frac{o(r)}{r}+\frac{o(s)}{s}+\frac{o(t)}{t}\right)\\
=&\frac{1}{2}\quad(\text{利用(11.2)式})
\end{aligned}$$

因此原极限为 $\frac{1}{2}$ ◀

Exercise 11.2: 求极限

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$$

✎ Solution 因为 $|\sin x| \le |x|$, 因而有

$$0 \le \left|\frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right|$$

又

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right| &\le \frac{x^2}{x^2+y^2}\times|y| + \frac{y^2}{x^2+y^2}\times y^2 \\ &\le |y| + y^2 \to 0\end{aligned}$$

由夹逼准则知道极限为 0 ◀

Exercise 11.3: 求极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

✎ Solution 由于

$$\begin{aligned}|\sin(x^3+y^3)| &\le |x^3| + |y^3| \\ &\le (|x|+|y|)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| \le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(|x|+|y|) = 0$$

由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$$

◀

Exercise 11.4: 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ ——16 中科院数分

✎ Solution 由于

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \frac{\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}\right|} \le \frac{\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right|-1} \le \left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right| = 0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$$

◀

✎ Solution 由于

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \frac{2\,|x+y|}{x^2+y^2} \le 2\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \le 2\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} 2\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$$

◀

✎ Solution 注意到

$$x^2+y^2-xy\geq 2xy-xy=xy$$

由于

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leq\left|\frac{x+y}{xy}\right|\leq\left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$$

◀

Exercise 11.5: 求极限

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

✎ Solution 由于

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}&=\frac{x^4}{x^4+y^4}\times\frac{1}{x^2}+\frac{y^4}{x^4+y^4}\times\frac{1}{y^2}\\&\leq\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\end{aligned}$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$$

◀

Exercise 11.6: 求极限

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$$

✎ Solution 由于

$$\begin{aligned}0<\frac{(x^2+y^2)}{e^{x+y}}&=\frac{x^2}{e^{x+y}}+\frac{y^2}{e^{x+y}}\\&\leq\frac{x^2}{e^x}+\frac{y^2}{e^y}\end{aligned}$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{y\to+\infty}\frac{2y}{e^y}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{y\to+\infty}\frac{2}{e^y}=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$$

◀

Exercise 11.7: 求极限

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$$

Solution 注意到

$$0\le\frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$$

所以

$$0\le\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$$

从而

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$$

◀

Exercise 11.8: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

Solution 令 $x^2+y^2=t$ 则 $t\to0^+$ 所以有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim_{t\to0^+}t\ln t$$

又

$$\lim_{t\to0^+}t\ln t=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{1/t}=\lim_{t\to0^+}\frac{1/t}{-1/t^2}=0$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=0$$

◀

Exercise 11.9: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2\ln(x^2+y^2)$$

Solution 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2\ln(x^2+y^2)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

接着我们令 $x^2+y^2=t$ 则 $t\to 0^+$ 那么

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim_{t\to 0^+}t\ln t$$

又

$$\lim_{t\to 0^+}t\ln t=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{1/t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-1/t^2}=0$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2\ln(x^2+y^2)=0$$

◀

Exercise 11.10: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\ln(x^2+y^2)$$

Solution 因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}x\ln(x^2+y^2)=2\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

接着我们令 $\sqrt{x^2+y^2}=t$ 则 $t\to 0^+$ 那么

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\ln\sqrt{x^2+y^2}&=\lim_{t\to 0^+}t\ln t\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{1/t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-1/t^2}=0\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\ln(x^2+y^2)=0$$

◀

Exercise 11.11: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$$

Solution 当 (x,y) 沿着$y=kx$趋向于 $(0,0)$ 点时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\y=kx}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x-kx}{x+kx}=\frac{1-k}{1+k}$$

显然它的值随着 k 值的变化而变化，故极限不存在 (不满足极限的唯一性) ◀

Exercise 11.12: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

Solution 当 (x,y) 沿着$y=x$趋向于 $(0,0)$ 点时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 x^2}{x^2 x^2 + (x-x)^2} = 1$$

当 (x, y) 沿着$y = 0$趋向于 $(0, 0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 0^2}{x^2 0^2 + (x-0)^2} = 0$$

因此极限不存在 ◀

Exercise 11.13: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$

✎ Solution 当 (x, y) 沿着$y = kx^3 - x^2$趋向于 $(0, 0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3-x^2}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+(kx^3-x^2)^3}{x^2+kx^3-x^2}$$
$$= \frac{1}{k}$$

显然它的值随着 k 值的变化而变化，故极限不存在 ◀

Exercise 11.14: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}$$

✎ Solution 当 (x, y) 沿着$y = x^\alpha - x$趋向于 $(0, 0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^\alpha - x}} \frac{x^2y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^\alpha}$$
$$= \lim_{x\to 0}(x^2 - x^{3-\alpha}) = \begin{cases} -1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha < 3 \\ 0, & \alpha > 3 \end{cases}$$

故极限不存在 ◀

Exercise 11.15: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$$

✎ Solution 当 (x, y) 沿着$y = x^2 - x$趋向于 $(0, 0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}} \frac{xy}{x+y}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-x)}{x+x^2-x}$$
$$= \lim_{x\to 0}(x-1) = -1$$

当 (x,y) 沿着 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = 0$$

故极限不存在 ◀

Exercise 11.16: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y}$$

Solution 当 (x,y) 沿着 $y=x^3-x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^3-x}} \frac{x^2y}{x+y}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^3-x)}{x+x^3-x}$$
$$= \lim_{x\to 0}(x^2-1) = -1$$

当 (x,y) 沿着 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{x^2y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x} = 0$$

故极限不存在 ◀

11.2 偏导数

Example 11.3: 设 $u = e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在 $\left(2,\frac{1}{\pi}\right)$ 点处的值为 ______

Solution 由 Euler 公式，我们有

$$u = e^{-x}\sin\frac{x}{y} = \operatorname{Re} e^{-x}e^{\mathrm{i}\frac{x}{y}} = \operatorname{Re} e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}} = \operatorname{Re} v$$

v 对 x 求导一次得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\left(\frac{\mathrm{i}}{y}-1\right)$$

上式再次对 x 求导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\frac{-\mathrm{i}}{y^2} + \left(\frac{\mathrm{i}}{y}-1\right)e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\frac{-\mathrm{i}x}{y^2}$$
$$= e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\left(\frac{-\mathrm{i}}{y^2} + \left(\frac{\mathrm{i}}{y}-1\right)\frac{-\mathrm{i}x}{y^2}\right)$$

$$= e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}} \frac{-\mathrm{i}x}{y^2}\left(1 - x + \mathrm{i}\frac{x}{y}\right)$$

带值得

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})} = \frac{\pi^2(2\pi + \mathrm{i})}{e^2}$$

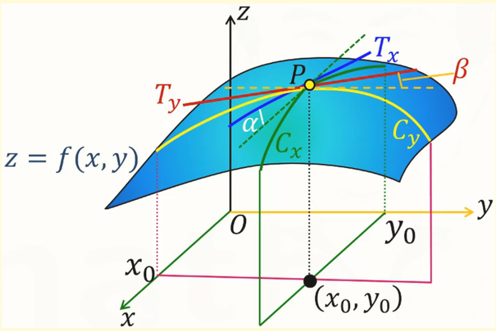
分离实部

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})} = \mathrm{Re}\,\frac{\pi^2(2\pi + \mathrm{i})}{e^2} = \frac{\pi^2}{e^2}\cdot 1 = \pi^2 e^{-2}$$

◀

Definition 11.1 偏导数的几何意义

$f'_x(x_0, y_0)$ 表示的是 $C_x : \begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点 P 处的切线 T_x 对 x 的斜率



$$f'_x(x_0, y_0) = \tan\alpha$$

$$\overrightarrow{T_x} = \left(1, 0, f'_x(x_0, y_0)\right)$$

同理有 $f'_y(x_0, y_0) = \tan\beta$, $\overrightarrow{T_y} = \left(0, 1, f'_y(x_0, y_0)\right)$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = \overrightarrow{T_x} \times \overrightarrow{T_y} = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

Example 11.4: 曲线 $\begin{cases} z = \dfrac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$, 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是多少?

Solution 设在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是 α, 则由

$$\tan\alpha = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)} = \left.\frac{x}{2}\right|_{(2,4,5)} = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

◀

11.3 全微分

Exercise 11.17: 证明：函数 $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ 在 (0,0) 点的偏导数存在且在 (0,0) 处不可微

Solution 显然有 $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = 0$, 由偏导数的定义知道

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0^2 y} - 0}{x} = 0$$

以及

$$f_y'(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2 0}-0}{y} = 0$$

即偏导数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在并且

$$f_x'(0,0) = f_y'(0,0) = 0$$

又因为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的全增量

$$\Delta f(x,y) = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = \sqrt[3]{(\Delta x)^2\Delta y}$$

记

$$\Delta f(x,y) = f_x'(0,0)\Delta x + f_y'(0,0)\Delta y + \omega = \omega$$

则有

$$\omega = \sqrt[3]{(\Delta x)^2\Delta y}$$

由微分的定义可知道, 如果 $f(x,y)$在$(0,0)$可微, 那么必然有 ω 是 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小量

下面证明极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在, 这一结果也就说明 $f(x,y)$在$(0,0)$不可微

考虑 $\Delta y = k\Delta x$ 则

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{1+k^2}} \tag{11.3}$$

显然他的值是随着 k 值的改变而改变, 故上式极限不存在, 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微 ◀

Exercise 11.18: 证明：函数 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 (0,0) 点的偏导数存在且在 (0,0) 处不可微

Solution 显然有 $f(\Delta x,0)=0$, $f(0,\Delta y)=0$, 由偏导数的定义知道

$$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\times 0}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x} = 0$$

以及

$$f_y'(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{0\times\Delta y}{0^2+\Delta y^2}-0}{\Delta y} = 0$$

即偏导数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在并且

$$f_x'(0,0) = f_y'(0,0) = 0$$

又因为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的全增量

$$\Delta f(x,y) = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

记

$$\Delta f(x,y)=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y+\omega=\omega$$

则有

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

由微分的定义可知道, 如果 $f(x,y)$在$(0,0)$可微, 那么必然有 ω 是 $\dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小量

下面证明极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在, 这一结果也就说明 $f(x,y)$在$(0,0)$不可微

考虑 $\Delta y=k\Delta x$ 则

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{1+k^2}} \tag{11.4}$$

显然他的值是随着 k 值的改变而改变, 故上式极限不存在, 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微 ◀

Exercise 11.19: 设 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(x,2x)=x$, $f_1'(x,2x)=x^2$, 求 $f_2'(x,2x)$

Solution 对 $f(x,2x)=x$ 两边对 x 求导

$$f_1'(x,2x)+2f_2'(x,2x)=1$$

由 $f_1'(x,2x)=x^2$ 可得

$$f_2'(x,2x)=\frac{1}{2}(1-x^2)$$

◀

Exercise 11.20: 设 $u(x,y)$ 的所有二阶偏导数都连续, 并且 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.
已知 $u(x,2x)=x, u_x(x,2x)=x^2$ 试求: $u_{xx}(x,2x)$, $u_{xy}(x,2x)$, $u_{yy}(x,2x)$

Solution 对 $u(x,2x)=x$ 两边对 x 求导

$$u_x'(x,2x)+2u_y'(x,2x)=1$$

由 $u_x(x,2x)=x^2$ 可得

$$u_y'(x,2x)=\frac{1}{2}(1-x^2)$$

上式两边对 x 求导

$$u_{xy}'(x,2x)+2u_{yy}''(x,2x)=-x \tag{11.5}$$

对 $u_x'(x,2x)=x^2$ 两边对 x 求导

$$u_{xx}''(x,2x)+2u_{xy}''(x,2x)=2x \tag{11.6}$$

利用 $u_{xx}=u_{yy}$, $u_{xy}=u_{yx}$, 联立式 (11.5) 和 (11.6) 求解可得

$$u_{xx}(x,2x)=u_{yy}(x,2x)=-\frac{4}{3}x \qquad u_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x$$

◀

Exercise 11.21: 设 $a,b\neq 0$, f 具有二阶连续偏导数, 且

$$a^2 f_{xx}+b^2 f_{yy}=0 \qquad f(ax,bx)=ax \qquad f_x(ax,bx)=bx^2$$

试求 $f_{xx}(ax,bx)$, $f_{xy}(ax,bx)$, $f_{yy}(ax,bx)$

Solution ◀

Exercise 11.22: 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有连续偏导数, 且 $f(x,x^2)=1$

1. 若 $f_x(x,x^2)=x$, 求 $f_y(x,x^2)$
2. 若 $f_y(x,y)=x^2+2y$, 求 $f(x,y)$

Solution ◀

Exercise 11.23: 设 $z=f(x,y)$ 有连续二阶偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad f(x,2x)=5x^2 \qquad f_x'(x,2x)=2x$$

求 $f(2,1)=$ ________

Solution 对 $f(x,2x)=5x^2$ 两边对 x 求导

$$f_x'(x,2x)+2f_y'(x,2x)=10x$$

由 $f_x'(x,2x)=2x$ 可得

$$f_y'(x,2x)=4x \tag{11.7}$$

上式两边对 x 求导

$$f_{xy}'(x,2x)+2f_{yy}''(x,2x)=4 \tag{11.8}$$

对 $f_x'(x,2x)=2x$ 两边对 x 求导

$$f_{xx}''(x,2x)+2f_{xy}''(x,2x)=2 \tag{11.9}$$

且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 联立 (11.8) 与 (11.9) 解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\ f_{xy}''(x,2x)=0$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\Longrightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=2y+h(x)\Longrightarrow f(x,y)=y^2+h(x)y+g(x)$$

再结合条件 $f(x,2x)=5x^2$ 以及式 (11.7) 可得

$$h(x)=0 \qquad g(x)=x^2$$

因此 $f(x,y)=x^2+y^2$, 故 $f(2,1)=5$ ◀

Exercise 11.24: 求极限

Solution ◀

11.4 隐函数的求导公式

Definition 11.2 隐函数存在定理 2 [2]

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一领域内具有连续偏导数, 且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一领域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$, 它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

11.5 多元函数微分学的几何应用

Example 11.5: 柱面螺线: $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$, $t=\frac{\pi}{2}$.
求螺线的切线和法平面.

Solution 切点: $\left(0,a,\frac{b\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} x'(t)&=(a\cos t)'=-a\sin t=-a\\ y'(t)&=(a\sin t)'=a\cos t=0\\ z'(t)&=(bt)'=b \end{aligned}$$

切向量: $\boldsymbol{T}=\{-a,0,b\}$. 切线: $\frac{x}{-a}=\frac{y-a}{0}=\frac{z-\frac{b\pi}{2}}{b}$
法平面:

$$-a\cdot(x-0)+0\cdot(y-a)+b\cdot\left(z-\frac{b\pi}{2}\right)=0\Longrightarrow ax-bz+\frac{b^2\pi}{2}=0$$

◀

Example 11.6: 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

✎ Solution $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,2z)\Longrightarrow \boldsymbol{n}\Big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$$

所以在点 $(1,2,3)$ 处此球面的切平面方程

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0\Longrightarrow x+2y+3z-14=0$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}\Longrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

◀

11.6 方向导数与梯度

Definition 11.3 梯度

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 具有一阶偏导数, 则定义

$$\operatorname{grad} u\Big|_{P_0}=\{u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0)\}$$

为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处的梯度.

♡

11.7 多元函数的极值及其求法

11.7.1 多元函数的极值及最大值与最小值

Definition 11.4 二元函数的极值

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，对于该邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y)：若满足不等式 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称函数在 (x_0,y_0) 有极大值；若满足不等式 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ ，则称函数在 (x_0,y_0) 有极小值；

♡

Theorem 11.1 必要条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数必然为零：

$$f_x(x_0,y_0)=0\quad f_y(x_0,y_0)=0$$

♣

Theorem 11.2 充分条件

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A\,,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B\,,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C$$

则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$ 时具有极值，当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值, 也可能没有极值，还需另作讨论.

Example 11.7: 设 $f(x,y)$ 在单位圆域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$ 上具有一阶连续的偏导数, 且满足 $|f(x,y)|\leqslant 1$. 证明: 在单位圆域内有一点 (x_0,y_0) 使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2\leqslant 16$$

Proof: 设 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$. 则在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上显然有 $g(x,y)\geqslant 1$. 而 $g(0,0)\leqslant 1$. 所以或者 g 在 D 上恒等于 1, 或者在单位圆内存在一点 (x_0,y_0), 使 g 在该点取到极小值. 总之, 必在单位圆内存在一点 (x_0,y_0) 使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0$$

由此可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-4x_0\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-4y_0$$

故

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2=16(x_0^2+y_0^2)\leqslant 16$$

□

Example 11.8: 设在区域 $D: |x|+|y|\leqslant 1$ 上, 函数 $f(x,y)$ 连续, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 存在, 且满足 $|f(x,y)|\leqslant 1$. 证明: 在区域 D 内存在一点 (x_0,y_0) 使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2\leqslant 8$$

Proof: 设 $g(x,y)=f(x,y)+(|x|+|y|)^2$. 则在区域 $D: |x|+|y|\leqslant 1$ 上显然有 $g(x,y)\geqslant 1$. 而 $g(0,0)\geqslant 1$. 所以或者 g 在 D 上恒等于 1, 或者在区域 D 内存在一点 (x_0,y_0), 使 g 在该点取到极小值. 总之, 必在区域 D 内存在一点 (x_0,y_0) 使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0$$

由此可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2(|x| + |y|)$$

故

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 = 2\big(-2(|x| + |y|)\big)^2 \leqslant 8$$

□

可微分取极值的充分条件

Theorem 11.3 可微分取极值的充分条件

设 n 元函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶连续偏导数, 且 $\nabla f(x_0) = 0$, 记 $\mathrm{H}(x_0)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的黑塞矩阵

1. 如果 $\mathrm{H}(x_0)$ 正定, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点
2. 如果 $\mathrm{H}(x_0)$ 负定, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点
3. 如果 $\mathrm{H}(x_0)$ 不定, 则 x_0 为 $f(x)$ 的鞍点
4. 其它情况需要另行判定

♣

黑塞矩阵

Definition 11.5 黑塞矩阵

设 n 元函数 $f(x)$ 在点 x_0 处对于自变量的各分量的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 连续, 则称矩阵

$$\mathrm{H}(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数或黑塞矩阵 (Hessian Matrix), 也可记作 $\nabla^2 f(x)$. 易知矩阵 $\mathrm{H}(x)$ 为对称矩阵.

♡

实对称矩阵的正定性相关定义及判定

1. 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定的充要条件是它各阶主子式都大于 0. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0\,,\ (r=1,2,\cdots,n).$$

2. 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 负定的充要条件是它奇数阶主子式都小于 0, 偶数阶主子式大于 0. 即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0\,,\ (r=1,2,\cdots,n).$$

3. 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定: 所有特征根大于 0.

4. 实对称矩阵 A 是半正定矩阵的充要条件是它的所有主子式都大于等于 0

5. 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是半负定矩阵的充要条件是它的所有奇数阶主子式都小于等于 0, 并且它的所有偶数阶主子式大于等于 0.

6. 如果实对称矩阵 A 既不是半正定的, 也不是半负定的, 就称 A 为不定矩阵

Example 11.9: (第九届非数类预赛) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶导数. 对任意角度 α, 定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$. 证明: $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值

Solution 方法 1 由于 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=\left(f_x,f_y\right)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$ 对一切 α 成立,

故 $\left(f_x,f_y\right)_{(0,0)}=(0,0)$, 即 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点. 记 $H_f=(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(f_x,f_y\right)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)}=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$$

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 成立,
故 $H_f(0,0)$ 是一个正定阵, 而 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值.

方法 2 易得 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t} = f_x\cos\alpha + f_y\sin\alpha$, 令 $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, 由已知 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t} = 0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t} = f_x(0,0)\cos\alpha + f_y(0,0)\sin\alpha = 0$$

由 α 的任意性得 $\begin{cases} f_x(0,0) = 0 \\ f_y(0,0) = 0 \end{cases}$, 从而 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f_x\cos\alpha + f_y\sin\alpha\big)\\ &= \big(f_{xx}\cos\alpha + f_{xy}\sin\alpha\big)\cos\alpha + \big(f_{yx}\cos\alpha + f_{yy}\sin\alpha\big)\sin\alpha\\ &= f_{xx}\cos^2\alpha + 2f_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + f_{yy}\sin^2\alpha\\ &= \sin\alpha\cos\alpha\big[f_{xx}\cot^2\alpha + 2f_{xy} + f_{yy}\tan^2\alpha\big]\end{aligned}$$

由已知

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\big[f_{xx}(0,0)\cot^2\alpha + 2f_{xy}(0,0) + f_{yy}(0,0)\tan^2\alpha\big] > 0$$

令 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ 得

$$f_{xy}(0,0) > -\frac{1}{2}\big[f_{xx}(0,0) + f_{yy}(0,0)\big]$$

从而

$$\begin{aligned}&\big[f_{xy}(0,0)\big]^2 - f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)\\ >&\frac{1}{4}\big[f_{xy}(0,0)\big]^2 + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) + \frac{1}{4}\big[f_{yy}(0,0)\big]^2 - f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)\\ =&\frac{1}{4}\Big\{\big[f_{xy}(0,0)\big]^2 - 2f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) + \big[f_{yy}(0,0)\big]^2\Big\}\\ =&\frac{1}{4}\big[f_{xx}(0,0) - f_{yy}(0,0)\big]^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

这就说明 $B^2 - AC > 0$, $f(0,0)$ 为极值. 下面证明 $f(0,0)$ 为极小值,

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{g'_\alpha(t) - g'_\alpha(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{g'_\alpha(t)}{t} > 0$$

由保序性知: $t > 0$ 时, $g'_\alpha(t) > 0 \Longrightarrow g_\alpha(t)\uparrow$; $t < 0$ 时, $g'_\alpha(t) < 0 \Longrightarrow g'_\alpha(t)\downarrow$
所以 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值. ◀

11.7.2 条件极值 拉格朗日乘数法

Example 11.10: 设 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 求方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 7x^3 + 14y^3 + 21z^3 = 6 \end{cases}$ 的解

Solution 考察 $f(x) = 7x^3 + 14y^3 + 21z^3$ 在约束 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极值
构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z) = 7x^3 + 14y^3 + 21z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

由

$$\begin{cases} L_x = 21x^2 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 42y^2 + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 63z^2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2\lambda}{21} = \dfrac{2\lambda}{21}(-1) \\ y = -\dfrac{2\lambda}{42} = \dfrac{2\lambda}{21}\left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ z = -\dfrac{2\lambda}{63} = \dfrac{2\lambda}{21}\left(-\dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Longrightarrow \left(\frac{2\lambda}{21}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = 1 \Longrightarrow \lambda = -9$$

$$\Longrightarrow x = \frac{6}{7},\ y = \frac{3}{7},\ z = \frac{2}{7}$$

故 $f_{\min} = \dfrac{1}{49}(6^3 + 2 \times 3^3 + 3 \times 2^3) = 6$. 因此方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 7x^3 + 14y^3 + 21z^3 = 6 \end{cases}$ 的解为

$$x = \frac{6}{7},\ y = \frac{3}{7},\ z = \frac{2}{7}$$

◀

Example 11.11: 平面曲线 $L: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, 绕 x 轴旋转所得曲面 S, 求曲面 S 的内接长方体体积的最大体积

Proof: 长方体长 $2x$, 宽 $2y$, 高 $2z$, 曲面 S 方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

内接长方体体积为

$$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz$$

作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right)$$

$$\begin{cases} L_x = yz + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0 & (11.10) \\ L_y = xz + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0 & (11.11) \\ L_z = xy + \dfrac{2\lambda z}{b^2} = 0 & (11.12) \end{cases}$$

$(11.10) \cdot x + (11.11) \cdot y + (11.12) \cdot z$, 并由约束条件 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ 得

$$3xyz + 2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2}\right) = 0 \Longrightarrow 3xyz + 2\lambda = 0 \Longleftrightarrow xyz = -\frac{2\lambda}{3}$$

$$\begin{cases} xL_x = xyz + \dfrac{2\lambda x^2}{a^2} = 0 \\ yL_y = xyz + \dfrac{2\lambda y^2}{b^2} = 0 \\ zL_z = xyz + \dfrac{2\lambda z^2}{b^2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{3}} \\ z = \dfrac{b}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

于是, 我们得到可能极值点为 $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, 由实际问题的特性及点的唯一性, 当 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}, y=\frac{b}{\sqrt{3}}, z=\frac{b}{\sqrt{3}}$ 时, 内接长方体的体积最大, 且最大体积为

$$V=8xyz=\frac{8}{3\sqrt{3}}ab^2$$

□

11.8 二元函数的泰勒公式

Exercise 11.25: 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数, $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M$. 若 $f(0,0)=0, f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant \frac{\pi\sqrt{M}}{4}$$

Proof:在点 $(0,0)$ 展开 $f(x,y)$ 得

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y)\\&=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)\end{aligned}$$

其中 $\theta\in(0,1)$, 记 $(u,v,w)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\theta x,\theta y)$, 则

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(ux^2+2vxy+w^2y\right)$$

已知条件 $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M \iff u^2+2v^2+w^2\leqslant M$

$$f(x)=\frac{1}{2}\{u,\sqrt{2}v,w\}\cdot\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}$$

由于

$$\left|\{u,\sqrt{2}v,w\}\right|=\sqrt{u^2+2v^2+w^2}\leqslant\sqrt{M}$$

以及

$$\left|\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}\right|=\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4}=x^2+y^2$$

我们有

$$\left|\{u,\sqrt{2}v,w\}\cdot\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}\right|\leqslant\sqrt{M}(x^2+y^2)$$

即

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{M}(x^2+y^2)$$

根据保序性，从而

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{M}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi\sqrt{M}}{4}$$

□

Example 11.12: (18 北大数分) 设 f 在 $(0,0)$ 某个邻域内二阶连续可微, 求极限

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{R^4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Solution(by Hansschwarzkopf) 根据题意, 有

$$f(x,y)=f(0,0)+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{i!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(0,0)+o\left(x^2+y^2\right)(x^2+y^2\to 0).$$

从而

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(f_{xx}(0,0)x^2+f_{yy}(0,0)y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+o(R^4)$$
$$=\frac{\pi R^4}{8}f_{xx}(0,0)+\frac{\pi R^4}{8}f_{yy}(0,0)+o(R^4)(R\to 0^+).$$

因此

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{R^4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{8}f_{xx}(0,0)+\frac{\pi}{8}f_{yy}(0,0).$$

注记: 原条件是 $f\in C^3$, 实际上 $f\in C^2$ 足矣. ◀

Exercise 11.26:

Solution ◀

第 12 章 重积分

12.1 二重积分的概念与性质

Theorem 12.1 二重积分的中值定理

设函数 $f(x,y)$ 在闭区间 D 上连续,σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ,η) , 使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

Exercise 12.1: 求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\int_1^{\frac{1}{n}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{2}{n}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_1^{\frac{n-1}{n}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x\right]$$

Solution

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_1^{\frac{i}{n}} e^{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^y e^{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\\&=-\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-e)\end{aligned}$$

◀

Exercise 12.2: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right)$$

Solution

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(n+i+j)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{i}{n}+\frac{j}{n})^2}\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{(1+x+y)^2} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[-\frac{1}{1+x+y} \right]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

◀

Exercise 12.3: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i+j}{i^2+j^2}$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i+j}{i^2+j^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}}{\left(\frac{i}{n}\right)^2+\left(\frac{j}{n}\right)^2} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x+y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\ln(1+y^2) - 2\ln y \right) \mathrm{d}y + \int_0^1 \arctan \frac{1}{y} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \ln 2 - \int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2} \mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}y + \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \arctan y \mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{2} + \ln 2
\end{aligned}$$

◀

Exercise 12.4: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{j} i}{n^3}$$

✎ Solution1

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{j} i}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1+2}{n^3} + \cdots + \frac{1+2+\cdots+n}{n^3} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1)}{2n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(n^2+n)}{2n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+2+\cdots+n)+(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{2n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{2n^3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

◀

✎ Solution2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{n}=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

◀

✎ Solution3

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)}{n^3}\\&\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^3-(n-1)^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{3n^2-3n+1}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

◀

Example 12.1: 计算 $\iint_D \lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,2]\times[0,2]$.

✎ Solution 首先将区域 D 分为 4 个小区域, $D_k: k-1\leqslant x+y<k$, $k=1,2,3,4$, 于是有

$$\begin{aligned}S_{D_1}&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}\Longrightarrow\iint_{D_1}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_1}=\frac{1}{2}\times0=0\\S_{D_2}&=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{3}{2}\Longrightarrow\iint_{D_2}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_2}=\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{2}\\S_{D_3}&=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{3}{2}\Longrightarrow\iint_{D_3}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_3}=\frac{3}{2}\times2=3\\S_{D_4}&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}\Longrightarrow\iint_{D_4}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_4}=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

故

$$\iint_D\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0+\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}=6$$

◀

Example 12.2: 计算 $\iint_D\lfloor x^2+y^2\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant n, x>0, y>0\}$.

