第一章　函数、极限、连续

第 1 节 函数

★基本内容学习

一 基本概念和性质

1 函数的定义

设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作：$y=f(x)$。

2 函数概念的两要素

①定义域：自变量 x 的变化范围②对应关系：给定 x 值,求 y 值的方法。

3 函数的三种表示方法

①显式：形如 $y=f(x)$ 的称作显式，它最直观，也是初等函数一般采用的形式。

②隐式：有时有些关系用显式无法完全表达，这时要用到隐式，形如 $F(x,y)=0$，如椭圆函数 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

③参数式：形如平抛运动的轨迹方程 $\begin{cases} x=vt \\ y=\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ 称作参数式。参数式将两个变量的问题转化为一个变量的问题，从而使很多难以处理的问题简化。

4 函数的四个基本性质

①奇偶性：设函数$f\ \ x$在对称区间X上有定义，如果对于$\ \ x\ \ X$恒有

$f(x)\quad f(\ \ x)$

(或)$f(x)\quad f(\ \ x)$，则称$f\ \ x$为偶函数(或$f\ \ x$奇函数)。注：偶函数$f\ \ x$图形关于y轴对称，奇函数$f\ \ x$的图形关于坐标原点对称。

②有界性：设函数$f\ \ x$在区间X上有定义,如果$\ \ M\quad 0$,使得对一切$x\quad X$,恒有：$\left|f\ \ x\right|\quad M$,则称$f\ \ x$在区间$X$上有界；若不存在这样的$M\quad 0$，则称$f\ \ x$在区间$X$上无界.注：函数$f\ \ x$有无界是相对于某个区间而言的。

③周期性：设函数$f\ \ x$在区间X上有定义,若存在一个与x无关的正数T，使对任一$x\quad X$，恒有$f\ \ x\ \ T\quad f\ \ x$则称$f\ \ x$是以T为周期的周期函数，把满足上式的最小正数T称为函数$f\ \ x$的周期。

④单调性：设函数$f\ \ x$在区间X上有定义，如果对$\ \ x_1,x_2\quad X,x_1\quad x_2$,恒有：$f\ \ x_1\quad f\ \ x_2$ (或$f\ \ x_1\quad f\ \ x_2$)则称$f\ \ x$在区间X上是单调增加(或单调减少)的；如果对于$\ \ x_1,x_2\quad X,x_1\quad x_2$,恒有：$f\ \ x_1\quad f\ \ x_2$ (或$f\ \ x_1\quad f\ \ x_2$)则称$f\ \ x$在区间X上是严格单调增加(或严格单调减少)的。

5 其它函数定义

①复合函数：设函数$y\quad f\ \ u$的定义域为D_f，而函数$u\qquad x$的定义域是D值域为Z，若$D_f\quad Z\qquad$，则称函数$y\quad f\qquad x$为x的复合函数，它的定义域是$\{x\ \mid\ x\quad D$ 且 $(x)\quad D_f\}$。这里　表示空集。

②反函数：设函数$y\quad f\ \ x$的值域为Z_f，如果对于Z_f中任一y值，从关系式$y\quad f\ \ x$中可确定唯一的一个x值，则称变量x为变量y的函数，记为：$x\qquad y$，

其中 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为：$y=f^{-1}(x)$。

6 初等函数

①常值函数　$y=C$（C 为常数），$x\in R$

②幂函数　$y=x^{\alpha}$　$(\alpha\in R)$，定义域由 α 确定，但不论 α 如何，在 $(0,+\infty)$ 内总有定义。

③指数函数　$y=a^x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$　$x\in R$

④对数函数　$y=\log_a^x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$　$x\in(0,+\infty)$

⑤三角函数　如 $y=\sin x,\ x\in R$；$y=\cos x,\ x\in R$；

$y=\tan x,\ x\in(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}),k\in Z$；$\cot x,\ x\in(k\pi,(k+1)\pi),\ k\in Z$ 等

⑥反三角函数　$y=\arcsin x,\ x\in[-1,1]$；$y=\arccos x,\ x\in[-1,1]$；$y=\arctan x,\ x\in R$；$y=\operatorname{arccot} x,\ x\in R$.

以上六类函数称基本初等函数。

由基本初等函数经有限次加、减、乘、除、复合而成的函数称初等函数。

7 分段函数

一个函数在其定义域内，对应于不同的区间段有着不同的表达式，则该函数称为分段函数。分段函数仅是说函数的表示形式，并不是说它是几个函数。

常见的分段函数：

①符号函数　$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & 当x>0,\\ 0 & 当x=0,\\ -1 & 当x<0.\end{cases}$

②取整函数　$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数；$[x]=n$，当 $n\leq x<n+1$，其中 n 为整数。

③狄利克莱(Dirichlet)函数　$y=f(x)=\begin{cases}1 & 当x为有理数时,\\ 0 & 当x为无理数时.\end{cases}$

④绝对值函数 $|x| \quad \begin{matrix} x, & x \quad 0 \\ x, & x \quad 0 \end{matrix}$

★基本题型训练

一 典型例题

1 判断函数的等价性

例 1.1 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x) \quad \lg x^2, \quad g(x) \quad 2\lg x;$ (2) $f(x) \quad x, \quad g(x) \quad \sqrt{x^2};$

(3) $f(x) \quad \sqrt[3]{x^4 \quad x^3}, \quad g(x) \quad x\sqrt[3]{x \quad 1}$；(4) $f(x) \quad 1, \quad g(x) \quad \sec^2 x \quad \tan^2 x$；

解：(1)不相同，因为 $\lg x^2$ 的定义域是 $(\quad ,0) \quad (0, \quad)$，而 $2\lg x$ 的定义域是 $(0, \quad)$。

(2)不相同，因为两者对应法则不同，当 $x \quad 0$ 时， $g(x) \quad x$ 。

(3)相同，因为两者定义域、对应法则均相同。

(4)不相同，因为两者定义域不同。

2 求函数的定义域

例 1.2 设 $f(x \quad 1)$ 的定义域为 $[0,a](a \quad 0)$ 则 $f(x)$ 的定义域为多少？

解：函数 $f(x \quad 1)$ 的定义域是指 x 的变化范围，即 $0 \quad x \quad 1 \quad a$, 令 $t \quad x \quad 1$, 则 $1 \quad t \quad a \quad 1$ 。故对函数 $f(x)$ 而言，t 的变化范围为 $[\quad 1,a \quad 1]$，由函数表达式的“变量无关性”，知： $f(x)$ 的定义域为 $[\quad 1,a \quad 1]$。

常见错误：$[1,a \quad 1]$。主要是对定义域所指的变量取值范围理解不深，误认为 $0 \quad x \quad 1 \quad a$，由此得到 $1 \quad x \quad a \quad 1$。

3 判断函数奇偶性

例 1.4 下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数？

(1) $y \quad e^{x^2}\sin x,$ (2)

$y \quad \log_a(x \quad \sqrt{1 \quad x^2})\ (a \quad 0, a \quad 1)$

解：(1)因为 $\sin x$ 为奇函数，x^2 为偶函数，所以 $y \quad e^{x^2}\sin x$ 为奇函数。

(2) $f(\quad x) \quad \log_a(\quad x \quad \sqrt{1 \quad a^2}) \quad \log_a\dfrac{1}{x \quad \sqrt{1 \quad x^2}} \quad \log_a(x \quad \sqrt{1 \quad x^2}) \quad f(x)$，

故 $f(x)$ 为奇函数

4 判断函数的周期性

例 1.5 下列哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期。

(1) $y \quad \cos(x \quad 2)$ (2) $y \quad 1 \quad \sin \quad x$

解 (1) $y \quad \cos(x \quad 2)$ 是周期函数，周期为 2 ；

(2) $y \quad 1 \quad \sin \quad x$ 是周期函数，周期是 2

5 判断函数单调性

例 1.6 设 $f(x)$ 在 $(\quad , \quad)$ 上有定义，且对任意 x，$y \quad (\quad , \quad)$ 有 $|f(x) \quad f(y)| \quad |x \quad y|$ 证明 $F(x) \quad f(x) \quad x$ 在 $(\quad , \quad)$ 上单调增加。

证明：设 $x_1, x_2 \quad (\quad , \quad), x_1 \quad x_2$ 所以 $|f(x_2) \quad f(x_1)| \quad |x_2 \quad x_1| \quad x_2 \quad x_1$，

而 $f(x_1) \quad f(x_2) \quad |f(x_2) \quad f(x_1)| \quad x_2 \quad x_1$ 所以 $f(x_1) \quad x_1 \quad f(x_2) \quad x_2$ 所以 $F(x_1) \quad F(x_2)$

即 $F(x)$ 在 $(\quad , \quad)$ 上单调增加。

6 求反函数

例 1.7 求函数 $y \quad \dfrac{1 \quad \sqrt{1 \quad x}}{1 \quad \sqrt{1 \quad x}}$ 的反函数

解：令$t=\sqrt{1-x}$，则$y=\dfrac{1+t}{1-t}$。所以$t=\dfrac{y-1}{y+1}$， 即$\sqrt{1-x}=\dfrac{y-1}{y+1}$，所以

$$x=1-\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2=\frac{4y}{(y+1)^2},$$

所以反函数$y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$即为所求。

7 复合函数求法

例 1.8 设$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$则$f[g(x)]$等于多少？

解：当$x\ge 0$时，$g(x)=-x\le 0$，所以当$x\ge 0$时有$f[g(x)]=1+x$；

当$x<0$时，$g(x)=x^2>0$所以$x<0$时有$f[g(x)]=x^2+2$，故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1+x, & x\ge 0\\ x^2+2, & x<0\end{cases}。$$

注：求复合函数一般用三种方法：分析法，代入法，图示法。本题用的是分析法，下面分别介绍这三种方法。

(1)分析法：是抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法，该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合。

(2) 代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，这种构成复合函数的方法，称之为代入法，该法适用于初等函数或抽象函数的复合，这种方法在求复合函数时一般最先想到。

(3) 图示法：借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法，适用于分段函数，尤其是两个均为分段函数的复合。关于图示法解题的一般步骤如下：

①先画出中间变量函数$u=\varphi(x)$的图形；

②把$y=f(u)$的分界点在xou平面上画出(这是若干条平行于x轴的直线)；

③写出u在不同区间段上x所对应的变化区间；

④将③所得结果代入$y=f(u)$中，便得$y=f[\varphi(x)]$的表达式及相应x的变

化区间。关于这种方法我们会在后面的练习或者能力拓展中用到。

二 能力拓展

例 1 设 F(x)是连续函数 f(x)的一个原函数，"$M \Leftrightarrow N$"表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有

(A)F(x)是偶函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是奇函数。

(B)F(x)是奇函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是偶函数。

(C) F(x)是周期函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是周期函数。

(D)F(x) 是 单 调 函 数 $\Leftrightarrow$ f(x) 是 单 调 函 数 。[A]

解法一：任一原函数可表示为$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$，且$F'(x)=f(x)$. 当 F(x)为偶函数时，

有$F(-x)=F(x)$，于是$F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即 $-f(-x)=f(x)$，也即 $f(-x)=-f(x)$，

可见 f(x)为奇函数；反过来，若 f(x)为奇函数，则$\int_0^x f(t)dt$为偶函数，

从而$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$为偶函数，可见选(A)。

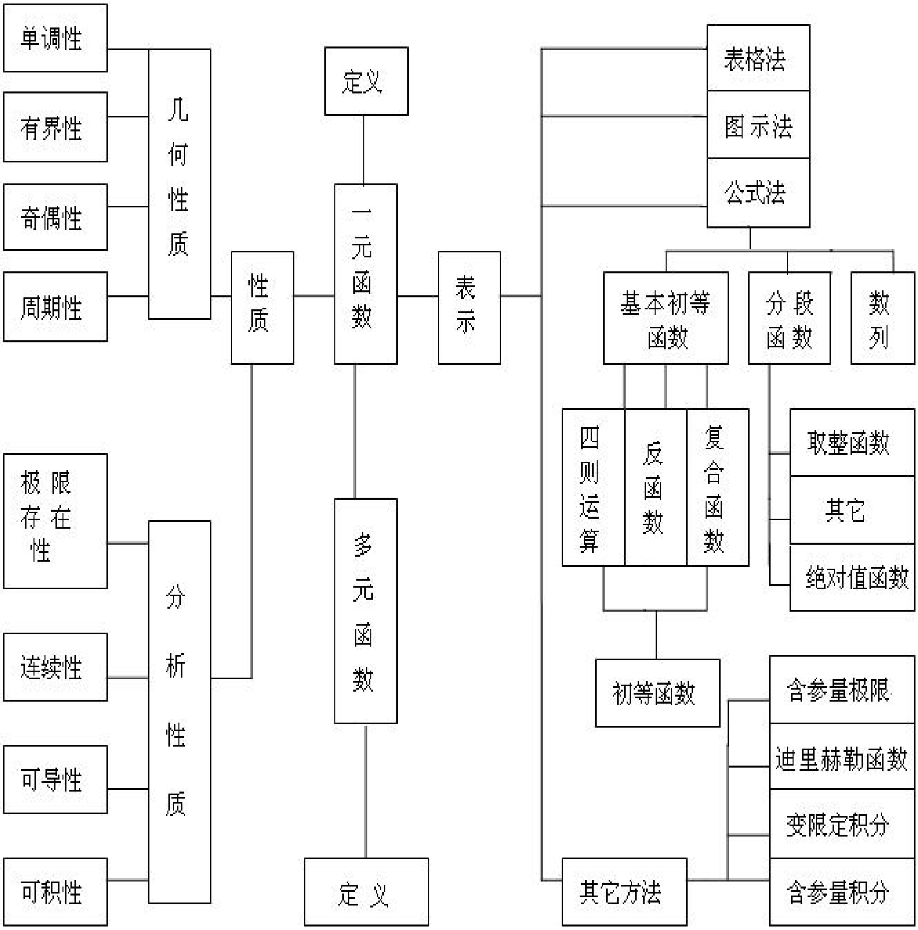
解法二：令 f(x)=1，则取 F(x)=x+1，排除(B)、(C)；令 f(x)=x，则取 F(x)=$\frac{1}{2}x^2$，排除(D)；故应选(A)。

例 2 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$则$f\{f[f(x)]\}$等于________。

(A) 0　　(B)1　　(C) $\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\le 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

解：由$f[f(x)]$＝1 得，$f\{f[f(x)]\}$＝1，故应选(B)

★函数理论框架图



第 2 节　极限与连续性

★基本内容学习

一　基本概念

1 极限的概念

定义 2.1　$\lim\limits_{n} x_n \quad a$　　0, 一个正整数 N ，当 $n \quad N$ 时，恒有

$|x_n \quad a|$ 。若 x_n 存在极限，称 $\{x_n\}$ 收敛，否则称 $\{x_n\}$ 发散。

定义 2.2 $\lim\limits_{x} f(x) \quad a$ 　　$0,$ 一个整数 X，当 $|x| \quad X$ 时，有 $|f(x) \quad a|$

定义 2.3 $\lim\limits_{x \quad x_0} f(x) \quad a$ 　　$0,$ 正数 ，当 $0 \quad |x \quad x_0|$ 　时，有 $|f(x) \quad a|$

2 数列、函数极限的基本性质与相关定理

定理 2.1(极限的不等式性质)

设 $\lim\limits_{n} x_n \quad a$，$\lim\limits_{n} y_n \quad b$ 若 $a \quad b$，则 N，当 $n \quad N$ 时，$x_n \quad y_n$；若 $n \quad N$ 时，$x_n \quad y_n$，则 $a \quad b$。

定理 2.2(极限的唯一性) 设 $\lim\limits_{n} x_n \quad a$，$\lim\limits_{n} x_n \quad b$ 则 $a \quad b$。

定理 2.3(收敛数列的有界性) 设 x_n 收敛，则 x_n 有界（即常数 $M \quad 0, |x_n| \quad M, n \quad 1,2,\cdots$）。

定理 2.4(极限的不等式性质) 设 $\lim\limits_{x \quad x_0} f(x) \quad A$，$\lim\limits_{x \quad x_0} g(x) \quad B$ 若 $A \quad B$ 则 　>0，当 $0 \quad |x \quad x_0|$ 　时 $f(x) \quad g(x)$；若 $f(x) \quad g(x)$ $(0 \quad |x \quad x_0| \quad)$，则 $A \quad B$。

[推论](极限的保号性) 若 $\lim\limits_{x \quad x_0} f \quad x \quad A, A \quad 0$ 或 $A \quad 0$，则存在一个 　0，当 $x \quad x_0 \quad ,x_0 \quad ,x \quad x_0$ 时，$f \quad x \quad 0$ (或 $f \quad x \quad 0$)。

定理 2.5(极限的唯一性)设 $\lim\limits_{x \quad x_0} f(x) \quad A$，$\lim\limits_{x \quad x_0} f(x) \quad B$ 则 $A \quad B$。

定理 2.6(夹逼准则) 设在 x_0 的领域内，恒有 $\quad x \quad f \quad x \quad \quad x$，且 $\lim\limits_{x \quad x_0} \quad x \quad \lim\limits_{x \quad x_0} \quad x \quad A$，则 $\lim\limits_{x \quad x_0} f \quad x \quad A$。

定理 2.7(单调有界准则) 单调有界数列 x_n 必有极限。

3 函数连续性定义

定义 2.1 设函数 $f \quad x$ 在 x_0 的某领域内有定义，给 x 在 x_0 处以增量 $\quad x$，相应

地得到函数增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$。若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

定义 2.2 设函数 $f(x)$ 满足条件：(1) $f(x)$ 在 x_0 的某领域内有定义；(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

定义 2.3 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内任一点均连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续。

定义 2.4 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在 $x=a$ 处右连续(即 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$)，在 $x=b$ 处左连续(即 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$)，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续。

4 间断点及分类

间断点定义　若 $f(x)$ 在 x_0 处出现以下三种情形之一：

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义；(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$。则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。

间断点 x_0 的分类：第 I 类间断点 $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 均存在。其中若 $f(x_0^-) = f(x_0^+) \neq f(x_0)$，$x = x_0$ 称为可去间断点。若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$，$x = x_0$ 称为跳跃间断点。

第 II 类间断点：$f(x_0^-), f(x_0^+)$ 至少有一个不存在。若 $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 之中有一个为 ∞，则 $x = x_0$ 称为无穷间断点。

5 闭区间上连续函数的性质

(1)(连续函数的有界性)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists$ 常数 $M>0$，对任意的 $x\in[a,b]$，恒有 $|f(x)| \le M$。

(2) (最值定理)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 至少取得最大值与最小值各一次，即 $\exists\ \xi, \eta$，使得：

$$f \qquad \max_{a \quad x \quad b} f \quad x \quad , \qquad a,b \qquad f \qquad \min_{a \quad x \quad b} f \quad x \quad , \qquad a,b$$

(3) (介值定理)若函数 $f \quad x$ 在 a,b 上连续， 是介于 $f \quad a$ 与 $f \quad b$ (或最大值 M 与最小值 m)之间的任一实数，则在 a,b 上至少 一个 ，使得 $f \qquad . \quad a \qquad b$ 。

(4) (零点定理或根的存在性定理)设函数 $f \quad x$ 在 a,b 上连续，且 $f \quad a \quad f \quad b \quad 0$，则在 a,b 内至少 一个 ，使得 $f \qquad 0. \quad a \qquad b$

5 无穷小及其阶

(1)无穷小与无穷大的定义

定义 2.5 在某一过程中以零为极限的变量称为无穷小（量）。

$\lim\limits_{x} f \quad x \quad 0 \qquad 0,$ 一个 $X \quad 0$，当 $|x| \quad X$ 时，恒有 $|f \quad x|$ 。

$\lim\limits_{x \quad x_0} f \quad x \quad 0 \qquad 0, \qquad 0$，当 $0 \quad |x \quad x_0|$ 时，恒有 $|f \quad x|$ 。

定义 2.6 在自变量的某一变化过程中，若函数 $f \quad x$ 的绝对值无穷增大，则称函数 $f \quad x$ 为无穷大量。

$\lim\limits_{x} f \quad x \qquad M \quad 0,$ 一个 $X \quad 0$，当 $|x| \quad X$ 时，恒有 $|f \quad x| \quad M.$

$\lim\limits_{x \quad x_0} f \quad x \qquad M \quad 0,$ 一个 $\quad 0$，当 $0 \quad |x \quad x_0|$ 时，恒有 $|f \quad x| \quad M.$

(2)无穷小与无穷大、无穷小与极限的关系

$\lim\limits_{x \quad x_0} f \quad x \quad A \quad f(x)$,其中 $\lim\limits_{x \quad x_0} (x) \quad 0$；

在同一极限过程中，$\begin{cases} f(x)\text{为无穷小，} f(x) \quad 0\text{则}\dfrac{1}{f(x)}\text{为无穷大} \\ f(x)\text{为无穷大，则}\dfrac{1}{f(x)}\text{为无穷小} \end{cases}$ 。

(3)无穷小阶的概念

定义 2.7 设在同一极限过程中， x 、 x 为无穷小且存在极限

$\lim\limits_{\substack{x \quad x_0 \\ (x \qquad)}} \quad x \quad 0, \lim\limits_{\substack{x \quad x_0 \\ (x \qquad)}} \quad x \quad 0$。

①若 $\lim \dfrac{x}{x} \quad 0$，则称 x 是比 x 高阶的无穷小，记为 $x \quad o \quad x$.