✎ Solution[15] 将区域 $D: x>0,\ y>0,\ x^2+y^2\leqslant n$ 分为 n 个小区域,

$$D_k: k-1\leqslant x^2+y^2<k, x>0, y>0\ ,\ k=1,2,\cdots,n$$

这 n 个小区域的面积均为 $\frac{\pi}{4}$, 且 $\lfloor x^2+y^2\rfloor$ 在这些区域的取值为 $0,1,\cdots,n-1$, 于是我们有

$$\iint_D\lfloor x^2+y^2\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k}\lfloor x^2+y^2\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k-1)\iint_{D_k} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}(k-1)$$
$$= \frac{\pi}{8}n(n-1)$$

◀

Exercise 12.5: 设区域 D:$x^2+y^2 \le r^2$, 求 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Solution

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi r^2\\
=&\lim_{\substack{r\to 0\\(\xi,\eta)\to(0,0)}} e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)=1
\end{aligned}$$

Note: *设函数 $f(x,y)$ 在闭区间 D 上连续, σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ,η), 使得*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

◀

Exercise 12.6: 证明不等式:

$$2\pi\left(\sqrt{17}-4\right) \le \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}} \le \frac{\pi}{4}.$$

Solution 左边不等式:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}} \geqslant \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+x^2+y^2}}$$
$$= 2\pi(16+r^2)^{1/2}\Big|_0^1 = 2\pi\left(\sqrt{17}-4\right).$$

右边不等式:

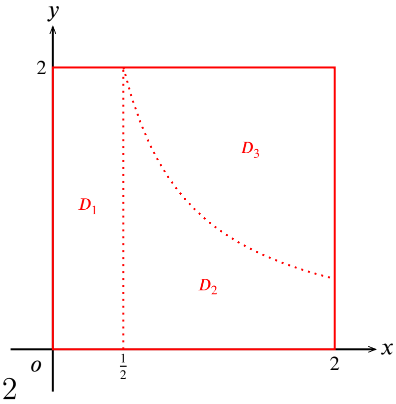
$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}} \leqslant 4\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}$$

◀

12.2 二重积分的计算法

Example 12.3: 求 $\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$

Solution



设 $D_1 = \left\{(x,y)\middle| 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant y \leqslant 2\right\}$

$D_2 = \left\{(x,y)\middle| \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\right\}$

$D_3 = \left\{(x,y)\middle| \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant 2\right\}$

$\iint_{D_1 \cup D_2} \mathrm{d}\,\mathrm{d}y = 2 \times \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1 + 2\ln 2$

$\iint_{D_3} \mathrm{d}\,\mathrm{d}y = \left(2 - \frac{1}{2}\right) \times 2 - \iint_{D_2} \mathrm{d}\,\mathrm{d}y = 3 - 2\ln 2$

$\iint_{D} \operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_3} \mathrm{d}\,\mathrm{d}y - \iint_{D_1 \cup D_2} \mathrm{d}\,\mathrm{d}y = 2 - 4\ln 2$ ◀

Exercise 12.7: 计算积分

$$\int_0^2 \int_0^4 (6 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Solution

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \int_0^4 (6 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=&\int_0^2 \left[6x - \frac{1}{2}x^2 - xy\right]_0^4 \mathrm{d}y \\
=&\int_0^2 (16 - 4y)\,\mathrm{d}y \\
=&\left[16y - 2y^2\right]_0^2 = 24
\end{aligned}$$

◀

Exercise 12.8: 证明

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (xy)^{xy}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^y\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

Solution 令 $xy = t$ ，我们有 (注意 $xy = 0$ 时给定 $xy^{xy} = 1$)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 (xy)^{xy}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y} \int_0^1 (xy)^{xy} d(xy) \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y} \int_0^y t^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\int_0^y t^t\,\mathrm{d}t\right) d\ln y \\
&= \ln y \cdot \int_0^y t^t\,\mathrm{d}t \Big|_0^1 - \int_0^1 y^y \ln y\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 y^y \ln y\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^1 y^y(1 + \ln y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 d(y^y) = \left[y^y\right]_0^1 = \lim_{x \to 1^-} y^y - \lim_{x \to 0^+} y^y = 1 - 1 = 0$$

故

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (xy)^{xy}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^y(1 + \ln y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 y^y \ln y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^y\,\mathrm{d}y$$

进一步

$$\int_0^1 y^y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 e^{y\ln y}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y\ln y)^n}{n!}\,\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(y\ln y)^n}{n!}\,\mathrm{d}y$$

因为

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (y\ln y)^n\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{\ln^n y}{n+1} d\,y^{n+1} \\
&= \left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\ln^n y\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{n+1} y^n \ln^{n-1} y\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{n}{(n+1)^2}\int_0^1 \ln^{n-1} y\, d\,y^{n+1} \\
&= \left[-\frac{n}{(n+1)^2} y^{n+1}\ln^{n-1} y\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} y^n \ln^{n-2} y\,\mathrm{d}y \\
&= \cdots = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 y^y\,\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(y\ln y)^n}{n!}\,\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n} \approx 0.783430\cdots$$

所以

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (xy)^{xy}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^y\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

◀

Exercise 12.9: 计算积分 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 D 是由 $x^2+y^2 \leqslant 2$ 和 $x^2+y^2 \geqslant 2x$ 所围成的区域

Solution

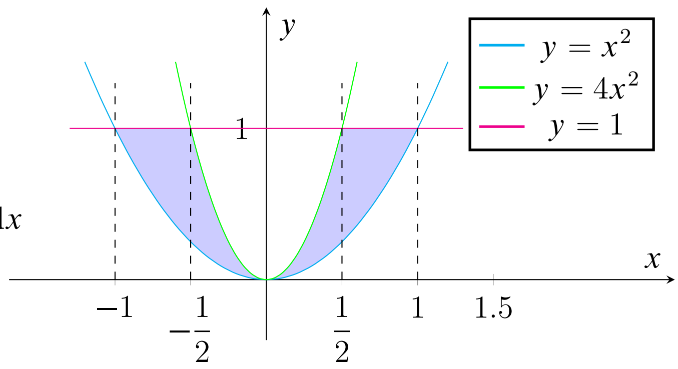
$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 0 \\
&= 2\iint\limits_{D_{11}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint\limits_{D_{12}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\cos\theta\mathrm{d}\rho + 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} x\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\frac{1}{3}\rho^3\cos\theta\right]_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\theta + 2\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x - 2\int_0^1 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta + \left[-\frac{2}{3}\sqrt{(2-x^2)^3}\right]_0^1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1 (2-2x)\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\Big[\sin\theta\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \left[\frac{2}{3}\sqrt{(2x-x^2)^3}\right]_0^1 - 2\times\frac{\pi}{4} \\
&= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 12.10: 计算积分 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$ 其中 D 是由 $y=x^2$，$y=4x^2$，$y=1$ 所围成

✎ Solution 区域 D 如图



$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma \\
&= 0 + 2\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \Big[xy\Big]_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y = \left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

◀

✎ Solution

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{-\frac{\sqrt{y}}{2}} (x+y)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} (x+y)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy\right]_{-\sqrt{y}}^{-\frac{\sqrt{y}}{2}} \mathrm{d}y + \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy\right]_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}y\right)\mathrm{d}y + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}y\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y = \left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 12.11: 计算积分

$$
\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right)\mathrm{d}x
$$

✎ Solution

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 e^{y^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{e^{x^2}}{x} \mathrm{d}y - \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 e^{y^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 e^{x^2}\, \mathrm{d}x - \int_0^1 (1-y)e^{y^2}\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y e^{y^2}\, \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}
\end{aligned}$$

Example 12.4: 计算: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{260n\pi} \dfrac{t|\sin t|}{\iint_D x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} \mathrm{d}t$, 其中 $D: x^2 - 260x + y^2 \leqslant n^2 - 260n$

Proof:(by 蓝兔兔)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^{260n\pi} \frac{t|\sin t|}{\iint_D x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} \mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{260n\pi} t|\sin t|\, \mathrm{d}t}{\iint_D x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(260n)^2\pi}{130\pi(n-130)^2} = 520
\end{aligned}$$

□

Exercise 12.12: 设平面区域 $D = \{(x,y)|1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, 设 $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且有

$$f(x,y) = \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2}) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{xf(x,y)}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求 $f(x,y)$

Solution 由

$$f(x,y) = \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2}) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{xf(x,y)}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

得

$$\frac{xf(x,y)}{x+y} = \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y} - \frac{1}{\pi}\frac{x}{x+y}\iint\limits_D \frac{xf(x,y)}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意到 $\iint\limits_D \dfrac{xf(x,y)}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是个常数，故令 $C = \iint\limits_D \dfrac{xf(x,y)}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

则

$$C = \iint\limits_D \frac{xf(x,y)}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{C}{\pi}\iint\limits_D \frac{x}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{轮换对称性}} \iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D} \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \rho\sin(\pi\rho)\mathrm{d}\rho = -\frac{3}{4}$$

$$\iint\limits_{D} \frac{x}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{轮换对称性}} \iint\limits_{D} \frac{y}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{15\pi}{8}$$

由此可知 $C = -\frac{23}{6}$, 故

$$f(x,y) = \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{23}{6\pi}$$

◀

Example 12.5: 设 $u(x) \in C[0,1]$ 且 $u(x) = 1 + \lambda\int_x^1 u(y)u(y-x)\,\mathrm{d}y$. 试证: $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$

Solution 等式两边对 x 从 0 到 1 积分，得

$$\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \lambda\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 u(y)u(y-x)\,\mathrm{d}y$$
$$= 1 + \lambda\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 u(y)u(y-x)\,\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal{\text{交换积分次序}} 1 + \lambda\int_0^1 u(y)\,\mathrm{d}y\int_0^y u(y-x)\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{y-x=t} 1 + \lambda\int_0^1 u(y)\,\mathrm{d}y\int_0^y u(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{\text{轮换对称性}} 1 + \lambda\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t\int_0^t u(y)\,\mathrm{d}y$$
$$= 1 + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 u(y)\,\mathrm{d}y\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$$

设 $\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x = a$, 故

$$a = 1 + \frac{\lambda}{2}a^2 \Longrightarrow \Delta = 1 - 4\cdot\frac{\lambda}{2} \geqslant 0 \Longrightarrow \lambda \leqslant \frac{1}{2}$$

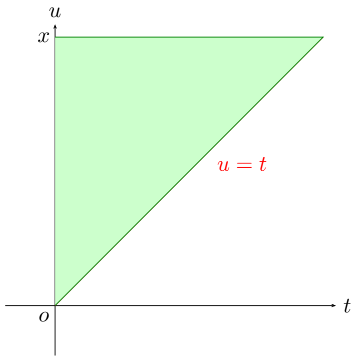
◀

Exercise 12.13: 设 $\varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 证明:

$$I = \int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \varphi(t)\right]\mathrm{d}t$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\varphi(t)\right]\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\ &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\ &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\ &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$



◀

Exercise 12.14: 求极限

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}y-\int_0^y\mathrm{d}x\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)$$

✎ Solution:

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}y-\int_0^y\mathrm{d}x\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)\\ =&\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}y-\int_0^y e^{-u^2}(y-u)\,\mathrm{d}u\right)\\ =&\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}y-y\int_0^y e^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\int_0^y ue^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)\\ =&\lim_{y\to+\infty}\left(y\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^y e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)+\frac{1-e^{-y^2}}{2}\right)\\ =&\lim_{y\to+\infty}y\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^y e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)+\lim_{y\to+\infty}\frac{1-e^{-y^2}}{2}\\ =&0+\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

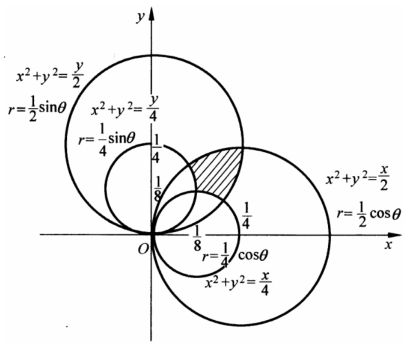
Example 12.6: 平面上由 $2\leqslant\dfrac{x}{x^2+y^2}\leqslant 4$ 与 $2\leqslant\dfrac{y}{x^2+y^2}\leqslant 4$ 所确定的区域记为 Ω. 证明:

$$\iint_D\frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\ln^2 2$$

✎ Solution 积分区域关于 $y=x$ 对称, 被积函数也关于 $y=x$ 对称.
只须考虑从 x 轴到 $y=x$ 所夹的一部分.
曲线 $x^2+y^2=\dfrac{x}{2}$,$x^2+y^2=\dfrac{x}{4}$,$x^2+y^2=\dfrac{y}{2}$,$x^2+y^2=\dfrac{y}{4}$ 的极坐标方程分别是

$$r=\frac{1}{2}\cos\theta,\quad r=\frac{1}{4}\cos\theta,\quad r=\frac{1}{2}\sin\theta,\quad r=\frac{1}{4}\sin\theta$$

而 $r=\dfrac{1}{4}\cos\theta$ 与 $r=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ 的交点为 $\left(\frac{1}{2\sqrt{5}},\arctan\frac{1}{2}\right)$，所以



$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{4}\cos\theta}^{\frac{1}{2}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}r}{r\cos\theta\sin\theta}\\
&= 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\ln\frac{\frac{1}{2}\sin\theta}{\frac{1}{4}\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&= 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\tan\theta)}{\tan\theta}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\ln^2(2\tan\theta)\Big|_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\\
&= \ln^2 2
\end{aligned}
$$

◀

Example 12.7: 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

✎ Solution 积分区域参考同济 7 高数 p372 页

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(x+2y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}(x+y)y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{2\pi}\Big(t-\sin t+1-\cos t\Big)(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{u=t-\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(u+\pi+\sin u+1+\cos u\Big)(1+\cos u)^2\,\mathrm{d}u\\
&\xlongequal{\text{奇偶性}} 2\int_0^{\pi}\Big(\pi+1+\cos u\Big)(1+\cos u)^2\,\mathrm{d}u\\
&\xlongequal{\theta=u-\frac{\pi}{2}} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\pi+1-\sin\theta\Big)(1-\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta\\
&= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^3\,\mathrm{d}\theta\\
&\xlongequal{\text{奇偶性}} 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+3\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&\xlongequal{\text{Wallis}} 4\pi\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)+4\left(\frac{\pi}{2}+3\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\pi(3\pi+5)
\end{aligned}
$$

◀

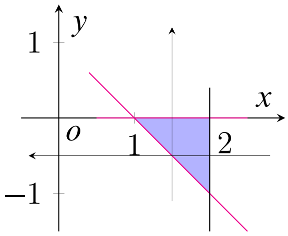
12.2.1 交换积分次序

Exercise 12.15: 交换二重积分的积分次序

$$
\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x
$$

Solution

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{2}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{1-y}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x$$



$$= -\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{1-x}^{0} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{0}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

Note: 注意积分上下限次序

Exercise 12.16: 交换二重积分的积分次序

$$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

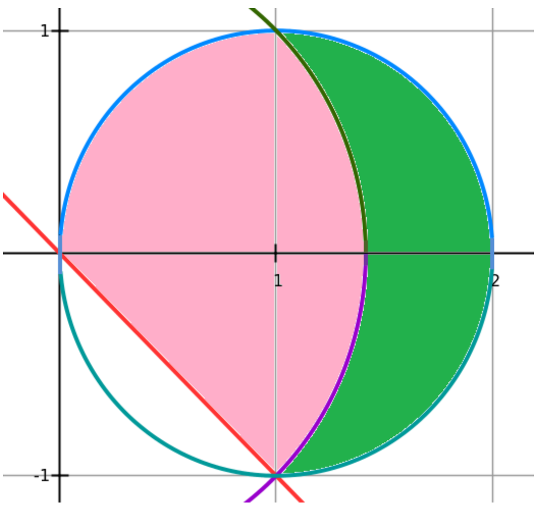
Solution

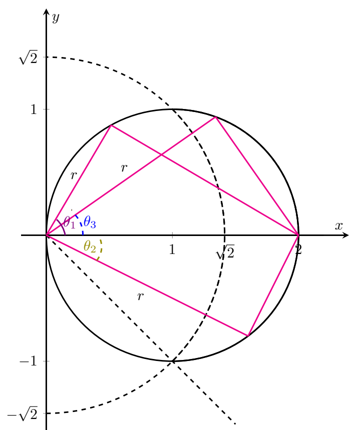
$$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

Exercise 12.17: 在极坐标下交换积分次序

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}r \int_{0}^{2\cos\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Solution





$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}r \int_{0}^{2\cos x} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \iint\limits_{\text{草绿色的区域}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \iint\limits_{\text{粉红色的区域}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\sqrt{2}}^{2} \mathrm{d}r \int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

◀

Exercise 12.18: 交换二重积分的积分次序

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

Solution

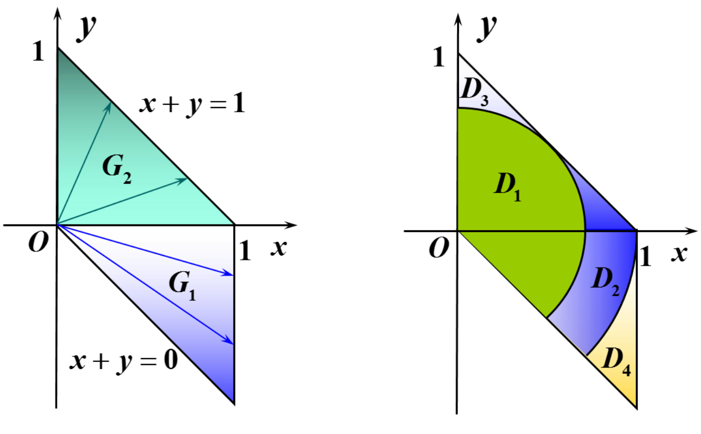
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\csc\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta + \int_1^{\sqrt{2}} \rho\mathrm{d}\rho \int_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

◀

Exercise 12.19: 对积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 作极坐标变换, 并表示为不同次序的累次积分, 其中 $D = \{(x,y)|0 \leqslant 1, 0 \leqslant x+y \leqslant 1\}$

Solution



(a) (b)

经过极坐标变换后, D 可分解为二个 θ 型区域:

$$G_1 = \left\{(r,\theta)\middle| -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant 0, 0 \leqslant r \leqslant \sec x\right\}$$

$$G_2 = \left\{(r,\theta)\middle| 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}\right\}$$

又可分解为四个 r 型区域 (见图 (b)):

$$D_1 = \left\{(r,\theta)\middle| 0 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$D_2=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant 1,-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}\right\}$$

$$D_3=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant 1,\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$D_4=\left\{(r,\theta)\middle|1\leqslant r\leqslant\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant-\arccos\frac{1}{r}\right\}$$

于是

$$I=I_1+I_2=J_1+J_2+J_3+J_4$$

其中

$$I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$J_1=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$J_2=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$J_3=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}}^{\frac{\pi}{2}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$J_4=\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\arccos\frac{1}{r}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

◀

Example 12.8: 设 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上可微, 且 $f(0,0)=0$, 求极限

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}}$$

✎ Solution 将分子交换积分次序, 则有

$$\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u=-\int_0^{x}\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\,\mathrm{d}t,$$

并由等价无穷小 $e^x-1\sim x(x\to0)$ 和洛必达法则, 则有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^{x}\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\,\mathrm{d}t}{x^4}$$

$$\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^{x^2}f(t,x)\,\mathrm{d}t}{4x^3}$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal{\text{积分中值定理}} -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2 f(\xi,x)\,\mathrm{d}t}{x^3}\\
&= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\xi,x)}{x}\\
&= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(0,0)+f_x'(0,0)\xi+f_y'(0,0)x+o\left(\sqrt{\xi^2+x^2}\right)}{x}
\end{aligned}
$$

其中 $0<\xi<x^2$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\xi}{x}=0$, 又 $f(0,0)=0$, 从而

$$
\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}} = -\frac{1}{4}f_y'(0,0)
$$

◀

12.2.2 二重积分的换元法

Theorem 12.2 二重积分的换元公式

设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续, 若变换

$$T:\ x=x(u,v),\ y=y(u,v)$$

将 uOv 平面上的闭区域 D' 变为 xOy 平面上的 D, 且满足

(1) $x(u,v), y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数

(2) 在 D' 上雅可比式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

(3) 变换 $T:\ D'\rightrightarrows D$ 是一对一的

则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\big|J\big|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Exercise 12.20: 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\}$, 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D |x-y|\,\mathrm{d}\sigma$

Solution 作代换

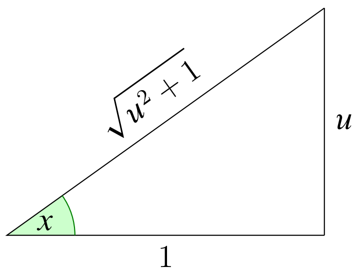
$$\begin{cases}x=2\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\Longrightarrow J(\rho,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix}2\cos\theta & -2\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=2\rho$$

$x=y\Longrightarrow\theta=\arctan 2$

$$\begin{aligned}\iint_D |x-y|\,\mathrm{d}\sigma&=\iint_{D_1}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(y-x)\,\mathrm{d}\sigma\\ &=\int_0^{\arctan 2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 2\rho(2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\rho\\ &\quad+\int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 2\rho(\rho\sin\theta-2\rho\cos\theta)\,\mathrm{d}\rho\\ &=\int_0^{\arctan 2}\frac{2}{3}(2\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}(\sin\theta-2\cos\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}(2\sin\theta + \cos\theta)\Big|_0^{\arctan 2} + \frac{2}{3}(-\cos\theta - 2\sin\theta)\Big|_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{3}(4\sin\arctan 2 + 2\cos\arctan 2 - 3) \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{5} - 2
\end{aligned}
$$

其中



$$\tan x = u \Longrightarrow x = \arctan u$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin\arctan u = \dfrac{u}{\sqrt{u+1}} \\ \cos x = \cos\arctan u = \dfrac{1}{\sqrt{u+1}} \end{cases}$$

◀

Exercise 12.21: 计算积分 $\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,dx\,dy$ 其中区域 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成的三角形区域

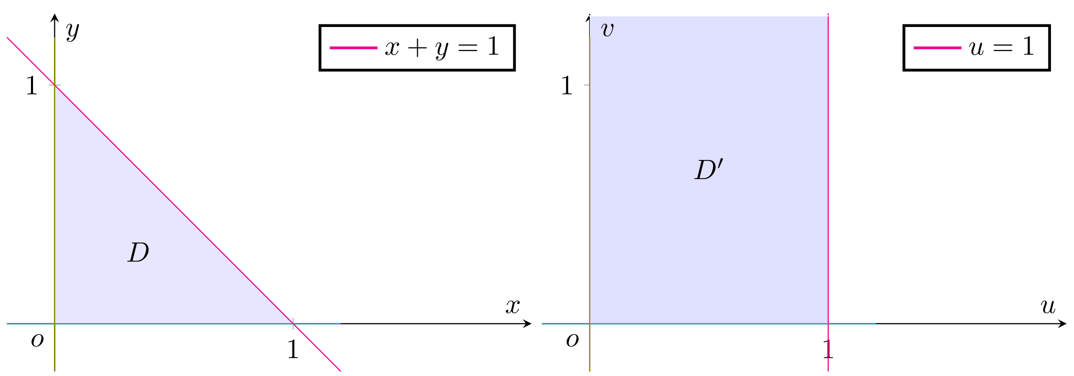
✎ Solution 令 $u = x+y,\ v = \dfrac{y}{x}$, 其雅可比行列式为

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

区域 D 变为 D' , 即

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \dfrac{u}{1+v} = 0 \Longrightarrow u = 0 \\ y = 0 \Longrightarrow \dfrac{uv}{1+v} = 0 \Longrightarrow uv = 0 \\ x+y = 1 \Longrightarrow \dfrac{u}{1+v} + \dfrac{uv}{1+v} = 1 \Leftrightarrow u = 1 \end{cases}$$

区域 D 与区域 D' 如图所示



那么有

$$\iint\limits_{D} \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} \frac{u\ln(1+v)}{\sqrt{1-u}}\cdot\frac{|u|}{(1+v)^2}\,du dv$$
$$= \int_0^{+\infty} dv \int_0^1 \frac{u^2\ln(1+v)}{(1+v)^2\sqrt{1-u}}du$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}dv \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}}du$$

其中

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}dv = \left[-\frac{\ln(1+v)}{1+v}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+v)^2}dv = 0 - \left[\frac{1}{1+v}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$K = \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}}du = \mathrm{B}\left(3,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}} = \frac{16}{15}$$

故

$$\iint\limits_{D} \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,dx\,dy = 1\cdot\frac{16}{15} = \frac{16}{15}$$

◀

Exercise 12.22: 计算

$$\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1} \sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dxdy$$

Solution 作变换

$$\begin{cases} x = \rho^4\cos^4\theta \\ y = \rho^4\sin^4\theta \end{cases} \Longrightarrow J = 16\rho^7\cos^3\theta\sin^3\theta$$

在这变换下, 区域 $D = \{(x,y)\big|\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1\}$ 对应区域 $D' = \left\{(\rho,\theta)\Big|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\rho\leqslant 1\right\}$
因此有

$$\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1} \sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dxdy = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin^3\theta d\theta \int_0^1 \rho^{\frac{23}{3}}d\rho = \frac{2}{13}$$

◀

Example 12.9: $\iint_D y\,dx\,dy$, 其中 D 是由 x 轴 y 轴与曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 围成, $a>0, b>0$

Solution 作变换

$$\begin{cases} x = ar^4\cos^4\theta \\ y = br^4\sin^4\theta \end{cases} \Longrightarrow J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 16abr^7\cos^3\theta\sin^3\theta$$

原区域 D 变 D', $D'=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\right\}$. 因此有

$$\begin{aligned}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 br^4\sin^4\theta\cdot 16abr^7\cos^3\theta\sin^3\theta\,\mathrm{d}r\\&=16ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^7\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{11}\,\mathrm{d}r\\&=\frac{4}{3}ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta(1-\sin^2\theta)\sin^7\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{4}{3}ab^2\left[\frac{1}{8}\sin^8\theta-\frac{1}{10}\sin^{10}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab^2}{30}\end{aligned}$$

◀

Exercise 12.23: 证明

$$\iint\limits_{S} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u$$

其中 $S: x^2+y^2\leqslant 1, a^2+b^2\neq 0$

✎ Solution 作正交变换:

$$u=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ax,by),v=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ay,bx)$$

则 $x^2+y^2=u^2+v^2$, 因此 $x^2+y^2\leqslant 1$ 变成 $u^2+v^2\leqslant 1$ 且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix}a&-b\\b&a\end{vmatrix}=1$$

所以

$$\iint\limits_{S} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f\left(\sqrt{a^2+b^2}u+c\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}v$$

而

$$\left\{u^2+v^2\leqslant 0\right\}=\left\{(u,v)|-1\leqslant u\leqslant 1,-\sqrt{1-u^2}\leqslant v\leqslant\sqrt{1-u^2}\right\}$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}v\\&=\int_{-1}^{1}f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}v\\&=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

◀

Exercise 12.24: 证明

$$I = \iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}s\mathrm{d}y = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)\mathrm{d}u$$

其中, Σ 为球面单位 $x^2+y^2+z^2=1$

Solution

Exercise 12.25: 证明

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y e^{\sin y(\cos x-\sin x)}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\left(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}\right)\pi$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y e^{\sin y(\cos x-\sin x)}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y e^{\sqrt{2}\sin y\cos x}\,\mathrm{d}y \\ &= \oint_{|r|=1} e^{\sqrt{2}x}\,\mathrm{d}S \quad \mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{2}x}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{2}x}\left(\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{2}x}(\pi)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Exercise 12.26: 计算一个二重积分:

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy(\ln^2 x+\ln^2 y)},$$

其中 D 由 $x^2+y^2=1$ 和 $x+y=1$ 所围成的第一象限的平面区域。

Solution 作变换 $x=e^{r\cos\theta}$, $y=e^{r\sin\theta}$, 则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta e^{r\cos\theta} & -r\sin\theta e^{r\cos\theta} \\ \sin\theta e^{r\sin\theta} & r\cos\theta e^{r\sin\theta} \end{vmatrix} = re^{r\sin\theta}e^{r\cos\theta}.$$

原积分变为

$$I = \iint_{\Delta}\frac{drd\theta}{r}.$$

这里的 Δ 是变换以后的积分区域. 注意 $x+y=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 分别被变为

$$\begin{cases} e^{r\cos\theta}+e^{r\sin\theta}=1, \\ e^{2r\cos\theta}+e^{2r\sin\theta}=1. \end{cases}$$

现在来分析由上述两条曲线所围成的 (r,θ) 平面上的区域是什么形状. 从第一个式子可以看出 θ 的变化范围必须使 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都取负值, 故 θ 只能在 $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ 中取值. 假设由第一个式子确定的函数为 $r=r(\theta)$, 则由第二个式子确定的函数便为 $r=\frac{1}{2}r(\theta)$. 因此

$$I=\iint_{\Delta}\frac{drd\theta}{r}=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}d\theta\int_{\frac{1}{2}r(\theta)}^{r(\theta)}\frac{dr}{r}=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

◀

Exercise 12.27: 计算二重积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

✎ Solution 令

$$f(r)=\int_0^{2\pi}e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)d\theta, 0\leqslant r\leqslant R,$$

则施行极坐标变换后得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^R rf(r)dr.$$

先证

$$f(r)\equiv f(0)=2\pi.$$

事实上,

$$\begin{aligned}f'(r)&=\int_0^{2\pi}e^{r\cos\theta}[\cos\theta\cos(r\sin\theta)-\sin\theta\sin(r\sin\theta)]d\theta\\&=\frac{1}{r}\left(e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)\right)\Big|_0^{2\pi}\equiv 0.\end{aligned}$$

故 $f(r)\equiv f(0)=2\pi$. 因此

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^R rf(r)dr=\int_0^R 2\pi r dr=\pi R^2.$$

◀

✎ Solution 由于

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-R}^{R}e^x\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sin y\,\mathrm{d}y=0,$$

故

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^x(\cos y+i\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{x+iy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(x+iy)^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^R r^{n+1}dr\int_0^{2\pi}e^{in\theta}d\theta\\ &= \int_0^R 2\pi r dr\\ &= \pi R^2,\end{aligned}$$

其中用到极坐标变换, 函数项级数一致收敛从而可以逐项积分和如下事实:

$$\int_0^{2\pi}e^{in\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}(\cos n\theta+i\sin n\theta)d\theta=\begin{cases}2\pi, & n=0,\\ 0, & n\geqslant 1.\end{cases}$$

◀

Exercise 12.28: 证明:

$$\lim_{t\to+\infty}\left\{e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}=+\infty.$$

✎ **Solution**(法 1) 令

$$F(t)=\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

则

$$F(t)=2\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^x\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}y.$$

根据 L'Hopital 法则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}e^{-t}F(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{e^t}&=2\lim_{t\to+\infty}e^{-t}\int_0^t\frac{e^t-e^x}{t-x}\,\mathrm{d}x\\ &=2\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1-e^{x-t}}{t-x}\,\mathrm{d}x\\ &=2\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1-e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\\ &=2\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\\ &=+\infty.\end{aligned}$$

(法 2) 注意到

$$
\begin{aligned}
F(t) &= 2\int_0^t \mathrm{d}x \int_0^x \frac{e^x - e^y}{x-y}\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^t e^x\,\mathrm{d}x \int_0^x \frac{1-e^{y-x}}{x-y}\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^x e^x\,\mathrm{d}x \int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \\
&\geqslant 2\int_0^t e^x\,\mathrm{d}x \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= 2\int_0^t e^x \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2e^t\ln(1+t) - 2\int_0^t \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+x} \\
&\geqslant 2e^t\ln(1+t) - 2\int_0^t e^x\,\mathrm{d}x \\
&= 2e^t\ln(1+t) - 2(e^t-1), \forall t>0.
\end{aligned}
$$

故

$$
e^{-t}F(t) \geqslant 2\ln(1+t) - 2(1-e^{-t}) \to +\infty (t\to+\infty).
$$

从而

$$
\lim_{t\to+\infty} e^{-t}\int_0^t\int_0^t \frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}F(t) = +\infty.
$$

◀

Exercise 12.29: 计算二重积分

$$
\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]} |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
$$

✎ Solution (法 1) 令

$$
D=[0,1]\times[0,1], D_1 = D\cap\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}, D_2 = D\cap\{(x,y): x^2+y^2 \geqslant 1\},
$$

则

$$
\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D_1} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_1} (1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{1-x^2-y^2} \mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1-z \\ x,y\geqslant 0}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{8},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(法 2) 用极坐标变换, 正方形区域变成

$$\Omega:0\leqslant r\leqslant\min\{\sec\theta,\csc\theta\},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

故

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\min\{\sec\theta,\csc\theta\}}r|r^2-1|\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\min\{\sec\theta,\csc\theta\}}r(r^2-1)\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{8}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sec\theta}r(r^2-1)\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{8}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sec^4\theta}{4}-\frac{\sec^2\theta}{2}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi}{8}+2\left(\frac{\tan^3\theta}{12}-\frac{\tan\theta}{4}+\frac{\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(法 3 符号函数)

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1|x^2+y^2-1|\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\mathrm{sgn}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}-y+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{sgn}(x^2+y^2-1)\Big|_0^1\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

(法 4) **用极坐标并根据对称性, 得到**

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} |x^2+y^2-1| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\min\{\sec\theta,\csc\theta\}} r|r^2-1|dr \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta} r|r^2-1|dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta} |r^2-1|d(r^2-1) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} |r^2-1|(r^2-1)\Big|_0^{\sec\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^4\theta+1)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta\tan^2\theta - \sec^2\theta + 2)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\tan^3\theta}{3} - \tan\theta + 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 12.30: 求

$$
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \sin(x+y)}{xy(x+y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

✎ Solution **考虑参数积分**

$$
I(t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \sin t(x+y)}{xy(x+y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad 0<t<1
$$

则

$$
\begin{aligned}
I'(t) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \cos t(x+y)}{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y\,[\cos(tx)\cos(ty) - \sin(tx)\sin(ty)]}{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

其中

$$
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \cos(tx)\cos(ty)}{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \frac{\sin x\cos(tx)}{x}\mathrm{d}x \int_0^{\infty} \frac{\sin y\cos(ty)}{y}\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos (tx)}{x} \mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin (1+t)\, x + \sin (1-t)\, x}{x} \mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{(Dirichlet Integral)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \sin (tx) \sin (ty)}{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin (tx)}{x} \mathrm{d}x \int_0^{\infty} \frac{\sin y \sin (ty)}{y} \mathrm{d}y \\
&= \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin (tx)}{x} \mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\cos (1-t)\, x - \cos (1+t)\, x}{x} \mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \quad \text{(Frullani Integral)}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
I &= I(0) + \int_0^1 I'(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 \ln^2\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \left[\ln^2(1-t) + \ln^2(1+t) - 2\ln(1-t)\ln(1+t)\right] \mathrm{d}t\right),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\int_0^1 \ln^2(1-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \ln^2 t\, \mathrm{d}t = t\ln^2 t\, \Big|_0^1 - \int_0^1 2\ln t\, \mathrm{d}t = 2.
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \ln^2(1+t)\, \mathrm{d}t &= t\ln^2(1+t)\, \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2t\ln(1+t)}{1+t} \mathrm{d}t \\
&= \ln^2 2 - 2\int_0^1 \ln(1+t)\mathrm{d}t + 2\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t} \mathrm{d}t \\
&= 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \ln(1-t)\ln(1+t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t)\, \mathrm{d}\left[(t-1)\ln(1-t) - t\right] \\
&= \left[(t-1)\ln(1-t) - t\right]\ln(1+t)\, \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(t-1)\ln(1-t) - t}{1+t} \mathrm{d}t \\
&= -\ln 2 + \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) \mathrm{d}t + 2\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t} \mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(1-t)\, \mathrm{d}t \\
&= 2 - 2\ln 2 + 2\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t} \mathrm{d}t = 2 - 2\ln 2 + 2\int_0^1 \frac{\ln t}{2-t} \mathrm{d}t \\
&= 2 - 2\ln 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(2u)}{1-u} \mathrm{d}u = 2 - 2\ln 2 + 2\ln^2 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{1-u} \mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 - 2\ln 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-u)}{u} \mathrm{d}u = 2 - 2\ln 2 + 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln u}{1-u} \mathrm{d}u \\
&= 2 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}\left(2\ln^2 2 + 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln u}{1-u} \mathrm{d}u + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{1-u} \mathrm{d}u\right) \\
&= 2 - 2\ln 2 + \ln^2 2 + \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} \mathrm{d}u = 2 - 2\ln 2 + \ln^2 2 + \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u^n \ln u \mathrm{d}u \\
&= 2 - 2\ln 2 + \ln^2 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - 2\ln 2 + \ln^2 2 - \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
$$

将以上各式代入原积分可得

$$
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \sin(x+y)}{xy(x+y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{6}.
$$

◀

Exercise 12.31: 计算 $\iint\limits_D |xy| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D = \left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$

Solution 作代换

$$
\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow J(\rho,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho
$$

在这变换下, 区域 $D = \left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ 对应区域 $D' = D = \{(\rho,\theta)|\rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ 因此有

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D |xy| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 |ab\rho^2 \sin\theta\cos\theta| \cdot |ab\rho| \,\mathrm{d}\rho \\
&= (ab)^2 \int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{2}\sin 2\theta\right| \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{8}(ab)^2\left(\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\right)\sin 2\theta \,\mathrm{d}\theta - \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\right)\sin 2\theta \,\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}(ab)^2
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 12.32:

Solution ◀

12.3 三重积分

12.3.1 利用直角坐标系计算三重积分

Theorem 12.3 化为三次积分

将三重积分化为三次积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

Example 12.10: 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,

其中 Ω 由三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成。

Solution

$$\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y} x\,\mathrm{d}z=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y} x\,\mathrm{d}z=\frac{1}{48}$$

Theorem 12.4 投影法 (先一后二)

设 Ω 是 XY 型区域: $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in D,\ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\right\}$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

Example 12.11: 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,

其中 Ω 由 $z=xy, y=x, x=1, z=0$ 所围成。

Solution Ω 在 xOy 面上的投影区域为三角形区域

下边界曲面: $z=0$, 上边界曲面: $z=xy$

$$\iiint_{\Omega} xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z=\frac{1}{364}$$

Example 12.12: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^3$$

✎ Solution[14] 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=0$. 于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z\int_z^1 f(y)\,\mathrm{d}y\int_0^z f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z\int_z^1 f(y)F(z)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 f(z)F(z)\big[F(1)-F(z)\big]\,\mathrm{d}z\\
&= \left[F(1)\frac{1}{2}F^2(z)-\frac{1}{3}F^3(z)\right]_0^1\\
&= \frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^3
\end{aligned}$$

◀

Theorem 12.5 截面法 (先二后一)

设 $\Omega=\big\{(x,y,z)\big|c\leqslant z\leqslant d,\ (x,y)\in D_z\big\}$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_c^d \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

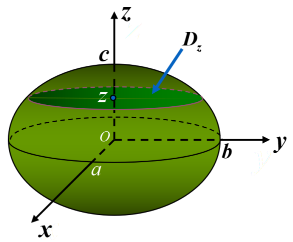
先计算一个二重积分 (算面积)、再计算一个定积分

♣

Example 12.13: 计算三重积分 $\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

✎ Solution

$$\Omega:\begin{cases}-c\leqslant z\leqslant c\\ D_z:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\dfrac{z^2}{c^2}\end{cases}$$



$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{-c}^{c} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z^2\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3
\end{aligned}$$

Note: 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积: $A=\pi ab$

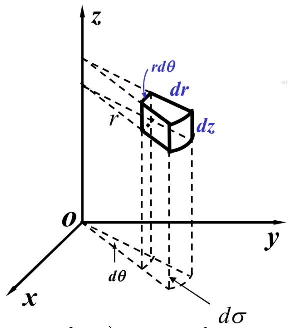
◀

Example 12.14:

✎ Solution

◀

12.3.2 利用柱面坐标计算三重积分



柱面坐标＝极坐标＋竖坐标

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant \rho < +\infty \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}v = \iint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Example 12.15: 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, $\Omega: \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2$

Solution

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V &= \iint\limits_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}\rho\int_\rho^2 \rho^3\,\mathrm{d}z = \frac{16}{5}\pi \end{aligned}$$

◀

Example 12.16: (1991 数 1) 求 $\iiiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}V$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2z \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$ 围成的立体.