②若 $\lim \dfrac{x}{x}$ ，则称 x 是比 x 低阶的无穷小。

③ 若 $\lim \dfrac{x}{x} \quad C$，则称 x 与 x 是同阶无穷小。

④ 若 $\lim \dfrac{x}{x} \quad 1$，则称 x 与 x 是等价无穷小，记为 $x \sim \quad x$ 。

⑤若 $\lim \dfrac{x}{{}^{k} \ x} \quad C \ C \quad 0, k \quad 0$，则称 x 为 x 的 k 阶无穷小。

(4)等价无穷小的重要性质

① 若 $x \quad a \quad (x) \sim \quad (x), \ (x) \sim \quad (x)$ ，且 $\lim \dfrac{(x)}{(x)}$ 存在，则 $\lim \dfrac{(x)}{(x)} \quad \lim \dfrac{(x)}{(x)}$

该结论表明：在求极限过程中等价无穷小因子可以替换。

② $(x) \sim \quad (x) (x \quad a) \qquad (x) \qquad (x) \quad o(\ (x))$

(5)确定无穷小阶的方法

①利用洛必达法则 确定 $k \quad 0$ 使得 $\lim\limits_{x \quad x_0} \dfrac{f \ x}{(x \quad a)^k} \quad A \quad 0$，则 $x \quad a$ 时，$f(x)$ 是 $x \quad a$ 的 k 阶无穷小。

洛必达法则：法则Ⅰ ($\dfrac{0}{0}$ 型)设函数 $f \ x, g \ x$ 满足条件：$\lim\limits_{x \quad x_0} f \ x \quad 0, \lim\limits_{x \quad x_0} g \ x \quad 0$；$f \ x, g \ x$ 在 x_0 的领域内可导(在 x_0 处可除外)且

$g\ \ x\quad 0$；$\lim\limits_{x\quad x_0}\dfrac{f\ \ x}{g\ \ x}$存在(或)。则$\lim\limits_{x\quad x_0}\dfrac{f\ \ x}{g\ \ x}\quad\lim\limits_{x\quad x_0}\dfrac{f\ \ x}{g\ \ x}$.

法则Ⅰ ($\frac{0}{0}$型)设函数$f\ \ x\ ,g\ \ x$ 满足条件：$\lim\limits_{x} f\ \ x\quad 0,\lim\limits_{x} g\ \ x\quad 0$；一个$X\quad 0$，当$|x|\quad X$时，$f\ \ x\ ,g\ \ x$ 可导，且$g\ \ x\quad 0$；$\lim\limits_{x\quad x_0}\dfrac{f\ \ x}{g\ \ x}$存在(或)。

则$\lim\limits_{x\quad x_0}\dfrac{f\ \ x}{g\ \ x}\quad\lim\limits_{x\quad x_0}\dfrac{f\ \ x}{g\ \ x}$.

法则Ⅱ($-$型) 设函数$f\ \ x\ ,g\ \ x$ 满足条件：$\lim\limits_{x\quad x_0} f\ \ x\quad ,\lim\limits_{x\quad x_0} g\ \ x$ ；$f\ \ x\ ,g\ \ x$ 在x_0的领域内可导(在x_0处可除外)且$g\ \ x\quad 0$；$\lim\limits_{x\quad x_0}\dfrac{f\ \ x}{g\ \ x}$存在(或)。则$\lim\limits_{x\quad x_0}\dfrac{f\ \ x}{g\ \ x}\quad\lim\limits_{x\quad x_0}\dfrac{f\ \ x}{g\ \ x}$.同理法则Ⅱ ($-$型)仿法则Ⅰ 可写出。

②泰勒公式 $f(x)\quad f(a)\quad f^{'}(a)(x\quad a)\quad\cdots\quad\dfrac{f^{n}(a)}{n!}(x\quad a)^{n}\quad o((x\quad a)^{n})$ 。

若$f(a)\quad f^{'}(a)\quad\cdots\quad f^{n\ \ 1}(a)\quad 0, f^{n}(a)\quad 0$ 则$f(x)\quad\dfrac{f^{n}(a)}{n!}(x\quad a)^{n}\quad o((x\quad a)^{n})$ 。因此$f(x)$是$(x\quad a)$的n阶无穷小(后面章节还会讲到)。

③利用无穷小的运算性质 如若$x\quad a$时，$f\ \ x\ ,g\ \ x$ 分别是$x\quad a$的n阶与m阶无穷小，则$f\ \ x\ \ g\ \ x$ 是$x\quad a$的$(n\quad m)$阶无穷小，当$n\quad m$时，$f\ \ x\quad g\ \ x$ 是$x\quad a$的n阶无穷小。

★本章需要记忆知识

1 重点概念、性质

函数的定义、函数连续的定义、间断点及其类型、夹逼准则、单调有界准

则等。

2 重点公式

$\lim\limits_{x \quad 0} \dfrac{\sin x}{x} \quad 1, \qquad \lim\limits_{x \quad 0} 1 \quad x^{\frac{1}{x}} \quad e \quad$ (或$\lim\limits_{x} \ 1 \quad \dfrac{1}{x}^{\ x} \quad e$)；

常用极限：$\lim\limits_{n} \sqrt[n]{\ } \qquad 0 \quad 1 \qquad$ 特例$\lim\limits_{n} \sqrt[n]{n} \quad 1$

$\lim\limits_{x} \arctan x \quad \overline{\ 2\ } \qquad \lim\limits_{x} \arctan x \quad \overline{\ 2\ } \qquad \lim\limits_{x} \operatorname{arc}\cot x \quad 0$

$\lim\limits_{x} \operatorname{arc}\cot x \qquad \lim\limits_{x} e^{x} \quad 0 \quad \lim\limits_{x} e^{x} \qquad \lim\limits_{x \quad 0} x^{x} \quad 1$

★基本题型训练

1 求复合函数

例　设$f \ x \quad \begin{matrix} e^{x}, & x \quad 1 \\ x, & x \quad 1 \end{matrix}, \qquad x \quad \begin{matrix} x \quad 2, & x \quad 0 \\ x^{2} \quad 1, & x \quad 0 \end{matrix}$，求$f \qquad x$ 。

解：由题设$f \qquad x \qquad \begin{matrix} e^{\ x}, & x \quad 1 \\ x\ , & x \quad 1 \end{matrix},$ 分以下情况讨论。

(1)当 $\quad x \quad 1$时，

或$x \quad 0, \quad x \quad x \quad 2 \quad 1$， 即 $\begin{matrix} x \quad 0 \\ x \quad\ 1 \end{matrix} \qquad x \quad 1.$

或$x \quad 0, \quad x \quad x^{2} \quad 1 \quad 1$， 即 $\begin{matrix} x \quad 0 \\ x^{2} \quad 2 \end{matrix} \qquad 0 \quad x \quad \sqrt{2}.$

(2)当 $\quad x \quad 1$时，

或$x \quad 0, \quad x \quad x \quad 2 \quad 1$， 即 $\begin{matrix} x \quad 0 \\ x \quad\ 1 \end{matrix} \qquad 1 \quad x \quad 0.$

或$x \quad 0, \quad x \quad x^{2} \quad 1 \quad 1$， 即 $\begin{matrix} x \quad 0 \\ x^{2} \quad 2 \end{matrix} \qquad x \quad \sqrt{2}.$

综上所述，$f \quad x \quad \begin{cases} e^{x \ 2}, & x \quad 1 \\ x \quad 2, & 1 \quad x \quad 0 \\ e^{x^2 \ 1}, & 0 \quad x \quad \sqrt{2} \\ x^2 \quad 1, & x \quad \sqrt{2} \end{cases}$

2 利用函数概念求函数表达式

例 已知 $f(e^x) \quad 1 \quad x \quad \sin x$，求 $f(x)$。

解：令 $e^x \quad t$，则 $x \quad \ln t$。于是 $f(t) \quad 1 \quad \ln t \quad \sin(\ln t)$ 从而 $f(x) \quad 1 \quad \ln x \quad \sin(\ln x)$。

注：设 $f(\ (x)) \quad (x)$，其中 (x) 是已知函数，则有两类问题：一是已知 f 求 ；二是已知 求 f。

①若 f 是已知，并存在反函数，则 $(x) \quad f^{\ 1}(\ (x))$。

②若 已知，并存在反函数，令 $t \quad (x)$，则 $x \quad {}^{1}(t)$，从而 $f(t) \quad (\ {}^{1}(t))$，即 $f(x) \quad (\ {}^{1}(t))$。

因此，这两类问题都是求反函数问题。

3 求未定型函数极限

例 求下列极限

① $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$　　② $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

③ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x\sqrt{1-x^2})}{\tan x\ln(1+x)}$　　④ $\lim\limits_{n\to\infty} n[e^2-(1+\dfrac{1}{n})^{2n}]$

解：①原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

②原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos 2x}{2}-x^2}{x^4}=1+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x-4x}{8x^3}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{6x^2}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{6x}=\frac{2}{3}$$

③原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x\sqrt{1-x^2})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x\cos x\sqrt{1-x^2}}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)\sin x+x\cos x}{2x\cos x(1-x^2)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}$$

$$=-1$$

④原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[e+(1+x)^{\frac{1}{x}}]\cdot[e-(1+x)^{\frac{1}{x}}]}{x}$ $\quad\left(\dfrac{1}{n}=x\right)$

$$=2e\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=2e\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}{x}$$

$$=-2e\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\frac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=-2e^2\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=-2e^2\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}\qquad =e^2$$

4 求变限积分不等式的极限

例 求极限 $\lim\limits_{x}\dfrac{({}_{0}^{2x}e^{t^2}dt)^2}{{}_{3x}^{0}e^{2t^2}dt}$

解：原式

$$=\lim_{x}\frac{2({}_{0}^{2x}e^{t^2}dt)({}_{0}^{2x}e^{t^2}dt)'}{3e^{18x^2}}\quad \lim_{x}\frac{4e^{4x^2}\,{}_{0}^{2x}e^{t^2}dt}{3e^{18x^2}}\quad \frac{4}{3}\lim_{x}\frac{{}_{0}^{2x}e^{t^2}dt}{e^{14x^2}}\quad \frac{4}{3}\lim_{x}\frac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}}\quad 0$$

注：在验证条件 $\lim\limits_{x}\ {}_{0}^{(x)}f(t)dt$ 时，要用到以下结论:若 $f(x)$ 连续，又

$\lim\limits_{x}f(x)\quad A\quad 0$(也可为) $\lim\limits_{x}\ (x)$ ，则 $\lim\limits_{x}\ {}_{0}^{(x)}f(t)dt$ 。

5 由极限确定函数中的参数

例 确定 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0$

解：当 $x\to 0$ 时，由 $\dfrac{0}{0}$ 可得 $b=0$

原式 $=\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\dfrac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\dfrac{a-\cos x}{x^2}$ 同理可得 $a=1$

故原式 $=\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$ 故 c=$\dfrac{1}{2}$

例 试确定常数 a,b 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt)$ 存在，并求该极限值.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^3+x+b\int_0^x e^{-t^2}dt}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3ax^2+1+be^{-x^2}}{5x^4}$存在

由 $\dfrac{0}{0}$可得 $b+1=0$，即 $b=-1$

则原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3ax^2+1-e^{-x^2}}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6ax+2xe^{-x^2}}{20x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6a+2e^{-x^2}}{20x^2}$

同理由 $\dfrac{0}{0}$可得 $6a+2=0$，即 $a=-\dfrac{1}{3}$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2+2e^{-x^2}}{20x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{-x^2}\cdot(-2x)}{40x}=-\dfrac{1}{10}$

6 利用函数收敛准则求极限

例 1 (利用夹逼准则)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

解：$\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$

$>\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}$

且 $\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}<\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\dfrac{1}{2}$

由夹逼原则可得原式 $=\dfrac{1}{2}$

例 2 (利用单调有界准则)

若序列 a_n 的项满足：$a_1 \quad \sqrt{a}$ (a为正的常数)，且 $a_{n\ 1} \quad \dfrac{1}{2} \quad a_n \quad \dfrac{a}{a_n}$，(这里

$n \quad 1,2,\cdots$)。

试证 a_n 有极限，并求出它。

解：由 $a_1 \quad \sqrt{a}$，又 $a_2 \quad \frac{1}{2} \quad a_1 \quad \frac{a}{a_1} \quad \frac{a_1^{2} \quad a}{2a_1} \quad \frac{2a_1\sqrt{a}}{2a_1} \quad \sqrt{a}$，

今用数学归纳法证 $a_k \quad \sqrt{a}$。这只须注意到：

$$a_{k\ 1} \quad \frac{1}{2} \quad a_k \quad \frac{a}{a_k} \quad \frac{a_k^{2} \quad a}{2a_k} \quad \frac{2a_k\sqrt{a}}{2a_k} \quad \sqrt{a} 。$$

又 $a_n \quad a_{n\ 1} \quad \frac{1}{2} \quad a_n \quad \frac{a}{a_n} \quad \frac{a_n^{2} \quad a}{2a_n} \quad 0$，故 a_n 单调且有下界，从而其极限

(n 时)存在，令其为 A。

由 $a_{n\ 1} \quad \frac{1}{2} \quad a_n \quad \frac{a}{a_n}$ 有 $\lim_{n} a_{n\ 1} \quad \lim_{n} \frac{1}{2} \quad a_n \quad \frac{a}{a_n}$，即 $A \quad \frac{1}{2} \quad A \quad \frac{a}{A}$，

即 $A^{2} \quad a$，

所以 $A \quad \sqrt{a} \quad A \quad 0$。从而 $\lim_{n} a_n \quad \sqrt{a}.$

7 求 n 项和数列的极限

例 求 $\lim_{n}[\frac{\sin\frac{}{n}}{n \quad 1} \quad \frac{\sin\frac{2}{n}}{n \quad \frac{1}{2}} \quad \cdots \quad \frac{\sin\frac{n}{n}}{n \quad \frac{1}{n}}]$

解：$\frac{\sin\frac{}{n}}{n \quad 1} \quad \frac{\sin\frac{2}{n}}{n \quad \frac{1}{2}} \quad \cdots \quad \frac{\sin\frac{n}{n}}{n \quad \frac{1}{n}} < \frac{1}{n}(\sin\frac{}{n} \quad \sin\frac{2}{n} \quad \cdots \quad \sin\frac{n}{n}) = \frac{1}{n} {}_{i\ 1}^{n} \sin\frac{i}{n}$

而 $\lim_{n} \frac{1}{n} {}_{i\ 1}^{n} \sin\frac{i}{n} \quad {}_{0}^{1}\sin \quad xdx \quad \frac{2}{}$，另一方面，

$$\frac{\sin\frac{\ }{n}}{n\ \ 1}\ \ \frac{\sin\frac{2}{n}}{n\ \ \frac{1}{2}}\ \ \cdots\ \ \frac{\sin\frac{n}{n}}{n\ \ \frac{1}{n}}>\frac{1}{n\ \ 1}(\sin\frac{\ }{n}\ \ \sin\frac{2}{n}\ \ \cdots\ \ \sin\frac{n}{n})=\frac{n}{n\ \ 1}\ \frac{1}{n}\sum_{i\ 1}^{n}\sin\frac{i}{n}$$

且 $\lim\limits_{n}\frac{n}{n\ \ 1}\ \frac{1}{n}\sum_{i\ 1}^{n}\sin\frac{i}{n}\ \ \frac{2}{\ }$，故由夹逼定理原式$=\frac{2}{\ }$

8 求 n 项积数列极限

例　当 $x\ \ 0$ 时，$\lim\limits_{n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

原极限 $\lim\limits_{n}\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$\lim_{n}\frac{2^{n\ 1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots(\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n})}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$\lim_{n}\frac{2^{n\ 2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ \ (2\cos\frac{x}{2^{n\ 1}}\sin\frac{x}{2^{n\ 1}})}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\quad\cdots\cdots$$

$$\lim_{n}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\ \underline{\underline{\sin\frac{x}{2^n}\ \ \frac{x}{2^n}}}\ \lim_{n}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\ \ \frac{\sin x}{x}$$

9 利用函数极限求数列极限

例　求 $\lim\limits_{n}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$

解：因为 $\lim\limits_{n}n\tan\frac{1}{n}\ \ \lim\limits_{n}\dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\ \ 1$, 可化为求 $\lim\limits_{n}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}$

又因为 $\lim\limits_{n}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}\ \underline{\underline{t\ \ \frac{1}{x}}}\ \lim\limits_{t\ \ 0}(1\ \ \frac{\tan t\ \ t}{t})^{\frac{t}{\tan t\ \ t}\cdot\frac{\tan t\ \ t}{t^3}}$，其中 $\lim\limits_{t\ \ 0}\frac{t}{\tan t\ \ t}\ \ 0$ 而

$$\lim_{t\quad 0}\frac{\tan t\quad t}{t^3}\quad \lim_{t\quad 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 t}\quad 1}{3t^2}\quad \frac{1}{3}\lim_{t\quad 0}\frac{(1\quad \cos t)(1\quad \cos t)}{t^2\cos^2 t}\quad \frac{1}{3}$$，故原式$=e^{\frac{1}{3}}$

10 无穷小的比较与无穷小的阶的确定

例 设函数 $f(x)\quad \lim_{n}\sqrt[n]{1\quad |x|^{3n}}$，则 f(x)在(　，　)内

(A) 处处可导　　　　(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点　　　　(D) 至少有三个不可导点　　　　[C]

解：先求出 f(x) 的表达式，再讨论其可导情形当 $|x|\quad 1$ 时，

$$f(x)\quad \lim_{n}\sqrt[n]{1\quad |x|^{3n}}\quad 1;$$

当 $|x|\quad 1$ 时，$f(x)\quad \lim_{n}\sqrt[n]{1\quad 1}\quad 1$；

当 $|x|\quad 1$ 时，$f(x)\quad \lim_{n}|x|^3(\frac{1}{|x|^{3n}}\quad 1)^{\frac{1}{n}}\quad |x|^3$.