Solution 旋转曲面方程：$x^2+y^2 = 2z$, Ω 在坐标面上的投影区域: $x^2+y^2 \leqslant 8$

$$\iiiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{8}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^4(\rho^2+z)\rho\,\mathrm{d}z = \frac{256}{3}\pi$$

◀

Example 12.17: 计算 $\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

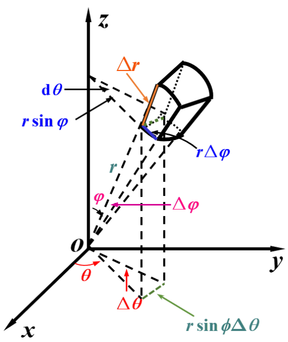
其中 Ω 是曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = 1$ 围成的有界区域

Solution

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le z^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z r\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

◀

12.3.3 利用球面坐标计算三重积分



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant r < +\infty \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

Theorem 12.6 球面坐标下的体积元素：

$$\mathrm{d}V = \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

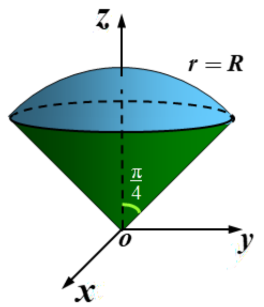
Theorem 12.7 常见曲面的球面坐标方程

	直角坐标方程	球面坐标方程
球面	$x^2+y^2+z^2=R^2$	$r=R$
球面	$x^2+y^2+z^2=2az$	$r=2a\cos\varphi$
正圆锥面	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$
圆锥面	$z=\cos\beta\sqrt{x^2+y^2}$	$\varphi=\beta$

Example 12.18: 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

Solution 在球面坐标系下

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant R\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$



因此

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = \frac{1}{5}R^5(2-\sqrt{2})$$

◀

Example 12.19: 计算 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$

Solution $\Omega: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant\pi, 0\leqslant\rho\leqslant 1$

$$\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 e^{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

◀

Example 12.20: 设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=2$, 求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$.

✎ Solution 在球坐标系, 积分区域可以用不等式描述上述形式描述为:

$$D=\{(\theta,\varphi,r)|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant t\}$$

所以三重积分为

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2f(r)\,\mathrm{d}r\\&=4\pi\int_0^t r^2f(r)\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

由于 $f(u)$ 具有连续导数, 故

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=4\lim_{t\to0}\frac{\int_0^t r^2f(r)\,\mathrm{d}r}{t^4}\\&\xlongequal{\text{洛必达}}4\lim_{t\to0}\frac{t^2f(t)}{4t^3}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\\&=\lim_{t\to0}f'(t)=2\end{aligned}$$

◀

Example 12.21:

✎ Solution

◀

12.4 n 重积分

Example 12.22: 设 $f:[0,1]\to R$ 连续, 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left(\frac{x_1\cdots x_n}{n}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

.

✎ Solution 解法 1 . 设 $|f|$ 最大值为 M. 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-1/2|<\delta$ 时, 有

$$\left|f(x)-f(\frac{1}{2})\right|<\varepsilon.$$

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^n}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\frac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\\le&\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\ge\delta}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\frac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\+&\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<\delta}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\frac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2M\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\ge\delta} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots dx_n+\varepsilon\\
&\le \frac{2M}{\delta^2}\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\ge\delta}\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+\varepsilon\\
&\le \frac{2M}{\delta^2}\int_{[0,1]^n}\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+\varepsilon\\
&=\frac{M}{6n\delta^2}+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{[0,1]^n}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\le\varepsilon.
$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即可.

解法 2 由科尔莫格罗夫强大数定律得

$$
\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{a.s.}E\left(X_i\right)=\frac{1}{2}\,(n\to+\infty)\,.
$$

又因为 $f(x)$ 连续有界, 由控制收敛定理可知

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}E\left(f\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right)&=E\left(\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right)\\
&=E\left(f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

◀

Example 12.23: 计算: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$

Solution 令 $[0,1]^n=V_n$. 由于 $\displaystyle\lim_{\substack{y\to\frac{1}{3}\\x\to\frac{1}{2}}}\frac{y}{x}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

对 $\forall\varepsilon>0$. 存在 δ 使得 $\forall x,y:\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta,\left|y-\frac{1}{3}\right|<\delta$. 有 $\left|\frac{y}{x}-\frac{2}{3}\right|<\frac{\delta}{2}$,

令 $A_n=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\middle|\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\delta\right\}$, $B_n=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\middle|\left|\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}-\frac{1}{3}\right|\geqslant\delta\right\}$

则

$$
\begin{aligned}
&\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\
\geqslant&\underset{A_n}{\int\cdots\int}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\
\geqslant&\underset{A_n}{\int\cdots\int}\delta^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\delta^2m(A_n)\ (m(A_n)\text{为 }A_n\text{ 体积})
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n
$$

$$=\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n-\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{3}+2C_n^2\times\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12n}$$

故 $m(A_n)<\dfrac{1}{12n\delta^2}$, 同理

$$\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\left(\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}-\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\geqslant\delta^2 m(B_n)\ (m(B_n)\text{为 }B_n\text{ 体积})$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{5}+2C_n^2\times\frac{1}{9}\right)-\frac{2}{9}+\frac{1}{5}\geqslant\delta^2 m(B_n)$$

$$\frac{4}{45n}\geqslant\delta^2 m(B_n)$$

即 $m(B_n)<\dfrac{4}{45n\delta^2}$, 从而

$$\left|\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n-\frac{2}{3}\right|$$

$$\leqslant\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\left|\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}-\frac{2}{3}\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\xlongequal{F(x)=\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}-\frac{2}{3}}\underset{[0,1]^n|(A_nUB_n)}{\int\cdots\int}|F(x)|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\underset{A_nUB_n}{\int\cdots\int}|F(x)|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\underset{A_n}{\int\cdots\int}\left(1+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+\underset{B_n}{\int\cdots\int}\left(1+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{3}(m(A_n)+B(B_n))$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{12n\delta^2}+\frac{4}{45n\delta^2}\right)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{12\delta^2}+\frac{4}{45\delta^2}\right)\frac{1}{n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{12\delta^2}+\dfrac{4}{45\delta^2}\right)\dfrac{1}{n}=0$. 故存在 $N\in\mathbb{N}^+$, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 且 $n>N$ 有

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{12\delta^2}+\frac{4}{45\delta^2}\right)\frac{1}{n}<\varepsilon$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{2}{3}$$

◀

Example 12.24:

Solution

◀

12.5 重积分的应用

12.5.1 曲面的面积

Theorem 12.8

若光滑曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$, 且 $F_z \neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_y}{F_z}, \quad (x,y)\in D_{x,y}$$

光滑曲面的面积:

$$S=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Example 12.25: 求圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在圆柱体 $x^2+y^2\leqslant x$ 内那一部分的面积.

Solution 所求面积的曲面的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longrightarrow \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{2}$$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xOy 平面的投影区域 $D_{xy}:\ x^2+y^2\leqslant x$, 所以

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

◀

Example 12.26: 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b\leqslant a)$ 内那部分的面积

Solution

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \Longrightarrow z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

z 在 xOy 平面的投影区域 $D_{xy}:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$

$$\begin{aligned}
S&=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}S=2\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=2\iint_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{\text{对称性}} 8a\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\\
&=8a\int_0^a\left[\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

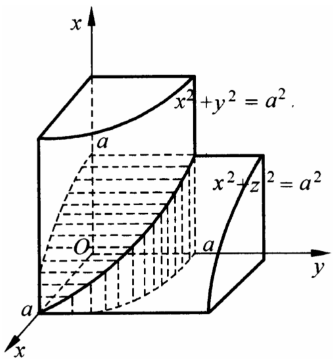
$$= 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$$

◀

12.5.2 求体积

Example 12.27: 计算由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $x^2 + z^2 = a^2$ 所围成的空间立体的体积 V

Solution 由对称性得到



$$\begin{aligned} V &= 8 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0}} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 8 \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y \\ &= 8 \int_0^a (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= 8 \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{16}{3} a^3 \end{aligned}$$

◀

12.5.3 质心

Theorem 12.9 形心公式

$$\text{形心}: (\overline{x}, \overline{y}) \quad \iint_D x\mathrm{d}\sigma = \overline{x} \iint_D \mathrm{d}\sigma \quad \iint_D y\mathrm{d}\sigma = \overline{y} \iint_D \mathrm{d}\sigma$$

♣

Example 12.28: 计算 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leqslant x + y + 1$

Solution 区域 D

$$D = \left\{ \{x, y\} \middle| \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant \tfrac{3}{2} \right\}$$

而

$$\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma = \overline{x} \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

$$\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma = \overline{y} \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

因此

$$\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

◀

Theorem 12.10 质心

对于平面薄片, 面密度 $\rho(x,y)$ 连续, D 是薄片所占的平面区域,
则计算重心 $\overline{x},\overline{y}$ 的公式为

$$\overline{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma},\quad \overline{y}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}$$

♣

12.6 含参变量的积分

Example 12.29: 计算积分 $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x$

Proof:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{x^2}{2})^{n-1}}{(n-1)!}=xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{((2n)!!)^2}\int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\&\overset{t=\frac{x^2}{2}}{=\!=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{((2n)!!)^2}\cdot 2^n\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{((2n)!!)^2}\cdot 2^n\Gamma(n+1)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{(n)!}=\sqrt{e}\end{aligned}$$

□

Exercise 12.33: 计算积分

$$\int_0^1\sin(\log(x))\frac{x^b-x^a}{\log(x)}\,\mathrm{d}x$$

Solution 换元令 $x=e^t$ 则: $\mathrm{d}x=e^t\,\mathrm{d}t$ 那么

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\sin(\log(x))\frac{x^b-x^a}{\log(x)}\,\mathrm{d}x\\&=-\int_{-\infty}^0\sin(t)e^t\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^0\sin(x)e^x\frac{e^{bx}-e^{ax}}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

又因为

$$\frac{e^{bx}-e^{ax}}{x}=\left.\frac{e^{tx}}{x}\right|_a^b=\int_a^b e^{tx}\,\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\sin(\log(x))\frac{x^b-x^a}{\log(x)}\,\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^0\int_a^b\sin(x)e^xe^{tx}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\&=-\int_a^b\mathrm{d}t\int_{-\infty}^0\sin(x)e^{(t+1)x}\,\mathrm{d}x\\&=-\int_a^b\left[\frac{1}{t^2+2t+2}e^{(t+1)x}((t+1)\sin x-\cos x)\right]_{-\infty}^0\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\frac{1}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\frac{1}{(t+1)^2+1}\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{1}{(t+1)^2+1}d(t+1)\\&=[\arctan(t+1)]_a^b=\arctan(b+1)-\arctan(a+1)\end{aligned}$$

◀

✎ Solution 换元令 $x=e^t$ 则: $\mathrm{d}x=e^t\,\mathrm{d}t$ 那么

$$I=\int_0^1\sin(\log(x))\frac{x^b-x^a}{\log(x)}\,\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^0\sin(t)e^t\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^0\sin(x)e^x\frac{e^{bx}-e^{ax}}{x}\,\mathrm{d}x$$

因为

$$\frac{\partial I}{\partial b}=-\int_{-\infty}^0\sin(t)e^{(b+1)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{b^2+2b+2}$$

所以

$$I(a,b)=I(0,b)-I(0,a)=\arctan(b+1)-\arctan(a+1)$$

◀

Exercise 12.34: 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{xe^x}\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}I(\alpha)&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{xe^{\alpha x}}\mathrm{d}x\\I(0)&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{xe^{0x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\\I'(\alpha)&=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{\alpha x}}\mathrm{d}x=\left[\frac{\alpha\sin x+\cos x}{(\alpha^2+1)e^{\alpha x}}\right]_0^{+\infty}=-\frac{1}{\alpha^2+1}\\I(1)-I(0)&=-\int_0^1\frac{1}{\alpha^2+1}\mathrm{d}\alpha=-\arctan 1=-\frac{\pi}{4}\\\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{xe^x}\mathrm{d}x&=I(1)=-\frac{\pi}{4}+I(0)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

◀

✎ Solution 注意到

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

故

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{xe^x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\Gamma(2n+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\\&=\arctan 1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

◀

Example 12.30: 求定积分

$$\int_0^1\frac{\sin\ln x}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

–傲娇小魔王

✎ Solution

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sin\ln x}{\ln x}\,\mathrm{d}x&\xlongequal{\ln x=-t}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\sin t\,\mathrm{d}t\int_1^{+\infty}e^{-ty}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}e^{-xy}\,\mathrm{d}y\\&=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y=\arctan y\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

◀

Example 12.31: 求定积分 $\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

✎ Solution 令 $F(\alpha)=\int_0^1\frac{\arctan\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, 则 $F(0)=0$

$$\begin{aligned}F'(\alpha)&=\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x}{1+\alpha^2x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1+\alpha^2x^2)}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=\sin\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\alpha^2\sin^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\alpha^2)\sin^2\theta+\cos^2\theta}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{(1+\alpha^2)\tan^2\theta+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\end{aligned}$$

于是

$$F(1)=F(1)-F(0)=\int_0^1F'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\,\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

因此

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = F(1) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

◀

Example 12.32: 求定积分

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Solution 考虑欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 故

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right)$$

令 $F(\lambda)=\int_0^{2\pi} e^{\lambda e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$, 则

$$\frac{\mathrm{d}F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{i\lambda}\int_0^{2\pi} i\lambda e^{i\theta}e^{\lambda e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{i\lambda}\left[e^{\lambda e^{i\theta}}\right]_0^{2\pi} = 0$$

故

$$F(\lambda)-F(0)=\int_0^{\lambda}\frac{\mathrm{d}F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = F(1) = 2\pi$$

◀

Example 12.33: 求定积分

$$\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

Solution 考虑欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 故

$$e^{e^{i\theta}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ik\theta}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k!} + i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k\theta)}{k!}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} e^{e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right) &= \int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k!}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k!}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \pi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k}\sin(k\theta)\right]_0^{\pi} = \pi\end{aligned}$$

◀

Example 12.34: 求定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x$$

✎ Solution 令 $F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\alpha\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha>0$, 则

$$
\begin{aligned}
F'(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\alpha^2\tan^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+\alpha^2t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2t^2}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\left[\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{t}{\alpha}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{\alpha^2-1}\Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2(\alpha+1)}
\end{aligned}
$$

又 $F(0)=0$, 于是

$$
F(\alpha)=F(\alpha)-F(0)=\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{2(\alpha+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+1)
$$

因此

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x=F(2)=\frac{\pi}{2}\ln 3
$$

◀

Exercise 12.35: 计算积分

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x
$$

✎ Solution(西西) 注意到

$$
\int_0^{+\infty}\frac{x^{-a}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}(1-a,a)=\pi\csc(a\pi)
$$

上式两边对 a 求导得:

$$
\int_0^{+\infty}\frac{x^{-a}\ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x=\pi^2\csc(a\pi)\cot(a\pi)
$$

令 $a=\frac{1}{4}$. 再换 $x\to x^2$ 即有

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}
$$

◀

Example 12.35: 求定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

✎ Solution(by 冬眠的小老鼠)

$$
\begin{aligned}
I=\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}\ln(1+x) \\
&= \ln^2 2-2\int_0^1\frac{x\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\ln^2 2-2J
\end{aligned}
$$

令 $J(\alpha)=\int_0^1 \frac{x\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$, 则

$$J'(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^2}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{\alpha\ln 4-\pi}{4(1+\alpha^2)}+\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}-\frac{\alpha\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}$$

又 $J(0)=0$, 于是

$$\begin{aligned}J&=J(1)-J(0)=\int_0^1 J'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\\&=\int_0^1\left(\frac{\alpha\ln 4-\pi}{4(1+\alpha^2)}+\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}-\frac{\alpha\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}\right)\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\alpha\ln 4-\pi}{4(1+\alpha^2)}+\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}\right)\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{96}(\pi^2+12\ln^2 2)\end{aligned}$$

因此

$$I=\ln^2 2-\frac{1}{48}(\pi^2+12\ln^2 2)=\frac{3}{4}\ln^2 2-\frac{\pi^2}{48}$$

◀

Exercise 12.36: 计算积分

$$\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$$

Solution 令 $I(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(\alpha+\cos x)\mathrm{d}x,\alpha>1$, 易知 $I(\alpha,x)$ 可导

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha-\sin x}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\sin x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha-\sin x}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha}{\alpha^2-\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha d(\cot x)}{(\alpha\cot x)^2+\alpha^2-1}\\&=-\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\arctan\frac{\alpha\cot x}{\sqrt{\alpha^2-1}}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\end{aligned}$$

所以

$$I(\alpha)=\pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})+C\Rightarrow I(1)=\pi\ln(1+0)+C=C$$

因为

$$I(1)=\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,\mathrm{d}t=-\pi\ln 2$$

所以

$$I(\alpha)=\pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$$

令 $\alpha = 2$, 可得

$$\int_0^{\pi} \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x = \pi \ln \frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

◀

Exercise 12.37: 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{1-x}{\ln x}\left(x + x^2 + x^{2^2} + x^{2^3} + \cdots\right)\mathrm{d}x$$

Solution 考虑含参变量 a 的积分所确定的函数

$$I(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x}\mathrm{d}x$$

易得 $I(0) = 0$ 以及

$$\frac{\partial I(a)}{\partial a} = \int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1} \tag{12.1}$$

式 (12.1) 在 $[0,1]$ 对 a 积分得

$$I(a) - I(0) = \int_0^1 \frac{1}{a+1}\mathrm{d}x \Longrightarrow I(a) = \ln(a+1)$$

因此有

$$\int_0^1 \frac{1-x}{\ln x}x^k\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(x^k-1)-(x^{k+1}-1)}{\ln x}\mathrm{d}x = \ln\frac{k+1}{k+2}$$

故

$$I = \int_0^1 \frac{1-x}{\ln x}\sum_{k=0}^{\infty} x^{2^k}\,\mathrm{d}x = \ln\prod_{k=0}^{\infty}\frac{2^k+1}{2^k+2} = \ln\left(\frac{1}{2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{2^k+1}{2^{k-1}+1}\right) = -\ln 3$$

◀

Exercise 12.38: 计算积分: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax - \cos bx}{x}\mathrm{d}x$, 其中 $a, b > 0$

Solution 方法 1:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax - \cos bx}{x}\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to+\infty}}\int_{\varepsilon}^{\delta}\frac{\cos ax - \cos bx}{x}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to+\infty}}\left[\int_{\varepsilon}^{\delta}\frac{\cos ax}{x}\mathrm{d}x - \int_{\varepsilon}^{\delta}\frac{\cos bx}{x}\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

分别作变量代换 $ax = u, bx = u$, 得

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to+\infty}}\left[\int_{a\varepsilon}^{a\delta}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\varepsilon}^{b\delta}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x\right] = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to+\infty}}\left[\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x - \int_{a\delta}^{b\delta}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x - \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

因为 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛 (可由 Dirichlet 判别法得到)
所以

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0^+}\left[\int_1^{b\delta}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{a\delta}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\right] = 0$$

对于前面那个极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos x - 1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \ln\frac{b}{a} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$$

由于 $\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 同理有 $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos x - 1}{x}\,\mathrm{d}x = 0$
因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}$$

注: 这个方法可以计算此题的一般形式 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 称为 Froullani 积分, 其中 $f(x)$ 需要满足适当条件 ◀

✎ Solution 方法 2 记 $F(t) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}(\cos ax - \cos bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 则易验证 $F(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上一致收敛
而

$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}(\cos ax - \cos bx)\,\mathrm{d}x = \frac{t}{b^2+t^2} - \frac{t}{a^2+t^2}$$

$\Rightarrow F(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+t^2}{a^2+t^2}\right) + C$, 其中 C 为积分常数
留意到 $F(+\infty) = 0$
所以

$$0 = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{b^2+t^2}{a^2+t^2}\right) + C \Rightarrow C = 0$$

所以

$$F(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+t^2}{a^2+t^2}\right)$$

令 $t \to 0^+$ 即有 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}$ ◀

Exercise 12.39: 计算积分:

$$\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{16} &= \int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}\\ &= \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)} + \frac{1}{(1+y^2)(2+x^2+y^2)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^1 \left(\frac{\pi}{2(1+x^2)\sqrt{2+x^2}} - \frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi^2}{6} - 2\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x = \frac{5}{96}\pi^2$$

◀

Example 12.36: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\int_0^1 \frac{t^n\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

–傲娇小魔王

✎ Solution 记 $I(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$,

$$I(n) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{-\frac{1}{2}}$$

所以

$$I'(n) = \int_0^1 \frac{x^n\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \sim -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{-\frac{3}{2}}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\int_0^1 \frac{t^n\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

◀

含参变量广义积分的一致收敛 [16]

Definition 12.1 无穷积分的一致收敛

如果 $\forall\,\varepsilon > 0$, 总 $\exists A_0 = A_0(\varepsilon)$(仅与 ε 有关, 而与 $x \in I$ 无关!) $> a$, 当 $A > A_0$ 时, 有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

则称含参变量的无穷积分 $\int_A^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

Definition 12.2 瑕积分的一致收敛

设 a 为瑕点, $\forall y \in I$, $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$(仅与 ε 有关, 而与 $x \in I$ 无关!) > 0, 当 $\delta \in (0, \delta_0)$, 有

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{a+\delta}^b f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,\ \forall y \in [\alpha, \beta]$$

瑕积分 $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

Theorem 12.11 参变量无穷积分的 Cauchy 收敛准则

无穷积分 $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛 $\iff$ $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 = A_0(\varepsilon)$(仅与 ε 有关, 而与 $x \in [\alpha, \beta]$ 无关!) $> a$, 当 $A', A'' > A_0$ 时, 有

$$\left|\int_a^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{A'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

Theorem 12.12 参变量无穷积分的 Weierstrass 判别法

设 $f(x,y)$ 对 x 在 $[a, +\infty)$ 上连续. 如果存在 $[a, +\infty)$ 上的连续函数 F, 使得 $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而且对一切充分大的 x 及 $[\alpha, \beta]$ 上的一切 y, 都有

$$|f(x,y)| \leqslant F(x),$$

则无穷积分 $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

Theorem 12.13 参变量无穷积分的 Dirichlet 判别法

如果函数 $f(x,y), g(x,y)$ 满足:

1. $g(x,y)$ 为 x 的单调函数, 且当 $x \to +\infty$ 时关于 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致趋于 0, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 = A_0(\varepsilon) > a$, 当 $x > A_0$ 时, $|g(x,y)| < \varepsilon$;
2. $\forall A \geqslant a, \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致有界, 即 $\exists M > 0$(M 为常数), 使得

$$\left|\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\ , \quad \forall y \in [\alpha,\beta],$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y \in [\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

Theorem 12.14 参变量无穷积分的 Abel 判别法

如果函数 $f(x,y), g(x,y)$ 满足:

1. $g(x,y)$ 对 x 单调, 且关于 $y \in [\alpha,\beta]$ 一致有界, 即 $\forall M > 0$(常数), 使得

$$|g(x,y)| \leqslant M\ , \quad (x,y) \in [a,+\infty) \times [\alpha,\beta];$$

2. 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [\alpha,\beta]$ 一致收敛;

则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y \in [\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

12.6.1 狄利克雷 (Dirichlet) 积分

Exercise 12.40: Evaluate

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

Solution

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin x \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty} \left[-\frac{y\sin x + \cos x}{e^{xy}(y^2+1)}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1} \mathrm{d}y$$
$$= \Big[\arctan x\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Note:

$$\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-xt} \mathrm{d}t \quad (x > 0)$$

◀

Solution Here's another way of finishing off Derek's argument. He proves

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Let

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$

Let

$$D_n = \frac{\pi}{2} - I_n = \int_0^{\pi/2} f(x) \sin(2n+1)x \ \mathrm{d}x$$

where

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

We need the fact that if we define $f(0) = 0$ then f has a continuous derivative on the interval $[0, \pi/2]$. Integration by parts yields

$$D_n = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} f'(x) \cos(2n+1)x \ \mathrm{d}x = O(1/n).$$

Hence $I_n \to \pi/2$ and we conclude that

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{2}.$$

◀

Solution

Theorem 12.15 Riemann

If $f(x)$ is Riemann integrable in the interval $a \le x \le b$, then:

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f(x) \sin kx \ \mathrm{d}x = 0 \ .$$

♣

Next, notice that:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \ , n = 0, 1, 2, \dots \tag{12.2}$$

and let:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{x}{2} - x}{2x\sin\frac{x}{2}} & , \ 0 < x \le \pi \ . \end{cases}$$

Then $\phi(x)$ is continuous and satisfies Riemann theorem, so choosing $k = n + \dfrac{1}{2}$ we write:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \ \mathrm{d}x = 0 \ .$$

But taking (12.2) into account we have:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{x} \ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \ .$$

Using substitution $u = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) x$ and knowing that $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ \mathrm{d}x$ converges we finally have:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin u}{u} \ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \ .$$

◀

✎ **Solution** We can decompose interval $[0, +\infty)$ into intervals of length $\dfrac{\pi}{2}$. Then we'll have:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi/2}^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} \ \mathrm{d}x$$

Now consider the case when n is even i.e. $n = 2k$ and substitute $x = k\pi + t$:

$$\int_{2k\pi/2}^{(2k+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} \ \mathrm{d}x = (-1)^k \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{k\pi + t} \ \mathrm{d}t$$

and for odd n we have $n = 2k - 1$ and we use substitution $x = k\pi - t$:

$$\int_{(2k-1)\pi/2}^{2k\pi/2} \frac{\sin x}{x} \ \mathrm{d}x = (-1)^{k-1} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{k\pi - t} \ \mathrm{d}t$$

Hence we obtain:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \left[\frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{t + k\pi} + \frac{1}{t - k\pi}\right)\right] \mathrm{d}t$$

But in square bracket we have expansion of $\dfrac{1}{\sin x}$ into partial fractions, hence the result follows:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

◀

Exercise 12.41: 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} \mathrm{d}x$$

✎ Solution 注意到

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x}{x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x d\left(\frac{-1}{2x^2}\right) - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 3x d\left(\frac{-1}{2x^2}\right) \\
&= \left[\frac{-3\sin x}{8x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{\sin 3x}{8x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x d\left(\frac{-1}{x}\right) - \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos 3x d\left(\frac{-1}{x}\right) \\
&= \left[\frac{-3\cos x}{8x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{-3\cos 3x}{8x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{9}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{3x} d(3x) \\
&= -\frac{3\pi}{8} + \frac{9\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

◀

Exercise 12.42: 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x$$

✎ Solution 利用分布积分，我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty} \sin^n x d\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right) \\
&= -\frac{\sin^n x}{(n-1)x^{n-1}}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} d(\sin^n x) \\
&= -\frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{(\sin^n x)'}{x^{n-1}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty} (\sin^n x)' d\left(\frac{1}{x^{n-2}}\right) \\
&= -\frac{(\sin^n x)'}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n-2}} d(\sin^n x)' \\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty} \frac{(\sin^n x)''}{x^{n-2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\int_0^{+\infty} (\sin^n x)'' d\left(\frac{1}{x^{n-3}}\right) \\
&= -\frac{(\sin^n x)''}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n-3}} d(\sin^n x)'' \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\int_0^{+\infty} \frac{(\sin^n x)'''}{x^{n-3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{(\sin^n x)^{(n-1)}}{x} \mathrm{d}x$$

因为

$$(\sin^n x)^{(m)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{m+n+1}{2}}}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (2k-n)^m \sin(2k-n)x & m+n\text{为奇数} \\ \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (2k-n)^m \cos(2k-n)x & m+n\text{为偶数} \end{cases}$$

当 $m = n-1$ 时,$m+n = (n-1)+n = 2n-1$ 为奇数, 有

$$(\sin^n x)^{(n-1)} = \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (2k-n)^{n-1} \sin(2k-n)x$$

又因为有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2k-n)x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2k-n)x}{(2k-n)x} d[(2k-n)x] = \mathrm{sgn}(2k-n)\frac{\pi}{2}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{(\sin^n x)^{(n-1)}}{x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (2k-n)^{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2k-n)x}{x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (2k-n)^{n-1} \mathrm{sgn}(2k-n)\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2^n(n-1)!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^k (n-2k)^{n-1} \end{aligned}$$

◀

12.6.2 菲涅耳 (Fresnel) 积分

Exercise 12.43: Evaluate

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 \, \mathrm{d}x$$

✎ Solution

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u]{u=x^2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{u}} \mathrm{d}(\sin u)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{u \to +\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} - \lim_{u \to 0^+} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{v} e^{-uv} \mathrm{d}v \right) \sin u \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{v} \left[\int_0^{+\infty} e^{-uv} \sin u \mathrm{d}u \right] \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{v} \left[-\frac{\cos u + v \sin u}{e^{uv}(v^2+1)} \right]_0^{+\infty} \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{v}}{1+v^2} \mathrm{d}v \\
&\xlongequal{t=v^2} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{1+t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \mathrm{B}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)} \\
&\xlongequal{\text{余元公式}} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}
\end{aligned}
$$

Note: *Equation*

$$\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-xt} \mathrm{d}t \quad (x > 0)$$

Beta function

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}\, x > 0, \mathrm{Re}\, y > 0)$$

Relationship between gamma function and beta function

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\mathrm{Re}\, x > 0, \mathrm{Re}\, y > 0)$$

Euler's reflection formula

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (0 < z < 1)$$

◀

12.6.3 拉普拉斯 (Laplace) 积分

Example 12.37: 计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{a^2+x^2} \mathrm{d}x$$

Solution

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \cos bx \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+a^2)y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} e^{-a^2 y}\,\mathrm{d}y \int_0^{+\infty} e^{-yx^2}\cos bx\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-a^2 y}\,\mathrm{d}y \int_0^{+\infty} e^{-(yx^2-ibx)}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-a^2 y}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}e^{-\frac{b^2}{4y}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-a^2y-\frac{b^2}{4y}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{a^2}e^{-2\sqrt{a^2\cdot\frac{b^2}{4}}}\right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-ab}
\end{aligned}$$

◀

Note:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Example 12.38: 求积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Solution 利用欧拉公式有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right]$$

令 $f(z) = \dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^2}$, 在上半平面内, i 为 2 阶极点,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}] &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\left((z-\mathrm{i})^2\cdot\frac{e^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^2}\right)' = \lim_{z\to\mathrm{i}}\left(\frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^2}\right)' \\
&= \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z}(z+3\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^3} = \frac{\mathrm{i}}{2e}
\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}] = \frac{\pi}{e}$$

于是原积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\pi}{e}$$

◀

第 13 章 曲线积分与曲面积分

13.1 对弧长的曲线积分

Definition 13.1

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数, L 叫做积分弧段, $\mathrm{d}s$ 叫做弧微分.
函数 $f(x,y)$ 在闭曲线 L 上对弧长的曲线积分记为 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

Definition 13.2

函数 $f(x,y,z)$ 在空间曲线弧 Γ 上对弧长的曲线积分为

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

Theorem 13.1 几何意义

在三维空间中画出 xOy 平面内曲线 L 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面, $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 表示柱面上以 L 为底以 $f(x,y)$ 为的部分柱面面积的代数和, 对应 $f(x,y)\geqslant 0$ 的部分面积为正，对应 $f(x,y)\leqslant 0$ 的部分面积为负.

Properties: $\int_L \mathrm{d}s = s = L$ 的弧长.

Properties: $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 表示封闭曲线 L 上的积分

13.1.1 对弧长的曲线积分的计算法

Theorem 13.2

设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 其中 $\varphi(t), y=\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t) \neq 0$, 则曲线积分存在, 且

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha<\beta)$$

♣

Corollary 13.1

L 由参数方程给出: $L: x=x(t)$, $y=y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

♣

Corollary 13.2

L 由显函数给出: $L: x=x$, $y=y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

♣

Corollary 13.3

L 由显函数给出: $L: x=x(y)$, $y=y$, $c \leqslant y \leqslant d$. 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,\mathrm{d}y$$

♣

Corollary 13.4

L 由极坐标给出：$L: r = r(\theta)$，$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. 则

$$\int_L f(x, y) \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta] \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\, \mathrm{d}\theta$$

Corollary 13.5

空间曲线 L 由参数方程给出：$L: x = x(t)$，$y = y(t)$，$z = z(t)$，$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. 则

$$\int_L f(x, y, z) \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, \mathrm{d}t$$

Example 13.1: 计算 $\int_L xy^2\, \mathrm{d}s, \quad L: x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0$

Solution(方法 1) L 的参数方程：$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[(\cos\theta)']^2 + [(\sin\theta)']^2}\, \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$$

故

$$\int_L xy^2\, \mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot (\sin\theta)^2\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}$$

(方法 2) L 的极坐标方程：$L: r = 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1^2 + [(1)']^2}\, \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$$

故

$$\int_L xy^2\, \mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot (\sin\theta)^2\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}$$

(方法 3) L 的直角坐标方程：$L: y = \sqrt{1 - x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1$ 弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{1 + \left[\left(1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)'\right]^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x$$

故

$$\int_L xy^2\, \mathrm{d}s = \int_0^1 x\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

(方法 4) L 的直角坐标方程：$L: x = \sqrt{1 - y^2},\ 0 \leqslant y \leqslant 1$ 弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, \mathrm{d}y = \sqrt{1 + \left[\left(1 - \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}\right)'\right]^2}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, \mathrm{d}y$$

故

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$$

◀

Example 13.2: 设曲线 $L: |x| = 1, |y| = 1$, $f(x)$ 为正值函数, 求 $\oint_L \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}s$

Solution 因为积分区域关于 $y = x$ 对称, 故

$$I = \oint_L \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}s = \oint_L \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}s$$

故

$$2I = \oint_L (a+b)\mathrm{d}s = 8(a+b)$$

因此

$$I = \oint_L \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}s = 4(a+b)$$

◀

Example 13.3: 计算曲线积分 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$

Solution 曲线 Γ 为半径为 R 的圆周, 其方程关于变量 x, y, x 具有轮换对称性

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{3}\oint_\Gamma R^2\,\mathrm{d}s = \frac{R^2}{3}\oint_\Gamma \mathrm{d}s = \frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R = \frac{2}{3}\pi R^3\end{aligned}$$

◀

Example 13.4: 求两直交圆柱面 $x^2+y^2 = R^2$, $x^2+z^2 = R^2$ 所围成的立体的表面积

Solution 只需求 $x^2+y^2 = R^2$ 在第一卦限的面积, 再乘以 16, 柱面下方曲线

$$L: r = R \ \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

柱面上方曲线方程 $z = f(x, y) = \sqrt{R^2-x^2}$, 弧微分 $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2-x^2} = \sqrt{R^2-(R\cos\theta)^2} = R\sin\theta$$

$$A = 16\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\theta\cdot R\,\mathrm{d}\theta = 16R^2$$

◀

Example 13.5:

Solution

◀

13.2 对坐标的曲线积分

Definition 13.3 第二类曲线积分

函数 $P(x, y)$ 在有向线弧 L 对坐标 x 的曲线积分

$$\int_L P(x, y)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

函数 $Q(x, y)$ 在有向线弧 L 对坐标 y 的曲线积分

$$\int_L Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

记

$$\int_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_L Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

13.2.1 对坐标的曲线积分的计算法

Theorem 13.3

设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ 当参数 t 单调地由 α 变 β 时, 点 $M(x, y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$, 则曲线积分 $\int_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ 存在, 且

$$\int_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}\,\mathrm{d}t$$

Example 13.6: 计算 $\int_L -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$

其中 L 是沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$, 从点 $A(2, 0)$ 到点 $O(0, 0)$ 的有向弧段。

Solution(方法 1) L 的的参数方程: $L : x = 1 + \cos t, y = \sin t \quad (t : 0 \to \pi)$

$$\int_L -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \big((-\sin t)\cdot(1 + \cos t)' + (1 + \cos t)\cdot(\sin t)'\big)\,\mathrm{d}t = \pi$$

Corollary 13.6

$L: y=y(x)$, x 起点为 a, 终点为 b. 则

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \{P[x,y(x)] + Q[x,y(x)]y'(t)\}\,\mathrm{d}x$$

♣

Example 13.7: 计算 $\int_L -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$

其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$, 从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的有向弧段。

Solution(方法 2) L 的直角坐标方程: $L: y=\sqrt{2x-x^2} \quad (x: 2 \to 0)$

$$\int_L -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_2^0 \left(-\sqrt{2x-x^2} + x \cdot \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)\mathrm{d}x = \pi$$

◀

Corollary 13.7

$L: x=x(y)$, y 起点为 c, 终点为 d. 则

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \{P[x(y),y]x'(y) + Q[x(y),y]\}\,\mathrm{d}y$$

♣

Theorem 13.4 对称性

$$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & Q(x,y) = Q(-x,y) \\ 2\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y, & Q(x,y) = -Q(-x,y) \end{cases}$$

♣

Example 13.8:

Solution

◀

13.3 格林公式及其应用

Theorem 13.5 格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 L 是 D 的取正向 (逆时针) 的边界曲线

Example 13.9: 计算 $\displaystyle\int_L x^2y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y$

L 是由曲线 $y^3 = x^2$, $y = x$ 所围成的区域的边界正向曲线

Solution(方法 1) $L = L_1 \cup L_2$, $L_1: y = x\ (x: 0 \to 1)$, $L_2: y = x^{\frac{2}{3}}\ (x: 1 \to 0)$

$$\begin{aligned}
\int_L x^2y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y &= \int_{L_1} x^2y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y + \int_{L_2} x^2y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (x^2\cdot x + x^3\cdot 1)\,\mathrm{d}x + \int_1^0 \left[x^2\cdot x^{\frac{2}{3}} + (x^{\frac{2}{3}})^3\cdot(\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})\right]\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{44}
\end{aligned}$$

(方法 2) 用格林公式

$$\begin{aligned}
\int_L x^2y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D (-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{x^{\frac{2}{3}}} (-x^2)\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{44}
\end{aligned}$$

◀

Example 13.10: 计算 $\displaystyle\int_L (xy + e^x)\,\mathrm{d}x + [x^2 - \ln(1+y)]\,\mathrm{d}y$

Solution(加边法)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - \ln(1+y)) - \frac{\partial}{\partial y}(xy + e^x) = x$$

添加一条边： $L': y = 0, (x: 0 \to \pi)$, 由格林公式

$$\oint_{L+L'} (xy + e^x)\,\mathrm{d}x + [x^2 - \ln(1+y)]\,\mathrm{d}y = \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$$

所以

$$\int_L (xy+e^x)\,\mathrm{d}x+[x^2-\ln(1+y)]\,\mathrm{d}y=\pi-\int_{L'}(xy+e^x)\,\mathrm{d}x+[x^2-\ln(1+y)]\,\mathrm{d}y$$
$$=\pi-\int_0^{\pi} e^x\,\mathrm{d}x\quad(\because\ y=0,\,\mathrm{d}y=0)$$
$$=\pi+1-e^{\pi}$$

◀

Example 13.11: 计算曲线积分 $\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$ 其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心，R $(R>1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向。

✎ Solution(挖洞法) 在 L 所围的区域内有奇点：$(0,0)$，作一个椭圆 (顺时针方向)：$L_1: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$, ε 足够小，使椭圆包含于圆内. L_1 围成的区域为 D_1。

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{4x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{4x^2+y^2}\right)=0$$

在 D 上用格林公式得

$$\oint_{L\cup L_1}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

故

$$\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_{L\cup L_1}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}-\oint_{L_1}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$
$$=0-\oint_{L_1}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=-\oint_{L_1}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{\varepsilon^2}$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{-L_1}x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\text{格林公式}}\iint_{D_1}\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot(\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon)=\pi$$

◀

Example 13.12: 设函数 $f(x)$ 在闭区域 $D:\ x^2+y^2\leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$$

证明: $\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

✎ Solution 在极坐标下有

$$\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r\cos\theta f_x'+r\sin\theta f_y')r\,\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{\text{交换积分次序}} \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \left(r\cos\theta f_x' + r\sin\theta f_y'\right)\mathrm{d}\theta$$

注意到: 因为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则对应有 $\mathrm{d}x = -r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}y = r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, 将上式内层积分看作沿闭曲线 $L_r:\ x^2+y^2 = r^2$ 逆时针方向的曲线积分 $\int_{L_r} -f_y'\,\mathrm{d}x + f_x'\,\mathrm{d}y$, 那么由格林公式, 得

$$\int_{L_r} -f_y'\,\mathrm{d}x + f_x'\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{p}:x^2+y^2\leqslant r^2} \left(f_{xx}'' + f_{yy}''\right)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\delta$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^r e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho = \pi\left(1-e^{-r^2}\right).$$

于是, $\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi(1-e^{-r^2})r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2e}$ ◀

Theorem 13.6 面积公式

L 围成的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

Example 13.13: 已知平面区域 $D = \{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证:

(1) $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{5}{2}\pi^2$

Proof: 证法一：由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

(1)

$$右边 = \int_0^{\pi} \pi e^{\sin y}\,\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{0} \pi e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x,$$
$$右边 = \int_0^{\pi} \pi e^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{0} \pi e^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

(2) 由于 $e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geqslant 2 + \sin^2 x = \frac{5-\cos 2x}{2}$

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x \geqslant \frac{5}{2}\pi^2$$

证法二：(1) 根据 Green 公式，将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint_D \left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint_D \left(e^{-\sin y} + e^{\sin x}\right)\mathrm{d}\delta$$

因为关于 $y = x$ 对称，所以

$$\iint_D \left(e^{\sin y} + e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta = \iint_D \left(e^{-\sin y} + e^{\sin x}\right)\mathrm{d}\delta\,,$$

故

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

(2) 由 $e^t + e^{-t} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{(2n)!} \geqslant 2 + t^2$

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x = \iint_D \left(e^{\sin y} + e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta = \iint_D \left(e^{\sin x} + e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta \geqslant \frac{5}{2}\pi^2$$

□

Theorem 13.7 格林第二公式

设 $u(x,y,z), v(x,y,z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}, \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 依次表示 $u(x,y,z), v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数: 证明

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面.

☞ Proof: 由格林第一公式知:

$$\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

在此公式中将函数 u 和 v 交换位置, 得

$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

□

13.3.1 平面上曲线积分与路径无关的条件

Theorem 13.8

设区域 D 是一个单连通域，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 D 内与路径无关（或沿 D 内任意闭曲线的曲线积分为零）的充分必要条件是：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 D 内恒成立。

Example 13.14: (同济 7 下 P214) 求解方程

$$(5x^4 + 3xy^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

Solution 设 $P(x,y) = 5x^4 + 3xy^2 - y^3$, $Q(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 + y^2$ 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy - 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

因此, 所给方程是全微分方程.
取 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 有

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (5x^4 + 3xy^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)\,\mathrm{d}y \\ &= \underbrace{\int_0^y (y^2)\,\mathrm{d}y}_{(0,0)\to(0,y)} + \underbrace{\int_0^x (5x^4 + 3xy^2 - y^3)\,\mathrm{d}x}_{(0,y)\to(x,y)} \\ &= x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3 \end{aligned}$$

于是, 方程的通解为

$$x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3 = C$$

◀

13.4 对坐标的曲面积分

Definition 13.4 第二类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

其中 $R(x,y,z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

函数 $R(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x,y 的曲面积分记为 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

类似可定义

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

记

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ &= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Theorem 13.9 两类曲面积分之间的联系

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\ &= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由此知:

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \cos\beta\,\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

13.4.1 对坐标的曲面积分的计算法

Corollary 13.8

如果 Σ 由 $z=z(x,y)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Σ 取上侧为"+"下侧为"−"。

Example 13.15: 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 的部分.

Solution 把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两部分

$$\text{下侧 }\Sigma_1: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}\qquad \text{上侧 }\Sigma_2: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\iint_{D_{xy}} \rho\cos\theta\rho\sin\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{15}\end{aligned}$$

◀

Corollary 13.9

如果 Σ 由 $x=x(y,z)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Σ 取前侧为"+"后侧为"−"。

Corollary 13.10

如果 Σ 由 $y = y(z, x)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

Σ 取右侧为“+”左侧为“−”。

Example 13.16:

Solution

13.5 对面积的曲面积分

Definition 13.5 第一类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面, $\mathrm{d}S$ 叫做面积元素.
函数 $f(x, y, z)$ 在积分曲面 Σ 上对面积的曲面积分记为 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$

13.5.1 对面积的曲面积分的计算法

Theorem 13.10 几何意义

若 Σ 关于 xOy 面 $(z = 0)$ 对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \begin{cases} 0 & f(x, y, z)\text{关于}z\text{为奇函数} \\ 2\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S & f(x, y, z)\text{关于}z\text{为偶函数} \end{cases}$$

Theorem 13.11

设有曲面 $\Sigma : z = z(x, y) \quad (x, y) \in D$, 有界闭区域 D 是曲面在 xOy 面上的投影区域, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \iint_{D} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

其中 $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ 是面积元素

Theorem 13.12

设有曲面 $\Sigma : y = y(x, z) \quad (z, x) \in D_{zx}$, 有界闭区域 D_{xy} 是曲面在 zOx 面上的投影区域, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \iint_{D} f[x, y(z, x), z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z$$

其中 $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z$ 是面积元素

Example 13.17: 计算 $\oiint_{\Sigma} xyz \, \mathrm{d}S$,
其中 Σ 是 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面所围成的四面体的边界曲面

Solution $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$, $\Sigma_1 : x = 0$, $\Sigma_2 : y = 0$, $\Sigma_3 : z = 0$, $\Sigma_4 : z = 1 - x - y$

$\Sigma_1 : x = 0$

$$\oiint_{\Sigma_1} xyz \, \mathrm{d}S = 0$$

$\Sigma_2 : y = 0$

$$\oiint_{\Sigma_2} xyz \, \mathrm{d}S = 0$$

$\Sigma_3 : z = 0$

$$\oiint_{\Sigma_3} xyz \, \mathrm{d}S = 0$$

$\Sigma_4 : z = 1 - x - y$

$$\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma_4} xyz \, \mathrm{d}S &= \iint_{D} (xy \cdot (1 - x - y)) \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy \cdot (1 - x - y) \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{120}$$

所以

$$\oiint_{\Sigma} xyz \, \mathrm{d}S = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

◀

Example 13.18:

Solution

◀

13.6 高斯公式

Theorem 13.13 高斯公式, 奥高公式

设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 围成，函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有公式

$$\iint_{\Sigma} P \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + R \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + Q \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}V$$

其中Σ 取外侧

♣

Example 13.19: 计算 $\oiint_{\Sigma} (x-y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

其中 Σ 是圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 3$ 的整个表面的外侧。

Solution $P = 0, Q = 0, R = x + y \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$

由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} (x-y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} 0 \, \mathrm{d}V = 0$$

◀

Example 13.20: 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} x^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

其中 Σ 是长方体 Ω 的整个表面的外侧, $\Omega = \{(x,y,z) | 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b, 0 \leqslant z \leqslant c\}$

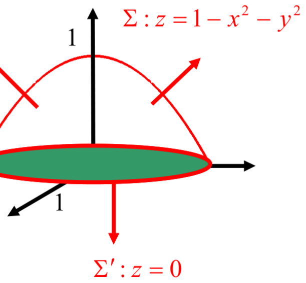
Solution $P = x^2, Q = y^2, R = z^2 \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2(x+y+z)$

由高斯公式

$$\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma} x^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \iiint_{\Omega} 2(x+y+z) \, \mathrm{d}V \\
&= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c 2(x+y+z) \, \mathrm{d}z \\
&= abc(a+b+c)
\end{aligned}$$

Example 13.21: 计算曲面积分 $\displaystyle\oint\!\!\!\!\int_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 $\Sigma : z = 1 - x^2 - y^2\ (0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的上侧



Solution $P = y, Q = x, R = z \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 1$

添加一圆盘：$\Sigma' : z = 0\ (D : x^2 + y^2 \leqslant 1)$ 下侧.

曲面 Σ 与 Σ' 所围的区域 $\Omega : 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leqslant 1$

由高斯公式，

$$\oint\!\!\!\!\int_{\Sigma+\Sigma'} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} 1\,\mathrm{d}V = \iint_{D} (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}$$

容易知道

$$\oint\!\!\!\!\int_{\Sigma'} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

故

$$\oint\!\!\!\!\int_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Example 13.22: (2009 数学 1) 计算曲面积分 $\displaystyle\oint\!\!\!\!\int_{\Sigma} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

其中 Σ 是椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧。

Solution 易得

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

作一个包含在椭球面内的球面：$\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (取内侧)

利用高斯公式。

$$\oint\!\!\!\!\int_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \iiint_{\Omega} 0\,\mathrm{d}V = 0$$

其中

$$\begin{aligned}
\oint\!\!\!\!\int_{\Sigma_1} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \oint\!\!\!\!\int_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\oint\!\!\!\!\int_{\substack{-\Sigma_1 \\ \text{外侧}}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\xlongequal{\text{高斯公式}} -\iiint_{\Omega_1} (1 + 1 + 1)\,\mathrm{d}V \\
&= -3 \cdot \frac{4}{3}\pi = -4\pi
\end{aligned}$$

故

$$\oint\!\!\!\!\int_{\Sigma} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 - (-4\pi) = 4\pi$$

◀

Example 13.23: 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

✎ Solution 记球面 $\Sigma:\ x^2+y^2+z^2=1$ 外侧的单位法向量为 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

考虑曲面积分等式

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \tag{13.1}$$

对两边都利用高斯公式，得

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S&=\oiint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=\oiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{13.2}$$

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=&\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\=&2\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}v\\&+\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{13.3}$$

将 (13.2)、(13.3) 代入 (13.1) 并整理得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left(1-(x^2+y^2+z^2)\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-\rho^2)\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

◀

Example 13.24: (13 年武大数分) 求 $I = \iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}} dS$, 其中 Σ 为椭球面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0).$$

Solution(by 陶哲轩小弟)

令 $x=a\sin\varphi\cos\theta, y=b\sin\varphi\sin\theta, z=c\cos\varphi$, 其中 $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi$, 经计算得到

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=bc\sin^2\varphi\cos\theta, \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}=ac\sin^2\varphi\sin\theta, \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=ab\sin\varphi\cos\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned} EG-F^2 &= \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2 \\ &= (abc)^2\sin^2\varphi\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right). \end{aligned}$$

而这时被积函数化为

$$\begin{aligned} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}} &= \left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此

$$I=abc\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]}\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

注意到这么一个事实, 当 $M+Nx^2$ 不取 0 且 $M\neq 0$ 时, 我们有

$$\int (M+Nx^2)^{-3/2}dx=\frac{1}{M}\cdot\frac{x}{\sqrt{M+Nx^2}}+C.$$

故

$$\begin{aligned} I &= abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi \\ &= -abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}d(\cos\varphi) \\ &= -abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\left[\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)+\left(c^2-a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta\right)\cos^2\varphi\right]^{-\frac{3}{2}}d(\cos\varphi) \\ &= abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-1}^{1}\left[\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)+\left(c^2-a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta\right)x^2\right]^{-\frac{3}{2}}dx \\ &= abc\int_0^{2\pi}\frac{2}{\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)c}d\theta=4ab\int_0^{\pi}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+b^2x^2}d+\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2x^2+b^2}dx\\&=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}x\right)\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}x\right)\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{ab}.\end{aligned}$$

进而得到

$$I=4ab\int_0^{\pi}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta=4\pi.$$

◀

✎ Solution(by Hansschwarzkopf) 注意到 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位外法向量是

$$n=\frac{\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

且 $1=x\cdot\dfrac{x}{a^2}+y\cdot\dfrac{y}{b^2}+z\cdot\dfrac{z}{c^2}$. 从而原积分可写成第二型曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

作小球面 $S_\varepsilon: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$. 运用 Gauss 公式可知

$$\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\iint_{S_\varepsilon}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=4\pi.$$

即

$$\iint_{\Sigma}\frac{dS}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}=4\pi.$$

◀

Example 13.25:

✎ Solution

◀

13.7 斯托克斯公式

Theorem 13.14 斯托克斯公式

设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则, 函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在包含曲面 Σ 在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数, 则有公式

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

L 是曲面 Γ 的正向边界曲线

Note: L 的方向与 Σ 的正向法向量 $\boldsymbol{n}$ 符合右手法则
L 是曲面 Σ 的正向边界曲线

Theorem 13.15 Stokes 公式的实质

它表达了有向曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系.

Theorem 13.16 斯托克斯公式的行列式形式

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

Theorem 13.17 斯托克斯公式的行列式形式

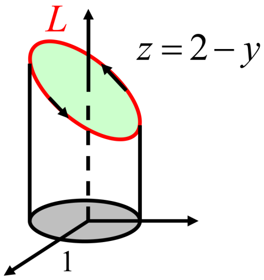
$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 为 Σ 的单位法向量

Example 13.26: 计算曲线积分 $\displaystyle\int_L -y^2\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+z^2\,\mathrm{d}z$
其中 L 是 $x^2+y^2=1$, $y+z=2$, 从 z 轴正向看去是逆时针方向。

✎ Solution 利用斯托克斯公式, 取 L 所围的平面为 Σ（上侧）$\Sigma: y+z=2$, 求 Σ 的单位法向量：$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,1,1\}$

$$\int_L -y^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$



$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_\Sigma (1+2y)\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D (1+2y)\sqrt{1+0^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (1+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$$

◀

Example 13.27:

✎ Solution

◀

第 14 章 无穷级数

14.1 常数项级数的概念和性质

Example 14.1: 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$

Solution 这里主要利用公式 $\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{n+1-n}{1+(n+1)n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n+1) - \arctan n) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan 1 \quad (n \to \infty) \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Example 14.2: 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$

Solution

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{n-1}{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}}{1+\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\arctan \frac{n}{n+1} - \arctan \frac{n-1}{n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \arctan \frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \big(\arctan(2n+1) - \arctan(2n-1)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \arctan(2n+1) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Note:

$$\arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(n+1) - \arctan(n)$$

$$\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1}$$
$$\arctan\frac{2}{n^2}=\arctan\frac{1}{n-1}-\arctan\frac{1}{n+1}$$
$$\arctan\frac{2n}{n^4+n^2+2}=\arctan(n^2+n+1)-\arctan(n^2-n+1)$$

Example 14.3: 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$ 的和

Proof: 注意到

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots=1$$

□

Example 14.4: 设 $0<x<1$, 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ 的和函数

Solution 由于

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{x^{2^n}}{1-\left(x^{2^n}\right)^2}=\frac{(x^{2^n}+1)-1}{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}=\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}$$

部分和 (裂项)

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\right)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}$$

令 $N\to\infty$, 得到原级数的和为 $\frac{1}{1-x}$. ◀

Example 14.5: 求 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 的和

Proof:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right)+\left(\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n+1}{n}\right)\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{n+1}{n}\right)=-\ln 2$$

□

Example 14.6: 证明: 级数 $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$ 发散于 $+\infty$

☞ Proof: 考察

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) > \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{n} \end{aligned}$$

显然 $S_{3n} \to +\infty\ (n \to +\infty)$. 对 $\forall m \in \mathbb{N}^+$, $\exists n \in \mathbb{N}$, 使得 $m = 3n + i\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$. 由级数的通项趋于 0, 故当 m, 适当大时, 有

$$S_m > S_{3n} - 1$$

从而 $S_m \to +\infty\ (m \to \infty)$ □

Example 14.7: 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}$ 的和.

✎ Solution

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}-\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n+1}+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)=\frac{\pi^2}{6}-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{1} \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

◀

Example 14.8: 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的敛散性:

$$\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$$

☞ Proof: 由于

$$u_n = \sin\frac{n\pi}{6} = \frac{2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi}{2\sin\frac{\pi}{12}}$$

从而

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\right)\right. \\ &\qquad \left.+\cdots+\left(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right) \end{aligned}$$

因为当 $n\to\infty$ 时, $\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在, 所以 S_n 的极限不存在, 即级数发散 □

Example 14.9: (北京市 1992 年竞赛题) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$, $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$, 求证: 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$ 收敛, 并求其和

Proof: 令 $F(x)=(1-x-x^2)f(x)$, 则 $F(x)=1$.
根据莱布尼茨公式, 对上式两边求 $(n+2)$ 阶导数, 有

$$\begin{aligned}F^{(n+2)}(x)&=f^{(n+2)}(x)(1-x-x^2)+C_{n+2}^1f^{(n+1)}(x)(-1-2x)+C_{n+2}^2f^{(n)}(x)(-2)\\&=0\end{aligned}$$

令 $x=0$ 得

$$(n+2)!a_{n+2}+C_{n+2}^1a_{n+1}(n+1)!(-1)+C_{n+2}^2a_nn!(-2)=0$$

$$(n+2)!a_{n+2}-(n+2)!a_{n+1}-(n+2)!a_n=0$$

于是 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, 且

$$a_0=\frac{1}{0!}f^(0)(0)=1\,,\ a_1=\frac{1}{1!}f'(0)=\left.\frac{-(-1-2x)}{(1-x-x^2)^2}\right|_{x=0}=1$$

由数学归纳法可得 $n\to\infty$ 时有 $a_n\to\infty$. 原级数的部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_ka_{k+2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+2}}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)\\&=\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\\&=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\to2\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$ 收敛, 且和为 2 □

Example 14.10: 证明：对任何自然数 p, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+p)}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)$$

Solution

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+p)}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+p}\right)\\&=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k+p+1}-\frac{1}{k+p}\right)\right]\\&=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+p}\right)\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)$$

◀

Example 14.11: 设 $P_0=1$, 且 $P_n+\frac{P_{n-1}}{1!}+\frac{P_{n-2}}{2!}+\cdots+\frac{P_0}{n!}=1$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$

Solution(by 向禹) 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(P_n+\frac{P_{n-1}}{1!}+\frac{P_{n-2}}{2!}+\cdots+\frac{P_0}{n!}\right)x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n=\frac{e^{-x}}{1-x}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)x^n$$

因此

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\to e^{-1}$$

◀

14.1.1 调和级数

Note:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{2kp^{2k}}+R(n,p)$$

Example 14.12: 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_n-\ln n)=\gamma$, 求极限: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}\right)^n$

Solution 注意到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}\right)^n}$$

而

$$\begin{aligned}\ln\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}\right)^n&=-\ln n-n\ln\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}{n}\right)\\=-\ln n-n\ln\left(\frac{n-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}}{n}\right)&=-\ln n-n\ln\left(1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}}{n}\right)\\=-\ln n-n\left(-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}}{n}-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n^2}-o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n^2}\right)\right)&\end{aligned}$$

$$=-\ln n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}+o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n-1+\frac{1}{n+1}+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}+o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}\right)$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n-1+\frac{1}{n+1}+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}+o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n\right)-1+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}+o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}\right)\right)$$

$$=\gamma-1$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}\right)^n=e^{\gamma-1}$$

◀

Example 14.13: 设 $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n)=\gamma$$

其中 γ 是欧拉常数, 若现在我们知道

$$\lim_{n\to\infty}n\big(A-n(H_n-\ln n-\gamma)\big)=B$$

其中 A, B 是两个常数, 求 $\frac{A}{B}$

Solution 设

$$f(n)=H_n=\ln n+\gamma+\frac{c}{n}+\frac{d}{n}+\frac{k}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

则有

$$f(n+1)-f(n)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-c\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-d\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$-k\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

且 $f(n+1)-f(n)=\dfrac{1}{n+1}$, 取 $x=\dfrac{1}{n}$, 那么简单计算有

$$\frac{x}{1+x}=\ln(1+x)-cx^2\cdot\frac{1}{1+x}-dx^3\cdot\frac{x+2}{(x+1)^2}-kx^4\cdot\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

利用泰勒公式有

$$x(1-x+x^2)+o(x^4)=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)-cx^2(1-x)-dx^3\cdot 2+o(x^4)$$

比较系数得

$$c=\frac{1}{2},\quad d=-\frac{1}{12}$$

◀

Example 14.14: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2m}+\ln\left(\frac{e}{m}\right)+\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{\zeta(1-n)}{m^n}\right)\right]$$

Solution 利用公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{2kp^{2k}}+R(m,p)$$

其中 $-\dfrac{B_{2k}}{2k}$ 被 $\zeta(1-2k)$ 所代替，又对于所有正整数 m，有 $\zeta(-m)=0$ 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2m}+\ln\left(\frac{e}{m}\right)+\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{\zeta(1-n)}{m^n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left\{\gamma+R\left(m,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)\right\}$$

由

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}=\psi(m)+\gamma+\frac{1}{m}\ ;\ \left|B(m,p)\right|\leq\frac{\left|B_{2n+2}\right|}{(2p+2)m^{2p+2}}\cdots[1]$$

对于 $m>0$, $p\leq 0$; 由 $\left|B_{2p}\right|\sim 4\sqrt{\pi p}\left(\dfrac{p}{\pi e}\right)^{2p}$, $n\to\infty\cdots[2]$ 结合 [1], [2] 得出:

$$\left|R\left(m,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)\right|\leq(1+o(1))2\sqrt{\frac{2\pi}{m}}e^{2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2-m}(2\pi e)^{-2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}\cdots[3]$$

由

$$\lim_{n\to\infty}(1+o(1))2\sqrt{\frac{2\pi}{m}}e^{2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2-m}(2\pi e)^{-2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}=0$$

即得所求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2m}+\ln\left(\frac{e}{m}\right)+\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{\zeta(1-n)}{m^n}\right)\right]=\gamma$$

◀

14.1.2 柯西审敛原理

Theorem 14.1 柯西审敛原理

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件为: 对于任意给定的正数 ε, 总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 对于任意的正整数 p 都有

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\right| < \varepsilon$$

成立

Example 14.15: 判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n}\right)$ 的敛散性

Proof: 当 n 是 3 的倍数时, 如果取 $p = 3n$, 则必有

$$\begin{aligned}|S_{n+p} - S_n| &= \left|\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \frac{1}{n+4} + \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right) + \cdots + \frac{1}{4n-2} + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right)\right| \\ &> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{4n-2} > \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \cdots + \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

于是对 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, 不论 N 为任何正整数, 当 $n > N$ 并 n 是 3 的倍数, 且当 $p = 3n$ 时, 就有

$$|S_{n+p} - S_n| > \varepsilon_0$$

根据柯西审敛原理知, 级数发散 □

Example 14.16: 若 $a_n > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 发散, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. 证明:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛

Proof: (1) 利用柯西收敛准则

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$(固定), 取 $n' = N + 1 > N$. 于是有 $\{S_n\} \uparrow$ 趋向于 $+\infty$, 所以对固定的 N, 存在 $p' > N$ 适当大, 可使 $\frac{S_{n+1}}{S_{N+1+p'}} < \frac{1}{2}$. 于是有

$$\begin{aligned}\frac{a_{n'+1}}{S_{n'+1}} + \frac{a_{n'+2}}{S_{n'+2}} + \cdots + \frac{a_{n'+p'}}{S_{n'+p'}} &\geqslant \frac{S_{n'+p'} - S_{n'}}{S_{n'+p'}} = 1 - \frac{S_{n'}}{S_{n'+p'}} \\ &= 1 - \frac{S_{N+1}}{S_{N+1+p'}} > \frac{1}{2} = \varepsilon_0\end{aligned}$$

由柯西收敛准则知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散

(2) 因为 $S_n \leqslant S_{n+1}$, 所以

$$\frac{a_n}{S_n^2} \leqslant \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n \cdot S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$ 收敛于 $\frac{1}{a_1}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛 □

Example 14.17: 已知 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散

Proof: 根据柯西 (Cauchy) 收敛准则, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 收敛

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a_{2^n}}$ 收敛. 但是,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)=\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln(n+1)=\ln\left((n+1)!\right)$$

且当 n 足够大时, 有不等式

$$\ln\left((n+1)!\right)\leqslant\ln(n^n)=n\ln n$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a_{2^n}}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\ln\left((2^n+1)!\right)}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\ln\left(2^n\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\left(2^n\right)}=\frac{1}{\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

故原级数发散. □

Exercise 14.1: 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}$ 的敛散性

Proof: 对任意正整数 k,

$$\sum_{2k\pi<\frac{\pi}{2}\ln n<2k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}=\sum_{e^{4k}<n<e^{4k+\frac{1}{2}}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}>\frac{e^{4k+\frac{1}{2}}-e^{4k}-1}{\sqrt{2}e^{4k+\frac{1}{2}}}$$

从而

$$\varliminf_{k\to\infty}\sum_{2k\pi<\frac{\pi}{2}\ln n<2k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}\geqslant\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{2e}}$$

根据 Cauchy 收敛准则, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}$ 发散 □

Proof: 取

$$m=\left[e^{4N}+1\right],n=\left[e^{4N+1}\right]$$

那么当 $x\in[m,n]$ 时, 函数 $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)}{x}$ 递减, 考虑

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log k\right)}{k}&\geq\sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_m^n\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)\Big|_m^n\end{aligned}\tag{14.1}$$

注意到

$$\log n>\log\left(e^{4N+1}-1\right),\log m<\log\left(e^{4N}+1\right)$$

带入 (14.1) 式得

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log k\right)}{k} &\geq \frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\log\left(e^{4N+1}-1\right)\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\log\left(e^{4N}+1\right)\right)\right]\\ &=\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\log\left(1-\frac{1}{e^{4N+1}}\right)\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\log\left(1+\frac{1}{e^{4N}}\right)\right)\right]\\ &\to\frac{2}{\pi},(N\to\infty)\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛原理可得原级数发散. □

14.2 常数项级数的审敛法

14.2.1 正项级数及其审敛法

Example 14.18: 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$ 的敛散性

Proof: 因为

$$\frac{1}{3^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln 3}}=\frac{1}{n^{\ln 3}}$$

而 $\ln 3>1$, 故该级数收敛 □

Example 14.19: 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ 的敛散性

Proof: 因为

$$\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln(\ln\ln n)}}=\frac{1}{n^{\ln(\ln\ln n)}}<\frac{1}{n^2}\ (n>e^{e^{e^2}})$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛 □

Example 14.20: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个正项发散级数. 试判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 的敛散性.