即 $f(x)\quad \begin{cases} x^3, & x\quad 1, \\ 1, & 1\quad x\quad 1, \\ x^3, & x\quad 1. \end{cases}$ 可见 f(x)仅在 x=　1时不可导，故应选(C)

11 函数连续性与间断点类型的讨论

例 判断 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$ 间断点并判别类型

解：当 $x=\pm 1$ 时，$f(x)=0$ 当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=-x \\ \lim_{n\to-\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=x\end{cases}$

当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=x \\ \lim_{n\to-\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=-x\end{cases}$ 即 $\lim_{x\to\pm 1}f(x)\neq f(\pm 1)$，

所以 $x=\pm 1$ 为函数 $f(x)$ 第一类间断点

12 有关极限的证明

例 设 $f(x)$ 在 $[0, \quad)$ 连续, $\lim\limits_{x} f(x) \quad A \quad 0$,求证 $\lim\limits_{x} {}_0^x f(t)dt$

证明因 $\lim\limits_{x} f(x) \quad A \quad \dfrac{A}{2}$，由极限的不等式性质可知，

X,当$x \quad X$时, $f(x) \quad \dfrac{A}{2}$,则$x \quad X$时, 有

$${}_0^x f(t)dt \quad {}_0^X f(t)dt \quad {}_X^x f(t)dt \quad {}_0^X f(t)dt \quad \frac{A}{2}(x \quad X)$$ ，因此

$\lim\limits_{x} {}_0^x f(t)dt$

注： 若 $A \quad 0$,则 $\lim\limits_{x} {}_0^x f(t)dt$ ，

类似可知，若 $A \quad 0$,则 $\lim\limits_{x} {}_0^x f(t)dt$ 。

13 利用泰勒公式求极限

例 求下列极限(关于泰勒展式有关内容可参见第三章)

(1) $\lim\limits_{x \quad 0}\dfrac{\cos x \quad e^{\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}$； (2) $\lim\limits_{x}[x \quad x^2\ln(1 \quad \dfrac{1}{x})]$；

(3) $\lim\limits_{x \quad 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1 \quad 5x} \quad (1 \quad x)}$； (4) $\lim\limits_{x \quad 0}(1 \quad \dfrac{1}{x^2} \quad \dfrac{1}{x^3}\ln\dfrac{2 \quad x}{2 \quad x})$；

解 (1) $\lim\limits_{x \quad 0}\dfrac{\cos x \quad e^{\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x} \quad \lim\limits_{x \quad 0}\dfrac{\cos x \quad e^{\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

∵分母的次数为 4，∴ 只要把 $\cos x$ ， $e^{\frac{x^2}{2}}$ 展开到出现 x 的四次幂即可。

$$\cos x \quad 1 \quad \frac{1}{2!}x^2 \quad \frac{1}{4!}x^4 \quad o(x^4)$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \quad 1 \quad \frac{1}{2}x^2 \quad \frac{1}{2!}(\quad \frac{1}{2}x^2)^2 \quad o(x^4)$$

故 原极限 $\lim\limits_{x \quad 0}\dfrac{(\frac{1}{4!} \quad \frac{1}{8})x^4 \quad o \quad x^4}{x^4} \quad \dfrac{1}{12}$

(2) $\ln(1 \quad \frac{1}{x})$ 的展开式只要取到 2 项即可

$$\ln(1 \quad \frac{1}{x}) \quad \frac{1}{x} \quad \frac{1}{2}(\frac{1}{x})^2 \quad o((\frac{1}{x})^2)$$

原极限 $\lim_{x}[x \quad x^2(\frac{1}{x} \quad \frac{1}{2}(\frac{1}{x})^2 \quad o((\frac{1}{x})^2))] \quad \lim_{x}[\frac{1}{2} \quad o(1)] \quad \frac{1}{2}$

(3) ∵分子关于 x 的次数为 2。

∴ $\sqrt[5]{1 \quad 5x} \quad (1 \quad 5x)^{\frac{1}{5}} \quad 1 \quad \frac{1}{5}(5x) \quad \frac{1}{2!}\frac{1}{5}(\frac{1}{5} \quad 1)\ (5x)^2 \quad o(x^2)$

$$1 \quad x \quad 2x^2 \quad o(x^2)$$

原极限 $\lim_{x \quad 0}\frac{x^2}{[1 \quad x \quad 2x^2 \quad o(x^2)] \quad (1 \quad x)} \quad \frac{1}{2}$

(4) ∵ $\ln\frac{2 \quad x}{2 \quad x} \quad \ln\frac{1 \quad \frac{x}{2}}{1 \quad \frac{x}{2}} \quad \ln(1 \quad \frac{x}{2}) \quad \ln(1 \quad \frac{x}{2})$

$$[\frac{x}{2} \quad \frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2 \quad \frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3 \quad o(x^3)] \quad [\quad \frac{x}{2} \quad \frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2 \quad \frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3 \quad o(x^3)]$$

$$x \quad \frac{1}{12}x^3 \quad o(x^3)$$

∴ $1 \quad \frac{1}{x^2} \quad \frac{1}{x^3}[x \quad \frac{1}{12}x^3 \quad o(x^3)] \quad 1 \quad \frac{1}{12} \quad \frac{o(x^3)}{x^3}$

故 $\lim_{x \quad 0}(1 \quad \frac{1}{x^2} \quad \frac{1}{x^3}\ln\frac{2 \quad x}{2 \quad x}) \quad \frac{11}{12}$

★练习题一

1 填空题

(1) 已知 $f'(3)=2$,则 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=\underline{\quad}$

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数, $f(0)=0$, $f'(0)=b$,若

$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$________

(3) 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3 阶无穷小，则 $a=$__, $b=$__

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$________

(5) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=A(\neq 0,\neq\infty)$，则 $A=$_____，$k=$______

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$______

(7) $\lim\limits_{n}\left(\dfrac{1^2}{n^3\quad 1}\quad\dfrac{2^2}{n^3\quad 2}\quad\cdots\quad\dfrac{n^2}{n^3\quad n}\right)$ ________

(8) $\lim\limits_{n}\dfrac{x^m\quad 1}{x^n\quad 1}=$________ ($m$ 和 n 为正整数且 $m\quad n$)

(9)设 $f(x)\quad\begin{cases}a\quad bx^2, & x\quad 0\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x\quad 0\end{cases}$ 在 $x\quad 0$ 处间断，则 a 与 b 应满足的关系是_____

2 选择题

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x(e^{x^2}-1)dx}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a 的值是

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) $\dfrac{1}{2}$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$, 其中 $a^2+c^2\neq 0$, 则必有

(A) $b=4d$　　(B) $b=-4d$　　(C) $a=4c$　　(D) $a=-4c$

(3) 函数 $f\quad x\qquad \frac{x}{1\quad x^2}$ 在定义域内为

(A)有上界无下界. (B)有下界无上界.

(C)有界,且 $\frac{1}{2}\quad f\quad x\quad \frac{1}{2}$. (D)有界且 $2\quad \frac{x}{1\quad x^2}\quad 2$

(4) $\lim\limits_{x} x^3(\sqrt{x^2\quad 2}\quad 2\sqrt{x^2\quad 1}\quad x)$ __

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D)4

(5) $f(x)\quad \begin{matrix} x\quad 1, & x\quad 1 \\ 2, & x\quad 1 \\ \frac{1}{x}, & x\quad 1 \end{matrix}$ 则 $\lim\limits_{x\quad 1} f(x)$ __

(A)1 (B)0 (C) 2 (D)不存在

(6) 设 $f(x)\quad \frac{x^3\quad x}{\sin\quad x}$,则__

(A) 有无穷多个第一类间断点, (B) 自由一个可去间断点

(C) 有两个跳跃间断点 (D) 有 3 个可去间断点

3 计算与证明

(1) 求极限① $\lim\limits_{x\quad 0}\frac{\sqrt[m]{(1\quad x)^n}\quad 1}{x}$ ② $\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}]$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^2}(1-\cos x) & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt & x>0 \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

(3) 试确定常数 a,b 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt)$ 存在，并求该极限值.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)]$，且 $x=0$是 $f(x)$的可去间断点，求 α,β的值。

(5) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=b, b\neq 0,$ 求 a,b 的值。

(6) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}]=0,$ 求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$.

(7) 设 $f(x)$ 是三次多项式，且有 $\lim\limits_{x \quad 2a}\dfrac{f(x)}{x \quad 2a}$ $\lim\limits_{x \quad 4a}\dfrac{f(x)}{x \quad 4a}$ 1 $(a \quad 0)$，求 $\lim\limits_{x \quad 3a}\dfrac{f(x)}{x \quad 3a}$。

(8) 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ (a,b)，试证：

(a,b)，使

$$f(\ )\quad \frac{1}{n}[f(x_1)\quad f(x_2)\quad \cdots \quad f(x_n)]。$$

(9) 设 $f(x)$ 在 $(\quad,\quad)$ 上连续，且 $f[f(x)]$ x，证明： 一个 ，使得 $f(\ )$

(10) 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ $g(a), f(b)$ $g(b)$，则在 (a,b) 内至少 一个 ，使：$f(\ )$ $g(\ )$

(11)证明方程 x^3 $9x$ 1 0 恰有 3 个实根.

(12) 求复合函数设 f x $\dfrac{1}{2}$ x $|x|$， x $\begin{matrix} x, & x & 0 \\ x^2, & x & 0 \end{matrix}$，求

f x ， f x

★参考答案

1 (1)-1　　(2)a+b　　(3) $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{6}$ (5) $A=\frac{1}{1991}$, $k=1991$

(6) 2 (7) $\frac{1}{3}$

(8) $\frac{m}{n}$ (9) a b

2 (1) (A) (2) (D) (3) (C) (4) (A) (5) (D) (6) (D)

3 (1) $\frac{n}{m}$ (2) 1 (3) $a=-\frac{1}{3}$, $b=-1$ (4) $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{2}$

(5) $1-5\alpha=0, \alpha=\frac{1}{5}$ ，$b=\frac{7}{5}$ (6) $\frac{9}{2}$ (7) $\frac{1}{2}$

(8) 提示：用介值定理

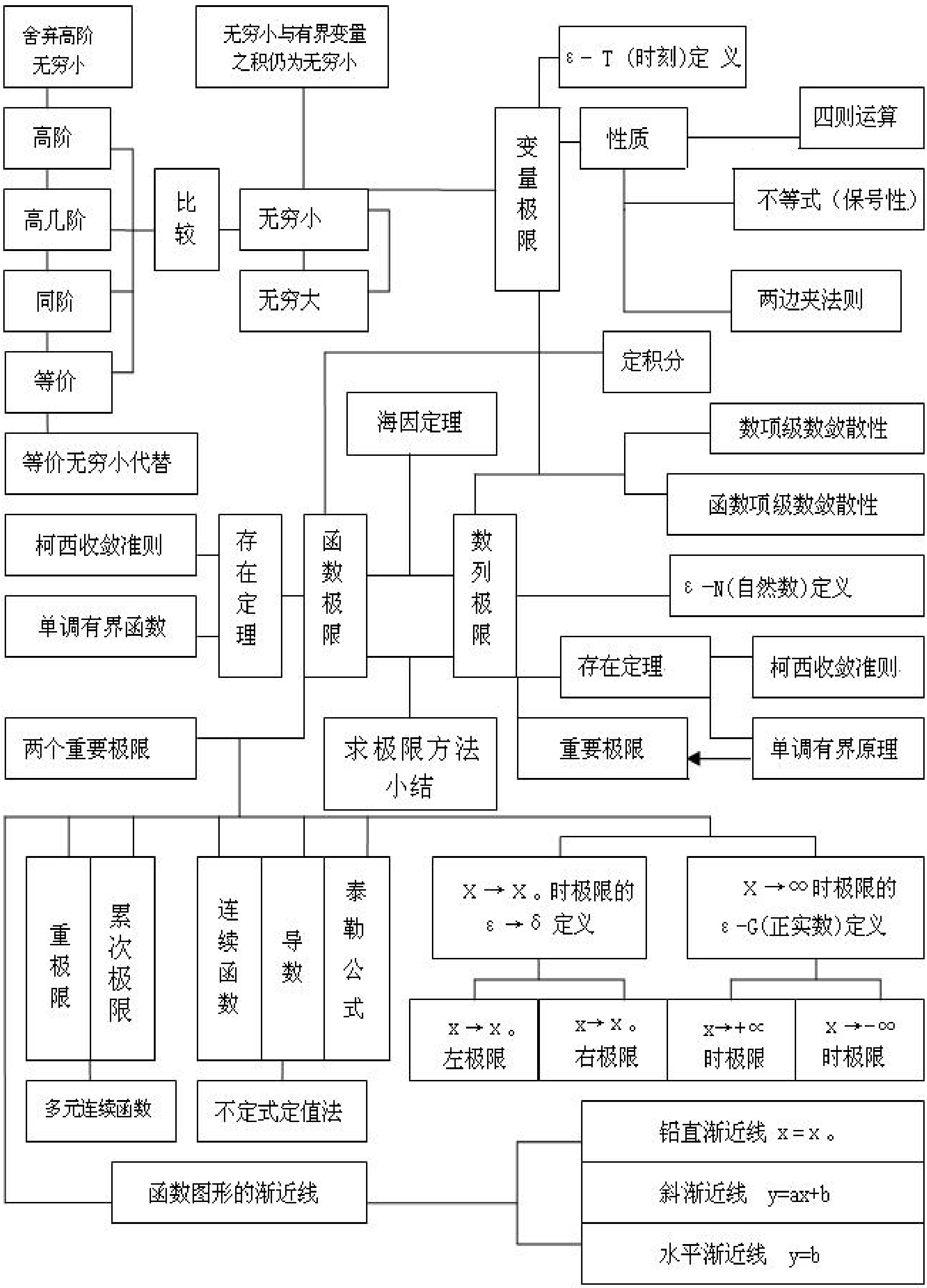
(9) 提示：辅助函数$F(x)$ $f(x)$ x，用零点定理

(10) 辅助函数$F(x)$ $f(x)$ $g(x)$，利用介值定理

(11) 可利用零点定理

(12) 可利用前面讲到的求复合函数当中的图示法

★极限理论框架图


舍弃高阶无穷小
无穷小与有界变量之积仍为无穷小
ε－T（时刻)定 义
四则运算
高阶
变量极限
性质
比较
不等式（保号性)
高几阶
无穷小
同阶
无穷大
两边夹法则
等价
定积分
海因定理
数项级数敛散性
等价无穷小代替
函数项级数敛散性
柯西收敛准则
存在定理
函数极限
数列极限
ε－N(自然数)定义
单调有界函数
存在定理
柯西收敛准则
两个重要极限
求极限方法小结
重要极限
单调有界原理
重极限
累次极限
连续函数
导数
泰勒公式
X→X。时极限的 ε→δ 定义
X→∞时极限的 ε－G(正实数)定义
X→X。左极限
X→X。右极限
X→+∞时极限
X→－∞时极限
多元连续函数
不定式定值法
铅直渐近线 x＝x。
函数图形的渐近线
斜渐近线 y=ax+b
水平渐近线 y=b

第二章 一元函数微分学

※本章要求

1 理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量(▲数三、数四不要求)，理解函数的可导性与连续性之间的关系。(▲数三、数四增加要求了解经济意义（含边际与弹性的概念）。

2 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式。了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。

3 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数。

4 会求分段函数的导数，会求隐函数和参数方程所确定的函数以及反函数的导数。(▲数三、数四参数方程求导不要求)

5 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理泰勒定理，了解并会用(▲数三、数四不要求)柯西中值定理。

6 掌握用洛必达法则求未定型极限的方法(▲数三、数四会用洛必达法则求极限)。

7 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其应用。

8 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形。

9 了解曲率和曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径(▲数三、数四不要求)。

第 1 节 导数与微分

★基本内容学习

一 基本概念与定理

1 导数的概念

定义 1(函数在某点的导数)：设函数 $y \quad f(x)$ 在 x_0 的领域内有定义，给 x 在

x_0处以增量$\Delta x(\Delta x \neq 0)$，函数$y$和相应地得到增量$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$，如果极限$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$……(1) 存在，则函数在点处可导，该函数值称为函数在x_0处的导数，记为$f'(x_0)$，$y'(x_0)$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$即$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 令$x_0+\Delta x = x$，则 (1)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

定义 2(左右导数)：函数$f(x)$在x_0处的左、右导数分别定义为

$$左导数\ f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},(x = x_0+\Delta x)$$

$$右导数\ f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

定义 3(函数在区间上可导)：如果$y = f(x)$在(a,b)内每一点均可导；则称该函数在(a,b)内可导；若$y = f(x)$在(a,b)内可导，且在$x = a$和$x = b$处分别具有右导数$f'_+(a)$和左导数$f'_-(b)$，则$y = f(x)$在$[a,b]$上可导。

2 导数的几何意义与物理意义

导数的几何意义：导数$f'(x_0)$在几何上可表示曲线$y = f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线斜率，曲线$y = f(x)$在点M的切线方程及法线方程分别是

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ 及 } y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \quad (\text{当} f'(x_0) \neq 0 \text{时})$$

导数的物理意义： 设$s = f(t)$表示直线运动，其中s表示位移，t 表示时刻，则$v = \dfrac{ds}{dt} = f'(t)$表示在时刻 t 的瞬时速度，$a = \dfrac{dv}{dt}$表示在时刻 t 的加速度。如果$y = f(x)$表示物理上的其他量，即导数$\dfrac{dy}{dx} = f'(x_0)$表示该量的变化量。

3 微分的概念

定义 4：如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的某邻域内有定义，当自变量在点 x 取得增量 Δx 时，函数的增量 Δy 可表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$ 其中 A 是与 Δx 无关的量，$o(\Delta x)$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小，则称 $y=f(x)$ 在 x 处可微，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x 处的微分，记为 dy 或 $df(x)$，即 $dy=df(x)=A\Delta x$ (1)由于当 x 为自变量时，$dx=\Delta x$，同时可证 $f'(x)=A$，所以(1)又可写成 $dy=f'(x)dx$ (函数的一阶微分与其导数的关系)。

二 基本定理

1 与导数有关的几个基本定理

(1)可微与可导之间的关系: 函数 $f(x)$ 在 x 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x 处可导

(2)可导与连续的关系：若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x 处连续，但函数连续不一定可导。

(3)导数与左右导数的关系：$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$。

★基本知识记忆

1 导数的运算法则

四则运算法则：设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在点 x 可导则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ $\quad d(u\pm v)=du\pm dv$

(2) $(uv)'=u'v+v'u$ $\quad d(uv)=udv+vdu$

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}(v\neq 0)$ $\quad d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$

2 反函数的运算法则

设 $y \quad f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续，在点 x 处可导且 $f\ (x) \quad 0$，则其反数在点 x 所对应的 y 处可导，并且有 $\dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$。

3 复合函数的运算法则

若 $\quad (x)$ 在点 x 可导，而 $y \quad f(\ )$ 在对应点 $\quad (\quad (x))$ 可导，则复合函数 $y \quad f(\ (x))$ 在点 x 可导，且 $y' \quad f'(\ ) \quad '(x)$。

4 基本导数与微分表

(1) $y \quad c$（常数）	$y \quad 0$	$dy \quad 0$
(2) $y \quad x^a$ (为实数)	$y \quad x \quad ^1$	$dy \quad x \quad ^1 dx$
(3) $y \quad a^x$	$y \quad a^x \ln a$	$dy \quad a^x \ln a dx$
特例	$(e^x) \quad e^x$	$d(e^x) \quad e^x dx$
(4) $y \quad \log_a x, a \quad 0, a \quad 1$	$y \quad \dfrac{1}{x\ln a}$	$dy \quad \dfrac{1}{x\ln a}dx$
特例 $y \quad \ln x$	$(\ln x) \quad \dfrac{1}{x}$	$d(\ln x) \quad \dfrac{1}{x}dx$
(5) $y \quad \sin x$	$y \quad \cos x$	$d(\sin x) \quad \cos x dx$
(6) $y \quad \cos x$	$y \quad \sin x$	$d(\cos x) \quad \sin x dx$
(7) $y \quad \tan x$	$y \quad \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \sec^2 x$	$d(\tan x) \quad \sec^2 x dx$
(8) $y \quad \cot x$	$y \quad \dfrac{1}{\sin^2 x} \quad \csc^2 x$	$d(\cot x) \quad \csc^2 x dx$
(9) $y \quad \sec x$	$y \quad \sec x \tan x$	$d(\sec x) \quad \sec x \tan x dx$
(10) $y \quad \csc x$	$y \quad \csc x \cot x$	$d(\csc x) \quad \csc x \cot x dx$

(11) $y=\arcsin x \qquad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(12) $y=\arccos x \qquad y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(13) $y=\arctan x \qquad y'=\dfrac{1}{1+x^2} \qquad d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$

(14) $y=\mathrm{arc}\cot x \qquad y'=-\dfrac{1}{1+x^2} \qquad d(\mathrm{arc}\cot x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$

(15) $y=shx \qquad y'=chx \qquad d(shx)=chxdx$

(16) $y=chx \qquad y'=shx \qquad d(chx)=shxdx$

★基本题型训练

1 一元函数导数与微分概念的命题

例　设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，求 $f'(1)$。

解：由导数定义 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$，而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

$$\therefore\quad f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$$

$$\therefore\quad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

2 几类一元函数的导数与微分

例　求下列函数的导数或微分

(1) $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$　　(2) 设 $y=\ln(1+3^{-x})$　求 dy

解：(1) $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}(e^{-\sqrt{x}})'=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}e^{-\sqrt{x}}(-\sqrt{x})'=-\frac{1}{2e^{\sqrt{x}}\sqrt{(1-e^{-2\sqrt{x}})x}}$$

(2) $$dy=\frac{1}{1+3^{-x}}d(1+3^{-x})=-\frac{3^{-x}\ln 3}{1+3^{-x}}dx=-\frac{1}{3^x+1}dx$$

例　求由参数式确定的函数的导数

设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx} \xlongequal{\text{参数式求导公式}} \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \dfrac{1}{2t}$，

将该式对 x 求导，右端先对 t 求导再乘上 $\dfrac{dt}{dx}$ 得

$$\frac{d^2y}{dx^2} \xlongequal{\text{复合函数求导法}} \left(\frac{1}{2t}\right)' \frac{dt}{dx} \xlongequal{\text{反函数求导法}} -\frac{1}{2t^2}\cdot\frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2t^2\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3}$$

例　求隐函数的导数或微分

隐函数求导：由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$，称为 y 是变量 x 的隐函数。

隐函数导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 的求法一般有三种方法：

(1)方程两边对 x 求导，要记住 y 是 x 的函数，则 y 的函数是 x 的复合函数。例如 $\dfrac{1}{y}$，y^2，$\ln y$，e^y 等均是 x 的复合函数。对 x 求导应按复合函数连锁法则做。

(2)公式法。由 $F(x,y)=0$ 知 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ 其中，$F_x(x,y)$，$F_y(x,y)$ 分别表示 $F(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导数。