Proof:[17] 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 故数列 $\{a_n\}$ 可能有界也可能无界.

(1) 当 $\{a_n\}$ 有界时, 即 $\exists M>0,\forall n,0\leqslant a_n\leqslant M$. 此时

$$\frac{a_n}{1+a_n}\geqslant\frac{1}{1+M}a_n$$

由比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散 $\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散

(2) 当 $\{a_n\}$ 无界时, 必有子列 $a_{n_k}\to+\infty\,(k\to+\infty)$, 此时

$$\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}}=\frac{1}{\frac{1}{a_{n_k}}+1}\to 1\neq 0\ (k\to+\infty)$$

于是由级数收敛的必要条件知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散 □

Example 14.21: 如果 $a_n > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 证明: 当 $p > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k^p}{k}$ 收敛

Proof: (1) 若 $p \geqslant 1$ 时, 因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

由数列极限的有界性可得: 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $a_n < 1$, 则 $a_n^p < a_n$

则此时 $\dfrac{a_k^p}{k} < a_k^p < a_n$, 因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 由比较判别法可得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k^p}{k}$ 收敛

(2) 若 $p \geqslant 1$ 时, 由加权不等式可得

$$\frac{a_k^p}{k} = a_k^p \cdot \frac{1}{k} = a_k^p \left(\frac{1}{k^{\frac{1}{1-p}}}\right)^{1-p} \leqslant p a_k + (1-p)\frac{1}{k^{\frac{1}{1-p}}}$$

因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\frac{1}{1-p}}}$ 收敛 $\left(1 < 1-p < 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{1-p} > 1\right)$

所以由比较判别法可得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k^p}{k}$ 收敛 □

Example 14.22: 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{a_n^{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1}}}{\sqrt[n]{(a_n)^{n^5+5n^2+1}}}\right)$ 也是收敛的

Proof: 因为

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1 = (n^2+5n+4)(n^2+5n+6) = (n^2+5n+5)^2$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1}}}{\sqrt[n]{(a_n)^{n^5+5n^2+1}}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{n^2+5n+5}}{a_n^{n^2+5n+\frac{1}{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{5-\frac{1}{n}}$$

注意到

$$a_n^{\frac{5n-1}{n}} = \left(\left(a_n^{5n-2} a_n^{\frac{1}{2}} \cdot a_n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5n}}\right)^5 \leqslant \left(\frac{(5n-2)a_n + 2\sqrt{a_n}}{5n}\right)^5$$

且

$$\frac{5n-2}{5n} a_n \leqslant a_n\,, \quad \frac{2\sqrt{a_n}}{5n} \leqslant \frac{1}{5}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

由比较判别法以及

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{5-\frac{1}{n}}$ 收敛, 故原级数收敛 □

Theorem 14.2 比较审敛法的极限形式

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l\ (0 \leqslant l < +\infty)$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
2. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l > 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

Exercise 14.2: 设 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$

1. 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = C$ 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - C)$ 的敛散性

Solution(1) 利用不等式：当 $x > 0$ 时，$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, 有

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n-1}} = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k}{k-1} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)\right] \\ &\geqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right] = \frac{1}{n} > 0 \end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减少有下界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在

(2) 显然, 以 a_n 为部分和的级数为 $1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1)\right)$, 则

该级数收敛于 C, 且 $a_n - C > 0$, 用 r_n 记作该级数的余项, 则

$$a_n - C = -r_n = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln k + \ln(k-1)\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$$

根据泰勒公式，当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$, 所以

$$a_n-C>\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right)$$

记 $b_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right)$, 下面证明正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散。因为

$$\begin{aligned}c_n &\triangleq n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2(k-1)(k-2)}\right)\\ &< nb_n<n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-2)}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

而当 $n\to\infty$ 时, $c_n=\frac{n-2}{2(n-1)}\to\frac{1}{2}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=\frac{1}{2}$.

根据比较判别法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散

因此, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 发散。 ◀

Theorem 14.3 Cauchy 积分比较审敛法

设 $f(x)$ 为 $[a,+\infty]$ 上的**非负单调减**的连续函数, 其中 $a\geqslant 0$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(a+n)$ 与广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散 ♣

Example 14.23: 设 $a_n>0$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$

Proof:(by ytdwdw)方法 1 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\to+\infty$.

于是a_n 可由从小到大进行重排, 设 $A_1\leqslant A_2\leqslant A_3\leqslant\cdots$. 而

$$\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}}\leqslant\frac{2n+1}{A_1+A_2+\cdots+A_{2n+1}}\leqslant\frac{2n+1}{(n+2)A_n}\leqslant\frac{2}{A_n}$$

$$\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}\leqslant\frac{2n}{A_1+A_2+\cdots+A_{2n}}\leqslant\frac{2n}{(n+1)A_n}\leqslant\frac{2}{A_n}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{A_n}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}<+\infty$$

方法 2 事实上可以证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$ 收敛. 而

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}.$$

记 $b_n = \frac{1}{a_n}$. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n} k b_k}{n!}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k b_k}{n \sqrt[n]{n!}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k b_k}{n \sqrt[n]{n!}}$$

而由 Stirling 公式,

$$\sqrt{n!} = \left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+o(1))\right]^{\frac{1}{n}} \sim \frac{n}{e}, \quad n \to +\infty$$

所以有常数 $C > 0$ 使得

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n \sqrt[n]{n!}} \leqslant C \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n^2} \leqslant 2C$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \leqslant 2C \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$$

□

Note: 因为利用 $\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \leqslant \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$ 来证明行不通, 所以尝试用

$$\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = \frac{\sqrt[n]{b_1 \cdot 2b_2 \cdots n b_n}}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \frac{b_1 + 2b_2 \cdots + n b_n}{n \sqrt[n]{n!}}$$

Example 14.24: 证明:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

Proof: 由柯西不等式

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant \frac{k^2(k+1)^2}{4} \Longrightarrow \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i}$$

那么有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i}\right) < 2 \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i^2}{a_i} \sum_{k=i}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\right] < 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{a_i} \cdot \frac{1}{i^2}$$

其中用到

$$\sum_{k=i}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{i^2}$$

□

Example 14.25: 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ 都有 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k - n a_n$ 是有界的。证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

☞ Proof:(by 欧阳) 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\ (n\geqslant 1)$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}$ (记 $S_0=0$)
$\exists M>0$, $|(1-n)S_n-S_{n-1}|\leqslant M$, 所以

$$|(n-2)!S_{n-1}-(n-1)!S_n|\leqslant M(n-2)!$$

$$-M\sum_{k=2}^{n}(k-2)!\leqslant\sum_{k=2}^{n}\left[(k-2)!S_{k-1}-(k-1)!S_k\right]\leqslant M\sum_{k=2}^{n}(k-2)!$$

即

$$-M\sum_{k=0}^{n-2}k!\leqslant S_1-(n-1)!S_n\leqslant M\sum_{k=0}^{n-2}k!$$

所以

$$\frac{S_1}{(n-1)!}-M\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}k!}{(n-1)!}\leqslant S_n\leqslant\frac{S_1}{(n-1)!}+M\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}k!}{(n-1)!}$$

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}k!}{(n-1)!}<\frac{(n-1)(n-2)!}{(n-1)!}=1$$

所以 $S_n\leqslant S_1+M$. S_n 单调递增有上界，故极限存在。因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 □

Example 14.26: 设 $a_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

(1) 当 $p>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛

(2) 当 $p\leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 发散

☞ Proof: (1) 由题设 S_n 单调上升, 则当 $p>1$ 时

$$\frac{(S_n)^{1-p}-(S_{n-1})^{1-p}}{(1-p)(S_n-S_{n-1})}=\frac{1}{(\xi_n)^p}>\frac{1}{S_n^p}\ ,\quad\exists\,\xi_n\in(S_{n-1},S_n)$$

$$\frac{a_n}{S_n^p}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^p}\leqslant\frac{(S_n)^{1-p}-(S_{n-1})^{1-p}}{1-p}$$

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{a_n}{S_n^p}\leqslant\sum_{n=2}^{m}\frac{(S_n)^{1-p}-(S_{n-1})^{1-p}}{1-p}=\frac{(S_m)^{1-p}-(S_1)^{1-p}}{1-p}$$

从而, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛

(2) 用反证法. 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=0$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)=0$.

$$\frac{\ln S_n-\ln S_{n-1}}{S_n-S_{n-1}}=\frac{1}{\xi_n}\sim\frac{1}{S_n}\ ,\quad\exists\,\xi_n\in(S_{n-1},S_n)$$

$$\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} \sim \ln S_n - \ln S_{n-1}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln S_n - \ln S_{n-1})$ 收敛, 但是由于该级数的部分和序列无界, 矛盾.

因此, 当 $p \leqslant 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 发散 □

Example 14.27: 设数列 $\{a_n\}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 都收敛。证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛

Solution 由题意可设 $\lim_{n\to\infty} na_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = B$。$A$，$B$ 均为有限数。

再由 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛知

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} na_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left[na_n - n(a_n - a_{n+1})\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} na_n - \lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = A - 0 = A\end{aligned}$$

考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和

$$\begin{aligned}S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) + na_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) + na_{n+1}\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 就得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1}) + \lim_{n\to\infty} na_{n+1} = B + A$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 ◀

Exercise 14.3: 设数列 $\{a_n\}$ 恒满足不等式 $\sqrt{n}|a_n| \leq 3$ $n = 1, 2, \ldots$ 试证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left[\left(\sum_{1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{2}^{n} a_i\right)^2 + \cdots + \left(\sum_{n}^{n} a_i\right)^2\right] = 0$$

Proof:利用 Cauchy 不等式当 $1 \leq k \leq n-1$

$$\left(\sum_{k}^{n} a_i\right)^2 \leq (n-k+1)\left(\sum_{k}^{n} a_i^2\right) \leq 9(n-k+1)\sum_{k}^{n} \frac{1}{i} \leq 9n\sum_{1}^{n} \frac{1}{i}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k}^{n}a_i\right)^2 \leq 9(n-1)n\sum_{1}^{n}\frac{1}{i}+\frac{9}{n}$$

易得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[9(n-1)n\sum_{1}^{n}\frac{1}{i}+\frac{9}{n}\right]=0$$

利用夹逼准则即得结论. □

Example 14.28: 如果两个通项单调递减的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散，问 $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$ 是否可能收敛?

Solution(by 向禹) 答案是肯定的，下面给出一个例子（by 逆神）

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{2^{2^k}}, b_n=\dfrac{1}{2^{2^{k+1}}}, 2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant 2^{2^k}-1, k=2m \\ a_n=\dfrac{1}{2^{2^{k+1}}}, b_n=\dfrac{1}{2^{2^k}}, 2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant 2^{2^k}-1, k=2m-1 \end{cases}$$

那么 $n\geqslant 2$ 时上式都有意义，且显然

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^{2m}}}\left(2^{2^{2m}}-2^{2^{2m-1}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\right)=\infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}b_n\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\left(2^{2^{2m-1}}-2^{2^{2m-2}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{2m-2}}}\right)=\infty$$

因此 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ 都发散，但 $\min\{a_n,b_n\}=\dfrac{1}{2^{2^{k+1}}}, 2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant 2^{2^k}-1$，因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^{k+1}}}\left(2^{2^k}-2^{2^{k-1}}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^{k+1}}}2^{2^k}=\frac{1}{2^{2^k}}<\infty$$

◀

Example 14.29: 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}=\alpha$$

Solution[18] 由 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha$ 可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^t=1+\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以任给 ε, 存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}$$

于是, 当 $n > N$ 时, 将 $\frac{a_N}{a_{N+1}}, \frac{a_{N+1}}{a_{N+2}}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$ 的不等式同序相乘, 得

$$\frac{\frac{1}{N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}} < \frac{a_N}{a_n} < \frac{\frac{1}{N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}$$

即

$$\frac{a_N \cdot N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}} < a_n < \frac{a_N \cdot N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

从而

$$\left(1-\sqrt[n]{\frac{a_N \cdot N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}\right)\frac{n}{\ln n} < (1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n} < \left(1-\sqrt[n]{\frac{a_N \cdot N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}\right)\frac{n}{\ln n}$$

考虑到

$$\sqrt[n]{\frac{c}{n^t}} = e^{\frac{\ln c - t\ln n}{n}} = 1 - \frac{t\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

所以当 $n \to +\infty$ 时, 上述不等式左右两端分别收敛于 $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$. 因此, 存在 $N_1 > N$, 使得当 $n > N_1$ 时, 有

$$\alpha - \varepsilon < (1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n} < \alpha + \varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n} = \alpha.$$

◀

14.2.2 交错级数及其审敛法

Example 14.30: 应用莱布尼茨判别法证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

Proof:(徐森林 543) 将级数按照相同符号归组, 不改变先后顺序得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} &= -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\cdots-\frac{1}{15}\\ &\quad+(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)+\cdots\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)\end{aligned}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}\right)$$

级数变为交错级数, 其中 $a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}>0$ 中有 $2n+1$ 项, 且

$$0<a_n<\frac{2n+1}{n^2}<\frac{3n}{n^2}=\frac{3}{n}\to 0$$

$$\begin{aligned}a_n-a_{n+1}&=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}\\&\quad-\frac{1}{(n+1)^2+2n}-\left[\frac{1}{(n+1)^2+2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2+2(n+1)}\right]\\&=(2n+1)\left[\frac{1}{n^2(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}\right]\\&\qquad\qquad-\frac{1}{n^2+4n+2}-\frac{1}{n^2+4n+3}\\&>\frac{(2n+1)^2}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}-\frac{2}{n^2+4n+1}=\frac{2n^2+1}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}>0\end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ 单调减趋向于 0. 由 Leibniz 判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛 □

Proof:(谢惠明 p25) 将级数中相邻的同号项合并，从而组成一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, 其中

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2+1}\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+k/n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\left[1-\frac{k}{n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]\\&=\frac{1}{n^2}\left[(2n+1)-\frac{2n+1}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

由此即可知 $\{a_n\}$ 为无穷小量，且至少当 n 充分大时单调减少

$$a_n-a_{n+1}=\frac{2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

表明原级数加括号后得到的级数收敛。由于括号中的项符号相同，所以可推知原级数收敛 □

Exercise 14.4: [17] 设 $\alpha>0, m$ 为正整数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt[m]{n}]}}{n^{\alpha}}$ 当 $\alpha+\frac{1}{m}>1$ 时收敛；当 $\alpha+\frac{1}{m}\leqslant 1$ 时发散。

Example 14.31: 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 条件收敛

Proof: 由泰勒公式 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+o(x)$, 得到

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (n\to\infty)$$

故

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}+\sum_{n=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

它是三个收敛级数的和, 从而该级数收敛.

又因 $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|\geqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, 则 $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|$ 发散. 因此原级数条件收敛 □

☞ Proof: 因 $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|\sim\frac{1}{n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

由比较判别法的极限形式知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|$ 发散.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

前 $2n$ 项和 S_{2n}

$$S_{2n}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1+(-1)^{2n+1}}}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

且

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}}<S_{2n} \quad S_{2n}\geqslant-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

故 $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 单调下降而且有下界, 从而 $\{S_{2n}\}$ 有极限, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 存在, 并记为 S.

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\right)=S$$

从而 $\{S_n\}$ 极限存在, 且为 S, 因此级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 收敛.

综上知, 原级数条件收敛 □

Example 14.32: 设 $a_n=\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$. 其中 p 为正的常数.

证明: 当 $p\leqslant1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛

☞ Proof:

$$|a_n|=\left|\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\mathrm{d}x\right|=\int_n^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\int_{n+\frac{1}{6}}^{n+\frac{5}{6}}\left|\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_{n+\frac{1}{6}}^{n+\frac{5}{6}}\left|\frac{1}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_{n+\frac{1}{6}}^{n+\frac{5}{6}}\frac{1}{(n+1)^p}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3(n+1)^p}\geqslant\frac{1}{3(n+1)}$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散

由于 $\sin(\pi x)=(-1)^n\sin\pi(x-n)$ 在 $(n,n+1)$ 上的符号, 当 $n=1,2,\cdots$ 时交错改变.

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是交错级数.

$$|a_n|=\int_n^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|\frac{\sin\pi(x+n)}{(x+n)^p+1}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n)^p+1}\mathrm{d}x$$

因此

$$|a_{n+1}|=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n+1)^p+1}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n)^p+1}\mathrm{d}x=|a_n|$$

由于 $|a_n|=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n)^p+1}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n^p}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

由莱布尼茨判别法, 当 $p\leqslant1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛 □

Example 14.33: 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性

Proof:由于

$$\begin{aligned}|a_n|&=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\\&>\int_{(n+\frac16)\pi}^{(n+\frac56)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x>\int_{(n+\frac16)\pi}^{(n+\frac56)\pi}\frac{\frac12}{x}\mathrm{d}x>\frac12\int_{(n+\frac16)\pi}^{(n+\frac56)\pi}\frac{1}{(n+1)\pi}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3(n+1)}\end{aligned}$$

因此, 由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 发散

$$|a_n|=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\xlongequal{t=x-n\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}\right|\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\mathrm{d}t$$

由于 $\sin(x+n\pi)=(-1)^n\sin(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上的符号, 当 $n=1,2,\cdots$ 时交错改变.

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是交错级数.

$$|a_{n+1}|=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+(n+1)\pi}\mathrm{d}t<\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\mathrm{d}t=|a_n|$$

且 $|a_n|=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\mathrm{d}t<\frac{1}{n\pi}\to0,(n\to\infty)$ 由莱布尼茨判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛

综上，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛 □

Example 14.34: 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续，且 $f(0)=1$，$f''(0)=2$，试证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac1n\right)-1\right]$ 绝对收敛

✎ Solution $f(x)$ 为偶函数, 则 $f'(x)$ 为奇函数, $f'(-x)=-f'(x)$,
取 $x=0$, 得 $f'(0)=0$, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2=1+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2\quad(0<\theta<1),$$

令 $x=\frac{1}{n}$, 得

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{2}\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|\frac{1}{n^2}$$

由于 $f''(x)$ 在 $x=0$ 连续, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f''\left(\frac{\theta}{n}\right)=f''(0)=2$,
于是 $\forall\varepsilon>0$, 不妨取 $\varepsilon=1$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)-2\right|<\varepsilon=1\Longrightarrow\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|<3$$

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{2}\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|\frac{1}{n^2}<\frac{3}{2n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由比较判别法得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛,
于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 亦绝对收敛 ◀

Theorem 14.4 Riemann 级数重排

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 则适当交换各项的次序可使其收敛到任一事先指定的实数 S, 也可以使其发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$ ♣

A-D 判别法

Theorem 14.5 Dirichlet 判别法

设

1. $\{b_n\}$ 单调趋于 0
2. $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, $|S_k|\leqslant M, k=1,2,\cdots$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有界 ♣

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

Example 14.35: 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 的敛散性

Proof: 因为 $\{\frac{1}{n}\}$ 是单调收敛于 0 的数列, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n$ 是部分和有界的.

根据 Dirichlet 判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛 □

Example 14.36: 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sin n^2}{n}$ 的敛散性

Proof: 因为

$$\sum_{k=1}^{n}\sin n\sin n^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\cos(k(k-1))-\cos(k(k+1))\right]=\frac{1}{2}[1-\cos(n(n+1))]$$

故部分和 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin n\sin n^2\right|\leqslant 2$，且 $\{\frac{1}{n}\}$ 是单调收敛于 0 的数列

根据 Dirichlet 判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sin n^2}{n}$ 收敛 □

Theorem 14.6 Abel 判别法

设

1. $\{b_n\}$ 单调有界
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

Example 14.37: 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}}$ 也收敛

Proof: 定义

$$I=\{n:(a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}}\leqslant e^2a_n\};,\quad J=\{n:(a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}}>e^2a_n\}$$

若 $n\in J$, 则有

$$(a_n)^{\ln n}>(en)^2(a_n)^{1+\ln n}\Longrightarrow a_n<(en)^{-2}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}}\leqslant\sum_{n\in Ix}e^2a_n+\sum_{n\in J}(en)^{-2}\leqslant e^2\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+e^{-2}\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-2}<+\infty$$

Note: 一般的, 设 $a_n>0,\varphi(n)>0,\varphi(n)=O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n)^{1-\varphi(n)}$ 也是收敛的.

□

Theorem 14.7 和差变换公式

设 $m < n$. 则

$$\sum_{k=m}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = A_n b_n - A_{m-1}b_m + \sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$$

☞ Proof: 直接计算即可。

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k &= \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1}b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{m-1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= (A_n b_n - A_{m-1}b_m) + \sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})\end{aligned}$$

□

Theorem 14.8 分部求和法

设 $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, (k = 1, 2, \cdots, n)$. 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1})$$

☞ Proof: 补充定义 $s_0 = 0$, 利用第一题的结论即可。令本命题和第一题等价。

不妨设 $m < n$, 由题知

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1})$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k b_k = s_{m-1} b_{m-1} + \sum_{k=1}^{m-2} s_k(b_k - b_{k+1})$$

两式相减得

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1}b_{m-1} + \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1})$$

□

Example 14.38: 设 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \to s(n \to \infty)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s b_1 + (s_n - s)b_n - \sum_{k=1}^{n-1}(s_k - s)(b_{k+1} - b_k)$$

Proof: 由分布求和知

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_{k+1} - b_k)$$

而

$$s(b_n - b_1) = s \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)$$

两式相减即得结论。 □

Theorem 14.9 阿贝耳引理

若对一切 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 而言 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0, m \leq a_1 + a_2 + \cdot + a_n \leq M$ 则有

$$b_1 m \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 M$$

Proof: 设 $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, (k = 1, 2, \cdots, n)$. 由于 $b_k \geq 0, b_k - b_{k+1} \geq 0$ 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) \leq b_n M + M \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = b_1 M$$

左边不等式证明类似

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) \geq b_n m + m \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = b_1 m$$

□

Example 14.39:

Proof:

□

14.3 幂级数

Example 14.40: 将 $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数

Proof:

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1)$$

□

Example 14.41: 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 的和函数

Proof:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)'$$

$$= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)'$$
$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

□

Example 14.42: 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的和函数

Proof:(方法 1)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= x\sum_{n=1}^{\infty} n(x^n)' \\ &= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'\right)' \\ &= x\left(x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)'\right)' \\ &= x\left(\frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4}\right) \qquad x \in (-1, 1)\end{aligned}$$

□

Proof:(方法 2)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \\ &= x^2\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'' + x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' \\ &= x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'' + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' \\ &= x^2\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)'' + x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)'\end{aligned}$$

□

Example 14.43: 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^n$ 的和函数

Proof: 易得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^n = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}$$

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}$ 注意到 $S(0) = 0$

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}t = \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^n = \frac{\sqrt{x}}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x \in [-1, 1)$$

□

Example 14.44: 求 $\dfrac{x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)}{x}$ 的和函数

Proof:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' \mathrm{d}x - \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \mathrm{d}x \\
&= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) \mathrm{d}x - \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x - \frac{1}{x} \int_0^x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)}{x} \qquad |x| < 1
\end{aligned}$$

□

Example 14.45: 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1} \quad (|x|<1)$ 的和函数

Solution 注意到

$$\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1} = \frac{x^{2^n}+1-1}{(x^{2^n}-1)(x^{2^n}+1)} = \frac{1}{x^{2^n}-1} - \frac{1}{x^{2^n}+1}$$

因此级数的部分和函数列为

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2^k}}{x^{2^{k+1}}-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x^{2^k}-1} - \frac{1}{x^{2^k}+1} \right) = \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}$$

由于 $|x|<1$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2^{n+1}} = 0$, 于是

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^{2^{n+1}}-1} \right) = \frac{1}{x^2-1} + 1 = \frac{x^2}{x^2-1}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1} = \frac{x^2}{x^2-1}, |x| < 1$$

◀

Example 14.46: 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$ 的收敛半径与收敛域

Solution 考虑比值审敛法

$$\lim_{n\to 0} \left| \frac{\dfrac{(x-2)^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}}{\dfrac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}} \right| = \lim_{n\to 0} \left| \frac{(x-2)(n+1)}{3(n+2)} \right| = \left| \frac{x-2}{3} \right|$$

则当 $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| < 1$ 时，即 $-1 < x < 5$ 时，级数收敛；

当 $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| > 1$ 时，即 $-1 > x$ 或 $x < 5$ 时，级数发散；收敛半径 $R = 3$

且当 $x = 1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$，由莱布尼茨判别法知收敛；

当 $x = 5$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$，显然发散；因此原级数的收敛域为 $[-1, 5)$ ◀

Example 14.47: 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n^2+1}$ 的收敛半径与收敛域

Solution 考虑比值审敛法

$$\lim_{n\to 0} \left| \frac{\dfrac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\dfrac{(x-3)^n}{n^2+1}} \right| = |x-3|$$

则当 $|x-3| < 1$ 时，即 $2 < x < 4$ 时，级数收敛；

当 $|x-3| > 1$ 时，即 $2 > x$ 或 $x < 4$ 时，级数发散；收敛半径 $R = 1$

且当 $x = 2$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$，收敛；

当 $x = 4$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$，收敛；因此原级数的收敛域为 $[2, 4]$ ◀

Example 14.48: 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2+1}$ 的收敛半径与收敛域

Solution 因为

$$\rho = \lim_{n\to 0} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to 0} \left| \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2+1}}{\dfrac{1}{n^2+1}} \right| = 1$$

所以收敛半径 $R = \dfrac{1}{\rho} = 1$

且当 $x = -1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$，收敛；

当 $x = 1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$，收敛；因此原级数的收敛域为 $[-1, 1]$ ◀

Example 14.49: 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数

✎ Solution 先求收敛域，考虑比值审敛法

$$\lim_{n\to 0}\left|\frac{\frac{1}{2(n+1)+1}x^{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to 0}\left|\frac{2n+1}{2n+3}x^2\right| = |x|^2$$

则当 $|x|^2 < 1$ 时，即 $-1 < x < 1$ 时，级数收敛；

当 $|x|^2 > 1$ 时，即 $-1 > x$ 或 $x < 1$ 时，级数发散；收敛半径 $R = 1$
且当 $x = -1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，由莱布尼茨判别法知收敛；

当 $x = 1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$，显然发散；因此原级数的收敛域为 $[-1, 1)$
再求和函数，设和函数为 $s(x)$，即

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

则

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1)$$

上式对 0 到 x 积分

$$s(x) = s(x) - \underbrace{s(0)}_{s(0)=0} = \int_0^x s'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \quad x \in [-1, 1)$$

◀

Example 14.50: 求极限 $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}$ 傲娇小魔王

✎ Solution

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n} &= \lim_{t\to 1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}t^n(-1)^k t^{nk} \\
&= \lim_{t\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{k+1}(1-t)}{1-t^{k+1}} \\
&= \lim_{t\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{k+1}}{1+t+t^2+\cdots+t^k} \\
&= \lim_{t\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{k+1}}{1+k} \\
&= \lim_{t\to 1^-}\ln(1+t) = \ln 2
\end{aligned}$$

◀

Example 14.51: 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上正值单调减少, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 则 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与极限 $\lim\limits_{h\to0^+} h\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh)$ 同时收敛, 且

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{h\to0^+} h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh).$$

Solution 由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上正值单调减少, 有

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)$$

和

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant h\sum_{n=0}^{\infty} f((n+1)h)\\&=h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh)=h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)-hf(0).\end{aligned}$$

于是,

$$h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)-hf(0)\leqslant\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)$$

显然, $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与极限 $\lim\limits_{h\to0^+} h\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh)$ 同时收敛, 且

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x-h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)\right|\leqslant hf(0)$$

上式中, 令 $h\to0^+$ 就得到所要证明的等式 ◀

Example 14.52: 级数 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\right)^3$ 中 x^{20} 的系数为 ________.

Solution 首先

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\sum_{n=0}^{\infty} x^n-1=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$$

故

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)^3=\left(\frac{x}{1-x}\right)^3=x^3(1-x)^{-3}$$

我们知道

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, x\in(-1,1)$$

故 $(1-x)^{-3}$ 中 x^{17} 的系数为

$$(-1)^{17}\frac{(-3)(-3-1)\cdots(-3-17+1)}{17!}=171$$

于是我们就得到 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)^3$ 中 x^{20} 的系数为 171 ◀

Exercise 14.5: 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域与和函数 $s(x)$.