(3)利用微分形式不变性。在方程两边求微分，然后解出 $\dfrac{dy}{dx}$。举例说明如下：

例　设方程 $xy^2+e^y=\cos(x+y^2)$，求 y'。

方法一：

$$y^2+2xyy'+e^y y' = -\sin(x+y^2)\cdot(1+2yy')，\quad y' = -\frac{y^2+\sin(x+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)}$$

方法二：

令 $F(x,y)=xy^2+e^y-\cos(x+y^2)$

因为 $F_x \quad y^2 \quad \sin(x \quad y^2)$， $F_y \quad 2xy \quad e^y \quad 2y\sin(x \quad y^2)$

所以 $\dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \quad \dfrac{y^2 \quad \sin(x \quad y^2)}{2xy \quad e^y \quad 2y\sin(x \quad y^2)}$

方法三：

$d(xy^2 \quad e^y) \quad d(\cos(x \quad y^2))$， $y^2dx \quad 2xydy \quad e^ydy \quad \sin(x \quad y^2)(dx \quad 2ydy)$

$$[2xy \quad e^y \quad 2y\sin(x \quad y^2)]dy \quad [y^2 \quad \sin(x \quad y^2)]dx$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{y^2 \quad \sin(x \quad y^2)}{2xy \quad e^y \quad 2y\sin(x \quad y^2)}$$

注：关于隐函数的三种方法，大家可以根据具体题目具体分析，采用适合题目的最好方法。

分段函数的求导

例 确定常数 a 和 b，使得函数 $f(x) \quad \begin{matrix} ax \quad b, & x \quad 1 \\ x^2, & x \quad 1 \end{matrix}$ 处处可导。

解：由 $f(x)$ 在 $x \quad 1$ 处可导，得 $f(x)$ 在 $x \quad 1$ 处连续，由表达式知， $f(x)$ 在 $x \quad 1$ 是左连续的，于是， $f(x)$ 在 $x \quad 1$ 连续 $\lim\limits_{x \quad 1} f(x) \quad \lim\limits_{x \quad 1}(ax \quad b) \quad f(1) \quad a \quad b \quad 1$。又 $f(x)$ 在 $x \quad 1$ 可导 $f'(1) \quad f'(1)$，在 $a \quad b \quad 1$ 条件下， $f(x)$ 可改写成 $f(x) \quad \begin{matrix} ax \quad b, & x \quad 1 \\ x^2, & x \quad 1 \end{matrix}$。于是， $f'(1) \quad (ax \quad b)'\big|_{x \quad 1} = a$， $f'(1) \quad (x^2)\big|_{x \quad 1} \quad 2$，因此 $f(x)$ 在 $x \quad 1$ 可导 $\begin{matrix} a \quad b \quad 1, \\ a \quad 2. \end{matrix} \quad \begin{matrix} a \quad 2. \\ b \quad 1 \end{matrix}$ 故仅当 $a \quad 2, b \quad 1$ 时， $f(x)$ 处处可导。

注：对这类问题的依据是①函数在某点可导则在该点处连续；②函数在某点处可导，则在该点处左右导数相等这两个性质，建立两个特定常数之间的两个关系式，然后再解出来。

3 变限积分的求导

例 设 $f(x)$ 连续且 $\int_0^{x^3 \quad 1} f(t)dt \quad x$，则 $f(7)$ ____________

解：这是含变限积分的恒等式，两边对 x 求导得 $f(x^3-1)\cdot 3x^2=1$，令 $x=2$，即得 $f(7)=\frac{1}{12}$

4 可导与连续命题的讨论

例　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0\\ 1, & x=0\\ \frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt, & x>0\end{cases}$，在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解：由于函数具有分段形式，我们可分别按定义求出 $f'_-(0), f'_+(0)$ 来讨论 $f'(0)$ 是否存在。

按定义

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2-1}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x\sin x^2}{2}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(\sin x-x)}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-1}{2x}=0$$

因此，$f'_+(0)=f'_-(0)=0$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导,因而也必连续。

5 导数概念的应用问题

例　求平面曲线的切线方程或法线方程

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式

$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 的高阶无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程。

解： 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程 $y-f(6)=f'(6)(x-6)$，由周期性，

$f(6)=f(1)$，

$f\,(6)\quad f\,(1)$，故只需求 $f(1)$ 与 $f\,(1)$。又已知只给出 $f(x)$ 在 $x\quad 1$ 处可导，所以利用导数定义求 $f\,(1)$ 由连续性，有 $\lim\limits_{x\quad 0}[f(1\quad \sin x)\quad 3f(1\quad \sin x)]\quad \lim\limits_{x\quad 0}[8x\qquad (x)]$ 即 $f(1)\quad 3f(1)\quad 0$ 故 $f(1)\quad 0$ 因此，$f\,(1)\quad \lim\limits_{u\quad 0}\dfrac{f(1\quad u)\quad f(1)}{u}\quad \lim\limits_{u\quad 0}\dfrac{f(1\quad u)}{u}$ 又

$$\lim_{x\quad 0}\frac{f(1\quad \sin x)\quad 3f(1\quad \sin x)}{\sin x}\quad \lim_{x\quad 0}\frac{8x\qquad (x)}{\sin x}$$

即 $\lim\limits_{x\quad 0}[\dfrac{f(1\quad \sin x)}{\sin x}\quad \dfrac{3f(1\quad \sin x)}{\sin x}]\quad \lim\limits_{x\quad 0}\dfrac{8x\qquad (x)}{\sin x}$，（$\sin x \sim x$）

也即 $f\,(1)\quad 3f\,(1)\quad 8$，故 $f\,(1)\quad 2$，所以要求的切线方程为 $y\quad 2(x\quad 6)$。

第 2 节 高阶导数

★基本内容学习

一 基本概念

定义 1 若 $y = f(x)$ 导函数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，则称 $f'(x)$ 在点 x 处的导数为 $y = f(x)$ 在点 x 处的**二阶导数**，记为 $\dfrac{d^2y}{dx^2}, f''(x)$，即 $f''(x)\quad \lim\limits_{x}\dfrac{f'(x+Dx)-f'(x)}{Dx}$，同样可定义函数的 n 阶导数为 $f^{(n)}(x)\quad \lim\limits_{x\quad 0}\dfrac{f^{(n\quad 1)}(x\qquad x)\quad f^{(n\quad 1)}(x)}{x}$。

二 高阶导数的求法

直接法：所谓直接法是指求出所给函数的 1~3 阶或 4 阶导数后，分析所得结果的规律性，从而写出 n 阶导数的方法。

间接法：利用已知的高阶导数公式，通过四则运算、变量代换、泰勒级数的方法求 n 阶导数。

★基本知识记忆

常用高阶导数公式

（1）$(a^x)^{(n)}\quad a^x\ln^n a\quad (a\quad 0)\qquad (\mathrm{e}^x)^{(n)}\quad \mathrm{e}^x$

（2）$(\sin kx)^{(n)} \quad k^n \sin(kx \quad n \ \frac{}{2})$

（3）$(\cos kx)^{(n)} \quad k^n \cos(kx \quad n \ \frac{}{2})$

（4）$(x^m)^{(n)} \quad m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$

（5）$(\ln x)^{(n)} \quad (\quad 1)^{(n \quad 1)} \frac{(n \quad 1)!}{x^n}$

（6）莱布尼兹公式：若$u(x), v(x)$均n阶可导，则 $(uv)^{(n)} \quad \sum_{i=0}^{n} c_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$，

其中$u^{(0)} = u$， $v^{(0)} = v$

★基本题型训练

6 求一元函数的n阶导数

例 1 设$y \quad e^x \cos x$，求$y^{(n)}$。

解：$y' \quad e^x \cos x \quad e^x \sin x \quad e^x(\cos x \quad \sin x) \quad \sqrt{2} e^x \cos(x \quad \frac{}{4})$，

$y'' \quad \sqrt{2} \ \ e^x \cos(x \quad \frac{}{4}) \quad e^x \sin(x \quad \frac{}{4}) \quad (\sqrt{2})^2 e^x \cos(x \quad 2 \ \frac{}{4})$，

$y''' = (\sqrt{2})^2 \ \ e^x \cos(x \quad 2 \ \frac{}{4}) \quad e^x \sin(x \quad 2 \ \frac{}{4}) \quad (\sqrt{2})^3 e^x \cos(x \quad 3 \ \frac{}{4})$，

……

$y^{(n)} \quad (\sqrt{2})^n e^x \cos(x \quad n \ \frac{}{4})$

例 2 $f(x)$任意可导，且$f'(x) \quad e^{f(x)}, f(0) \quad 1$，求$f^{(n)}(0)$。

解：对$f'(x) \quad e^{f(x)}$两边求导得：

$f''(x) \quad e^{f(x)} f'(x) \quad e^{2f(x)}$，

$f'''(x) \quad 2e^{2f(x)} f'(x) \quad 2e^{3f(x)}$，

$f^{(4)}(x) \quad 3 \ \ 2e^{3f(x)} \ \ f'(x) \quad 3 \ \ 2e^{4f(x)}$，

……

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\mathrm{e}^{-nf(x)},$$

所以，$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!\mathrm{e}^{-nf(0)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\mathrm{e}^{-n}$

例 3　设 $y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$，求 $y^{(n)}$.

解：$y=(x+3)+\dfrac{7x-6}{(x-2)(x-1)}=x+3+\dfrac{8}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$,

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=(x+3)^{(n)}+8\left[(x-2)^{-1}\right]^{(n)}-\left[(x-1)^{-1}\right]^{(n)}\\&=0+(-1)^n\cdot 8\cdot n!(x-2)^{-1-n}-(-1)^n n!(x-1)^{-1-n}\\&=(-1)^n n!\left[\frac{8}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].(n\geq 2)\end{aligned}$$

例 4 设 $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$, 求 $y^{(n)}$.

解：$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\sin 2x=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}(\sin 6x-\sin 2x)\\&=\frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x),\end{aligned}$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\left[2^n\sin(2x+\frac{n\pi}{2})+4^n\sin(4x+\frac{n\pi}{2})-6^n\sin(6x+\frac{n\pi}{2})\right].$$

★练习题二

1 填空题

(1)曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在点(0,1)处的法线方程为________。

(2)设函数 $f(x) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{1 \quad e^{\frac{1}{x}}}, & x \quad 0 \\ 0, & x \quad 0 \\ \dfrac{2x}{1 \quad e^{x}}, & x \quad 0 \end{cases}$，则函数在点 $x \quad 0$ 处的导数为________。

(3)设方程 $x \quad y^{y}$ 确定 y 是 x 的函数，则 $dy \quad$ ________。

(4)设函数 $y \quad y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x \quad t \quad \ln(1 \quad t) \\ y \quad t^{3} \quad t^{2} \end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}=$________。

(5)已知 $f'(x_0) \quad 1$，则 $\lim\limits_{x \quad 0}\dfrac{x}{f(x_0 \quad 2x) \quad f(x_0 \quad x)}=$________。

(6)设 $f(t) \quad \lim\limits_{x \quad 0} t(\dfrac{x \quad t}{x \quad t})^{x}$，则 $f'(t)=$________。

(7) 设函数 $y \quad y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y} \quad \cos(xy) \quad 0$ 确定，则________。

(8) $f(x) \quad \dfrac{1 \quad x}{1 \quad x}$，则 $f^{(n)} \quad$ ____.

(9) 设 f 为可导函数，$y \quad \sin\{f[\sin f(x)]\}$，则 $\dfrac{dy}{dx} \quad$ ____.

(10) 已知 $\dfrac{d}{dx} \quad f \quad \dfrac{1}{x^{2}} \quad \dfrac{1}{x}$，则 $f'(\dfrac{1}{2}) \quad$ ____.

2 选择题

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_{x}^{e^{-x}} f(t)dt$，则 $F'(x)=$________

$(A)\ -e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ $\qquad$ $(B)\ -e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

$(C)\ e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ $\qquad$ $(D)\ e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(2) 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为

$(A)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在　　　　$(B)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

$(C)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\sinh)$ 存在　　　　$(D)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

(3) 设 $f(x)\quad 3x^3\quad x^2|x|$，则使 $f^n(0)$ 存在的最高阶数 n 为

(A) 0　　　(B) 1　　　(C) 2　　　(D)4

(4) 设 $f(x)\quad \begin{matrix}\dfrac{2}{3}x^3, & x\quad 1\\ x^2, & x\quad 1\end{matrix}$，则 $f(x)$ 在 $x\quad 1$ 处的__。

(A) 左、右导数都存在　　　(B) 左导数存在，但右导数不存在
(C) 左导数不存在，但右导数存在　(D) 左、右导数都不存在

(5) 设 $f(x)$ 是可导函数，且 $\lim\limits_{x\quad 0}\dfrac{f(1)\quad f(1\quad x)}{2x}\quad 1$，则曲线 $y\quad f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为_______。

(A) －1　　　(B) －2　　　(C) 0　　　(D)1

(6) 设函数对任意 x 均满足 $f(1\quad x)\quad af(x)$，且 $f'(0)\quad b$，其中 a,b 为非零常数，则

(A) $f(x)$ 在 $x\quad 1$ 处不可导。

(B) $f(x)$ 在 $x\quad 1$ 处可导，且 $f'(1)\quad a.$

(C) $f(x)$ 在 $x\quad 1$ 处可导，且 $f'(1)\quad b.$

(D) $f(x)$ 在 $x\quad 1$ 处可导，且 $f'(1)\quad ab.$

(7) 设 $f(x)\quad \begin{matrix}\sqrt{x}, & x\quad 0\\ \sqrt{\quad x}, & x\quad 0\end{matrix}$ 则

(A) $f(x)$ 在 $x\quad 0$ 处不连续

(B) $f'(0)$ 存在

(C) $f'(0)$ 不存在，曲线 $y\quad f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处不存在切线

(D) $f'(0)$不存在，曲线$y \quad f(x)$在点$(0,0)$处有切线

(8) 设$y \quad f(x)$在点x_0处可导，当自变量x由x_0增加到$x_0 \quad x$时，记 y为$f(x)$的增量，dy为$f(x)$的微分，$\lim\limits_{x \quad 0}\dfrac{y \quad dy}{x}$等于

(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(9) 设函数$f(x)$在$(\quad , \quad)$上可导，则

(A) 当$\lim\limits_{x} f(x)$ 时，必有$\lim\limits_{x} f'(x)$.

(B) 当$\lim\limits_{x} f'(x)$ 时，必有$\lim\limits_{x} f(x)$.

(C) 当$\lim\limits_{x} f(x)$ 时，必有$\lim\limits_{x} f'(x)$.

(D) 当$\lim\limits_{x} f'(x)$ 时，必有$\lim\limits_{x} f(x)$

(10) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ ax+b & x\le 0 \end{cases}$在 $x=0$处可导，则

(A) $a=1,b=0$ (B) $a=0,b$为任意常数

(C) $a=0,b=0$ (D) $a=1,b$为任意常数

3 计算与证明

(1) 已知 $\int_0^y e^{t^2}dt=\int_0^{x^2}\cos t dt+\sin y^2$，求 y'。

(2) 已知 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$，其中 $g(x)$有二阶连续的导数，且 $g(0)=1$

1. 确定 a的值，使 $f(x)$在 $x=0$点连续；2.求 $f'(x)$。

(3) 证明 $y=(\arcsin x)^2$ 满足方程：

$$(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n-1)xy^{(n)}-(n-1)^2y^{(n-1)}=0$$

(4) 已知当 $x\le 0$ 时， $f(x)$ 有定义且二阶可导，问 a,b,c 为何值时

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\le 0 \\ ax^2+bx+c & x>0 \end{cases}$$ 是二阶可导

(5) 已知 $f'(x)\quad \frac{1}{x}$， $y\quad f(\frac{x\quad 1}{x\quad 1})$，求 $\frac{dy}{dx}$

(6) 设可导函数 $f(x)$ 满足 $af(x)\quad bf(\frac{1}{x})\quad \frac{c}{x}$ 式中 a,b,c 为常数，且 $|a|\quad |b|$，求 $f'(x)$

(7) 设 $f(x)$ 是 $(\quad,\quad)$ 上的非零函数，对任意 $x,y\quad(\quad,\quad)$ 有 $f(x\quad y)\quad f(x)f(y)$ 且 $f'(0)\quad 1$ 证明 $f'(x)\quad f(x)$

★参考答案

1 (1) $2x\quad y\quad 1\quad 0$ (2) 1 (3) $\frac{1}{x(1\quad \ln y)}dx$

(4) $\frac{(6t\quad 5)(t\quad 1)}{t}$ (5) 1 (6) $f'(t)\quad (2t\quad 1)e^{2t}$

(7) $\frac{y\sin(xy)\quad e^{x\quad y}}{e^{x\quad y}\quad x\sin(xy)}$ (8) $\frac{(\quad 1)^n 2\quad n!}{(1\quad x)^{n\quad 1}}$

(9) $f'(x)\cos f(x) f'[\sin f(x)]\ \cos\{f[\sin f(x)]\}$ (10) $f'(\frac{1}{2})\quad 1$

2 (1) A (2) B (3) C (4) B (5) A (6) D (7) (8) B (9) D (10) C

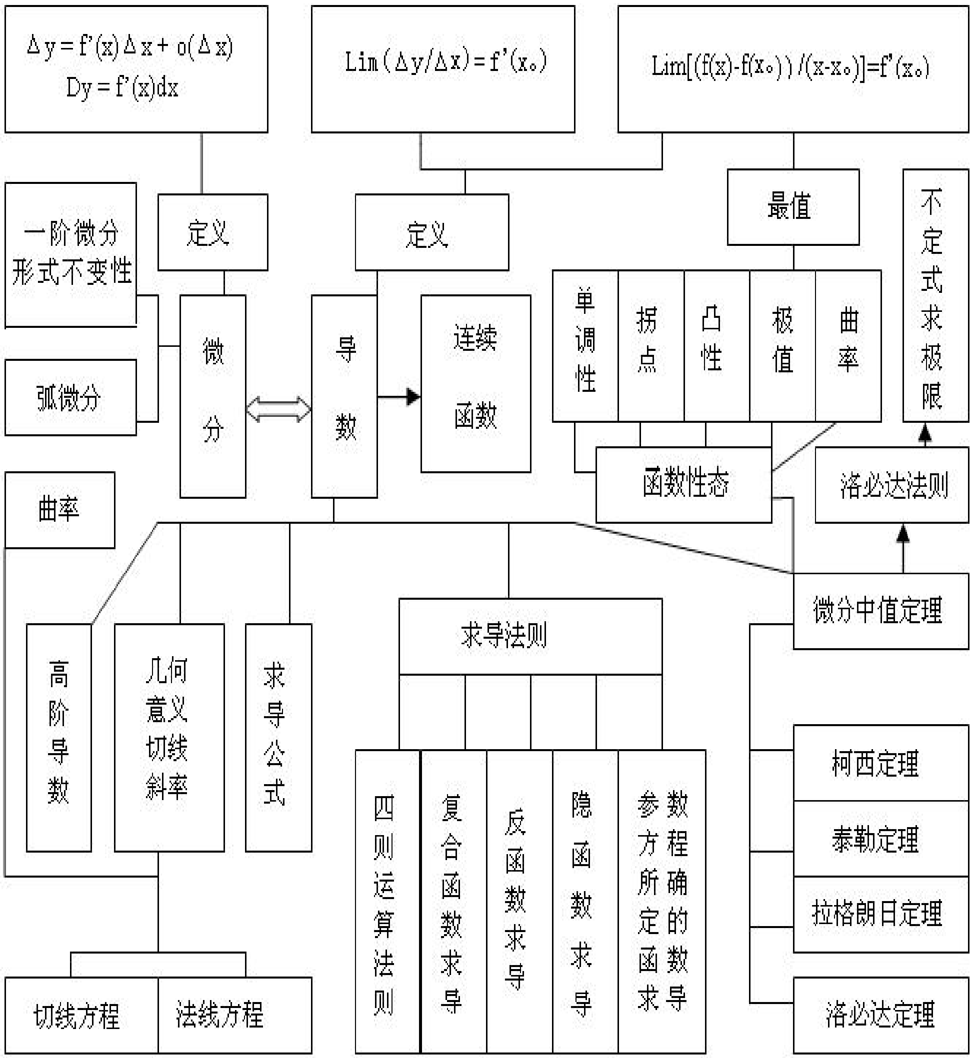
3 (1) $y'=\frac{2x\cos x^2}{e^{y^2}-2y\cos y^2}$ (2) $\frac{1}{2}[g''(0)\quad 1]$

(4) $a=\frac{1}{2}f''_-(0)\ b=f'_-(0)\ c=f_-(0)$

(5) $\frac{dy}{dx}\quad\frac{2}{1\quad x^2}$　　　(6) $\frac{bcx^2\quad ac}{x^2(a^2\quad b^2)}$

(7)已知条件，及导数定义

★本章知识网络



★本章总结

1 本章难、重点内容

(1)导数的极限定义、左、右导数的定义。

(2)导数的几何意义和物理意义

(3)求复合函数和隐函数的导数

(4)函数在一点可导的判定，特别是分段函数在分段点可导的判定

2 本章容易出错的地方

(1)连续函数未必是可导函数

(2)可导的前提是导数存在

(3) 复合函数求导时，在自变量的某点处是否可导取决于复合以后的形态，而与要作复合的两个函数在相应点是否可导无关

第三章一元函数积分学

※本章要求

1 理解原函数的概念，理解不定积分和定积分的概念。

2 掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理(▲数三、数四要求了解)，掌握换元积分法与分部积分法。

3 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分(▲数三、数四不要求)。

4 理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿－莱布尼茨公式。

5 了解反常积分的概念，会计算反常积分。

6 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心等)及函数的平均值。(▲数三、数四要求会利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值，会利用定积分求解简单的经济应用问题)。

第 1 节 不定积分

★基本内容学习

原函数与不定积分的概念与基本性质

1 原函数与不定积分的定义

原函数：设函数 $f(x)$ 在区间 I 中有定义，如果存在函数 $F(x)$，使得对于区间 I 中任一个 x，均有 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 中的一个原函数.

注：如果函数 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则有无穷多个原函数，且其全部原函数可表示为 $F(x)+C$（其中 C 为任意常数）

不定积分：函数 $f(x)$ 在区间 I 中的原函数的全体，称为 $f(x)$ 在区间 I 中的不定积分，记为 $\int f(x)dx.$

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 中的一个原函数，则 $\int f(x)dx=F(x)+C.$

$f(x)$——被积函数，$f(x)dx$——被积式，x——积分变量，C——积分常数.

2 原函数与不定积分的关系

①不定积分和原函数是两个不同概念，前者是个集合，后者是该集合中的一个元素，因此 $\int f(x)dx\neq F(x)$.

②设 $F(x)$， $G(x)$ 均是 $f(x)$ 在区间 I 中的原函数，显然有 $\int f(x)dx=F(x)+C,$ $\int f(x)dx=G(x)+C,$ 即有 $F(x)+C=G(x)+C$（*）但 $F(x)=G(x)$ 不一定成立（因为 C 是任意取值，（*）式两边的 C 不一定相等，所以不能随意取掉）

3 求不定积分与求微分（导数）的关系——互为逆运算

(1)已知与未知相反 $dF(x) \quad f(x)dx$，已知 $F(x)$ 求 $dF(x) \quad f(x)dx$ 是微分运算；已知 $f(x)dx$ 求 $F(x)$ 使得 $dF(x) \quad f(x)dx$ 是积分运算。

(2) $(\quad f(x)dx)' \quad f(x)$ 　　或 $d \quad f(x)dx \quad f(x)$；

$$F'(x) \quad F(x) \quad C \quad \text{或} \quad dF(x) \quad F(x) \quad C$$

正因为原函数与导函数有互逆关系，而且不定积分就是全体原函数，所以对应于基本初等函数的导数公式，就有相应的基本积分公式：

① $x^k dx \quad \frac{1}{k \quad 1} x^{k \quad 1} \quad C$ （$k \quad 1$）

$\frac{1}{x^2} dx \quad \frac{1}{x} \quad C$ 　　$\frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad 2\sqrt{x} \quad C$

② $\frac{1}{x} dx \quad \ln|x| \quad C$

③ $a^x dx \quad \frac{a^x}{\ln a} \quad C \quad (a \quad 0, a \quad 1)$ 　　$\mathrm{e}^x dx \quad \mathrm{e}^x \quad C$

④ $\cos x dx \quad \sin x \quad C$ 　　$\sin x dx \quad \cos x \quad C$

⑤ $\frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \sec^2 x dx \quad \tan x \quad C$ 　　$\frac{1}{\sin^2 x} dx \quad \csc^2 x dx \quad \cot x \quad C$

⑥ $\frac{1}{\sin x} dx \quad \csc x dx \quad \ln|\csc x \quad \cot x| \quad C$

$\frac{1}{\cos x} dx \quad \sec x dx \quad \ln|\sec x \quad \tan x| \quad C$

⑦ $\sec x \tan x dx \quad \sec x \quad C$ 　　$\csc x \cot x dx \quad \csc x \quad C$

⑧ $\tan x dx \quad \ln|\cos x| \quad C$ 　　$\cot x dx \quad \ln|\sin x| \quad C$

⑨ $\frac{dx}{a^2 \quad x^2} \quad \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad C$ 　　$\frac{dx}{1 \quad x^2} \quad \arctan x \quad C$

⑩ $\frac{dx}{\sqrt{a^2 \quad x^2}} \quad \arcsin \frac{x}{a} \quad C$ 　　$\frac{dx}{\sqrt{1 \quad x^2}} \quad \arcsin x \quad C$

$$\frac{dx}{a^2 \quad x^2} \quad \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a \quad x}{a \quad x}\right| \quad C \qquad \frac{dx}{1 \quad x^2} \quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 \quad x}{1 \quad x}\right| \quad C$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 \quad a^2}} \quad \ln\left|x \quad \sqrt{x^2 \quad a^2}\right| \quad C$$

4 原函数的存在性

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数($_{x_0}^{x} f(t)dt$ 就是原函数，其中 $x_0 \quad I$ 为某一定点)

若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点，则 $f(x)$ 在区间 I 上不存在原函数。

5 原函数的几何意义与力学意义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则由曲线 $y \quad f(x)$， x 轴及直线 $x \quad a, x \quad x$ 围成的曲边梯形的面积函数(指代数和——x 轴上方取正号，下方取负号)是 $f(x)$ 的一个原函数，若 x 为时间变量， $f(x)$ 为直线运动的物体的速度函数，则 $f(x)$ 的原函数就是路程函数。

6 初等函数的原函数

初等函数在定义域区间上连续，因而一定存在原函数，但它的原函数不一定是初等函数，如 $e^{\;x^2}dx$， $\frac{\sin x}{x}dx$， $\frac{\cos x}{x}dx$， $\frac{1}{\ln x}dx$， $\sin(x^2)dx$， $\cos(x^2)dx$ 等均积分不出来，即被积函数存在原函数，但原函数不是初等函数。

★基本题型训练

1 关于不定积分的计算

积分法则

最基本的积分方法是分项积分法，分段积分法，换元积分法和分部积分法。而换元积分法对不定积分又分第一换元积分法(凑微分法)与第二换元积分法，当被积函数或原函数分段表示时要用分段积分法。

(1)分项积分法

我们常把一个复杂的函数分解成几个简单的函数之和：

$f(x)=k_1g_1(x)+k_2g_2(x)$，若右端的积分会求，则应用法则

$\int f(x)dx=k_1\int g_1(x)dx+k_2\int g_2(x)dx$ 就可以积出 $\int f(x)dx$，这就是分项积分法。

例 1 求下列函数的不定积分

① $\int \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$ ② $\int \tan^2 xdx$

解：① $\int \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

$$=\tan x-\cot x+C$$

② $\int \tan^2 xdx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=\tan x-x+C$

(2)分段积分法

分段函数的定积分要分段进行计算，这里重要的是搞清积分限与分段函数的分界点之间的位置关系，以便对定积分进行正确的分段。

被积函数中含有绝对值时，也可以看成分段函数，这是因为正数与负数的绝对值是以不同的方式定义的，0 就是其分界点。

例 2 计算下列定积分

① $\int_{-2}^{3}\min\{1,x^2\}dx$ ② $\int_0^2 f(x-1)dx$,其中$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x\ge 0\\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$

解：①由于函数$\min\{1,x^2\}$的分界点为－1 和 1，所以

$$\int_{-2}^{3}\min\{1,x^2\}dx=\int_{-2}^{-1}dx+\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{1}^{3}dx=1+\frac{2}{3}+2=\frac{11}{3}$$

②由于函数$f(x)$的分界点为 0，所以，令$t=x-1$后，有

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+e^x}+\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\int_{-1}^{0}\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}+\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=-\ln(1+e^{-x})\Big|_{-1}^{0}+\ln 2=\ln(1+e)$$

(3)换元积分法

①第一换元积分法(凑微分法)

设 $f(u)du \quad F(u) \quad C$, 则

$$f[\quad(x)]\quad'(x)dx \qquad f[\quad(x)]d\quad(x) \underline{\underline{\text{令}u \qquad (x)}} \; f(u)du$$

$$F(u) \quad \underline{\underline{Cu \qquad (x)}} F[\quad(x)] \quad C.$$

常见的凑微分形式有以下若干种：

$$f(ax \quad b)dx \quad \frac{1}{a} \; f(ax \quad b)d(ax \quad b)$$

$$f(ax^n \quad b)x^{n \quad 1}dx \quad \frac{1}{na} \; f(ax^n \quad b)d(ax^n \quad b)$$

$$f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^x\,dx \qquad f(\mathrm{e}^x)d(\mathrm{e}^x)$$

$$f(\frac{1}{x})\frac{dx}{x^2} \qquad f(\frac{1}{x})d(\frac{1}{x})$$

$$f(\ln x)\frac{dx}{x} \qquad f(\ln x)d(\ln x)$$

$$f(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}} \quad 2 \;\; f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$$

$$f(\sin x)\cos xdx \qquad f(\sin x)d(\sin x)$$

$$f(\cos x)\sin xdx \qquad f(\cos x)d(\cos x)$$

$$f(\tan x)\sec^2 xdx \qquad f(\tan x)d(\tan x)$$

$$f(\cot x)\csc^2 dx \qquad f(\cot x)d(\cot x)$$

$$\frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1 \quad x^2}}dx \qquad f(\arcsin x)d(\arcsin x)$$

$$\frac{f(\arctan x)}{1 \quad x^2}dx \qquad f(\arctan x)d(\arctan x)$$

例 3 求下列不定积分

① $\sec xdx$； ② $\dfrac{dx}{\sin 2x \quad 2\sin x}$； ③ $\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{(1 \quad x)\sqrt{x}}dx$；

④ $\frac{\sqrt{1 \quad 2\arctan x}}{1 \quad x^2}dx$;　　　　⑤ $\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1 \quad x^2}}$.

解：① $\sec x dx = \frac{1}{\cos x}dx = \frac{\cos x}{1 \quad \sin^2 x}dx = \frac{d\sin x}{1 \quad \sin^2 x}$

$$= \frac{1}{2} \quad (\frac{1}{1 \quad \sin x} \quad \frac{1}{1 \quad \sin x})d\sin x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 \quad \sin x}{1 \quad \sin x} \quad C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(1 \quad \sin x)^2}{1 \quad \sin^2 x} \quad C = \frac{1}{2}\ln\left|\sec x \quad \tan x\right| \quad C$$

② $\frac{dx}{\sin 2x \quad 2\sin x} = \frac{dx}{2\sin x(1 \quad \cos x)}$

$$= \frac{dx}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} \quad \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{4\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \quad (\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} \quad \tan\frac{x}{2})d\tan\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{4}[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \quad \frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}] \quad C$$

③ $\frac{\arctan\sqrt{x}}{(1 \quad x)\sqrt{x}}dx = \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1 \quad x)}d\sqrt{x}$

$$= 2 \quad \arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x} \quad \arctan^2\sqrt{x} \quad C$$

④ $\frac{\sqrt{1 \quad 2\arctan x}}{1 \quad x^2}dx \quad \frac{1}{2} \quad (1 \quad 2\arctan x)^{\frac{1}{2}}d(1 \quad 2\arctan x)$

$$\frac{1}{3}(1 \quad 2\arctan x)^{\frac{3}{2}} \quad C$$

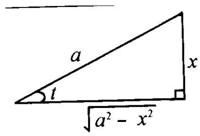
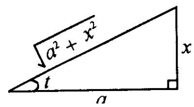
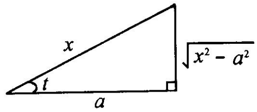
⑤ $\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1 \quad x^2}} \quad \frac{1}{(\arcsin x)^2}d(\arcsin x) \quad \frac{1}{\arcsin x} \quad C.$

②第二换元积分法

事实上，倒转第一换元积分法的公式就是第二换元积分法的公式。常用的变量替换：三角替换、幂函数替换、指数函数替换、倒替换下面具

体介绍这些方法。

1.三角函数代换

被积函数 $f(x)$ 含根式	所作代换	三角形示意图
$\sqrt{a^2\quad x^2}$	$x\quad a\sin t$	
$\sqrt{a^2\quad x^2}$	$x\quad a\tan t$	
$\sqrt{x^2\quad a^2}$	$x\quad a\sec t$	

例 4 求下列不定积分

① $\dfrac{x^3dx}{(1\quad x^2)^{\frac{3}{2}}}$;　　② $\dfrac{dx}{1\quad\sqrt{1\quad x^2}}$.

解：①被积函数 $f(x)$ 中含有 $\sqrt{1\quad x^2}$，所以应作变换 $x\quad \tan t$,

$$\text{原式}\quad \frac{\tan^3 t}{\sec^3 t}\sec^2 tdt\quad \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt\quad \frac{1\quad \cos^2 t}{\cos^2 t}d(\cos t)$$

$$(1\quad \frac{1}{\cos^2 t})d(\cos t)\quad \cos t\quad \frac{1}{\cos t}\quad C\quad \frac{1}{\sqrt{1\quad x^2}}\quad \sqrt{1\quad x^2}\quad C.$$

② $\dfrac{dx}{1\quad\sqrt{1\quad x^2}}$. 令 $x\quad \sin t$, 则 $dx\quad \cos tdt$

$$\text{原式}\quad \frac{\cos t}{1\quad \cos t}dt\quad \frac{\cos t\quad \cos^2 t}{1\quad \cos^2 t}dt\quad \frac{1}{\sin^2 t}d(\sin t)\quad \frac{1\quad \sin^2 t}{\sin^2 t}dt$$

$$\frac{1}{\sin t}\quad \cot t\quad C\quad \frac{1}{x}\quad \frac{\sqrt{1\quad x^2}}{x}\quad \arcsin x\quad C.$$

幂函数替换：被积函数是 x 与 $\sqrt[n]{ax\quad b}$ 或 x 与 $\sqrt[n]{\dfrac{ax\quad b}{cx\quad d}}$ 的有理式时，常用幂

函数替换 $t=\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 去掉根号。

指数函数替换：被积函数由 e^x 构成的代数式时，可考虑选用指数函数替换。

例 5 求① $\int\frac{2^x dx}{1+2^x+4^x}$;　　② $\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$;

解：①令 $2^x=t,dx=\frac{1}{\ln 2}\frac{dt}{t}$.

原式 $=\int\frac{t}{1+t+t^2}\frac{1}{\ln 2}\frac{dt}{t}=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$=\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\arctan\frac{2^{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C.$

②令 $e^{\frac{x}{6}}=t,x=6\ln t,dx=\frac{6}{t}dt,$

原式 $=\int\frac{1}{1+t^3+t^2+t}\frac{6}{t}dt=\int(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2})dt$

$=6\ln t-3\ln(1+t)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\arctan t+C$

$=x-3\ln(1+e^{\frac{x}{6}})-\frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}})-3\arctan(e^{\frac{x}{6}})+C.$

倒替换：令 $x=1/t$

例 6　求下列积分

①　$\int_0^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx\ (a>0)$　　②　$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

解：①　$\int_0^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\int_0^{2a}\frac{\sqrt{1-(\frac{a}{x})^2}}{x^3}dx=-\frac{1}{2a^2}\int_0^{2a}\sqrt{1-(\frac{a}{x})^2}\,d\frac{a^2}{x^2}$

$=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{2}{3}[1-(\frac{a}{x})^2]^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{2a}=\frac{\sqrt{3}}{8a^2}$

②记 $\operatorname{sgn} x \quad \begin{matrix} 1, & x \quad 0 \\ 1, & x \quad 0 \end{matrix}$ 则

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{1 \quad x^2}} \qquad \frac{dx}{x^3\sqrt{1 \quad \dfrac{1}{x^2}}}\operatorname{sgn} x \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{d\,\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1 \quad \dfrac{1}{x^2}}}\operatorname{sgn} x$$

$$= \quad (1 \quad \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn} x \quad C \qquad \frac{\sqrt{1 \quad x^2}}{x} \quad C$$

(4) 分部积分法

设 $u \quad u(x)$,$v \quad v(x)$ 具有连续的导数，则公式 $udv \quad uv \quad vdu$ 称为分部积分公式.

注：如何把被积函数分成两部分，如何选取 u 和 dv 。

选取的原则：①积分容易者选为 dv ；②求导简单者选为 u ；在二者不可兼得的情况下，首先要保证的是前者。

例 7 求下列函数的不定积分

① $(x^3 \quad 2x \quad 5)\cos 2xdx.$ ② $\sin \ \ln x \ dx$ ③ $\dfrac{x \quad 1 \ e^x}{x \quad 2^{\ 2}}dx$

解：①原式

$$\frac{1}{2} \quad (x^3 \quad 2x \quad 5)d\sin 2x \quad \frac{1}{2}(x^3 \quad 2x \quad 5)\sin 2x \quad \frac{1}{2} \quad (3x^2 \quad 2)\sin 2xdx$$

$$\frac{1}{2}(x^3 \quad 2x \quad 5)\sin 2x \quad \frac{1}{4}(3x^2 \quad 2)\cos 2x \quad \frac{3}{2} \quad x\cos 2xdx$$

$$\frac{1}{2}(x^3 \quad 2x \quad 5)\sin 2x \quad \frac{1}{4}(3x^2 \quad 2)\cos 2x \quad \frac{3}{4}x\sin 2x \quad \frac{3}{8}\cos 2x \quad C.$$

②原式＝ $\sin \ \ln x \ dx = x\sin \ \ln x \quad x\cos \ \ln x \ \dfrac{1}{x}dx$

$$= x\sin \ \ln x \quad \cos \ \ln x \ dx$$

$$= x\sin \ \ln x \quad \{x\cos \ \ln x \quad x[\ \sin \ \ln x \ \frac{1}{x}]dx\}$$

$$= x\sin \ \ln x \quad x\cos \ \ln x \quad \sin \ \ln x \ dx$$

故 $\sin \ \ln x \ dx \ = x\sin \ \ln x \quad x\cos \ \ln x \quad \sin \ \ln x \ dx$

③原式＝ $\dfrac{x \quad 1\ e^{x}}{x \quad 2^{\ 2}}dx = \dfrac{1}{x \quad 2}\ x \quad 1\ e^{x} \qquad \dfrac{1}{x \quad 2} \quad x \quad 1\ e^{x} \quad dx$

$$= \frac{1}{x \quad 2}\ x \quad 1\ e^{x} \qquad e^{x}dx = \frac{e^{x}}{x \quad 2} \quad C$$

★练习题三(1)

1 求下列不定积分

(1) $\int \frac{1}{1+x^{2}} \arctan \frac{1+x}{1-x} dx$ (2) $\int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx$

(3) $\int \frac{x+1}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}} dx$ (4) $\dfrac{2x^{3} \quad 1}{(x \quad 1)^{100}}dx$;

2 求下列不定积分

(1) $\dfrac{dx}{\sqrt{x} \quad \sqrt[3]{x}}$; （2） $\dfrac{1}{1 \quad \sqrt{x} \quad \sqrt{x \quad 1}}dx$; （3） $\dfrac{\sqrt{x(x \quad 1)}}{\sqrt{x} \quad \sqrt{x \quad 1}}dx$.

3 求下列函数不定积分

(1) $\dfrac{dx}{\sin^{3} x\cos^{5} x}$; (2) $\sqrt{1 \quad \sin x}dx$; (3) $\int \dfrac{x\cos^{4} \frac{x}{2}}{\sin^{3} x} dx$

(4) $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$ (5) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$ (6) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x} dx$

4 求下列不定积分

(1) $\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x} dx$ (2) $\int \sqrt{\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}} dx$ (3) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx$

5 设 $f'(\cos x+2)=\sin^2 x+\tan^2 x$，求 $f(x)$.

6 设当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)$ 连续，求 $\int \frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx$.