Solution 令 $t=x-1$, 上述级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\cdot 3^n}$, 因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{3}$,
所以，收敛半径 $R=3$ 收敛区间 $|t|<3$, 即 $-2<x<4$.
当 $x=4$ 时，级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 这级数发散，
当 $x=-2$ 时，级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 这级数收敛, 原级数的收敛域为 $[-2,4)$.
设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$, 则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{4-x}$$

又 $s(1)=0$, 故

$$\begin{aligned}s(x)&=s(1)+\int_1^x s'(t)\,\mathrm{d}t=0+\int_1^x\frac{1}{4-t}\,\mathrm{d}t=-\ln(4-t)\Big|_1^x\\&=\ln 3-\ln(4-x),-2\leqslant x<4.\end{aligned}$$

◀

Exercise 14.6: 已知 $a_1=3$, $a_2=5$, 当 $n\geqslant 3$ 时 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$.
试求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径与和函数

Solution 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i=\lim_{n\to\infty}S(1)$, 考虑比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}|x|<1$$

(法 1 夹逼准则) 令 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, 则

$$b_n=1+\frac{1}{b_{n-1}}\Longleftrightarrow b_nb_{n-1}=b_{n-1}+1$$

设 $\{b_n\}$ 极限存在并记 $\lim_{n\to\infty}b_n=A$, 则

$$A=1+\frac{1}{A}\Longrightarrow A=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\text{ 或 }A=\frac{1-\sqrt{5}}{2}(\text{舍去})$$

现证明 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$\begin{aligned} 0 < \left|b_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| &= \left|1+\frac{1}{b_{n-1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| = \frac{1}{2b_n}\left|2b_{n-1}-\sqrt{5}\right| \\ &< \frac{1}{2}\left|2b_{n-1}-\sqrt{5}\right| < \frac{1}{2^2}\left|2b_{n-2}-\sqrt{5}\right| \\ &< \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}\left|2b_1-\sqrt{5}\right| \to 0 \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, 于是可得 $S(x)$ 的收敛半径为 $R=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(法 2 压缩映像原理) 令 $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, 则

$$b_n = 1+\frac{1}{b_{n-1}} \Longleftrightarrow b_nb_{n-1} = b_{n-1}+1$$

$$\begin{aligned} |b_{n+1}-b_n| &= \left|\left(1+\frac{1}{b_n}\right)-\left(1+\frac{1}{b_{n-1}}\right)\right| = \frac{|b_n-b_{n-1}|}{b_nb_{n-1}} \\ &= \frac{|b_n-b_{n-1}|}{b_{n-1}+1} < \frac{1}{2}|b_n-b_{n-1}| \end{aligned}$$

因此, 由压缩映像原理知 $\{b_n\}$ 极限存在并记 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$, 则

$$A = 1+\frac{1}{A} \Longrightarrow A = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 或 } A = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(\text{舍去})$$

于是可得 $S(x)$ 的收敛半径为 $R=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(法 3 级数收敛的必要条件) 为证明数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ 收敛, 考察

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \left|\frac{a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| = \left|\frac{a_{n+1}^2-(a_{n+1}+a_n)a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| \\ &= \left|\frac{a_n^2 - a_{n+1}(a_{n+1}-a_n)}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| = \left|\frac{a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| \\ &= \cdots = \left|\frac{a_2^2-a_3a_1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| = \end{aligned}$$

由数列定义知, 当 $n \geqslant 1$ 时, $a_n \geqslant n-1$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$ 是收敛的,

从而级数 $\dfrac{a_1}{a_2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}}-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 绝对收敛, 而后者的前 n 项和恰好为 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

故无穷级数收敛定义知数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ 收敛, 设其收敛于数 R,

则将关系式 $a_n = a_{n-2}+a_{n-1}$ 两边同除以 a_n 得

$$1 = \frac{a_{n-2}}{a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

两边取极限 $(n \to \infty)$, 有 $1 = R^2 + R$. 解此方程 $R = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (负根舍去).

于是可得 $S(x)$ 的收敛半径为 $R = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(法 4 特征根) $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ 特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

有特征根 $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

所求通解为

$$a_n = C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

其中 C_1，C_2 为任意常数, 由已知 $a_1 = 3, a_2 = 5$ 得

$$a_n = \frac{5-2\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

于是可得 $S(x)$ 的收敛半径为 $R = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \Longrightarrow \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

从而

$$\begin{aligned} \left(S(x) - a_1 x - a_2 x^2\right) &= \left(x^2 S(x)\right) + \left(x(S(x) - a_1 x)\right) \\ &\Longrightarrow (1 - x - x^2) S(x) = a_1 x + (a_2 - a_1) x^2 \end{aligned}$$

解得和函数

$$S(x) = \frac{a_1 x + (a_2 - a_1) x^2}{1 - x - x^2} = \frac{3x + 2x^2}{1 - x - x^2}, \quad |x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

◀

Example 14.53: 已知 u_n 满足 $u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1} e^x$ (n 为正整数)，且 $u_n(1) = \dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

Solution 先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1} e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$$u_n(x) = e^{\int dx} \left(\int x^{n-1} e^x e^{-\int dx} dx + C \right) = e^x \left(\frac{x^n}{n} + C \right)$$

由条件 $u_n(1)=\frac{e}{n}$, 得 $c=0$, 故 $u_n(x)=\frac{x^ne^x}{n}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ne^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

故

$$s(x)=\int_0^x s'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$$

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2$

于是，当 $-1\leqslant x<1$ 时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^x\ln(1-x)$ ◀

Example 14.54: 设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 且 $\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=A$.

如果 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 那么 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=A$.

Proof: 由假设 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$. 令 $\delta_n=\sup_{k\geqslant n}\{|ka_n|\}$, 则 $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}a_n-A&=\sum_{n=0}^{N}a_n-S(x)+S(x)-A\\&=\sum_{n=0}^{N}a_n(1-x^n)-\sum_{n=N+1}^{+\infty}a_nx^n+S(x)-A\\&=I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)\end{aligned}$$

当 $x\in[0,1)$,

$$|I_1(x)|\leqslant(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

$$I_2(x)\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}|na_n|\frac{1}{n}x^n\leqslant\frac{\delta_n}{N}\sum_{n=N+1}^{+\infty}x^n\leqslant\frac{\delta_n}{N(1-x)}$$

$|I_3(x)|=|S(x)-A|$. $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 N, 使得 $\sqrt{\delta_N}\leqslant\frac{\varepsilon}{3(1+\delta_1)}$. 取 $x_N=1-\frac{\sqrt{\delta_N}}{N}$

$$I_1(x_N)\leqslant(1-x_N)N\delta_1=\delta_1\sqrt{\delta_N}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

$$I_2(x_N) \leqslant (1-x_N)N\delta_1 = \frac{\delta_N}{N(1-x_N)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\lim_{N\to\infty} x_N = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\sqrt{\delta_N}}{N}\right) = 1$$

从而存在 N_0, 当 $N > N_0$, $|I_3(x_N)| = |S(x_N) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| = \left|I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

因此 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$ □

Example 14.55: 求 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$ 的和函数

Proof: 用 Wallis 公式容易确定收敛域为 $[-1,1)$。
设和函数为 $S(x)$ 。并在 $(-1,1)$ 中试用逐项求导，得到

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot nx^{n-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot (2n+1)x^n\right) = \frac{1}{2}S(x) + xS'(x) \end{aligned}$$

因此 $S(x)$ 在 $(-1,1)$ 中满足微分方程

$$(1-x)S'(x) = \frac{1}{2}S(x)$$

这时可以看出在区间 $(-1,1)$ 上成立恒等式:

$$\left[\sqrt{1-x}S(x)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[(1-x)S'(x) - \frac{1}{2}S(x)\right] \equiv 0$$

因此 $\sqrt{1-x}S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为常值函数，再利用 $S(0) = 1$ ，就得到

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad -1 < x < 1 \tag{14.2}$$

从 Abel 第二定理知道 $S(x)$ 于 $[-1,1)$ 上连续，而上式右边的表达式也是如此，因此 (14.2) 对 $x = -1$ 也成立 □

Exercise 14.7: 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Proof: 我们知道 Gamma 函数有

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Longrightarrow \Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)\Gamma(x+1)$$

这样

$$\frac{(n-1)!}{n(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n)}{n\Gamma(x+n+1)}=\frac{B(x+1,n)}{n}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(x+1,n)}{n}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^x\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}\right)(1-t)^x\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left[-\frac{\ln(1-t)}{t}\right](1-t)^x\,\mathrm{d}t\overset{z=1-t}{=\!=\!=}\int_0^1\left[-\frac{\ln z}{1-z}\right]z^x dz\\&=\int_0^1(-1)\sum_{k=1}^{\infty}z^{x+k-1}\ln z dz=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)\int_0^1 z^{x+k-1}\ln z dz\\&\overset{z=e^{-u}}{=\!=\!=}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}ue^{-u(x+k)}\,\mathrm{d}u\\&\overset{y=u(x+k)}{=\!=\!=}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}ye^{-y}\,\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}\end{aligned}$$

□

Exercise 14.8: 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ 的和函数.

Solution 在 $|x|<1$ 上对 $S(x)$ 逐项求导,

知 $S'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1}$, 且 $S''(x)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}$.

由此可得

$$(1-x^2)S''(x)-xS'(x)=4$$

在两端乘以 $(1-x^2)^{-1/2}$, 我们有

$$\left(\sqrt{1-x^2}S'(x)\right)'=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}},$$

故

$$S(x)=\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1.$$

◀

Exercise 14.9: 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ 的和函数.

Solution 注意到

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}-x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^{n+1}}-\frac{1}{1-x^n}\right)\end{aligned}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x^{n+1}}-\frac{1}{1-x}=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & |x|>1\\ \dfrac{x}{x-1}, & |x|<1\end{cases}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\begin{cases}\dfrac{x}{(x-1)^2}, & |x|>1\\ \dfrac{x^2}{(x-1)^2}, & |x|<1\end{cases}.$$

◀

Exercise 14.10: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 为发散的正项级数, $x>0$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}$ 的和函数.

✎ Solution 首先,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\\ =&\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_n+x)}-\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right]\\ =&\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{1}{x}\left[\frac{a_1a_2}{a_2+x}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right].\end{aligned}$$

当 n 足够大时,

$$1+\frac{x}{a_{n+1}}\sim e^{x/a_{n+1}}.$$

因此 $\left(1+\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a_{n+1}}\right)$ 与 $\exp\left\{x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\right\}$ 具有相同的收敛性, 均发散, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{\left(1+\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a_{n+1}}\right)}=0.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1a_2}{x(a_2+x)}=\frac{a_1}{x}.$$

◀

Exercise 14.11: 设 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 确定系数 a_0, a_1, a_2 和 a_3, 并证明当 $n\geq 2$ 时, 有

$$a_n>\frac{\mathrm{e}}{(\gamma\ln n)^n},$$

其中 γ 是大于 e 的一个常数.

✎ Solution 前面四个系数的确定是容易的

$$a_1=e,a_2=e,a_3=\frac{5}{6}e$$

下面给出后面的证明, 利用幂级数展开式如下

$$e^{e^x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{kx}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kx)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\right),$$

因此有

$$a_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}>\frac{k^n}{n!\,k!},$$

这样对每一个 $k\geq 0$ 成立. 以下取 k 使得本题的不等式成立即可. 由于本题的 γ 可以放大, 因此只要在等价的意义下成立即可. 这时又可以将阶乘理解为 Γ 函数, 因此 k 用非整数代入是可以的. 以下证明, 取 $k=\dfrac{n}{\ln n}$ 代入已经可以得到所要的不等式. 这时就有

$$\frac{k^n}{n!\,k!}=\frac{\left(\frac{n}{\ln n}\right)^n}{n!\left(\frac{n}{\ln n}\right)!}\sim\frac{\left(\frac{n}{\ln n}\right)^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{\frac{2\pi n}{\ln n}}\left(\frac{n}{e\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}}=\frac{(e\ln n)^{\frac{n}{\ln n}}\sqrt{\ln n}}{2\pi n(\ln n)^n}.$$

由于最后一式中的分子为无穷大量, 大于 e 没有问题. 又由于 $a>1$ 时, $\dfrac{2\pi n}{a^n}=o(1)$, 因此任取 $\gamma>e$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时成立 $a_n>\dfrac{e}{(\gamma\ln n)^n}$. 最后再放大 γ 使得不等式对一切 $n\geq 2$ 成立即可. ◀

Exercise 14.12: 求

$$\frac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}$$

✎ Solution 考虑 $\sin x$ 的幂级数展开

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

记

$$p=1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots$$

$$q=\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots$$

则

$$\pi p-\pi^3q=\pi-\frac{1}{3!}\pi^3+\frac{1}{5!}\pi^5-\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}\pi^{2n-1}+\cdots=\sin\pi=0$$

所以

$$\frac{p}{q}=\pi^2$$

◀

Exercise 14.13:

Solution

Theorem 14.10

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径各为 R_a , R_b 则对 $|x| < R = \min\{R_a, R_b\}$ 有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

Example 14.56: 求 $\ln^2(1+x)$ 在 $x=0$ 点的幂级数展开式

Proof: $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $(|x|<1)$ 是绝对收敛的级数.

由于两个绝对收敛的级数可以任意相乘, 记 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, 则有

$$\ln^2(1+x) = x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

其中

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)+(n-k+1)}{(k+1)(n-k+1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \left\{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1}\right\} \\
&= \frac{2(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\ln^2(1+x) &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{2(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right\} x^n \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\} x^{n+1}, \quad x \in (-1,1)
\end{aligned}$$

□

Example 14.57: 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \ln^2 2$$

✎ Solution 注意到 $H_n = H_{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(H_{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n+1}H_{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(n+1)^2}$$

$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= \int_0^1 (1+x+\cdots+x^n)dx = \int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x}dx \\
&\xlongequal{t=1-x} \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{n+1}}{t}dt \\
&= [1-(1-t)^{n+1}]\ln t\Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-t)^n \ln t\, dt \\
&= -(n+1)\int_0^1 (1-t)^n \ln t\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n+1}H_{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\int_0^1 (t-1)^n \ln t\, dt \\
&= 2\int_0^1 \frac{t-1}{2-t}\ln t\, dt = -2\int_0^1 \ln t\, dt + 2\int_0^1 \frac{1}{2-t}\ln t\, dt \\
&\xlongequal{x=1-t} 2 + 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x} \\
&\xlongequal{x=\frac{1-z}{1+z}} 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+z}\cdot \ln\left(\frac{2z}{1+z}\right)dz \\
&= 2+\ln^2 2 - 2\int_0^1 \frac{\ln(1+z)}{z}dz \\
&= 2+\ln^2 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}
\end{aligned}$$

于是

$$I = 2+\ln^2 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = \ln^2 2$$

◀

Example 14.58: 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x$$

✎ Solution 因为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!!}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n \mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x^2$$

所以原积分

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{(2^2)^n(n!)^2}\mathrm{d}x^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n (n!)^2} \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{2^n (n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 14.14: 求极限 (西西 2017 年新年祝福)

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} e^{-x} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}} \right)$$

✎ Solution(西西) 注意

$$\sqrt{x} - \sqrt{k} = \frac{x-k}{\sqrt{x}+\sqrt{k}}$$

则有

$$\left| \frac{e^x}{\sqrt{x}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} + \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{k}}{\sqrt{kx}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{|x-k|}{\sqrt{kx}}$$

由柯西不等式

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{|x-k|}{\sqrt{k}} \le \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} (x-k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

且

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{1}{k} \le 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \le \frac{2}{x} e^x$$

且

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} (x-k)^2 \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} (x-k)^2 = x e^x$$

所以

$$\left| \frac{e^x}{\sqrt{x}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2} \frac{e^x}{x}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} e^{-x} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}} \right) = 1$$

◀

✎ Solution(那日蓝天) 引理: 设 $\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k)$ 和 $\sum_{k=1}^{+\infty} \psi(k)$ 收敛, 且 $\lim_{k\to+\infty} \frac{\varphi(k)}{\psi(k)} = 1$ 则

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} \psi(k) x^k} = 1$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\sqrt{n}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\xlongequal{Stiring}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+1}e^{-n-\frac{1}{2}}}=1$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}f(x)$$

其中

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

$f(x)$ 满足方程

$$f'(x)=f(x)+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\qquad(f(0)=0)$$

解之得

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^x\int_0^x\sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^x\int_0^{+\infty}x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\,\mathrm{d}x=1$$

◀

✎ Solution 注意到

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-kq^2}dq,$$

因此

$$\begin{aligned}\sqrt{x}e^{-x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}&=\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\int_0^\infty e^{-kq^2}dq\\&=\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq.\end{aligned}$$

因此所求极限等价于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq=1.$$

下面证明此式. (逆逆) 首先有 $t\geq x\geq 0$ 时, $xe^{-t^2}\leq xe^{-x^2}\leq 1$; $0\leq y\leq 1$ 时, $e^y-1\leq(e-1)y\leq 2y$.

(1) 因此

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_x^\infty\left(e^{xe^{-t^2}}-1\right)\mathrm{d}t\leq\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_x^\infty 2xe^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2x\sqrt{x}}{e^x}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\to 0,\quad x\to\infty$$

(2) 对任意 $\varepsilon>0$, 我们有

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_\varepsilon^x\left(e^{xe^{-t^2}}-1\right)\mathrm{d}t\leq\frac{\sqrt{x}}{e^x}\cdot x\cdot e^{xe^{-\varepsilon^2}}=x^{3/2}/e^{x\left(1-e^{-\varepsilon^2}\right)}\to 0,\quad x\to\infty$$

只需计算

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}\left(e^{xe^{-t^2}}-1\right)\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}e^{xe^{-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

令

$$y=1-e^{-t^2},\quad t=\sqrt{-\ln(1-y)},\quad \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{-\ln(1-y)}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{1-y},$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}e^{xe^{-t^2}}\,\mathrm{d}t&=\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{1-e^{-\varepsilon^2}}\frac{e^{x(1-y)}}{2\sqrt{-\ln(1-y)}\,(1-y)}\,\mathrm{d}y\\&=\sqrt{x}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{-\ln(1-y)}\,(1-y)}\,\mathrm{d}y,\quad \text{其中}\delta(\varepsilon)=1-e^{-\varepsilon^2}\end{aligned}$$

对 $\forall\alpha>0$, 取 ε 足够小, 当 $0\le y\le\delta(\varepsilon)$ 时, 我们有 $-(1+\alpha)y\le\ln(1-y)\le -y$. 于是

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\alpha}}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\le\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}e^{xe^{-t^2}}\,\mathrm{d}t\le\frac{\sqrt{x}}{1-\delta(\varepsilon)}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y.$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y&=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\int_0^{\sqrt{\delta(\varepsilon)}}e^{-xy^2}\,\mathrm{d}y\\&=\lim_{x\to\infty}\int_0^{\sqrt{\delta(\varepsilon)x}}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}&\le\varliminf_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq\\&\le\varlimsup_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq\le\frac{1}{1-\delta(\varepsilon)}=e^{\varepsilon^2}\end{aligned}$$

依次令 $\varepsilon\to 0$, $\alpha\to 0$ 便可得到结论. ◀

Example 14.59: 定义数吧常数 $w=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2^n-1)}$, 计算 $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

Solution 事实上,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^{nk}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nk}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2^n-1)}=-w,\end{aligned}$$

因此

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)=e^{-w}.$$

下面证明级数可以交换次序. 由于

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{kn}}\right|=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n2^{kn}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2^n}\right)^k\leq\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{n\left(2^n-1\right)},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(2^n-1\right)}$ 收敛. 由 Fubini 定理可知级数可交换顺序. ◀

14.3.1 欧拉 (Euler) 公式

Theorem 14.11 欧拉 (Euler) 公式

$$e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x\Longleftrightarrow\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{x\mathrm{i}}+e^{-x\mathrm{i}}}{2}\\ \sin x=\dfrac{e^{x\mathrm{i}}-e^{-x\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}\end{cases}$$

Example 14.60: 利用欧拉公式将函数 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数

Solution 由欧拉公式 $e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 知: $\cos x=\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x})$

故

$$e^x\cos x=e^x\cdot\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x})=\mathrm{Re}(e^x\cdot e^{\mathrm{i}x})=\mathrm{Re}\left[e^{(1+\mathrm{i})x}\right]$$

因为

$$\begin{aligned}e^{(1+\mathrm{i})x}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+\mathrm{i})^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n\frac{x^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}e^x\cos x&=\mathrm{Re}\left[e^{(1+\mathrm{i})x}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{4}\cdot2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)\end{aligned}$$

◀

Example 14.61: 证明

$$-\ln\sin x=\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos2nx}{n}$$

Proof:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\mathrm{i}nx}+e^{-2\mathrm{i}nx}}{2n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{2ix})^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{-2ix})^n}{n}\right] \\
&= \frac{1}{2}\big[-\ln(1-e^{2ix})-\ln(1-e^{-2ix})\big] \\
&= -\frac{1}{2}\ln\big[(1-e^{2ix})(1-e^{2ix})\big] \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos 2x) = -\frac{1}{2}\ln(2-2(1-2\sin^2 x)) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(4\sin^2 x) \\
&= -\ln 2-\ln\sin x
\end{aligned}
$$

□

Note:

$$
\ln(\sin x) = -\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}
$$

$$
\ln\left(2\cos\tfrac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n},\quad -\pi<x<\pi
$$

Exercise 14.15: **计算**

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x
$$

Solution

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(-1)^n-1}{4n^2} \\
&= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \\
&= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\zeta(3)\right)+\frac{1}{4}\zeta(3) \\
&= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2+\frac{7}{16}\zeta(3)
\end{aligned}
$$

◀

Example 14.62:

Solution

◀

14.4 函数项级数的一致收敛及一致收敛级数的性质

14.4.1 欧拉数 E_n

Example 14.63: 计算 $\sec x$ 的 Maclaurin 展开式

Solution 由于 $\sec x$ 是偶函数，可以假定有

$$\sec x = c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \cdots + c_{2n} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \ (x \to 0)$$

现在令

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!}, \ n \in \mathbb{N}_+,$$

写出

$$\sec x = E_0 - \frac{E_2}{2!} x^2 + \frac{E_4}{4!} x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \ (x \to 0) \tag{14.3}$$

并将公式 (14.3) 和 $\cos x$ 的 Maclaurin 展开式一起代入恒等式 $\cos x \sec x = 1$ 中，就可以得到确定数列 $\{E_{2n}\}$ 的递推公式

$$E_0 = 1, \ E_2 + E_0 = 1, \ E_4 + \frac{4!}{2!2!} E_2 + E_0 = 0,$$

$$\vdots$$

$$E_{2n} + \binom{2n}{2} E_{2n-2} + \binom{2n}{4} E_{2n-4} + \cdots + E_0 = 0$$

从而可以得出

$$E_2 = -1, \ E_4 = 5, \ E_6 = -61, \ E_8 = 1385, \ E_{10} = -50521, \ \cdots$$

例如，这样就可以写出直到前 6 项系数的公式

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \frac{277}{8064} x^8 + \frac{50521}{362880} x^{10} + o(x^{11})$$

称 E_{2n} 为 Euler 数。当 n 为偶数时，E_{2n} 为正奇数，且除 E_0 外，其个位数字都是；当为奇数时，n 为负奇数，其个位数都是 1. ◀

Definition 14.1 欧拉数 E_n

定义：由级数 $\dfrac{2e^t}{e^{2t}+1} = \sum\limits_{n\geq 0} E_n \dfrac{t^n}{n!}$ 所确定的系数 E_n 称为欧拉数，即 Euler 数或 Euler Numbers

Theorem 14.12 欧拉数 E_n

递推式:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k} E_{n-k} = 0$$

$$E_n = \frac{(2n)!\,2^{2n+2}}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}$$

$$B_n = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k-1} C_{2n-1}^{2k-1} E_{n-k}$$

表 14.1: 常用的几个欧拉数

n	0	1	2	4	6	8	10	$\cdots$
E_n	1	0	-1	5	-61	1385	-50521	$\cdots$

14.4.2 伯努利数 B_n

Definition 14.2 伯努利数 B_n

定义: 由级数 $\dfrac{t}{e^t-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} B_n \dfrac{t^n}{n!}$ 所确定的系数 B_n 称为伯努利数, 即 Bernoulli 数或 Bernoulli Numbers

Theorem 14.13 伯努利数 B_n

1. 递推式: $B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k \ (n \geq 2)$
2. 性质

(1) $B_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_{n+1}^{j+1} \frac{n!}{(n+j)!} \cdot \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} C_j^k k^{n+j}$

(2) $B_n = \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j j^n$

(3) 当 $k \geq 1$ 时, 有 $B_{2k+1} = 0$

表 14.2: 常用的几个伯努利数

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	$\cdots$
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$\cdots$

Example 14.64: 计算 $x \cot x$ 的 Maclaurin 展开式。在 $x=0$ 处的函数值补充定义为 1

Solution 考虑 *Euler* 公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\begin{aligned}
x \cot x &= x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = ix \cdot \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = ix + \frac{2ix}{e^{2ix}-1} \\
&= ix + B_0 + \frac{B_1}{1!}2ix + \frac{B_2}{2!}(2ix)^2 + \cdots + \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n} + o(x^{2n}) \\
&= \operatorname{Re}\left\{ix + B_0 + \frac{B_1}{1!}2ix + \frac{B_2}{2!}(2ix)^2 + \cdots + \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n} + o(x^{2n})\right\} \\
&= 1 - \frac{\bar{B}_1 2^2}{2!}x^2 - \frac{\bar{B}_2 2^4}{4!}x^4 + \cdots - \frac{\bar{B}_n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \ (x \to 0)
\end{aligned}$$

写出其前 5 项的系数，即有

$$z \cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \frac{1}{4725}x^8 + o(x^9) \ (x \to 0)$$

◀

Example 14.65: 计算 $\tan x$ 的 Maclaurin 展开式。

Solution 利用恒等式 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ ，当 $x \to 0$ 时将右边取其极限 0. 这样有

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{x \cot x - 2x \cot 2x}{x} \\
&= \frac{\bar{B}_1(2^2-1)2^2}{2!}x - \frac{\bar{B}_2(2^4-1)2^4}{4!}x^3 + \cdots - \frac{\bar{B}_n(2^{2n-1})2^{2n}}{(2n)!}x^{2n-1} + o(x^{2n}) \ (x \to 0)
\end{aligned}$$

写出前 5 项的系数，即有

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})\ (x \to 0)$$

◀

Corollary 14.1

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|B_{2k}|}{\frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}} = 1$$

♣

Corollary 14.2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}\ (k \geq 1)$$

♣

Theorem 14.14 Euler-maclaurin 求和公式

设函数 $f \in C^{(2m+2)}[a,b], h = \dfrac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = 0, 1, \cdots, n$, 则

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] + \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}h^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi)(b-a)$$

♣

其中 $\xi \in [a,b]$, $B_{2k}(k = 1, 2, \cdots, m+1)$ 是 Bernoulli 数且 $B_2 = \dfrac{1}{6}, B_4 = -\dfrac{1}{30}$, $B_6 = \dfrac{1}{42}$

Example 14.66: 证明：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big) - \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\big)$$

☞ **Proof:** 考虑积分：$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 应用分部积分法

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)B_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B_1(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= f(x)B_1(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,\mathrm{d}x$$

继续应用此方法, 注意到在 $n>1$ 时都有关系:

$$B_n(1)=B_n(0)=B_n \quad 以及 \quad B_{2n+1}=0$$

因此, 便可得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) - \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)\big)$$

□

Example 14.67: Define

$$A_n = \frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$$

Find

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right]$$

Proposed by Yong-xi Wang, China

Proof: 考虑欧拉麦克劳林公式

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \sim \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big) + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\big)$$

令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 则 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = A_n\ ;$$

$$f(1)-f(0) = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$$
$$f'(1)-f'(0) = -\frac{1}{2}-0 = -\frac{1}{2}$$

故

$$\frac{\pi}{4} = A_n + \frac{1}{4n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{24}$$

□

Exercise 14.16: 设 $A_n = \dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$ 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} n^4\left(\frac{1}{24}-n\left(n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right)\right)$$

✎ Solution 这里提供一个一般的方法.

Definition 14.3 Euler-maclaurin 求和公式

设函数 $f \in C^{(2m+2)}[a,b], h = \dfrac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = 0, 1, \cdots, n$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]+\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}h^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi)(b-a)\end{aligned}$$

其中 $\xi \in [a,b], B_{2k}(k = 1, 2, \cdots, m+1)$ 是 Bernoulli 数且 $B_2 = \dfrac{1}{6}, B_4 = -\dfrac{1}{30}, B_6 = \dfrac{1}{42}$

取 $a = 0, b = 1, f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, 则 $h = \dfrac{1}{n}, x_i = \dfrac{i}{n}, A_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$， 则

$$\begin{aligned}A_n + \frac{1}{4n} - \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2}\left[\left(A_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\right) + A_n\right] - \frac{\pi}{4}\\&= \frac{B_2}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}[f'(1)-f'(0)] + \frac{B_4}{4!}\cdot\frac{1}{n^4}[f'''(1)-f'''(0)]\\&\quad+\frac{B_6}{6!}\cdot\frac{1}{n^6}\left[f^{(5)}(1)-f^{(5)}(0)\right]+\frac{B_8}{8!}\cdot\frac{1}{n^8}f^{(8)}(\xi)\end{aligned}$$

其中, $\xi \in [0,1]$ 也即

$$n^4\left(\frac{1}{24} - n\left(n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right) - \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{2016} + \frac{B_8}{8!}\cdot\frac{1}{n^8}f^{(8)}(\xi)$$

注意到 $f^{(8)}(\xi)$ 有界, 因此 $n \to +\infty$ 时所求极限为 $\dfrac{1}{2016}$

◀

$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Example 14.68: Proof

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

☞ Proof: We can use the function $f(x) = x^2$ with $-\pi \le x \le \pi$ and find its expansion into a trigonometric Fourier series

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin x),$$

which is periodic and converges to $f(x)$ in $[-\pi,\pi]$.
Observing that $f(x)$ is even, it is enough to determine the coefficients

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, \mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2,3,...,$$

because

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, \mathrm{d}x = 0 \qquad n = 1,2,3,....$$

For $n = 0$ we have

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}.$$

And for $n = 1,2,3,...$ we get

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\times\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n = (-1)^n\frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

because

$$\int x^2\cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{2x}{n^2}\cos nx + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\sin nx.$$

Thus

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx\right).$$

Since $f(\pi) = \pi^2$, we obtain

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{4}{n^2}\cos(n\pi)\right)$$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n(-1)^n\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Therefore

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

☞ **Proof:** Second method (available on-line a few years ago) by Eric Rowland. From

$$\log(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$$

and making the substitution $t = e^{ix}$ one gets the series expansion

$$w = \log(1-e^{ix}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,$$

whose radius of convergence is 1. Now if we take the imaginary part of both sides, the RHS becomes

$$\operatorname{Im} w = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx,$$

and the LHS

$$\operatorname{Im} w = \arg(1 - \cos x - i \sin x) = \arctan \frac{-\sin x}{1 - \cos x}.$$

Since

$$\begin{aligned}
\arctan \frac{-\sin x}{1-\cos x} &= -\arctan \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
&= -\arctan \cot \frac{x}{2} = -\arctan \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

the following expansion holds

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx. \tag{14.4}$$

Integrating the identity (14.4), we obtain

$$\frac{\pi}{2} x - \frac{x^2}{4} + C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx. \tag{14.5}$$

Setting $x = 0$, we get the relation between C and $\zeta(2)$

$$C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\zeta(2).$$

And for $x = \pi$, since

$$\zeta(2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

we deduvuce

$$\frac{\pi^2}{4} + C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2} \zeta(2) = -\frac{1}{2} C.$$

Solving for C

$$C = -\frac{\pi^2}{6},$$

we thus prove

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Note: this 2nd method can generate all the zeta values $\zeta(2n)$ by integrating repeatedly ($**$). This is the reason why I appreciate it. Unfortunately it does not work for $\zeta(2n+1)$. Note also the

$$C = -\frac{\pi^2}{6}$$

can be obtained by integrating (14.4) and substitute

$$x = 0, x = \pi$$

respectively. □

☞ Proof: The function $\sin x$ where $x \in \mathbb{R}$ is zero exactly at $x = n\pi$ for each integer n. If we factorized it as an infinite product we get

$$\begin{aligned}\sin x &= \cdots\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdots \\ &= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

. We can also represent $\sin x$ as a Taylor series at $x = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad .$$

Multiplying the product and identifying the coefficient of x^3 we see that

$$\frac{x^3}{3!} = x\left(\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{x^2}{2^2\pi^2} + \frac{x^2}{3^2\pi^2} + \cdots\right) = x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}$$

or

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

☞ Proof: Define the following series for $x > 0$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \quad .$$

Now substitute $x = \sqrt{y}$ to arrive at

$$\frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \cdots \quad .$$

if we find the roots of $\dfrac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = 0$ we find that $y = n^2\pi^2$ for $n \neq 0$ and n in the integers With all of this in mind, recall that for a polynomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ with roots $r_1, r_2, \cdots, r_n$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = -\frac{a_1}{a_0}$$