★参考答案

1(1) $=\frac{1}{2}(\arctan\frac{1+x}{1-x})^2+c$　　(2) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x|+\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+c$

(3) $\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

(4) $\frac{1}{33}\frac{1}{(x\quad 1)^{99}}\quad\frac{3}{49}\frac{1}{(x\quad 1)^{98}}\quad\frac{6}{97}\frac{1}{(x\quad 1)^{97}}\quad\frac{1}{48}\frac{1}{(x\quad 1)^{96}}\quad C.$

2(1) $2\sqrt{x}\quad 3\sqrt[3]{x}\quad \sqrt[6]{x}\quad 6\ln(1\quad \sqrt[6]{x})\quad C.$

(2) $\sqrt{x}\quad \frac{1}{2}x\quad \frac{1}{2}\sqrt{x^2\quad x}\quad \frac{1}{4}\ln\left|2x\quad 1\quad 2\sqrt{x^2\quad x}\right|)\quad C.$

(3) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\quad \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\quad \frac{2}{5}(x\quad 1)^{\frac{5}{2}}\quad \frac{2}{3}(x\quad 1)^{\frac{3}{2}}\quad C.$

3 (1) $\frac{\sin x}{\cos^5 x}\quad \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\quad \frac{\cos x}{\sin^3 x}\quad \frac{3}{\sin x\cos x}$,

(2) $\frac{dx}{\sin^3 x}\quad \frac{1}{2}\ln|\csc x\quad \cot x|\quad \frac{1}{2}\cot x\csc x\quad C.$

(3) $-\frac{x}{8}\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+c$

(4) $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+c$

(5) $\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})+\ln(2+\cos x)+c$

(6) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})\right|+c \quad \int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

4 (1) $2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln|x|-(\arctan\sqrt{x-1})^2+c$

(2) $\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right|-\arccos(e^{-x})+c$

(3) $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+c$

5 $f(x)=-\frac{1}{x-2}-\frac{(x-2)^3}{3}+c$ 6 $\frac{f(x)}{xe^x}+c$

第 2 节 定积分

★基本内容学习

一 基本概念

1 定积分

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，在 $[a,b]$ 内任意插入 $n\quad 1$ 个分点

$a\quad x_0\quad x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_{i\ 1}\quad x_i\quad\cdots\quad x_n\quad b$ 把 $[a,b]$ 分为 n 个子区间 $[x_{i\ 1},x_i]$ $(i\quad 1,2,\cdots,n)$, 用

$x_i\quad x_i\quad x_{i\ 1}\quad(i\quad 1,2,\cdots,n)$ 表示各子区间的长度，在每个子区间上任取一点 $_i,x_{i\ 1}\quad _i\quad x_i$，作如下和式 $\overset{n}{\underset{i\ 1}{}}f(\ _i)\ x_i\quad f(\ _1)\ x_1\quad f(\ _2)\ x_2\quad\cdots\quad f(\ _n)\ x_n$. 令

$\underset{1\ i\ n}{\max}\{\ x_i\}$, 如果极限 $\lim\limits_{0}\overset{n}{\underset{i\ 1}{}}f(\ _i)\ x_i$ 存在，且 $[a,b]$ 的划分和 $_i$ 的取法无关，则

该极限值就称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，其中，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积式，x 称为积分变量，$[a,b]$ 称为积分区间，a,b 分别称为积分的上下限。

2 定积分的几何意义与力学意义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示界于 x 轴，曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a,x=b$ 之间各部分面积的代数和，在 x 轴上方取正号，在 x 轴下方取负号，若 x 为时间变量，$f(x)$ 为作直线运动的物体的速度函数，则 $\int_a^b f(x)dx$ 就是物体从时刻 a 到 b 所走过的路程。

3 函数的可积性

可积的必要条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

可积的充分条件：(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点；(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，以上函数类在 $[a,b]$ 上可积。

4 不定积分与变限定积分的关系

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $\int f(x)dx=\int_{x_0}^{x} f(t)dt+C$，其中 $x_0\in I$ 为某定值。

5 定积分的基本性质

（1）定积分只与被积函数和积分限有关，而与积分变量无关，即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(t)dt=\cdots$$

（2）$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$　特例：$\int_a^a f(x)dx=\int_b^b f(x)dx=0$

（3）$\int_a^b dx=b-a$

（4）$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

（5）$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　（k 为常数）

（6）$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

6 定积分的基本定理

定理 1 （定积分比较定理）设 $f(x) \le g(x)$， $x \in [a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

推论：（1）当 $f(x) \ge 0$， $x \in [a,b]$时 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

定理 2 （估值定理）设 $m \le f(x) \le M$, $x \in [a,b]$，其中 m,M 为常数，则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ 。

定理 3 （积分中值定理）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少 $\exists$ 一个点 ξ ，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. 也可写成 $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ，所以积分中值定理也称之为平均值公式。

定理 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $x \in [a,b]$，则变上限积分 $\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。

定理 5 （牛顿—莱布尼兹公式）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

定理 6 （变上限积分求导）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $x \in [a,b]$，则变上限积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 对 x 可导，并且有 $\Phi'(x) = \dfrac{d}{dx}(\Phi(x)) = \dfrac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt) = f(x).$

推论 1 设 $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt,$ 则 $F'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x).$

推论 2 设 $F(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt,$ 则 $F'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$

推论 3 设 $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)g(x)dt,$ 则 $F'(x) = [g(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt]'_x$

$$= g'(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt + g(x)f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

★基本题型训练

二 关于定积分的计算

(1) 利用牛顿—莱布尼兹公式

例 1 $\quad {}_{1}^{4}\frac{dx}{x(1 \quad \sqrt{x})}$;

解：原式＝ ${}_{1}^{4}\frac{dx}{x(1 \quad \sqrt{x})} \quad {}_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x} \quad \sqrt{x}(1 \quad \sqrt{x})} \quad 2\,{}_{1}^{4}\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1 \quad \sqrt{x})}$

$$2\,{}_{1}^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{1}{1 \quad \sqrt{x}}\right)d(\sqrt{x}) \quad 2[\ln\sqrt{x} \quad \ln(1 \quad \sqrt{x})]\Big|_{1}^{4} \quad 2\ln\frac{4}{3}.$$

(2) 定积分的换元积分法

定理 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若变换 $x \quad (t)$ 满足以下条件：

（1） (t) 在 $[\ ,\ ]$ 上连续，且 $'(t) \quad 0$;

（2） $(\ ) \quad a,\ (\ ) \quad b$, 并且当 t 在 $[\ ,\ ]$ 上变化时， (t) 的值在 $[a,b]$ 上变化，则 ${}_{a}^{b}f(x)dx \qquad f[\ (t)]\ '(t)dt.$

注：①在定理的叙述中要注意： $(\ ) \quad a,\ (\ ) \quad b,\ (t)$ 定义与区间 $[\ ,\ ]$，说明 (t) 呈上升趋势，实际上， (t) 呈下降趋势也是允许的，即将定理中区间 $[\ ,\ ]$ 改为 $[\ ,\ ]$ 也是可以的；

②在定积分作变量替换时，一定要同时更换积分的上下限；

③我们知道不定积分的换元法有两个，相应于第二换元积分法，在定积分换元法中就相当于把定积分变量左端的 x 换成右端的 t；相应于第一换元积分法(凑微分法)，则是把右端的 t 换成左端的 x。定积分的换元法统一在一个公式中，由于换元也相应的换积分限，就不必变量还原。

例 2 求下列定积分

(1) ${}_{0}^{\overline{2}}\frac{\sin^{10}x \quad \cos^{10}x}{4 \quad \sin x \quad \cos x}dx$; $\qquad$ (2) ${}_{0}^{a}\frac{dx}{x \quad \sqrt{a^2 \quad x^2}}$; $\qquad$ (3) ${}_{0}^{1}\frac{\ln(1 \quad x)}{1 \quad x^2}dx.$

解：（1）令 $x \quad \frac{}{2} \quad u, dx \quad du.$

原积分

$$ {}_{\overline{2}}^{0}\frac{\cos^{10}u \quad \sin^{10}u}{4 \quad \cos u \quad \sin u}(\ du) \quad {}_{\overline{2}}^{0}\frac{\cos^{10}x \quad \sin^{10}x}{4 \quad \sin x \quad \cos x}dx,$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}+\frac{\cos^{10}x-\sin^{10}x}{4-\sin x-\cos x}\right)dx=0,$$

故 原积分=0。

（2）令 $x=a\sin t, dx=a\cos t dt.$

原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos t}{a\sin t+a\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt.$

又因为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-u} \int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin u}{\cos u+\sin u}(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt,$

所以2 原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t+\sin t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{\pi}{2}$. 故 原积分 $=\frac{\pi}{4}$.

常见错误：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t(\cos t-\sin t)}{(\cos t+\sin t)(\cos t-\sin t)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t-\cos t\sin t}{\cos 2t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t-\sin 2t}{\cos 2t}dt.$$

理由是 $\cos t-\sin t$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处为“零”。

（3）令 $x=\tan t,$ 则

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}\right)dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+t)}{\cos t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin(\frac{\pi}{4}+t))dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)dt.$$

因为 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dt=\frac{\pi}{8}\ln 2,$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin(\frac{\pi}{8}+t))dt \xlongequal{t=\frac{\pi}{4}-u} \int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln(\sin(\frac{\pi}{2}-u))(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos u)du$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)dt, \text{所以原积分}=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

★习题三(2)

1 填空题

(1) $\,^{1}_{1}\frac{x\quad |x|}{1\quad x^2}dx=$______　　(2) $\,^{1}_{1}\sqrt{1\quad x^2}\ln\frac{x\quad \sqrt{1\quad x^2}}{2}dx$ ____

(3) $\,^{1}_{1}\frac{2x^2\quad x\cos x}{1\quad \sqrt{1\quad x^2}}dx$ ______　　(4) $\,^{\overline{\ \ }}_{0}{}^{4}\frac{\sin x}{1\quad \sin x}dx$ ______

(5) $\,^{2a}_{0}x\sqrt{2ax\quad x^2}dx\quad (a\quad 0)$ ___　　(6) $\,^{1}_{0}\frac{dx}{x\quad \sqrt{a^2\quad x^2}}$ ______

(7) $\frac{d}{dx}\,^{x}_{0}\cos(x\quad t)^2dt$ ______

(8)设 $f(x)$ 连续,则 $\frac{d}{dx}\,^{2}_{1}f(x\quad t)dt$ _____

(9) $\,^{\overline{\ \ }}_{0}{}^{2}\frac{1}{1\quad (\tan x)^{\sqrt{3}}}dx$ ______

(10) 设 $f(x)$ 连续,且 $\,^{x^2\ \ 1}_{0}f(t)dt\quad 1\quad x^3$,则 $f(8)=$____

2 计算与证明

(1) 由方程 $\,^{y}_{0}e^{t^2}dt\quad \,^{x^2}_{0}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\quad 1$,确定 y 为 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

(2) 设当 $x\quad 0$ 时，$f(x)$ 可导，且满足方程 $f(x)\quad 1\quad \frac{1}{x}\,^{x}_{1}f(t)dt\quad (x\quad 0)$，求 $f(x)$.

(3) 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)\quad 0,\ F(x)\quad \,^{x}_{0}t^{n\ \ 1}f(x^n\quad t^n)dt$.证明：$\lim\limits_{x\quad 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}\quad \frac{1}{2n}f'(0)$.

(4) 设 $f(x)\quad \begin{matrix} kx & 0\quad x\quad \frac{l}{2} \\ c & \frac{l}{2}\quad x\quad l \end{matrix}$,求 $\quad(x)\quad \,^{x}_{0}f(t)dt$.

(5) 求积分 $_{a}^{b}|x|dx \quad a \quad b.$

(6) 设函数 $f \; x$ 在区间 $0,1$ 上连续,并设 $_{0}^{1}f \; x \quad A$.求 $_{0}^{1}dx \; _{x}^{1}f \; x \; f \; y \; dy$

(7) 设 $F \; a \quad _{0} \ln \; 1 \quad 2a\cos x \quad a^{2} \; dx$.求 $F \quad a \; ,F \; a^{2}$

★参考答案

1(1)ln2 　(2) $\frac{}{2}\ln 2$ 　(3) 4 　(4) $\frac{}{4} \quad 2 \quad \sqrt{2}$ 　(5) $\frac{}{2}a^{3}$

(6) $\frac{}{4}$ 　(7) $\cos x^{2}$ 　(8) $f(2 \quad x) \quad f(1 \quad x)$ 　(9) $\frac{}{4}$ 　(10) $\frac{9}{2}$

2(1) $y' \quad 2e^{\;y^{2}}\sin x^{2}.$ 　(2) $f(x) \quad \ln x \quad 1.$

(3) 设 $u \quad x^{n} \quad t^{n}$

(4) $(x) \quad _{0}^{x}f(t)dt \quad \begin{matrix} \frac{1}{2}kx^{2} & 0 \quad x \quad \frac{l}{2} \\ \frac{1}{8}kl^{2} \quad c(x \quad \frac{l}{2}) & \frac{l}{2} \quad x \quad l \end{matrix}.$

(5) $_{a}^{b}|x|dx \quad \begin{matrix} \frac{1}{2} \; b^{2} \quad a^{2} \; , & a \quad b \quad 0 \\ \frac{1}{2} \; b^{2} \quad a^{2} \; , & a \quad 0 \quad b \\ \frac{1}{2} \; b^{2} \quad a^{2} \; , & 0 \quad a \quad b \end{matrix}$

(6) $\frac{1}{2}A^{2}$ 　(7) $F \; a \quad ,F \; a^{2} \quad 2F \; a$

第 3 节 积分中值定理、定积分的应用、广义积分

★基本知识学习

一 基本定理

定理 1(费尔马定理)若函数 $f(x)$ 满足条件：

(1)函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x) \quad f(x_0)$ 或

$f(x) \quad f(x_0)$

(2) $f(x)$ 在 x_0 处可导。则有 $f\ (x_0) \quad 0$

定理 2 (洛尔定理) 设函数 $f(x)$ 满足条件：

(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2)在 (a,b) 内可导；

则在 (a,b) 内 一个 ，使 $f\ (\ ) \quad 0$

定理 3 (拉各朗日中值定理) 设函数 $f(x)$ 满足条件：

(1)在 $[a,b]$ 上连续；(2)在 (a,b) 内可导；

则在 (a,b) 内 一个 ，使 $\dfrac{f(b) \quad f(a)}{b \quad a} \quad f\ (\ )$

定理 4 (柯西中值定理) 设函数 $f(x)$， $g(x)$ 满足条件：

(1)在 $[a,b]$ 上连续；

(2)在 (a,b) 内 $f\ (x)$， $g\ (x)$ 均存在，且 $g\ (x) \quad 0$

则在 (a,b) 内 一个 ，使 $\dfrac{f(b) \quad f(a)}{g(b) \quad g(a)} \quad \dfrac{f\ (\ )}{g\ (\ )}$

二 基本概念

1 泰勒公式

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n \quad 1$ 阶导数，则对该邻域内异与 x_0 的任意点 x，在 x_0 与 x 之间至少 一个 ，使得

$$f(x) \quad f(x_0) \quad f\ (x_0)(x \quad x_0) \quad \frac{1}{2!}f\ \ (x_0)(x \quad x_0)^2 \quad \cdots \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x \quad x_0)^n \quad R_n(x)$$

其中 $R_n(x) \quad \dfrac{f^{(n\ \ 1)}(\ \ )}{(n \quad 1)!}(x \quad x_0)^{n\ \ 1}$称为$f(x)$在点$x_0$处的$n$阶泰勒余项。

令$x_0 \quad 0$，则n阶泰勒公式

$$f(x) \quad f(0) \quad f\ (0)x \quad \frac{1}{2!}f\ \ (0)x^2 \quad \cdots \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad R_n(x)$$

(1)其中 $R_n(x) \quad \dfrac{f^{(n\ \ 1)}(\ \ )}{(n \quad 1)!}x^{n\ \ 1}$， 在 0 与$x$之间。(1)式称为麦克劳林公式。

常用五种函数在$x_0 \quad 0$处的泰勒公式

(1) $e^x \quad 1 \quad x \quad \dfrac{1}{2!}x^2 \quad \cdots \quad \dfrac{1}{n!}x^n \quad \dfrac{x^{n\ \ 1}}{(n \quad 1)!}e$

或 $1 \quad x \quad \dfrac{1}{2!}x^2 \quad \cdots \quad \dfrac{1}{n!}x^n \quad o(x^n)$

(2) $\sin x \quad x \quad \dfrac{1}{3!}x^3 \quad \cdots \quad \dfrac{x^n}{n!}\sin\dfrac{n}{2} \quad \dfrac{x^{n\ \ 1}}{(n \quad 1)!}\sin(\quad \dfrac{n \quad 1}{2}\quad)$

或 $x \quad \dfrac{1}{3!}x^3 \quad \cdots \quad \dfrac{x^n}{n!}\sin\dfrac{n}{2} \quad o(x^n)$

(3) $\cos x \quad 1 \quad \dfrac{1}{2!}x^2 \quad \cdots \quad \dfrac{x^n}{n!}\cos\dfrac{n}{2} \quad \dfrac{x^{n\ \ 1}}{(n \quad 1)!}\cos(\quad \dfrac{n \quad 1}{2}\quad)$

或 $1 \quad \dfrac{1}{2!}x^2 \quad \cdots \quad \dfrac{x^n}{n!}\cos\dfrac{n}{2} \quad o(x^n)$

(4) $\ln(1 \quad x) \quad x \quad \dfrac{1}{2}x^2 \quad \dfrac{1}{3}x^3 \quad \cdots \quad (\quad 1)^{n\ \ 1}\dfrac{x^n}{n} \quad \dfrac{(\quad 1)^n x^{n\ \ 1}}{(n \quad 1)(1 \quad\quad)^{n\ \ 1}}$

或 $x \quad \dfrac{1}{2}x^2 \quad \dfrac{1}{3}x^3 \quad \cdots \quad (\quad 1)^{n\ \ 1}\dfrac{x^n}{n} \quad o(x^n)$

(5) $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$

或 $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

2 无穷限的广义积分概念 (无穷积分)

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)\,dx$

(2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)\,dx$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^C f(x)\,dx+\lim\limits_{B\to+\infty}\int_C^B f(x)\,dx$

若极限存在，则无穷积分收敛，否则发散。

注意： (3)中右边若有一个极限不存在,则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 便发散。

3 判断广义积分的收敛准则

准则 1 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$, $M>0$，

(ⅰ)若当 $x\geq N$ 时，$0\leq f(x)\leq\dfrac{M}{x^m}$, $m>1$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛。

(ⅱ)若当 $x\geq N$ 时，$\dfrac{M}{x^m}\leq f(x)$, $m\leq 1$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散。

准则 2 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $f(x)\geq 0$,

(ⅰ)若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^m f(x)=k$, $0\leq k<+\infty$, $m>1$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛。

(ⅱ) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^m f(x)=k$, $0<k\leq+\infty$, $m\leq 1$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散。

注意：积分区间为 $(-\infty,b]$ 及 $(-\infty,+\infty)$ 有类似准则。

4 无界函数的广义积分(瑕积分)

(1) $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, (当 $x\to b^-$ 时, $f(x)\to\infty$)

(2) $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, (当 $x\to a^+$ 时, $f(x)\to\infty$)

(3) $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \varepsilon'\to 0^+}}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx\right]$，(当 $x\to c$ 时, $f(x)\to\infty$)

若右边的极限存在,则瑕积分收敛，否则发散。

注意：(3)等式右边的两个极限若有一个不存在，则瑕积分发散。

5 判断瑕积分收敛的准则

准则 3 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续， 且 $f(x)\geq 0$, $M>0$，

(ⅰ)当 $b-\delta<x<b$ 时，$0\leq f(x)\leq\dfrac{M}{(b-x)^m}$, $0<m<1$， 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。

(ⅱ) 当 $b-\delta<x<b$ 时，$\dfrac{M}{(b-x)^m}\leq f(x)$, $m\geq 1$， 则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

准则 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$,

(ⅰ)若 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=k$, $0\leq k<+\infty$, $0<m<1$,则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。

(ⅱ) 若 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=k$, $0<k\leq+\infty$, $m\geq 1$,则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

注意：$x=a$, $x=c$, $(a<c<b)$ 为瑕点时有类似的判敛准则。

6 Γ 函数： $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx\ (r>0)$ **.**

Γ 函数的性质: $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$, $(r>0)$;当 n 为自然数时, $\Gamma(n+1)=n!$

★基本题型训练

3 积分值的比较或积分符号的判断

例 比较下列定积分的大小

（1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx$ （2） $\int_0^{\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx$ 与 $\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx$

解:（1）积分区间相同,被积函数连续,只须比较被积函数的大小, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

由 $0\le\sin x\le 1 \Rightarrow \sin^6 x\le\sin^3 x$ 故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$

（2）被积函数连续,积分区间不同,先通过变量替换,转化为积分区间相同的情形,再比较被积函数,

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx \xlongequal{t=x-\pi} \int_0^{\pi} e^{-(t+\pi)^2}\cos^2(t+\pi)dt$$

$$=\int_0^{\pi} e^{-(t+\pi)^2}\cos^2 tdt < \int_0^{\pi} e^{-(x+\pi)^2}\cos^2 xdx < \int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx$$

4 估计积分值

例 估计下列各积分值

（1）$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan xdx$;　　（2）$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}}$.

解：（1）令 $f(x)=x\arctan x, x\in[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$

$\because f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}>0, \therefore f(x)$ “↗”.于是

$\max f(x)=f(\sqrt{3})=\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$,

$\min f(x)=f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$,

因此 $\frac{\sqrt{3}\pi}{18}\le f(x)\le\frac{\pi}{\sqrt{3}}$,由估值定理有 $\frac{\pi}{9}\le\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan xdx\le\frac{2\pi}{3}$.

（2）$\because 4\ge 4-2x-x^2+x^3\ge 4-2x-x^2, x\in[0,1]$

$\therefore \frac{1}{2}\le f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}}\le\frac{1}{\sqrt{4-2x-x^2}}$,

由估值定理有 $\frac{1}{2}\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}}\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$,而

$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}=\int_0^1\frac{d(x+1)}{\sqrt{5-(x+1)^2}}=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{5}}\Big|_0^1=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$$故\frac{1}{2}\quad {}_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4\quad 2x\quad x^2\quad x^3}}\quad \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

5 由函数方程求积分

例 设 $f(x^2\quad 1)\quad \ln\frac{x^2}{x^2\quad 2}$ 且 $f(\quad (x))\quad \ln x$，求 $\quad (x)dx$

解：题目中由函数方程给出了 (x)，要先要求 (x) 出再求积分。

$$由 f(x^2\quad 1)\quad \ln\frac{x^2}{x^2\quad 2}\quad \ln\frac{(x^2\quad 1)\quad 1}{(x^2\quad 1)\quad 1},$$

$$得 f(\quad (x))\quad \ln\frac{(x)\quad 1}{(x)\quad 1}\quad \ln x,则\frac{(x)\quad 1}{(x)\quad 1}\quad x,即$$

$$(x)\quad \frac{x\quad 1}{x\quad 1}\quad 1\quad \frac{2}{x\quad 1},故\quad (x)dx\quad (1\quad \frac{2}{x\quad 1})dx\quad x\quad \ln(x\quad 1)^2\quad C$$

6 广义积分的计算

例 求下列广义积分

(1) $\ {}_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2\quad 2x\quad 1}}$；　(2) $\ {}_{1}\frac{1}{x\sqrt{1\quad x}}dx$；　(3) $\ {}_{1}^{e}\frac{1}{x\sqrt{1\quad 1nx}^{\,2}}dx$

解：(1) ∵ $\lim\limits_{x\quad 1} f(x)\quad \lim\limits_{x\quad 1}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2\quad 2x\quad 1}}$

$x\quad 1$ 为 $f\quad x$ 的瑕点。

$$I\quad {}_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2\quad 2x\quad 1}}\quad \lim_{0}\ {}_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2\quad 2x\quad 1}}$$

$$\lim_{0}[\ {}_{1}^{2}\frac{d(1\quad \frac{1}{x})}{\sqrt{2^2\quad (1\quad \frac{1}{x})^2}}]\quad \lim_{0}\arcsin\frac{1\quad \frac{1}{x}}{2}\Bigg|_{1}^{2}$$

$$\lim_{0}[\arcsin\frac{2}{2(1\quad\ )}\quad \arcsin\frac{3}{4}]\quad \frac{}{2}\quad \arcsin\frac{3}{4}$$

(2) $\because \lim\limits_{x \quad 1} f(x) \quad \lim\limits_{x \quad 1} \dfrac{1}{x\sqrt{x \quad 1}}$

$x \quad 1$为$f \quad x$的瑕点,因此该广义积分为混合型的。

$$I \quad {}_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x \quad 1}}dx \qquad {}_2 \frac{1}{x\sqrt{x \quad 1}}dx \,,$$

$$I_1 \quad {}_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x \quad 1}}dx \underline{\underline{令x \quad 1 \quad t^2}} \; {}_0^1 \frac{2tdt}{t^2 \quad 1 \; t} \quad 2\arctan t \Big|_0^1 \quad \frac{}{2}$$

$$I_2 \quad {}_2 \frac{1}{x\sqrt{x \quad 1}}dx \qquad {}_1 \frac{2dt}{t^2 \quad 1} \quad 2\arctan t \Big|_1 \qquad 2 \quad \frac{}{2} \quad \frac{}{4} \,,$$

故 原广义积分 .

(3) $\because \lim\limits_{x \quad e} f \quad x \qquad , \qquad x \quad e$为$f \quad x$的瑕点。

$$I \quad {}_1^e \frac{1}{x\sqrt{1 \quad \ln x \;{}^2}}dx \quad \lim_{0} {}_1^e \frac{d \; \ln x}{\sqrt{1 \quad \ln x \;{}^2}} \quad \lim_{0} \arcsin \; \ln x \Big|_1^e \qquad \frac{}{2}$$

例 位于曲线$y \quad xe^{\;x}(0 \quad x \qquad)$下方,$x$轴上方的无界图形的面积是_____

解：$A \quad {}_0 \; xe^{\;x}dx \qquad (x \quad 1)e^{\;x}\big|_0 \qquad 1$,故应填 1

例 已知${}_0 \; e^{\;x^2}dx \quad \dfrac{\sqrt{\quad}}{2}$,则${}_0 \; \dfrac{e^{\;x} \quad e^{\;\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ ______

解：$${}_0 \frac{e^{\;x} \quad e^{\;\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad {}_0 \frac{e^{\;x}}{\sqrt{x}}dx \qquad {}_0 \frac{e^{\;\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

由于$${}_0 \frac{e^{\;x}}{\sqrt{x}}dx \qquad {}_0 \frac{e^{\;(\sqrt{x})^2}}{\sqrt{x}}dx \underline{\underline{\sqrt{x} \quad t}} 2 \; {}_0 \; e^{\;t^2}dt \quad \sqrt{\quad} \qquad 而$$

$${}_0 \frac{e^{\;\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \quad \lim_{b} {}_0^b \frac{e^{\;\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \quad \lim_{b} 2 \; {}_0^b \; e^{\;\sqrt{x}}d\sqrt{x} \quad \lim_{b}(\;\; 2e^{\;\sqrt{x}})\Big|_0^b \quad 2$$

7 有关积分等式与不等式的证明

◆ 关于积分等式的证明

解题攻略：利用中值定理证明具有某种性质的 点存在的问题，关键就是寻找辅助函数，其中的技巧之一是要善于从结论推条件，如果看到结论有 $f(x)\quad f^{'}(x)$ 形式，马上想到可能需要构造有 $e^x f(x)$ 项的函数，它的导数是 $e^x[f(x)\quad f^{'}(x)]$；二是可以把不包含 点的所有项放一边，把包含 点的所有项放另一边，然后对比中值定理寻找辅助函数；三是结论含一个变量时，对结论整理后积分得辅助函数。

例 设函数 $f(x)$ 上 $[a,b]$ 可导，且有 $f\ \ (a)\quad f\ \ (b)\quad 0$ 则在 (a,b) 内至少 一个使得 $f\ (\ \ )\quad 0$

证 由题设可知 $f\ \ (a)$ 与 $f\ \ (b)$ 异号，不妨设 $f\ \ (a)\quad 0$，$f\ \ (b)\quad 0$

因为 $f\ \ (a)\quad \lim\limits_{x\quad a}\dfrac{f(x)\quad f(a)}{x\quad a}\quad 0$

由极限的保号定理，可知 $\ _1\quad 0$，当 $x\quad (a,a\quad _1)$ 时有

$$\frac{f(x)\quad f(a)}{x\quad a}\quad 0\qquad f(x)\quad f(a)$$

同理， $\ _2\quad 0$，当 $x\quad (b\quad _2,b)$ 时有

$$\frac{f(x)\quad f(b)}{x\quad b}\quad 0\qquad f(x)\quad f(b)$$

又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最小值，由以上所证可知最小值点必在 (a,b) 内。设 $\quad (a,b)$，$f(\ \ )\quad \min\limits_{a\ x\ b}\{f(x)\}$，由费尔马定理，$f\ (\ \ )\quad 0$。

例 设 $f\ \ x$ 、$g\ \ x$ 在 a,b 上连续，证明：至少 一个 $\quad a,b$ ，使得

$$f\qquad {}^{b}g\ \ x\ \ dx\quad g\qquad {}_{a}f\ \ x\ \ dx\text{。}$$

证 作辅助函数 $F\ \ x\qquad {}_{a}^{x}f\ \ t\ \ dt\ {}_{x}^{b}g\ \ t\ \ dt$，由于 $f\ \ x$ 、$g\ \ x$ 在 a,b 上连续，所以 $F\ \ x$ 在 a,b 上连续，在 a,b 内可导，并有 $F\ \ a\quad F\ \ b\quad 0$，

由洛尔定理有 $F \quad 0, \quad a,b$ 即

$$ {}_a^x f\ t\ dt\ {}_x^b g\ t\ dt \Big|_x \qquad f\ x\ {}_x^b g\ t\ dt\ \ g\ x\ {}_a^x f\ t\ dt \Big|_x $$

$$ f \qquad {}^b g\ x\ dx\ \ g \qquad {}_a f\ x\ dx \quad 0, $$

亦即 $f \qquad {}^b g\ x\ dx\ \ g \qquad {}_a f\ x\ dx$。

注：若令 $f\ x\ {}_x^b g\ t\ dt\ \ g\ x\ {}_a^x f\ t\ dt\ \ F\ x$ ，再往下做就不容易作出，

若令 $F\ x \quad f\ x\ {}_x^b g\ t\ dt\ \ g\ x\ {}_a^x f\ t\ dt$ ，

则可设 $F\ x \quad {}_a^x f\ t\ dt\ {}_x^b g\ t\ dt$ ，不难验证该函数在 a,b 上满足洛尔定理的条件。

◆关于积分不等式的证明

解题攻略：不等式的证明是常考的综合题,结合了函数性质、中值定理等很多概念的考查，常见的三种类型为：

(1)利用中值定理证明不等式

(2)利用函数单调性证明不等式

(3)利用最值证明不等式

例　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a) \quad f(b) \quad 0$,又存在 $c \quad (a,b)$ ，使 $f(c) \quad 0$ ，证明在 (a,b) 内存在 ，使 $f''(\ ) \quad 0$ 。

证明一 (反证)若对任意的 $x \quad (a,b)$ 均有 $f''(\ ) \quad 0$ 成立，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的，所以曲线 $y \quad f(x)$ ， $x \quad (a,b)$ 应位于连续接点 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$ 的直线 l 的下方，而 l 是 x 轴故 $f(x) \quad 0$ ， $x \quad (a,b)$ 这与假设矛盾，所以在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ，使 $f''(\ ) \quad 0$ 。

证明二 利用拉格朗日中值定理知，存在 $_1 \quad (a,c)$ 及 $_2 \quad (a,b)$ 使

$$ f'(\ _1) \quad \frac{f(c) \quad f(a)}{c \quad a} \quad 0, f'(\ _2) \quad \frac{f(b) \quad f(a)}{b \quad c} \quad 0 $$

在区间$[\xi_1,\xi_2]$上对函数$f'(x)$应用拉格朗日中值定理,至少存在一点$\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$ 使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=0$$

例 设$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数。证明：$\forall x\in[0,1]$，有$|f(x)|\le\int_0^1\left(|f(t)|+|f'(t)|\right)dt$

证 因为$f'(t)$连续，$|f(t)|$也连续，所以由积分中值定理有

$$\int_0^1|f(t)|dt=|f(\xi)|,\quad 0\le\xi\le 1$$

又 $f(x)-f(\xi)=\int_\xi^x f'(t)dt$，即 $f(x)=f(\xi)+\int_\xi^x f'(t)dt$

所以$|f(x)|\le|f(\xi)|+\left|\int_\xi^x f'(t)dt\right|\le|f(\xi)|+\int_\xi^x|f'(t)|dt\le|f(\xi)|+\left|\int_0^1|f'(t)|dt\right|$，

故 $|f(x)|\le\int_0^1\left(|f(t)|+|f'(t)|\right)dt$

8 有关变限积分的讨论

例 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$,证明：

① 若$f(x)$为偶函数，则$F(x)$也是偶函数 ② 若$f(x)$单调不增，则$F(x)$单调不增

解：①令$t=-u$则，

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt=\int_0^x(x-2u)f(-u)du=\int_0^x(x-2u)f(u)du=F(x)$$

故$F(x)$为偶函数

②由于被积函数连续，所以函数$F(x)$可导，且

$$F'(x)=\left[x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x 2tf(t)dt\right]'=\int_0^x f(t)dt+(x-2x)f(x)$$

$$_{0}^{x} f(t)dt \quad xf(x) \qquad _{0}^{x}[f(t) \quad f(x)]dt \quad 0$$

因此，$F(x)$ 在 $(\quad ,\quad)$ 上单调不增

9 有关一元函数积分学的应用

例　设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)\ (x \quad 0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点 $(\frac{1}{2},0)$。

(1)试求曲线 L 的方程。

(2)求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围成图形的面积最小。

解：(1)设曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y \quad y \quad y'(X \quad x)$，令 $X \quad 0$，则得该切线在 y 轴上的截距为 $y \quad xy'$。由题设知 $\sqrt{x^2 \quad y^2} \quad y \quad xy'$ 令 $u \quad \frac{y}{x}$，则此方程化为 $\frac{du}{\sqrt{1 \quad u^2}} \qquad \frac{dx}{x}$ 解之得 $y \quad \sqrt{x^2 \quad y^2} \quad C$ 由 L 经过 $(\frac{1}{2},0)$，知 $C \quad \frac{1}{2}$。于是方程为 $y \quad \sqrt{x^2 \quad y^2} \quad \frac{1}{2}$，即 $y \quad \frac{1}{4} \quad x^2$。

(2) 设第一象限那曲线 $y \quad \frac{1}{4} \quad x^2$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y \quad (\frac{1}{4} \quad x^2) \quad 2x(X \quad x)$，即 $Y \quad 2xX \quad x^2 \quad \frac{1}{4} \quad (0 \quad x \quad \frac{1}{2})$，它与 x轴及y轴交点为$(\frac{x^2 \quad \frac{1}{4}}{2x},0)$与$(0,x^2 \quad \frac{1}{4})$。

所求面积为 $S(x) \quad \frac{1}{2}\bullet\frac{(x^2 \quad \frac{1}{4})^2}{2x} \qquad _{0}^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4} \quad x^2)dx$。

对 x 求导得 $S'(x) \quad \frac{1}{4}\bullet\frac{4x^2(x^2 \quad \frac{1}{4}) \quad (x^2 \quad \frac{1}{4})^2}{x^2} = \frac{1}{4x^2}(x^2 \quad \frac{1}{4})(3x^2 \quad \frac{1}{4})$。

令 $S'(x)$=0，解得 $x \quad \frac{\sqrt{3}}{6}$。当 $0 \quad x \quad \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$S'(x) \quad 0$；

$x \quad \dfrac{\sqrt{3}}{6}$时，$S^{'}(x) \quad 0$，因而$x \quad \dfrac{\sqrt{3}}{6}$是$S(x)$在$(0,\dfrac{1}{2})$内的唯一极小值点，即最小值点，于是所求切线为$Y \quad \dfrac{\sqrt{3}}{3}X \quad \dfrac{1}{3}$。

例　函数$y \quad \dfrac{x^2}{\sqrt{1 \quad x^2}}$在区间$[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$上的平均值为______

解：$\overline{y} \quad \dfrac{1}{b \quad a}\int_a^b f(x)dx \quad \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \dfrac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{x^2}{\sqrt{1 \quad x^2}}dx \underline{\underline{x \quad \sin x}}(\sqrt{3} \quad 1)\int_{\frac{}{6}}^{\frac{}{3}}\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}dt$

$$=(\sqrt{3} \quad 1)\int_{\frac{}{6}}^{\frac{}{3}}\frac{1 \quad \cos t}{2}dt=(\sqrt{3} \quad 1)(\frac{t}{2} \quad \frac{\sin 2t}{4})\Big|_{\frac{}{6}}^{\frac{}{3}}=\frac{\sqrt{3} \quad 1}{12}$$

10 利用泰勒公式证明不等式

例　设函数$f \quad x$在a,b上具有连续的二阶导数，证明：在a,b内存在一点　，使得

$$\int_a^b f \quad x \; dx \quad b \quad a \; f \quad \frac{a \quad b}{2} \quad \frac{1}{24} \; b \quad a^{\;3} f$$

证　令$F \quad x \quad \int_a^x f \quad t \; dt$，则有

$$F \; a \quad 0, F \quad x \quad f \quad x, F \quad x \quad f \quad x, F \quad x \quad f \quad x$$

$F \; x$在$x_0 \quad \dfrac{a \quad b}{2}$处的二阶泰勒公式为

$$F \; x \quad F \; \frac{a \quad b}{2} \quad F \; \frac{a \quad b}{2} \quad x \quad \frac{a \quad b}{2} \quad \frac{1}{2!}F \; \frac{a \quad b}{2} \quad x \quad \frac{a \quad b}{2}^{\;2}$$

$$\frac{1}{3!}F \quad x \quad \frac{a \quad b}{2}^{\;3}$$

$$F \; \frac{a \quad b}{2} \quad f \; \frac{a \quad b}{2} \quad x \quad \frac{a \quad b}{2} \quad \frac{1}{2!}f \; \frac{a \quad b}{2} \quad x \quad \frac{a \quad b}{2}^{\;2} \quad \frac{1}{3!}f \quad x \quad \frac{a \quad b}{2}^{\;3}$$

其中　在 x 与 $\frac{a \quad b}{2}$ 之间。

分别将 $x \quad b, x \quad a$ 代入上式，并相减，则得

$$F \; b \quad F \; a \quad b \quad a \; f \; \frac{a \quad b}{2} \quad \frac{1}{24} \; b \quad a \;^{3} \frac{f \quad _1 \; f \quad _2}{2},$$

其中 $_1$，$_2$ 分别在 $\frac{a \quad b}{2}$ 与 b，a 与 $\frac{a \quad b}{2}$ 之间。

不妨设 $f \quad _1 \quad f \quad _2$，则 $f \quad _1 \quad \frac{f \quad _1 \; f \quad _2}{2} \quad f \quad _2$，

考虑到 $f \; x$ 的连续性及介值定理，可知在 $_1$，$_2$ 之间至少存在一个 a, b ，使

$$f \qquad \frac{f \quad _1 \; f \quad _2}{2},$$

故 $\int_a^b f \; x \; dx \quad F \; b \quad F \; a \quad b \quad a \; f \; \frac{a \quad b}{2} \quad \frac{1}{24} \; b \quad a \;^{3} f$

例　求出函数 $f(x) \quad x^2 \ln x$ 在点 $x \quad 1$ 处的 n 阶泰勒展开式

解：因为 $x^2 \quad [(x \quad 1) \quad 1]^2 \quad (x \quad 1)^2 \quad 2(x \quad 1) \quad 1$

$$\ln x \quad \ln[1 \quad (x \quad 1)]$$

$$(x \quad 1) \quad \frac{1}{2}(x \quad 1)^2 \quad \frac{1}{2}(x \quad 1)^3$$

$$\cdots \quad (\quad 1)^{n \quad 1} \frac{1}{n}(x \quad 1)^n \quad (\quad 1)^n \frac{(x \quad 1)^{n \quad 1}}{(n \quad 1) \qquad ^{n \quad 1}}$$

因为 $f(x) \quad x^2 \ln x \quad [(x \quad 1)^2 \quad 2(x \quad 1) \quad 1][(x \quad 1) \quad \frac{1}{2}(x \quad 1)^2 \quad \frac{1}{3}(x \quad 1)^3$

$$\cdots \quad \frac{(\quad 1)^{n \quad 1}(x \quad 1)^n}{n} \quad \frac{(\quad 1)^n (x \quad 1)^{n \quad 1}}{(n \quad 1) \qquad ^{n \quad 1}}$$

$$(x \quad 1) \quad \frac{3}{2}(x \quad 1)^2 \quad \frac{1}{3}(x \quad 1)^3$$

$$\frac{1}{12}(x \quad 1)^4 \quad \cdots \quad (\quad 1)^{n\ 1}\frac{2(x \quad 1)^n}{n(n \quad 1)(n \quad 2)} \quad (\quad 1)^n \frac{2(x \quad 1)^n}{(n \quad 1)n(n \quad 1)}{}^{n\ 1}$$

★习题三(3)

1 设 $f(x)$ 连续，证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$。

2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：在 (a,b) 内存在一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi)$。

3 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：至少 $\exists$ 一个 $\xi\in(a,b)$ 使 $\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}$。

4 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，证明：至少 $\exists$ 一个 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$。

5 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(0<a<b)$，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) $\exists\,\xi,\eta$,使 $f'(\xi)=\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$。

6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

7 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$，证明：$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$。

8 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且严格单调递增，证明：

$$a \quad b \quad {}_a^b f \quad x \quad dx \quad 2 \quad {}_a^b xf \quad x \quad dx$$

9 用泰勒公式求下列极限

(1) $\lim\limits_{x \quad 0} \dfrac{\cos x \quad e^{\frac{x^2}{2}}}{x^4}$　　　　(2) $\lim\limits_{n} [n \quad n^2 \ln(1 \quad \dfrac{1}{n})]$