Treating the above series for $\dfrac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ as polynomial we see that

$$\frac{1}{1^2\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots = -\frac{-\frac{1}{3!}}{1}$$

then multiplying both sides by π^2 gives the desired series.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

□

☞ Proof: Note that

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

from complex analysis and that both sides are analytic everywhere except $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Then one can obtain

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Now the right hand side is analytic at $z = 0$ and hence

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Note

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Thus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

☞ **Proof:** Let X_1 and X_2 be independent, identically distributed standard half-Cauchy random variables. Thus their common pdf is $p(x) = \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}$ for $x > 0$. Let $Y = X_1/X_2$. Then the pdf of Y is, for $y > 0$,

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \int_0^{\infty} x p_{X_1}(xy) p_{X_2}(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2y^2)(1+x^2)} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi^2(y^2-1)} \left[\log \left(\frac{1+x^2y^2}{1+x^2} \right) \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{2}{\pi^2} \frac{\log(y^2)}{y^2-1} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\log(y)}{y^2-1}. \end{aligned}$$

Since X_1 and X_2 are equally likely to be the larger of the two, we have $P(Y < 1) = 1/2$. Thus

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{4}{\pi^2} \frac{\log(y)}{y^2-1} \, \mathrm{d}y.$$

This is equivalent to

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{-\log(y)}{1-y^2} \, \mathrm{d}y = -\int_0^1 \log(y)(1+y^2+y^4+\cdots) \, \mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

which, as others have pointed out, implies $\zeta(2) = \pi^2/6$. □

☞ **Proof:**

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{\log y}{y^2-1} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{y^2-1} \left[\log \left(\frac{1+x^2y^2}{1+x^2} \right) \right]_{x=0}^{+\infty} \mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z}{(1+x^2)(1+z^2)} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

☞ Proof: In Complex analysis, we learn that $\sin(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ which is an entire function with simple zer0s at the integers. We can differentiate term wise by uniform convergence. So by logarithmic differentiation we obtain a series for $\pi\cot(\pi z)$.

$$\frac{d}{dz}\ln(\sin(\pi z)) = \pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2}$$

Therefore,

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2} = \frac{\pi\cot(\pi z)-\frac{1}{z}}{2z}$$

We can expand $\pi\cot(\pi z)$ as

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} - \frac{\pi^2}{3}z - \frac{\pi^4}{45}z^3 - \cdots$$

Thus,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi\cot(\pi z)-\frac{1}{z}}{2z} &= \frac{-\frac{\pi^2}{3}z-\frac{\pi^4}{45}z^3-\cdots}{2z}\\
-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2} &= -\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^4}{90}z^2-\cdots\\
-\lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2} &= \lim_{z\to 0}\left(-\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^4}{90}z^2-\cdots\right)\\
-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= -\frac{\pi^2}{6}\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

□

☞ Proof:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} &= \frac{4}{3}\frac{(\arcsin 1)^2}{2}\\
&= \frac{4}{3}\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{3}\int_0^1\frac{x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{3}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\int_0^1 x^{2n}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{3}+\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{4}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}
$$

□

☞ Proof:(by 欧拉) 首先令 N 为奇数

$$z^n - a^n = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(z^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2)$$

令 $z = 1 + x/N, a = 1 - x/N$, 且 n=N, 有

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{N}\right)^N - \left(1+\frac{x}{N}\right)^N &= \frac{2x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(2 + \frac{2x^2}{N^2} - 2\left(1 - \frac{x^2}{N^2}\right)\cos\frac{2k\pi}{N}\right) \\
&= \frac{2x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(\left(1-\cos\frac{2k\pi}{N}\right) + \frac{x^2}{N^2}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{N}\right)\right) \\
&= C_N x\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(1 + \frac{x^2}{N^2}\frac{1+\cos(2k\pi/N)}{1-\cos(2k\pi/N)}\right)
\end{aligned}
$$

考虑一次项系数知道 $C_N = 2$ 成立，而在 $N \to \infty$ 时，左边是 $e^x - e^{-x}$, 右边通过 $\cos y \approx 1 - y^2/2$, 那么右边就是 $1 + x^2/(k^2\pi^2)$ 的乘积，也就是

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

比较三次项系数可知答案 □

☞ Proof:(一个初等的证明)

Lemma 14.1

令 $\omega_m = \dfrac{\pi}{2m+1}$, 则

$$\cot^2\omega_m + \cot^2(2\omega_m) + \cdots\cot^2(m\omega_m) = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

由于

$$
\begin{aligned}
\sin n\theta &= \binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta + \cdots \pm \sin^n\theta \\
&= \sin^n\theta\left(\binom{n}{1}\cot^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\cot^{n-3}\theta + \cdots \pm 1\right)
\end{aligned}
$$

很显然，令 $n=2m+1$, 则我们有 $\cot^2\omega_m, \cot^2(2\omega_m)\cdots\cot^2(m\omega_m)$ 为多项式

$$\binom{n}{1}x^m-\binom{n}{3}x^{m-1}+\cdots\pm 1$$

的根。从而利用韦达定理我们就完成了引理的证明。

由于三角不等式 $\sin x<x<\tan x$ 在 $x\in(0,\pi/2)$ 成立，我们知道了 $\cot^2 x<\dfrac{1}{x^2}<1+\cot^2 x$. 对于 $\omega_m, 2\omega_m\cdots$ 带入得到

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2(k\omega_m)<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2\omega_m^2}<m+\sum_{k=1}^{m}\cot^2(k\omega_m)$$

所以应用上面引理，就可以得到

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2}<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}<\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2}+\frac{m\pi^2}{(2m+1)^2}$$

令 m 趋于无穷大，结论自然就成立了。 □

☞ Proof:(数学分析的证明) 注意到恒等式

$$\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy$$

利用单调收敛定理 (Monotone Convergence Theorem)，立即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}(xy)^{n-1}\right)dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy$$

通过换元 $(u,v)=((x+y)/2,(y-x)/2)$, 也就是 $(x,y)=(u-v,u+v)$ 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2\iint_S\frac{1}{1-u^2+v^2}dudv$$

S 是由点 $(0,0),(1/2,-1/2),(1,0),(1/2,1/2)$ 构成的正方形，利用正方形的对称性，那么

$$\begin{aligned}2\iint_S\frac{1}{1-u^2+v^2}dudv&=4\int_0^{1/2}\int_0^{u}\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu+4\int_{1/2}^{1}\int_0^{1-u}\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu\\&=4\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du\\&\quad+4\int_{1/2}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du\end{aligned}$$

利用恒等式 $\arctan(u/\sqrt{1-u^2})=\arcsin u, \arctan((1-u)/\sqrt{1-u^2})=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arcsin u$, 就能够得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}&=4\int_0^{1/2}\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}du+4\int_{1/2}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\arcsin u}{2}\right)du\\&=\left[2\arcsin u^2\right]_0^{1/2}+\left[\pi\arcsin u-\arcsin u^2\right]_{1/2}^{1}\\&=\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{36}\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^2}{6}$$

□

☞ Proof:(数学分析的证明) 计算:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-x^2y^2}$$

做代换

$$(u,v) = \left(\arctan x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}, \arctan x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\right)$$

从而有 $(x,y) = \left(\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u}\right)$ 雅可比行列式即为

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \cos u/\cos v & \sin u \sin v/\cos v^2 \\ \sin u \sin v/\cos u^2 & \cos v/\cos u \end{vmatrix} \\ &= 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} = 1 - x^2y^2\end{aligned}$$

从而

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \iint_A dudv$$

其中 $A = \{(u,v)|u > 0, v > 0, u+v < \frac{\pi}{2}\}$, 从而 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ 成立! □

☞ Proof:(复数积分的证明) 本证明由 Dennis C.Russell 给出。

考虑积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(2\cos x)dx$$

那么利用 cos 的欧拉公式 $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix} = e^{ix}(1+e^{-2ix})$ 从而 $\ln(2\cos x) = \ln(e^{ix}) + \ln(1+e^{-2ix}) = ix + \ln(1+e^{-2ix})$ 在积分中代换得

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi/2} ix + \ln(1+e^{-2ix})dx \\ &= i\frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\pi/2} ln(1+e^{-2ix})dx\end{aligned}$$

再利用 $\ln(1+x)$ 的泰勒展开, 也就是

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \cdots$$

代入知为

$$\ln(1+e^{-2ix}) = e^{2ix} - e^{-4ix}/2 + e^{-6ix}/3 + \cdots$$

从而积分就有

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+e^{-2ix})dx = -\frac{1}{2i}(e^{-i\pi} - 1 - \frac{e^{-2i\pi}-1}{2^2} + \frac{e^{-3i\pi}-1}{3^2} - \frac{e^{-4i\pi}-1}{4^2} + \cdots)$$

但是由于 $e^{-i\pi}=-1$, 原式变为

$$\int_0^{\pi/2}\ln(1+e^{-2ix})dx=\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{-3i}{4}\zeta(2)$$

故如前面式子有

$$I=i\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{-3}{4}\zeta(2)\right)$$

由于左边是实数，右边是纯虚数，从而只能两边都为 0，即 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, 这还给了我们一个副产品，就是

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

□

☞ Proof:(泰勒公式证明) (Boo Rim Choe 在 1987 American Mathematical Monthly 上发表)

利用反三角函数 $\arcsin x$ 的泰勒展开

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

对于 $|x|\le 1$ 成立，从而令 $x=\sin t$, 有

$$t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{\sin^{2n+1}t}{2n+1}$$

对于 $|t|\le\dfrac{\pi}{2}$ 成立，但由于积分

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x dx=\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

故而对两边从 0 到 $\pi/2$ 积分有

$$\frac{\pi^2}{8}=\int_0^{\pi/2}t dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

同样可得 □

☞ Proof:(复分析证明) (T. Marshall 在 American Math Monthly,2010)

对于 $z\in D=\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, 令

$$R(z)=\sum\frac{1}{\log^2 z}$$

这个和是对于每一个 log 的分支加起来. 在 D 中所有点有领域使 $\log(z)$ 的分支解析. 由于这个级数在 $z=1$ 之外一致收敛, $R(z)$ 在 D 上解析. 这里有几个 Claim: (1) 当 $z\to 0$ 时，级数每一项趋于 0. 由于一致收敛我们知道 $z=0$ 是可去奇点，我们可令 $R(0)=0$.

(2) R 的唯一奇点是 $z=1$ 的二阶极点，是由 $\log z$ 的主分支. 我们有 $\lim_{z\to 1}(z-1)^2R(z)=1$.

(3) $R(1/z)=R(z)$.

由于 (1). 和 (3). 有 R 在 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$（扩充复平面）上亚纯, 从而是有理函数. 从 (2) 知道 $R(z)$ 的分母是 $(z-1)^2$. 由于 $R(0)=R(\infty)=0$, 分子就是 az. 而 (2). 说明 $a=1$, 也就是

$$R(z)=\frac{z}{(z-1)^2}.$$

现在令 $z=e^{2\pi i w}$ 得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(w-n)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi w)}$$

也就是说

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

可立刻的到 $\zeta(2)=\pi^2/6$. □

☞ Proof:(傅立叶分析证明) 考虑函数 $f(x)=x, x\in(-\pi,\pi)$, 将其傅立叶展开

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$$

利用 Parseval 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx$$

其中 a_n 为 e^{inx} 的系数，即 $\dfrac{(-1)^n}{n}i, a_0=0$ 那么有

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx$$

可得答案 □

☞ Proof:(傅立叶分析证明) 考虑

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}$$

在实轴上一致收敛，对于在 $t\in[-\epsilon,2\pi-\epsilon]$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{N}\sin nt=\frac{e^{it}-e^{i(N+1)t}}{2i(1-e^{it})}+\frac{1-e^{iN)t}}{2i(1-e^{it})}$$

这个和被

$$\frac{2}{|1-e^{it}|}=\frac{1}{\sin t/2}$$

控制，从而在 $[\epsilon,2\pi-\epsilon]$ 上一致有界，据 Dirichlet 判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin t}{n}$$

是在 $[\epsilon,e\pi-\epsilon]$ 一致收敛, 从而对于 $t\in(0,2\pi)$,

$$f'(t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}=\mathrm{Im}(\log(1-e^{it}))=\arg(1-e^{it})=\frac{t-\pi}{2}$$

从而有

$$-\zeta(2)/2-\zeta(2)=f(\pi)-f(0)=\int_0^{\pi}\frac{t-\pi}{2}dt=-\frac{\pi^2}{4}$$

□

☞ Proof:(泊松公式证明) (Richard Troll) 由泊松求和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

可知其中 $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$ 为傅立叶变换。那么有 $f(x) = e^{-a|x|}$,f 的傅立叶变换为

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$$

也就是说

$$\frac{1}{2a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-a|n|} - \frac{1}{a^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 + 4\pi^2 k^2}$$

则

$$\lim_{a\to 0}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 + 4\pi^2 k^2} = \lim_{a\to 0}\left\{\frac{1}{2a}\left(\frac{e^a+1}{e^a-1}\right) - \frac{1}{a^2}\right\} = \frac{1}{12}$$

从而就有 $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ □

☞ Proof:(概率论证明) (Luigi Pace 发表于 2011 American Math Monthly)

设 X_1, X_2 是独立同半区域柯西分布，也就是它们的分布函数都是 $p(x) = \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}(x > 0)$ 令随机变量 $Y = X_1/X_2$, 那么 Y 的概率密度函数 p_Y 定义在 $y > 0$，有

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \int_0^{\infty} x p_{X_1}(xy) p_{X_2}(x) dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2y^2)(1+x^2)}dx \\ &= \frac{2}{\pi^2(y^2-1)}\left[\log\left(\frac{1+x^2y^2}{1+x^2}\right)\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{2}{\pi^2}\frac{\log(y^2)}{y^2-1} = \frac{4}{\pi^2}\frac{\log(y)}{y^2-1}. \end{aligned}$$

由于 X_1, X_2 独立同分布，所以 $P(Y > 1) = P(X_1 > X_2) = 1/2$, 那么有

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{4}{\pi^2}\frac{\log(y)}{y^2-1}dy$$

也就是说

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{-\log(y)}{1-y^2}dy = -\int_0^1 \log(y)(1+y^2+y^4+\cdots)dy = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

那么答案显而易见。 □

☞ Proof:(积分 + 函数方程证明) (H Haruki,S Haruki 在 1983 年 American Mathematical Monthly 发表)

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}dx = \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}dx$$

只需要算出这个积分值即可，我们令

$$f(a) = \int_0^1 \frac{\log(x^2 - 2x\cos a + 1)}{x}dx$$

要证明 $f(a)=-\frac{(a-\pi)^2}{2}+\frac{\pi^2}{6}$ 利用等式 $(x^2-2x\cos a+1)(x^2+2x\cos a+1)=x^4-2x^2\cos 2a+1$ 我们有

$$f(a/2)+f(\pi-a/2)=\int_0^1\frac{\log(x^4-2x^2\cos a+1)}{x}=\frac{1}{2}\frac{\log(t^2-2t\cos a+1)}{t}dt=\frac{1}{2}f(a)$$

中间是令 $\sqrt{x}=t$ 得到的等式。解函数方程 $f(a/2)+f(\pi-a/2)=f(a)/2$, 求导两次得 $f''(a/2)+f''(\pi-a/2)=2f''(a)$, 由于 f'' 是在闭区间 $[0,2\pi]$ 上的连续函数，从而 f'' 在该区域有最大值 M 与最小值 m. 设 $f''(a_0)=M$ 对于某个 $a_0\in[0,2\pi]$ 成立，在等式中设 $a=a_0$ 有

$$f''(a_0/2)+f''(\pi-a_0/2)=2f''(a_0)=2M$$

但是由于 $f''(a_0/2),f''(\pi-a_0/2)$ 都小于 M, 从而只能都等于 M. 继续这样的迭代，就有

$$\lim_{n\to\infty}f''(a_0/2^n)=f''(0)=M$$

类似地，我们就有 $f''(0)=m$, 从而 $M=m,f''$ 为常函数，则 f 只能是二次函数，设

$$f(a)=\alpha\frac{a^2}{2}+\beta a+\gamma$$

代入式子有 $-\pi\alpha/2=\beta/2,\pi^2\alpha/2+\beta\pi+2\gamma=\gamma/2$, 而

$$f'(a)=\int_0^1\frac{2\sin a}{1+x^2-2x\cos a}dx$$

得知 $f'(\pi/2)=\pi/2$ 从而有 $\alpha=-1,\beta=\pi,\gamma=-\pi^2/3$, 代入 $a=0$, 得到

$$\int_0^1\frac{\log(1-x)}{x}dx=-\frac{\pi^2}{6}$$

□

☞ Proof:(三角恒等式的初等证明) (Josef Hofbauer 发表于 2002 年 American Mathematical Monthly)

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi+x}{2}}\right]$$

从而就有

$$1=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{4}}\right]}=\cdots=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}=\frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}$$

又由于 $\sin^{-2}x>x^{-2}>\tan^{-2}x$ 对 $x\in(0,\pi/2)$ 成立令 $x=(2k+1)\pi/(2N)$, 对 $k=0,1,\cdots,N/2-1(N=2^n)$ 对不等式求和，就变为

$$1>\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{(2k+1)^2}>1-\frac{1}{N}$$

令 $N\to\infty$ 可得答案 □

☞ Proof:(三角多项式的证明) (Kortram 发表于 1996 年 Mathematics Magazine)
对于奇数 $n=2m+1$, 我们知道 $\sin nx = F_n(\sin x)$, 其中 F_n 是次数 n 的多项式。那么 F_n 的零点为 $\sin(j\pi/n)(-m\le j\le m)$, 且有 $\lim\limits_{y\to 0}(F_n(y)/y)=n$. 那么

$$F_n(y)=ny\prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{y^2}{\sin^2(j\pi/n)}\right)$$

从而

$$\sin nx = n\sin x\prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2(j\pi/n)}\right)$$

比较两边泰勒展开的 x^3 系数，有

$$-\frac{n^3}{6}=-\frac{n}{6}-n\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sin^2(j\pi/n)}$$

于是

$$\frac{1}{6}-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n^2\sin^2(j\pi/n)}=\frac{1}{6n^2}$$

固定整数 M, 令 $m>M$, 则有

$$\frac{1}{6}-\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{n^2\sin^2(j\pi/n)}=\frac{1}{6n^2}+\sum_{j=M+1}^{m}\frac{1}{n^2\sin^2(j\pi/n)}$$

利用 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ 对于 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 成立，我们有

$$0<\frac{1}{6}-\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{n^2\sin^2(j\pi/n)}=\frac{1}{6n^2}+\sum_{j=M+1}^{m}\frac{1}{4j^2}$$

令 n,m 趋于无穷，就有

$$0\le\frac{1}{6}-\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{\pi^2j^2}\le\sum_{j=M+1}^{m}\frac{1}{4j^2}$$

也即

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2j^2}=\frac{1}{6}$$

□

☞ Proof:(积分证明) (Matsuoka 发表于 1961 年 American Mathematical Montly)
考虑积分

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx \text{ and } J_n=\int_0^{\pi/2}x^2\cos^{2n}x\,dx$$

我们有 Wallis 公式:

$$I_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{\pi}{2}=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

那么对于 $n>0$, 分部积分有

$$I_n=[x\cos^{2n}x]_0^{\pi/2}+2n\int_0^{\pi/2}x\sin x\cos^{2n-1}x\,dx$$

$$= n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

从而有

$$\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

得到

$$\frac{\pi}{4n^2} = \frac{4^{n-1}(n-1)!^2}{(2n-2)!}J_{n-1} - \frac{4^n n!^2}{(2n)!}J_n$$

将这个式子从 1 加到 n，能够有

$$\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = J_0 - \frac{4^N N!^2}{(2N)!}J_N$$

由于 $J_0 = \pi^3/24$, 只需要证明 $\lim\limits_{N\to\infty} 4^N N!^2 J_N/(2N)! = 0$, 但是不等式 $x < \frac{\pi}{2}\sin x$ 对于 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 得到

$$J_N < \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^{2N} x dx = \frac{\pi^2}{4}(I_N - I_{N+1}) = \frac{\pi^2 I_N}{8(N+1)}$$

也即

$$0 < \frac{4^N N!^2}{(2N)!}J_N < \frac{\pi^3}{16(N+1)}$$

□

☞ Proof:(Fejér 核的证明) (Stark 在 1969 年 American Mathematical Monthly 上的证明)
对于 Fejér 核有如下等式:

$$\left(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\right)^2 = \sum_{k=-n}^{n}(n-|k|)e^{ikx} = n + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\cos kx$$

故而有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\left(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\right)^2 &= \frac{n\pi^2}{2} + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\int_0^{\pi} x\cos kx dx \\ &= \frac{n\pi^2}{2} - 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\frac{1-(-1)^k}{k^2} \\ &= \frac{n\pi^2}{2} - 4n\sum_{1\le k\le n, 2k}\frac{1}{k^2} + 4\sum_{1\le k\le n, 2k}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

如果我们令 $n = 2N, N \in \mathbb{Z}^+$, 那么

$$\int_0^{\pi}\frac{x}{8N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x/2}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{(2r+1)^2} + O\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

但是由于 $\sin x/2 > x/\pi$ 对于 $0 < x < \pi$ 成立，那么

$$\int_0^{\pi}\frac{x}{8N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x/2}\right)^2 dx < \frac{\pi^2}{8N}\int_0^{\pi}\sin^2 Nx\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{8N}\int_0^{N\pi}\sin^2 y\frac{dy}{y} = O\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

也即

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^2}$$

□

☞ Proof:(Gregory 定理证明) 证明来自 Borwein & Borwein 的著作"Pi and the AGM"
以下公式是著名的 Gregory 定理:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

令

$$a_N=\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1},b_N=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

我们需要证明 $\lim\limits_{N\to\infty}a_N^2-b_N=0$ 即可如果 $n\neq m$ 那么

$$\frac{1}{(2n+1)(2m+1)}=\frac{1}{2(m-n)}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2m+1}\right)$$

就有

$$\begin{aligned}a_N^2-b_N&=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N,m\neq n}^{N}\frac{(-1)^{m+n}}{2(m-n)}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2m+1}\right)\\&=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N,m\neq n}^{N}\frac{(-1)^{m+n}}{(m-n)}\frac{1}{(m-n)(2n+1)}=\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n c_{n,N}}{2n+1}\end{aligned}$$

其中

$$c_{n,N}=\sum_{m=-N,m\neq n}^{N}\frac{(-1)^m}{m-n}$$

很容易可见 $c_{-n,N}=-c_{n,N}$, 故而 $c_{0,N}=0$ 若 $n>0$ 那么

$$c_{n,N}=(-1)^{n+1}\sum_{j=N-n+1}^{N+n}\frac{(-1)^j}{j}$$

我们可以知道 $|c_{n,N}|\leq 1/(N-n+1)$ 由于这个交错和加了后比第一项要小，也即

$$\begin{aligned}|a_N^2-b_N|&\leq\sum\left(\frac{1}{(2n-1)(N-n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(N-n+1)}\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2N+1}\left(\frac{2}{2n-1}+\frac{1}{N-n+1}\right)+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2N+3}\left(\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{N-n+1}\right)\\&\leq\frac{1}{2N+1}(2+4\log(2N+1)+2+2\log(N+1))\end{aligned}$$

所以 $a_N^2-b_N$ 趋于 0 成立。 □

☞ Proof:(数论的证明) (本证明来自华罗庚的数论)
需要用到整数能被表示为四个平方的和。令 $r(n)$ 为四元组使得 $n=x^2+y^2+z^2+t^2$ 成立的四元组 (x,y,z,t) 的个数。最平凡的是 $r(0)=1$, 同时，我们知道

$$r(n)=8\sum_{m|n,4\nmid m}m$$

对于 $n>0$ 成立。令 $R(N)=\sum_{n=0}^{N} r(n)$, 很容易可以看出，$R(N)$ 是渐进于半径 $\sqrt{N}$ 的四维球体积。也即 $R(N)\sim\frac{\pi^2}{2}N$. 但是

$$R(N)=1+8\sum_{n=1}^{N}\sum_{m|n,4m} m=1+8\sum_{m\le N,4m} m\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor=1+8(\theta(N)-4\theta(N/4))$$

其中

$$\theta(x)=\sum_{m\le x} m\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor$$

但是

$$\begin{aligned}\theta(x)&=\sum_{mr\le x} m=\sum_{r\le x}\sum_{m=1}^{\lfloor x/r\rfloor} m=\frac{1}{2}\sum_{r\le x}\left(\left\lfloor\frac{x}{r}\right\rfloor^2+\left\lfloor\frac{x}{r}\right\rfloor\right)=\frac{1}{2}\sum_{r\le x}\left(\left\lfloor\frac{x}{r}\right\rfloor^2+O\left(\frac{x}{r}\right)\right)\\&=\frac{x^2}{2}(\zeta(2)+O(1/x))+O(x\log x)=\frac{\zeta(2)x^2}{2}+O(x\log x)\end{aligned}$$

当 $x\to\infty$ 成立，从而

$$R(N)\sim\frac{\pi^2}{2}N^2\sim 4\zeta(2)\left(N^2-\frac{N^2}{4}\right)$$

得到 $\zeta(2)=\pi^2/6$ □

☞ Proof:(类似的初等证明) 首先我们要证明这个等式:

$$\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{2k-1}{2n}\frac{\pi}{2}\right)=2n^2–n$$

是由于注意到

$$\cos 2n\theta=\mathrm{Re}(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}\cos^{2n-2k}\theta\sin^{2k}\theta$$

就立即可得

$$\frac{\cos 2n\theta}{\sin^{2n}\theta}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}\cot^{2n-2k}\theta$$

令 $x=\cot^2\theta$, 就可以变为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}x^{n-k}$$

有根 $x_j=\cot^2(2j-1)\pi/4n$ 对 $j=1,2,\cdots,n$ 成立，从而由于 $\binom{2n}{2n-2}=2n^2-n$, 韦达定理知答案。有了这个等式，我们类似初等证明中的方法进行证明现在 $1/\theta>\cot\theta>1/\theta–\theta/3>0$ 对于 $0<\theta<\pi/2<\sqrt{3}$ 成立，就有

$$1/\theta^2–2/3<\cot^2\theta<1/\theta^2$$

对于 $\theta_k=(2k-1)\pi/4n$ 做和，从 $k=1$ 到 n 我们得到

$$2n^2–n<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2n}{2k-1}\frac{2}{\pi}\right)^2<2n^2–n+2n/3$$

从而有

$$\frac{\pi^2}{16}\frac{2n^2-n}{n^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}<\frac{\pi^2}{16}\frac{2n^2-n/3}{n^2}$$

这也就是我们想要的

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

□

☞ Proof:(伯努利数的证明) 函数 $B(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ 为伯努力数 B_k 的生成函数，有 B 是亚纯，且只在 $2\pi in$ 有极点，利用 Mittag-Leffler 定理可以展开为

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{2\pi in}{x-2\pi in}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}-\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2\pi in}}\right).$$

而注意到后者又可以展开为几何级数相加:

$$\frac{x}{e^x-1}=-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{x}{2\pi in}\right)^k=\sum_{k\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}x^{2n}$$

是由于在重排级数的同时，奇数项消去了而偶数项留下了，所以我们就得到如下式子:

$$B_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}$$

也就是要求计算

$$B_2=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left\{\frac{x}{e^x-1}-1+\frac{x}{2}\right\}=\frac{1}{12}$$

那么 $\zeta(2)=\pi^2/6$ 就能得到了。 □

☞ Proof:(超几何正切分布的证明) （本证明来自 Lars Holst 于 2013 年 Journal of Applied Probability 的证明）

注意到超几何正切函数 $f_1(x)=\dfrac{2}{\pi(e^x-e^{-x})}$，有

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{2}{\pi(e^y-e^{-y})}dy=\frac{2}{\pi}\arctan(e^x).$$

这样可以知道 f_1 是一个分布函数，而如果 X_1,X_2 都满足超几何正切分布的话，我们有如下引理：X_1+X_2 的概率密度是:

$$f_2(x)=\frac{4x}{\pi^2(e^x-e^{-x})}.$$

这是因为

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(e^y+e^{-y})}\frac{2}{\pi(e^{x-y}+e^{y-x})}dy\\
&=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{ue^{-x}}{(1+u^2)(1+u^2e^{-2x})}du\\
&=\frac{4}{\pi(e^x-e^{-x})}\int_0^{\infty}\left(\frac{u}{1+u^2}-\frac{ue^{-2x}}{1+u^2e^{-2x}}\right)du\\
&=\frac{4x}{\pi(e^x-e^{-x})}
\end{aligned}$$

而知道这样的函数是密度函数之后，我们就可以得到 Basel 问题：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}xe^{-(2k+1)x}dx$$
$$=\int_0^{\infty}xe^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2kx}dx=\int_0^{\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-2x}}dx$$
$$=\frac{\pi^2}{8}\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)dx=\frac{\pi^2}{8}$$

这样可以得到结论。 □

π

Example 14.69: This one by Ramanujan gives me the goosebumps:

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}=\frac{1}{\pi}.$$

Solution Just to make this more intriguing, define the fundamental unit $U_{29}=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ and fundamental solutions to Pell equations,

$$\left(U_{29}\right)^3=70+13\sqrt{29},\quad \text{thus } 70^2-29\cdot 13^2=-1$$

$$\left(U_{29}\right)^6=9801+1820\sqrt{29},\quad \text{thus } 9801^2-29\cdot 1820^2=1$$

$$2^6\left(\left(U_{29}\right)^6+\left(U_{29}\right)^{-6}\right)^2=396^4$$

then we can see those integers all over the formula as,

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!}{k!^4}\frac{29\cdot 70\cdot 13\,k+1103}{\left(396^4\right)^k}=\frac{1}{\pi}$$

◀

14.5 傅里叶级数

Definition 14.4 三角级数

形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right) \tag{14.6}$$

的级数叫三角级数，其中 a_0,a_n,$b_n$$(n=1,2,3,\dots)$ 都是常数

令 $\frac{\pi t}{l}=x$,(14.6) 式成为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{14.7}$$

这就把以周期为 $2l$ 的三角级数转换成以 2π 为周期的三角级数

Theorem 14.15

组成三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots \tag{14.8}$$

在区间 $[-\pi,\pi]$ 上正交，即在三角函数系 (14.8) 中任何不同的两个函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 0，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n)$$

14.5.1 函数展开成傅里叶级数

Theorem 14.16

设设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且能展开成三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{14.9}$$

右端级数可逐项积分, 则有

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,3,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases} \tag{14.10}$$

如果公式 (14.10) 中的积分都存在, 这时他们定出的系数 $a_0,a_1,b_1,\cdots$ 叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶 (Fourier) 系数, 将这些系数带入到 (14.9) 式的右端, 所得到的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{14.11}$$

叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

Theorem 14.17 收敛定理, 狄利克雷 (Dirichlet) 充分条件

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 如果它满足:

1. 在一个周期内连续或者只有有限个第一类间断点,
2. 在一个周期内至多只有有限个极值点.

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 并且

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$

当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

Example 14.70: 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=|x|$, 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和

✎ Solution $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{d}x$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)$

当 $n \geqslant 1$ 时, $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)^2}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

当 $x \in [-\pi, \pi)$ 时,

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos nx\right)$$

当 $x = 0$ 时,

$$0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}s + \frac{\pi^2}{8}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

◀

14.5.2 正弦级数与余弦级数

Definition 14.5

对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为正弦级数, 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, 3, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \tag{14.12}$$

即知奇函数的傅里叶级数只是含有正弦项的正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{14.13}$$

对周期为 2π 的偶函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为余弦级数, 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, 3, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \tag{14.14}$$

即知偶函数的傅里叶级数是只含有常数项和余弦项的余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{14.15}$$

Example 14.71: 设 $x^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \ (-\pi, \pi)$, 则 $a_2 =$ ____

Solution 根据余弦级数的定义, 有

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Example 14.72: 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n} = \dfrac{\pi - 1}{2}$

Solution 将函数 $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ $(0 \leqslant\leqslant \pi)$ 展开成正弦级数. 作

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓. 令 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓, 则 $\Psi(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 处间断, 又在 $(0, \pi]$ 上 $\Psi(x) \equiv f(x)$, 因此 $\Psi(x)$ 的傅里叶级数

在 $(0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \ (n=0,1,2,\cdots) \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2}\cos nx - \frac{1}{2n^2}\sin nx\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{n} \ (n=1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

故

$$
f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}
$$

◀

Example 14.73: [19] 求

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}
$$

Solution 构造 $f(x)=x^2,(0\leqslant x\leqslant \pi)$, 将 $f(x)$ 展开成正弦级数, 有

$$
x^2 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left[(-1)^n - 1\right]\right\}\sin(nx)\,,\ (0\leqslant x\leqslant \pi)
$$

令 $x=\frac{\pi}{2}\in(0\leqslant x\leqslant\pi)$, 有

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{4} &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left[(-1)^n - 1\right]\right\}\sin(n\tfrac{\pi}{2}) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{\pi^2}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}4}{(2n+1)^3}\right] \\
&= 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}
\end{aligned}
$$

故有

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}
$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, 因此

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = -\left(\frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi^2}{4}\times\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^3}{32}
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} - 1
$$

◀

Example 14.74: Proof

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

Proof:取 $f(x)=x^4$, 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^4\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^\pi=\frac{2\pi^4}{5}$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^4\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{8\pi^2n^2-48}{n^4}\cos n\pi\quad(n=0,1,2,3,\cdots)$$
$$b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

于是

$$x^4=\frac{\pi^4}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi^2n^2-48}{n^4}\cos n\pi\cos nx\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

令 $x=\pi$ 得

$$\pi^4=\frac{1}{5}\pi^4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n^2\pi^2-48}{n^4}\cos^2 n\pi$$
$$=\frac{1}{5}\pi^4+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}\left(-1+\frac{1}{5}+\frac{8}{6}\right)=\frac{\pi^4}{48}\cdot\frac{8}{15}=\frac{1}{90}\pi^4.$$

□

Proof: I determined the coefficients of the Fourier series, which are

$$a_0=\frac{\pi^3}{2};\qquad a_n=\frac{6(\pi^2n^2-2)(-1)^n+12}{\pi n^4}$$

Then, I get

$$x^3=\frac{\pi^3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(\pi^2n^2-2)(-1)^n+12}{\pi n^4}\cos(nx)$$

If $x=\pi$, then

$$\pi^3=\frac{\pi^3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(\pi^2n^2-2)(-1)^n+12}{\pi n^4}\cos(n\pi)$$
$$\frac{3\pi^3}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(\pi^2n^2-2)(-1)^n+12}{\pi n^4}(-1)^n$$

I'm stuck. It's easy to compute $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, using the Fourier series, but for this type of problem I'm stuck.

Any comments or suggestions? By the way, I know that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

I need to know how to get there. □

☞ Proof: From your identity

$$\frac{3\pi^3}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(\pi^2 n^2 - 2)(-1)^n + 12}{\pi n^4}(-1)^n$$

expanding the right hand side and using the result $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, we get

$$\begin{aligned} \frac{3\pi^4}{4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(\pi^2 n^2 - 2)(-1)^n + 12}{n^4}(-1)^n \\ &= 6\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \\ &= \pi^4 - 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}. \end{aligned}$$

Now we need to express the alternating series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ in terms of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, e.g. as follows

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{1}{2^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{3\pi^4}{4} &= \pi^4 - 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{21}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ &= \pi^4 - \frac{45}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}. \end{aligned}$$

Solving for $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ we finally obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{45}\left(\pi^4 - \frac{3\pi^4}{4}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

☞ Proof:

$$\pi x \cot \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2} = 1 - 2x^2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2x^4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - 2x^6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} - \cdots \tag{14.16}$$

$$\pi x^{1/2} \cot \pi x^{1/2} = 1 - 2x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2x^2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - 2x^3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} - \cdots$$

For $z \sim 0$:

$$z \cot z = \frac{z}{\tan z} \sim \frac{z}{z + z^3/3 + 2z^5/15} = \frac{1}{1 + z^2/3 + 2z^4/15} \tag{14.17}$$

$$\sim 1-\frac{z^2}{3}+\frac{2z^4}{15}+\frac{z^2}{3}+\frac{2z^4}{15}^2 \sim 1-\frac{z^2}{3}-\frac{2z^4}{15}+\frac{z^4}{9}=1-\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{45} \qquad (14.18)$$

$$\pi x^{1/2}\cot \pi x^{1/2} \sim 1-\frac{\pi^2}{3}x-\frac{\pi^4}{45}x^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=--\frac{\pi^4}{45}=\frac{\pi^4}{90}$$

□

☞ Proof: By applying Parseval' s identity (Lyapunov equation) to the Fourier series

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots$$

of x^2 on the interval $[-\pi,\ \pi]$, one may derive the value of Riemann zeta function at $s=4$ Let us first find the needed Fourier coefficients ansubscriptan a_n and bnsubscriptbn b_n. Since x^2 defines an even function, we have

$$b_n=0 \quad \forall\, n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

Then

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\ \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\ \mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}.$$

For other coefficients ansubscriptan a_n, we must perform twice integrations by parts:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\ \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\ \mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\cdot\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\cdot\frac{\sin nx}{n}\ \mathrm{d}x\right)\\
&=-\frac{4}{n\pi}\int_o^{\pi}x\sin nx\ \mathrm{d}x\\
&=-\frac{4}{n\pi}\left(\left[x\cdot\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}1\cdot\frac{-\cos nx}{n}\ \mathrm{d}x\right)_0^{\pi}\\
&=-\frac{4}{n\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}-\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\\
&=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=\frac{4(-1)^n}{n^2} \quad \forall\, n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots
\end{aligned}$$

Thus

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad \text{for} -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

The left hand side of Parseval' s identity

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\ \mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

reads now

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2)^2\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^4}{5}$$

and its right hand side

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2=\frac{\pi^4}{9}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{9}+8\zeta(4).$$

Accordingly, we obtain the result

$$\zeta(4) = 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

14.5.3 一般周期函数的傅里叶级数

Theorem 14.18 狄利克雷 (Dirichlet) 收敛定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的可积函数, 如果在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 满足:

1. 连续或只有有限个第一类间断点;
2. 只有有限个极值点;

则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛, 记其和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{14.19}$$

且 $S(x)=\begin{cases} f(x) & x \text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x \text{ 为第一类间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x \text{ 为端点} \end{cases}$

Example 14.75: 假设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ x-1, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$ 的周期为 2 傅里叶级数 $S(x)$, 则在 $x=-\frac{1}{2}, x=0, x=1, x=\frac{3}{2}$ 处 $S(x)$ 分别收敛于 ____, ____, ____, ____

Solution

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x \text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x \text{ 为第一类间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x \text{ 为端点} \end{cases}$$

画图可知，$x=-\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的连续点，故

$$S(-\tfrac{1}{2})=f(-\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

$x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点，故

$$S(0)=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$$

$x=1$ 为 $f(x)$ 的端点，故

$$S(1)=S(-1)=\frac{f(-1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{0+0}{2}=0$$

根据周期性 $S(\frac{3}{2})=S(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ ◀

Theorem 14.19 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 的傅里叶展开

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\quad(x\in C)\tag{14.20}$$

其中

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x\\ a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,3,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots)\end{cases}\tag{14.21}$$

Theorem 14.20 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 是奇函数的傅里叶展开

当 $f(x)$ 是奇函数时

$$f(x)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}}_{\text{正弦级数}}\quad(x\in C)\tag{14.22}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots)\tag{14.23}$$

Theorem 14.21 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 是偶函数的傅里叶展开

当 $f(x)$ 是偶函数时

$$f(x)=\overbrace{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}}^{\text{余弦级数}}\quad(x\in C) \tag{14.24}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,3,\cdots) \tag{14.25}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x$$

♣

$$[0,l]\text{上}f(x)\text{展开成正弦或余弦级数}\begin{cases}\xrightarrow[f(x)\to\text{奇函数}]{\text{作奇延拓}}\text{正弦级数}\\ \xrightarrow[f(x)\to\text{偶函数}]{\text{作偶延拓}}\text{余弦级数}\end{cases}$$

Example 14.76: 设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|, b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$. 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, 则求 $S(-\frac{9}{4})$

Solution 作奇延拓

$$F(x)=\begin{cases}f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|, & x\in[0,1]\\ -f(-x)=-\left|x+\frac{1}{2}\right|, & x\in[-1,0]\end{cases}$$

画图知 $x=-\frac{1}{4}$ 为 $F(x)$ 的连续点，根据周期性

$$S(-\tfrac{9}{4})=S(-\tfrac{1}{4})=-\left|-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{4}$$

◀

Theorem 14.22 Euler-Fourier 公式

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ n = 0,1,2,3,\cdots. \tag{14.26}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n = 1,2,3,\cdots. \tag{14.27}$$

上面两式称为 Euler-Fourier 公式

设周期为 π 的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 等式右端的三角级数称为 $f(x)$ 的 Fourier 级数，相应的 a_n 和 b_n 称为 $f(x)$ 的 Fourier 系数

Example 14.77: 设函数 $f(x)$ 是以为 2π 周期的周期函数, 且 $f(x) = e^{\alpha x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$, 其中 $\alpha \neq 0$, 试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 的和.

Solution(方法 1) 先求出系数:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a\pi}(e^{2\pi\alpha}-1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha x}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2},\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha x}\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\cdot\frac{n}{\alpha^2+n^2},\quad n=1,2,\cdots$$

由狄利克雷收敛定理知

$$e^{\alpha x} = \frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cos nx - n\sin nx}{\alpha^2+n^2}\right],\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$$

令 $\alpha = 1$, $x = 0$, 由狄利克雷收敛定理知

$$\frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\right] = \frac{f(0)+f(2\pi)}{2} = \frac{e^{2\pi}+1}{2}$$

故,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} - \frac{1}{2}$$

Theorem 14.23 [20]

若函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上除有限个非整数的极点外处处解析，且存在常数 $R>0$ 和 $M>0$，使当 $|z|>R$ 时，有 $|zf(z)|\leqslant M$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} f(n)=-\sum_{f(z)\text{的极点}}\operatorname{res}(\pi\cot\pi z f(z))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\sum\operatorname{res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{1+z^2},z=\pm\mathrm{i}\right)+\frac{1}{2}$$

其中

$$\operatorname{res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{1+z^2},z=\mathrm{i}\right)=\operatorname{res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{1+z^2},z=-\mathrm{i}\right)=-\frac{1}{2}\pi\coth\pi$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi}{2}\coth\pi-\frac{1}{2}$$

◀

Example 14.78: 计算 $\arctan\left(\dfrac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)$ 的 Fourier series.

Solution 考虑 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z}&=\frac{1+\bar{z}}{(1+z)(1+\bar{z})}=\frac{1}{1+r\cos\theta+ir\sin\theta}\\&=\frac{1+r\cos\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}-i\cdot\frac{r\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}\end{aligned}$$

于是，记

$$a=\frac{1+r\cos\theta}{1+2r\cos\theta+r^2},b=-\frac{r\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}$$

我们得到 $\dfrac{1}{1+z}=a+ib$，那么它的辐角

$$\varphi=\arctan\frac{b}{a}=-\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)$$

$$\begin{aligned}a+ib&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}e^{i\varphi}\end{aligned}$$

又注意到

$$\sqrt{a^2+b^2}=|a+bi|=\frac{1}{|1+z|}=\frac{1}{\sqrt{(1+z)(1+\bar{z})}}$$

所以

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{\sqrt{(1+z)(1+\overline{z})}}e^{i\varphi}$$

就是

$$-i\varphi=i\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)=\frac{1}{2}(\ln(1+z)-\ln(1+\overline{z}))$$

这时，利用 $\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$ 及 $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$, 得到

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(r^n\cos n\theta+ir^n\sin n\theta)$$

$$\ln(1+\overline{z})=\overline{\ln(1+z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(r^n\cos n\theta-ir^n\sin n\theta)$$

于是，自然就得到

$$\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}r^n\sin n\theta$$

这个不是别的，就是它的 Fourier Series. 另外，若令 $r=-1$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)=\frac{\pi-\theta}{2}$$

◀

Example 14.79: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$ 用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数

Proof: 由 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$ 可知, f 为以 2, $\sqrt{3}$ 为周期的周期函数，所以它的 Fourier 系数为:

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\,,\quad b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$, 所以

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\left[\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\right]\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

所以 $a_n = a_n \cos\sqrt{3}n\pi + b_n \sin\sqrt{3}n\pi$; 同理可得 $b_n = b_n \cos\sqrt{3}n\pi - a_n \sin\sqrt{3}n\pi$.
联立, 有

$$\begin{cases} a_n = a_n \cos\sqrt{3}n\pi + b_n \sin\sqrt{3}n\pi \\ b_n = b_n \cos\sqrt{3}n\pi - a_n \sin\sqrt{3}n\pi \end{cases}$$

得 $a_n = b_n = 0\,(n = 1, 2, \cdots)$.
而 f 可导, 其 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)$, 所以有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2}$$

其中 $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为常数 □

Theorem 14.24 Parseval 等式

设 $f(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的可积和平方可积函数，且有 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$
则

$$\frac{a_n^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Example 14.80: 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上可微，若 $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，则

$$\int_0^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

Solution 将 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上作偶延拓，从而可展开成 Fourier 余弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (a_0 = 0)$$

此时，易知有

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n)\sin nx$$

从而由 $a_n^2 \leqslant (-na_n)^2\ (n = 1, 2, \cdots)$, 根据 Parseval 等式，我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

◀

14.6 级数求和计算

Theorem 14.25

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^n \,\mathrm{d}t$$

Exercise 14.17: 设 $a > 1$, 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1}$ 的和.

Solution 事实上

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1} &= \frac{1}{a+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1} = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1} \\ &= \frac{1}{a+1} - \frac{2}{a^2-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1} = \frac{1}{a+1} - \frac{2^2}{a^{2^2}-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1} \\ &= \frac{1}{a+1} - \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1} = \frac{1}{a+1}.\end{aligned}$$

◀

Exercise 14.18: 求 $1 - \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} - \frac{4^3}{3!} + \cdots$ 的和.

Solution 事实上,

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^k}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{k-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{k-1}}{n!} \\ &= -b_{k-1} - C_{k-1}^1 b_{k-2} - \cdots - C_{k-1}^{k-2} b_1 - b_0, \end{aligned}$$

其中 $b_0 = 1/e$. 因此 $b_1 = -1/e, b_2 = 0, b_3 = 1/e$. 因此

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} - \frac{4^3}{3!} + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^3}{n!} \\ &= b_3 + 3b_2 + 3b_1 + b_0 = -\frac{1}{e}. \end{aligned}$$

◀

Exercise 14.19: 求 $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$ 的和.

Solution

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8n-7} + \frac{1}{8n-5} - \frac{1}{8n-3} - \frac{1}{8n-1} \right) \\ =& \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{8n-8} + x^{8n-6} - x^{8n-4} - x^{8n-2} \right) \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{8n-8} + x^{8n-6} - x^{8n-4} - x^{8n-2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^4-x^6}{1-x^8} \mathrm{d}x$$

$$= \left.\frac{\arctan\left(1+\sqrt{2}x\right) - \arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2}}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

◀

Exercise 14.20: 求 $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \cdots$ 的和.

Solution

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8n-7} - \frac{1}{8n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{8n-8} - x^{8n-2}\right)$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{8n-8} - x^{8n-2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-x^6}{1-x^8} \mathrm{d}x$$

$$= \left.\frac{2\arctan x + \sqrt{2}\arctan\left(1+\sqrt{2}x\right) - \arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)}{4}\right|_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{8}\pi.$$

◀

Exercise 14.21: 求 $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$ 的和.

Solution

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{6n-6} - x^{6n-3}\right)$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{6n-6} - x^{6n-3}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1-x^3}{1-x^6} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} \mathrm{d}x$$

$$= \left.\left(-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right)\right|_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi + 3\ln 2}{9}.$$

◀

Exercise 14.22: 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2}\right)$ 的和.

Solution

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{4n} + x^{4n+2} - x^{2n+1}\right)$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{4n} + x^{4n+2} - x^{2n+1}\right) \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1-x^4} - \frac{x}{1-x^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x = \ln 2.
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 14.23: 求 $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \cdots$ 的和.

Solution

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n-1}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{5n-5} - x^{5n-2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{5n-5} - x^{5n-2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-x^3}{1-x^5} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)/10}{x^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}x + 1} + \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)/10}{x^2 + \frac{-\sqrt{5}+1}{2}x + 1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25}\pi.
\end{aligned}
$$

◀

Exercise 14.24: 设 $x > 1$, 求 $\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots$ 的和

Solution

$$
\begin{aligned}
I &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}\right) + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots \\
&= \cdots = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1)} = 1.
\end{aligned}
$$

◀

Example 14.81: 求

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m!n!}{(m+n)!}
$$

Solution 注意到

$$
\frac{1}{\binom{m+n}{m}} = m \int_0^1 (1-x)^n x^{m-1} \mathrm{d}x
$$

那么有

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m!n!}{(m+n)!}=m\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)^n x^{m-1}\,\mathrm{d}x=m\int_0^1 x^{m-2}\,\mathrm{d}x=\frac{m}{m-1}$$

◀

Example 14.82: 求

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{(m+n)!}$$

Solution 注意到

$$\frac{n!}{(m+n)!}=\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

$$\frac{n!}{(m+n)!}=\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right)$$

所以

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{(m+n)!}=\frac{1}{(m-1)(m-1)!}$$

◀

Example 14.83: 计算

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\left[\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

Solution 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$$

由于

$$\sin\frac{(n-1)\pi}{3}=\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{3}$$

$$I=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}$$

再利用熟悉的（傅里叶或者 $\mathrm{Li}_2(z)$ ）性质

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$$

将 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 带入即可得到

$$I=\frac{\sqrt{3}\pi^2}{72}$$

◀

Example 14.84: 计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$，其中 $x\in[0,\pi]$

Solution (1) 当 $x=0$ 时, 级数为 0

(2) 当 $x\in(0,\pi]$ 时, 设 $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$, 则

$$\begin{aligned}
f_n'(x)&=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right)'\\
&=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]\\
&=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

因此:

$$f_n(x)=\int_{\pi}^{x}\left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}\right]\mathrm{d}t=\frac{\pi-x}{2}-\int_{x}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

由黎曼引理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{x}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=0$, 故 $x\in(0,\pi]$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ ◀

Example 14.85: 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}$ 的和

Proof:易得

$$\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}=-\frac{8}{2n+1}+\frac{4}{(2n+1)^2}+\frac{4}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1}-\frac{8}{2n+1}\right)=8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right)=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-8\ln 2$$

或者注意到

$$\psi(x)=-\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+x}\right)$$

以及 $\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2$，故

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1}-\frac{8}{2n+1}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1}-\frac{4}{n+\frac{1}{2}}\right)\\
&=4\psi\left(\frac{1}{2}\right)-4\psi(1)=-8\ln 2
\end{aligned}$$

由傅里叶级数易得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}=-8\ln 2+\frac{2\pi^2}{3}$$

□

Note:(by 向禹) 本题的易错点 — 条件收敛级数的重排

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1}-\frac{8}{2n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(4x^n-8x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\left(4x^n-8x^{2n}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(\frac{4}{1-x}-\frac{8}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=-4\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$=-4\ln 2\ \times??$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(x^{2n+1}-x^{2n}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{2n+1}-x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{x-1}{1-x^2}=-\ln 2\ \times??$$

上面的解答为什么是错误的呢??? 这个问题涉及到条件收敛级数的重排问题, 这么直接交换求和与积分次序的时候, 实际上改变了无穷项的求和次序, 条件收敛的级数重排后结果会发生变化的.

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right)$ 如果写成 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(x^{2n+1}-x^{2n}\right)\mathrm{d}x$ 再交换次序, 就把本来在 $2n+2$ 位置的数调到了 $n+1$ 的位置上, 这样和就变了

Exercise 14.25: 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\int_0^1\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Proof:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\int_0^1\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{1-x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1-x}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1-x}\Big(1-\big(-x\ln(1-x)\big)+\big(-x-\ln(1-x)\big)\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\big(1-\ln(1-x)\big)\,\mathrm{d}x=2$$

其中

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-x-\ln(1-x)\quad\text{when}\quad |x|\leqslant 1\wedge x\neq 1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-x\ln(1-x)\quad\text{when}\quad |x|\leqslant 1\wedge x\neq 1$$

□

Example 14.86: 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$ 的和

Proof:易得

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{1}{2(3n+1)}-\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{6(n+1)}$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2(3n+1)}-\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{6(n+1)}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(\frac{x^{3n}}{2}-x^{3n+1}+\frac{x^n}{6}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{3n}}{2}-x^{3n+1}+\frac{x^n}{6}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{2(1-x^3)}-\frac{x}{1-x^3}+\frac{1}{6(1-x)}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{4-x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\left(\sqrt{3}\pi-3\ln 3\right)\end{aligned}$$

□

Exercise 14.26: Prove that

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k+1)-1}{k+1}=-\gamma+\log 2$$

γ is the well known Euler's constant.

Proof:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k+1)-1}{k+1}&=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(2k-1)-1}{k}\\ \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{km^{2k-1}}&=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m}{km^{2k}}\quad\text{since all terms are positive}\\&=\sum_{m=2}^{\infty}\left(-m\ln\left(1-\frac{1}{m^2}\right)-\frac{1}{m}\right)=\sum_{m=2}^{\infty}\left(m\ln\left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)-\frac{1}{m}\right)\\&=\sum_{m=2}^{\infty}\left(m\left(\ln(m^2)-\ln(m^2-1)\right)-\frac{1}{m}\right)\\&=\lim_{M\to\infty}\sum_{m=2}^{M}\left(2m\ln(m)-m\ln(m+1)-m\ln(m-1)-\frac{1}{m}\right)\\&=\lim_{M\to\infty}\left(\ln 2+(M+1)\ln(M)-M\ln(M+1)-H_M+1\right)\\&=\lim_{M\to\infty}\left(\ln 2-H_M+\ln(M)+1-M\ln\left(1+\frac{1}{M}\right)\right)\\&=\lim_{M\to\infty}\left(\ln 2-H_M+\ln(M)+1-M\left(\frac{1}{M}+\mathcal{O}(M^{-2})\right)\right)\end{aligned}$$

$$= \ln 2 - \gamma$$

□

Example 14.87: 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$ 傲娇小魔王

Solution

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} &= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\ln x \ln(1-x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\ln^2 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln^2 2 - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2
\end{aligned}$$

◀

Exercise 14.27: 证明

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Proof: Let $\theta \in \mathbb{R}$. By taking imaginary part of the identity $e^{i(2n+1)\theta} = (e^{i\theta})^{2n+1}$, it follows that

$$\sin(2n+1)\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \cos^{2n-2k}\theta \sin^{2k+1}\theta.$$

Dividing both sides by $(-1)^n \cos^{2n}\theta \sin\theta$, for $t = \tan^2\theta$ we have

$$(-1)^n \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta\cos^{2n}\theta} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{2n+1}{2k+1} t^k. \tag{*}$$

We know that the LHS vanishes for $\theta = \frac{\pi}{2n+1}, \cdots, \frac{n\pi}{2n+1}$, which gives n different zeros

$$t_k = \tan^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right), \quad k = 1, \cdots, n.$$

Since the RHS of $(*)$ is a monic polynomial of degree n, it follows that

$$(t-t_1)\cdots(t-t_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{2n+1}{2k+1} t^k.$$

So if we write $a_k = (-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k+1}$ so that $(t-t_1)\cdots(t-t_n) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n$, then

$$\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_n} = -\frac{a_1}{a_0} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

□

Exercise 14.28: 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{2k}{2n})}{\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{2k-1}{2n})}\right)^{n}=e^{2\cot(1/2)}$$

Proof: Using what is inside the parentheses:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k/n)=\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{ki}{n}}-e^{\frac{-ki}{n}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{2k-1}{2n})=\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{(2k-1)i}{2n}}-e^{\frac{-(2k-1)i}{2n}}\right)$$

So, we get:

$$\frac{\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{ki}{n}}-e^{\frac{-ki}{n}}\right)}{\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{(2k-1)i}{2n}}-e^{\frac{-(2k-1)i}{2n}}\right)}$$

Now, factor a little:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i/n}\right)^{k}-\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-i/n}\right)^{k}}{e^{-i/2n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i/n}\right)^{k}-e^{i/2n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-i/2n}\right)^{k}}$$

These are partial geometric series. They should simplify down.

The top left one evaluates to

$$\frac{(e^{i}-1)e^{i/n}}{e^{i/n}-1}$$

The top right one:

$$\frac{(e^{i}-1)e^{-i}}{e^{i/n}-1}$$

The bottom left:

$$\frac{e^{-i/2n}(e^{i}-1)e^{i/n}}{e^{i/n}-1}$$

The bottom right:

$$\frac{e^{i/2n}(e^{i}-1)e^{-i}}{e^{i/n}-1}$$

Putting these altogether, it should whittle down to some trig functions involving sin and/or cos. But, I have not finished yet.

It looks encouraging though.

EDIT:

Well, I spent some time trying to hammer down the results of the sums above.

They become:

$$\frac{\sin(1/n+1)-\sin(1/n)-\sin(1)}{\sin(1/2n+1)+\sin(1/2n-1)-2\sin(1/2n)}$$

this is equivalent to:

$$\frac{\cos(1/2n)\sin(1/2)+\sin(1/2n)\cos(1/2)}{\sin(1/2)}$$

Using the product-to-sum formulas on the numerator, it whittles down to: $=\dfrac{\sin(\frac{n+1}{2n})}{\sin(1/2)}$
But, I admit I left tech do most of the work and played around with some trial and error.
So, we finally get:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2n})}{\sin(1/2)}\right)^n$$

Now, since this is a limit and there is an 'e' in the required solution, I figured I would make the sub $n=1/k$ in order to get something that resembles the 'e' limit.

$$\lim_{k\to 0}\left(\frac{\sin(\frac{k+1}{2})}{\sin(1/2)}\right)^{1/k}$$

So, take logs:

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}[\log(\sin(\frac{k+1}{2})-\log(\sin(1/2))]$$

Using L'Hopital and taking this limit:

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{2}\cot(\frac{k+1}{2})$$

results in

$$1/2\cot(1/2)$$

Now, e:

$$e^{1/2\cot(1/2)}=e^{\frac{1}{2\tan(1/2)}}$$

□

Exercise 14.29: 证明:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=\gamma\ln 2-\frac{\ln^2 2}{2},$$

其中 γ 是 Euler 常数.

Proof: 因为

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^x}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\log n}{n^x}\\ &=\frac{\log 2}{2^{x-1}}\zeta(x)+\left(1-\frac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta'(x) \end{aligned}\tag{14.28}$$

$$\zeta(x)=\frac{1}{x-1}+\gamma+O(x-1)$$

带入 (14.28), 令 $x\to 1^+$ 可求得

$$f(1)=\gamma\log 2-\frac{1}{2}\log^2 2$$

□

☞ Proof: 考虑部分和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} &= 2\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\ln 2k}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}\\ &= \ln 2\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{k}-\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}\frac{\ln k}{k}\end{aligned}$$

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 可知当 $x>e$ 时为单调递减且趋于 0 函数，有估计

$$\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}\int_{k}^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\le\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}f(k)\le\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}f(x)\,\mathrm{d}x$$

计算得

$$\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}f(k)-\frac{\ln 2}{2}\ln(\frac{n^2}{2})=o(1)$$

所以原式

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\ln k}{k} &= \ln 2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{1}{k}-\ln(n/2)-\frac{\ln 2}{2}\right)\\ &= \ln 2(\gamma-\frac{1}{2}\ln 2)\end{aligned}$$

□

Exercise 14.30: 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n-H_{2n}}{n\,(2n+1)}.$$

✎ Solution 首先不难得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n-H_{2n}}{n\,(2n+1)} &=2\sum_{n=1}^{\infty}(H_n-H_{2n})\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)\\ &=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)\int_0^1\frac{x^{2n}-x^n}{1-x}\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1\frac{\sqrt{x}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\ln\frac{1+x}{1-x}-\ln(1+x)}{1-x}\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^1\ln\frac{1+t}{1-t}\mathrm{d}t=4\ln 2.$$

$$\int_0^1\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\mathrm{Li}_2(1)-\mathrm{Li}_2(-1)=\frac{\pi^2}{4}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(\sqrt{x}-1)}{1-x}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= -2\int_0^1 \frac{t}{1+t}\ln\frac{1+t}{1-t}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^1\left[\frac{\ln(1+t)}{1+t}-\frac{\ln(1-t)}{1+t}\right]\mathrm{d}t-2\int_0^1\ln\frac{1+t}{1-t}\mathrm{d}t\\ &= \ln^2 2+2\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)-4\ln 2=\frac{\pi^2}{6}-4\ln 2.\end{aligned}$$

又

$$\int_0^1 \frac{\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\ln\frac{1+x}{1-x}-\ln(1+x)}{1-x}\mathrm{d}x = 2\int_0^1\frac{1}{1-x}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1\frac{\ln(1+\sqrt{x})-\ln 2}{1-x}\mathrm{d}x-2\int_0^1\frac{\ln(1+x)-\ln 2}{1-x}\mathrm{d}x,$$

其中

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln(1+\sqrt{x})-\ln 2}{1-x}\mathrm{d}x &= 2\int_0^1\frac{t}{1-t^2}\ln\frac{1+t}{2}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\frac{1}{1-t}\ln\frac{1+t}{2}\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{1}{1+t}\ln\frac{1+t}{2}\mathrm{d}t\\ &= -\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln^2 2=\ln^2 2-\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)-\ln 2}{1-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}.$$

最后得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n-H_{2n}}{n(2n+1)} &= 4\ln 2-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{6}-4\ln 2+2\left(\ln^2 2-\frac{\pi^2}{12}\right)-2\left(\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}\right)\\ &= \ln^2 2-\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

◀

Exercise 14.31: 计算极限 $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$

☞ Proof: 因为 $\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\,\mathrm{d}x=-\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$, 所以部分和

$$\begin{aligned}S_{m,n} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\,\mathrm{d}x\\ &= -\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{-1}^{0}x^{i+1-1}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x^{i+2-1}\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\left(x^i+x^{i+1}+\cdots+x^{i+n-1}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^i(1-x^n)}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^i-x^{i+n}}{1-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=-\int_{-1}^{0}\frac{(x^1-x^{1+n})+(x^2-x^{2+n})+\cdots+(x^m-x^{m+n})}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{-1}^{0}\frac{x^1+x^2+\cdots+x^m}{1-x}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots+x^{n+m}}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{-1}^{0}\frac{x-x^{m+1}}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{x^{n+1}-x^{n+m+1}}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$$

下面证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{x^t}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x=0$, 事实上, 因为 $x\in[-1,0]$, 所以 $(1-x)^2\geqslant 10$,

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^t}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^{0}x^t\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{t+2}}{t+1}\to 0$$

当 $t\to+\infty$ 时, 于是

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\n\to+\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=\lim_{\substack{m\to+\infty\\n\to+\infty}}S_{m,n}=-\int_{-1}^{0}\frac{x}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}$$

□

Exercise 14.32: **级数求和**:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}$$

Proof: 显然有

$$-n\int_0^1(1-x)^{n-1}\ln x dx=-\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^k}{k}=H_n$$

考虑积分

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k+1}x^{k-1}dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k(-1)^{k+1}}{k}$$

另外一方面

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx=\int_0^1\frac{1-u^n}{1-u}du=H_n$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1(1-x)^{n-1}\ln x dx=-\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n^2}\ln x dx$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2}=\frac{\mathrm{Li}_2(1-x)}{1-x}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}=-\int_0^1\frac{\mathrm{Li}_2(1-x)\ln x}{1-x}dx=\frac{1}{2}(\mathrm{Li}_2(1-x))^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2$$

□

Exercise 14.33:

Proof:

□

参考文献

[1] . 徐森林, “数学分析精选习题全解 (上册),” 2009.

[2] 同济大学数学系, “高等数学 第七版,” 2014.

[3] fin3574, “【微分方程】二阶线性微分方程の wronskian 法.” http://tieba.baidu.com/p/4501477872, 2016.

[4] . 徐森林, “数学分析第一册,” 2005.

[5] 周明强, “数学分析习题演练 (第一册),” 2010.

[6] 国防科学技术大学数学竞赛指导组, “大学生数学竞赛指导,” 2009.

[7] maorenfeng88, “一类数列问题的做法。.” http://www.math.org.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=38220&extra=page%3D1, 2018.

[8] 同济大学数学系, “高等数学习题全解指南,” 2014.

[9] O. Furdui, “Limits, series, and fractional part integrals,” 2013.

[10] 菲赫金哥尔茨, “微积分学教程 (第二卷),” 2006.

[11] . 李红, “复变函数与积分变换,” 2013.

[12] fin3574, “这道题到底有多少种做法?.” http://tieba.baidu.com/p/4331366750, 2016.

[13] 周明强, “数学分析习题演练 (第二册),” 2010.

[14] . . 陈兆斗, 郑连存, “大学生数学竞赛习题精讲,” 8 2010.

[15] . 郭文秀, 朱永银, “广义高斯函数及其积分问题,” 2002.

[16] . 徐森林, “数学分析第三册,” 2007.

[17] . 徐森林, “数学分析精选习题全解 (下册),” 2009.

[18] 赵显曾, “数学分析拾遗,” 2006.

[19] Aris, “发个题，想看看大家的解法。.” http://tieba.baidu.com/p/4428450841#87016105253l, 2016.

[20] **吴崇试**, "**数学物理方法**," 2015.