10 求下列广义积分：

(1) $\int_0^2 \dfrac{e^x}{\left(e^x \quad 1\right)^{\frac{1}{3}}} dx$；　　　　(2) $\int_0 \dfrac{1}{x^2 \quad 1 \quad x^2 \quad 4} dx$；

(5) $\int_2^1 \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 \quad 1}} dx$；　　　　(6) $\int_0 \dfrac{\arctan x}{\left(x^2 \quad 1\right)^{3/2}} dx$；

★参考答案

1 令设 $x = \pi - t$

2 利用泰勒公式和介值定理

3 设 $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} x - (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix}$，在用洛尔定理

4 在 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 处泰勒展开

5 设 $g(x) = \dfrac{1}{x}$，利用柯西中值定理和拉格朗日中值定理

6 设 $F(x) = e^x f(x), G(x) = x$，利用柯西中值定理,再利用拉格朗日中值定理

7 先利用柯西中值定理,在利用拉格朗日中值定理

8 构造辅助函数 $F \quad x \qquad a \quad x \quad \int_a^x f \quad t \quad dt \quad 2 \int_a^x tf \quad t \quad dt$

9 (1) $\dfrac{1}{12}$　　　　(2) $\dfrac{1}{2}$

10 (1) $\dfrac{3}{2} \quad e^2 \quad 1^{\frac{2}{3}}$　　(2) $\dfrac{}{12}$

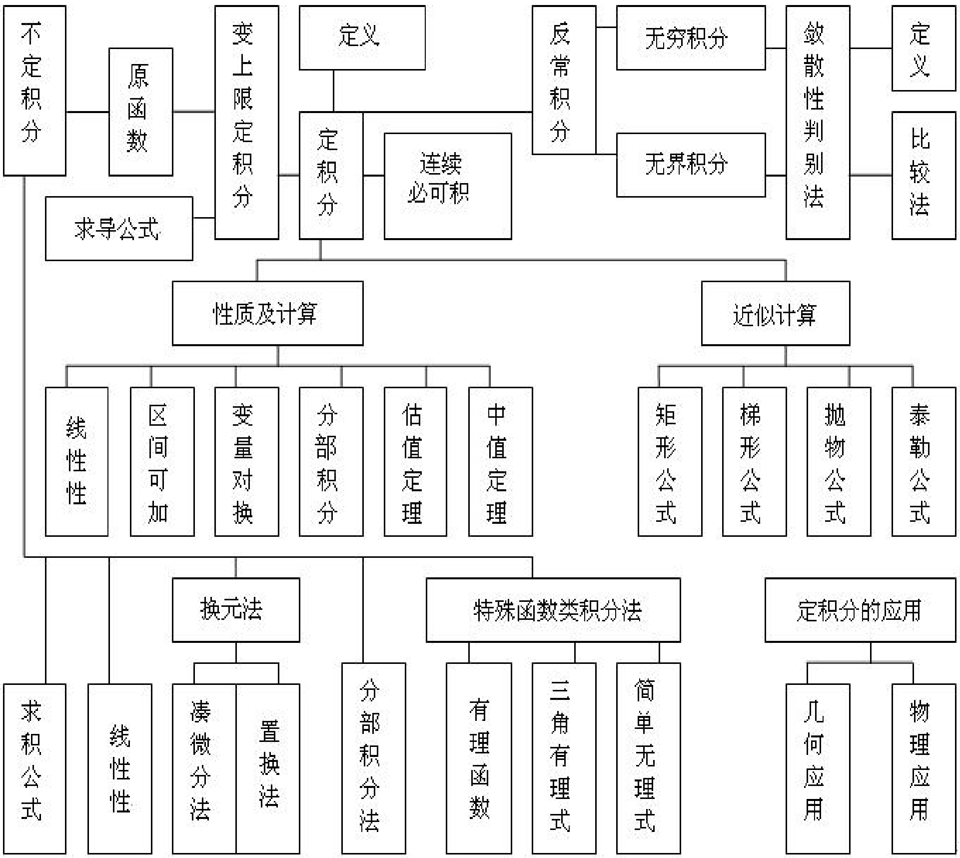
(3) 设辅助函数 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} x-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix}$,

(4) 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处的泰勒展开式　(5) $\dfrac{\ }{3}$,　　(6) $\dfrac{\ }{2}$　1

★基本知识记忆

定积分概念、基本性质、积分中值定理、泰勒公式的几个特殊例子、构造辅助函数的题型、以及对应的一般解法。大家根据自己的需要记忆薄弱知识点。

★本章知识网络



★本章总结

1 本章难、重点内容

① 不定积分的运算,应熟练掌握换元法及分部积分法

② 牛顿-莱布尼兹公式,它为使用原函数计算定积分提供了理论基础,但应注意它的使用条件: 被积函数的偏导数在积分域必须是连续的

③ 变上限积分的求导,变限积分是被积函数的一个原函数

④通过微分中值定理讨论方程在给定区间内根的个数

⑤证明恒等式及证明在某区间存在满足某种特征的点

⑥各种辅助函数的作法

2 本章容易出错的地方

①在不定积分计算完毕后忘了加常数;

②不定积分作变量代换后在计算结果中没有还原变量;

③定积分作变量代换时没有相应地改变上下积分限;

④用莱布尼兹公式时被积函数不满足该公式的使用条件;

⑤求定积分时不能随意在分子、分母同乘以一个因子，仅当所乘因子在积分域恒不为零时，变换前后的式子才是恒等式;

⑥忽略中值定理的条件;

第四章　向量代数和空间解析几何

※本章要求(▲数二、数三、数四不要求)

1 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其性质。

2 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积)，了解两个向量垂直、平行的条件。

3 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表

达式进行向量运算的方法。

4 掌握平面方程和直线方程及其求法。

5 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题。

6 会求点到直线以及点到平面的距离。

7 了解曲面方程和空间曲线方程的概念。

8 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程。

9 了解空间曲线的参数方程和一般方程，了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求该投影曲线的方程。

★基本内容学习

一、基本概念

1 向量：既有大小又有方向的量，又称矢量.

2 向量的模：向量 $\bar{a}$ 的大小.记为 $|\bar{a}|$.

3 向量的坐标表示：若向量用坐标表示 $\bar{a} \quad x\vec{i} \quad y\vec{j} \quad z\vec{k} \quad \{x,y,z\}$，则 $\bar{a} \quad \sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}$.

4 单位向量：模为 1 的向量. 向量 $\bar{a}$ 的单位向量记作 $\overline{a^0}$，

$$\overline{a^0} \quad \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}} \quad .$$

5 向量的方向余弦：$\cos \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}, \cos \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}, \cos \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}$, 其中 ， ， 为向量 $\bar{a}$ 与各坐标轴正向的夹角。

6 单位向量的方向余弦：显然 $\overline{a^0} \quad \{\cos \quad ,\cos \quad ,\cos \quad \}$，且有 $\cos^2 \quad \cos^2 \quad \cos^2 \quad 1$.

7 空间直角坐标系中的向量及其模、方向余弦的坐标表示：

设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间直角坐标系中的两点，则

$\overrightarrow{M_1M_2}\quad\{x_2\quad x_1,y_2\quad y_1,z_2\quad z_1\}$,

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\quad\sqrt{(x_2\quad x_1)^2\quad(y_2\quad y_1)^2\quad(z_2\quad z_1)^2},$$

$$\cos\qquad\frac{x_2\quad x_1}{\sqrt{(x_2\quad x_1)^2\quad(y_2\quad y_1)^2\quad(z_2\quad z_1)^2}},$$

$$\cos\qquad\frac{y_2\quad y_1}{\sqrt{(x_2\quad x_1)^2\quad(y_2\quad y_1)^2\quad(z_2\quad z_1)^2}},$$

$$\cos\qquad\frac{z_2\quad z_1}{\sqrt{(x_2\quad x_1)^2\quad(y_2\quad y_1)^2\quad(z_2\quad z_1)^2}}.$$

8 直线方程与平面方程的各种表示形式

◆平面方程

(1)一般式方程 $Ax\quad By\quad Cx\quad D\quad 0$ 法矢量 $\vec{n}\quad\{A,B,C\}$ 若方程中某个坐标不出现，则平面就平行于该坐标轴，例如 平面 $Ax\quad By\quad Cx\quad D\quad 0//y$ 轴

(2)平面的点法式方程 $A(x\quad x_0)\quad B(y\quad y_0)\quad C(z\quad z_0)\quad 0$，$M(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上已知点，$\vec{n}\quad\{A,B,C\}$ 为法矢量

(3) 三点式方程 $\begin{vmatrix} x\quad x_1 & y\quad y_1 & z\quad z_1 \\ x_2\quad x_1 & y_2\quad y_1 & z_2\quad z_1 \\ x_3\quad x_1 & y_3\quad y_1 & z_3\quad z_1 \end{vmatrix}$ $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 为平面上的三个点。

(4)截距式方程 $\frac{x}{a}\quad\frac{y}{b}\quad\frac{z}{c}\quad 1$，$a,b,c$ 分别为平面上坐标轴上的截距，即平面通过三点

$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$

◆直线方程

(1) 一般式方程(两平面交线)

$$A_1x \quad B_1y \quad C_1x \quad D_1 \quad 0 \quad 平面 \quad {}_1$$
$$A_2x \quad B_2y \quad C_2x \quad D_2 \quad 0 \quad 平面 \quad {}_2$$

平面 $_1$ 与平面 $_2$ 的法矢量分别为$\overrightarrow{n_1} \quad \{A_1,B_1,C_1\}$，$\overrightarrow{n_2} \quad \{A_2,B_2,C_2\}$ 直线的方向矢量为

$$\vec{s} \quad \overrightarrow{n_1} \quad \overrightarrow{n_2} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

(2) 标准式方程

$\dfrac{x \quad x_0}{l} \quad \dfrac{y \quad y_0}{m} \quad \dfrac{z \quad z_0}{n}$ $M(x_0,y_0,z_0)$为直线上已知点，$\vec{s} \quad \{l,m,n\}$为直线的方向矢量

(3) 两点式方程

$$\frac{x \quad x_1}{x_2 \quad x_1} \quad \frac{y \quad y_1}{y_2 \quad y_1} \quad \frac{z \quad z_1}{z_2 \quad z_1}$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为直线上的两点

(4)参数式方程

$\begin{matrix} x \quad x_0 \quad lt \\ y \quad y_0 \quad mt \\ z \quad z_0 \quad nt \end{matrix}$ $M(x_0,y_0,z_0)$为直线上已知点，$\vec{s} \quad \{l,m,n\}$为直线的方向矢量

注：由平面 $_1: a_1x \quad b_1y \quad c_1z \quad d_1 \quad 0$ 与平面 $_2: a_2x \quad b_2y \quad c_2z \quad d_2 \quad 0$ 所确定的平面束方程为

$$(a_1x \quad b_1y \quad c_1z \quad d_1) \quad (a_2x \quad b_2y \quad c_2z \quad d_2) \quad 0，其中 \quad , \quad 不全为“0”$$

◆平面间的关系

设有两个平面：

平面 $_1$：$A_1x \quad B_1y \quad C_1x \quad D_1 \quad 0$

平面 $_2$：$A_2x \quad B_2y \quad C_2x \quad D_2 \quad 0$

(1)平面 $_1$ // 平面 $_2$ $\quad \dfrac{A_1}{A_2} \quad \dfrac{B_1}{B_2} \quad \dfrac{C_1}{C_2}$

(2)平面 $_1$ 平面 $_2$ $\quad A_1A_2 \quad B_1B_2 \quad C_1C_2 \quad 0$

(3)平面 $_1$与平面 $_2$的夹角 ，由下式确定

$$\cos \qquad \frac{A_1A_2 \quad B_1B_2 \quad C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 \quad B_1^2 \quad C_1^2}\sqrt{A_2^2 \quad B_2^2 \quad C_2^2}}$$

◆平面与直线间关系

直线$L:\dfrac{x \quad x_0}{l} \quad \dfrac{y \quad y_0}{m} \quad \dfrac{z \quad z_0}{n}$

平面 $_1$： $A_1x \quad B_1y \quad C_1x \quad D_1 \quad 0$

(1) L // $\qquad Al \quad Bm \quad Cn \quad 0$

(2) $L \qquad \dfrac{A}{l} \quad \dfrac{B}{m} \quad \dfrac{c}{n}$

(3) L 与 的夹角 ，由下式确定

$$\sin \qquad \frac{Al \quad Bm \quad Cn}{\sqrt{A^2 \quad B^2 \quad C^2}\sqrt{l^2 \quad m^2 \quad n^2}}$$

◆直线间关系

设有两直线：

直线$L_1:\dfrac{x \quad x_1}{l_1} \quad \dfrac{y \quad y_1}{m_1} \quad \dfrac{z \quad z_1}{n_1}$

直线$L_2:\dfrac{x \quad x_2}{l_2} \quad \dfrac{y \quad y_2}{m_2} \quad \dfrac{z \quad z_2}{n_2}$

(1) L_1 // $L_2 \qquad \dfrac{l_1}{l_2} \quad \dfrac{m_1}{m_2} \quad \dfrac{n_1}{n_2}$

(2) $L_1 \quad L_2 \qquad l_1l_2 \quad m_1m_2 \quad n_1n_2 \quad 0$

(3)直线 L_1 与 L_2 的夹角 ，由下式确定

$$\cos \quad \frac{|l_1 l_2 \quad m_1 m_2 \quad n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 \quad m_1^2 \quad n_1^2}\sqrt{l_2^2 \quad m_2^2 \quad n_2^2}}$$

$M(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $: Ax \quad By \quad Cx \quad D \quad 0$ 的距离为

$$d \quad \frac{|Ax_0 \quad By_0 \quad Cz_0 \quad D|}{\sqrt{A^2 \quad B^2 \quad C^2}}$$

$M(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L_1 : \dfrac{x \quad x_1}{l_1} \quad \dfrac{y \quad y_1}{m_1} \quad \dfrac{z \quad z_1}{n_1}$ 距离为

$$d \quad \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \quad \overrightarrow{M_1P}|}{\overrightarrow{M_1P}} \quad \frac{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 \quad x_1 & y_0 \quad y_1 & z_0 \quad z_1 \\ l & m & n \end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2 \quad m^2 \quad n^2}}$$

9 投影方程：设　为一条空间曲线，　是一张平面，　的每一点在平面　上均有一个垂足，由这些垂足构成的曲线就称为在平面　上的投影。经过　的每一点均有平面　的一条垂线，这些垂线，构成一个柱面，称为　到平面　的投影柱面。

由以上定义可知，　在平面　上的投影方程可由下列联立方程组成

在平面　上的投影柱面方程

平面　的方程

10 间曲线在各坐标面的投影方程

设空间曲线　: $\begin{matrix} F_1(x, y, z) \quad 0 \\ F_2(x, y, z) \quad 0 \end{matrix}$ (*)

求　在 XY, XZ, YZ 平面上的投影方程。

(1) 先求　在 XY 平面上的投影方程

1° 从方程(*)中消去 z，得到一个母线 $// Z$ 轴的柱面方程　$(x, y) \quad 0$

2° 将　$(x, y) \quad 0$ 与 $z \quad 0$ 联立，即得　在 XY 平面上的投影方程

$$\begin{array}{l} (x,y) \quad 0 \\ z \quad 0 \end{array}$$

(2)　在 XZ 平面上的投影方程

$$\begin{array}{l} (x,z) \quad 0 \\ y \quad 0 \end{array}$$，其中 $(y,z) \quad 0$ 为母线 $//Y$ 轴的柱面方程

(3)　在 YZ 平面上的投影方程

$$\begin{array}{l} (y,z) \quad 0 \\ x \quad 0 \end{array}$$，其中 $(y,z) \quad 0$ 为母线 $//X$ 轴的柱面方程

11 柱面及其母线

由平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 描绘出的轨迹叫做柱面。定曲线叫做柱面的准线，动直线 L 叫做柱面的母线。

12 准线为各种形式的柱面方程的求法

(1)准线为 : $\begin{array}{l} f\ \ x,y \quad 0 \\ z \quad 0 \end{array}$,母线 $//z$ 轴的柱面方程为 $f\ \ x,y \quad 0$,

准线为 : $\begin{array}{l} x,z \quad 0 \\ y \quad 0 \end{array}$,母线 $//y$ 轴的柱面方程为 $x,z \quad 0$,

准线为 : $\begin{array}{l} y,z \quad 0 \\ x \quad 0 \end{array}$,母线 $//x$ 轴的柱面方程为 $y,z \quad 0$.

(2) 准线为 : $\begin{array}{l} f\ \ x,y,z \quad 0 \\ g\ \ x,y,z \quad 0 \end{array}$,母线的方向矢量为 l,m,n 的柱面方程的求法

首先,在准线上任取一点 x,y,z ,则过点 x,y,z 的母线方程为

$$\frac{X \quad x}{l} \quad \frac{Y \quad y}{m} \quad \frac{Z \quad z}{n}$$

其中 X,Y,Z 为母线上任一点的流动坐标,消去方程组

$$f\ x,y,z\quad 0$$

$$g\ x,y,z\quad 0$$ 中的x,y,z便得所求的柱面方程。

$$\frac{X\quad x}{l}\quad\frac{Y\quad y}{m}\quad\frac{Z\quad z}{n}$$

★基本题型训练

1 向量的运算

Ⅰ运算法则

(1)加减运算与数乘运算

设有矢量$\vec{a}\quad\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}\quad\{x_2,y_2,z_2\}$，则$\vec{a}\quad\vec{b}\quad\{x_1\quad x_2,y_1\quad y_2,z_1\quad z_2\}$.

数乘运算$\underline{\ }$矢量$\vec{a}$与一数量　之积　$\vec{a}$，

$$\vec{a}\quad\begin{cases}|\ \vec{a}|\overline{a^0} & 0,\text{即与}\vec{a}\text{同向}\\ \bar{0} & =0,\text{即为零矢量}\\ -|\ \vec{a}|\overline{a^0} & 0,\text{即与}\vec{a}\text{反向}\end{cases}$$

设$\vec{a}\quad\{x_1,y_1,z_1\}$，则　$\vec{a}\quad\{\ x_1,\ \ y_1,\ \ z_1\}$.

(2)数量积

矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积$\vec{a}\quad\vec{b}\ \underline{=}\ |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\ \vec{b})$.

设$\vec{a}\quad\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}\quad\{x_2,y_2,z_2\}$，则$\vec{a}\ \vec{b}\quad x_1x_2\quad y_1y_2\quad z_1z_2$.

运算律

（1）交换律　$\vec{a}\ \vec{b}\quad\vec{b}\ \vec{a}$；

（2）分配律　$\vec{a}\ (\vec{b}\quad\vec{c})\quad\vec{a}\ \vec{b}\quad\vec{a}\ \vec{c}$；

（3）与数乘矢量有结合律　$(\vec{a}\ \vec{b})\quad(\ \vec{a})\ \vec{b}\quad\vec{a}\ (\ \vec{b})$.

(3)向量积

定义 设有两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，若　一个矢量$\vec{c}$，满足如下条件

（1）$|\vec{c}| \quad |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\ \vec{b})$；（2）$\vec{c} \quad \vec{a}, \vec{c} \quad \vec{b}$，即$\vec{c}$垂直于$\vec{a}$，$\vec{b}$所确定的平面；

（3）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$成右手系.

则称矢量$\vec{c}$为矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的矢量积，记$\vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{b}$.

设$\vec{a} \quad \{x_1, y_1, z_1\}\ \vec{b} \quad \{x_2, y_2, z_2\}$，

$$\text{则}\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

运算律

（1）反交换律 $\vec{a} \quad \vec{b} \qquad \vec{b} \quad \vec{a}$；

（2）与数乘矢量有结合律 $\quad (\vec{a} \quad \vec{b}) \quad (\quad \vec{a}) \quad \vec{b} \quad \vec{a} \quad (\quad \vec{b})$；

（3）分配律 $\quad \vec{a} \quad (\vec{b} \quad \vec{c}) \quad \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{a} \quad \vec{c}.$

(4)混合积

定义　设有三个矢量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$，若先作$\vec{a}$，$\vec{b}$的叉积$\vec{a} \quad \vec{b}$，再与$\vec{c}$作点积$(\vec{a} \quad \vec{b}) \quad \vec{c}$，则这样的数积称为矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积，记为$(a,b,c)$，即$(a,b,c) \quad (\vec{a} \quad \vec{b}) \quad \vec{c}.$

设$\vec{a} \quad \{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{b} \quad \{x_2, y_2, z_2\}$，$\vec{c} \quad \{x_3, y_3, z_3\}$，则$(a,b,c) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

几何意义：(a,b,c)表示以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为棱的平行六面体体积.

运算律

（1）具有轮换对称性，即$(a,b,c) \quad (b,c,a) \quad (c,a,b)$；

（2）两矢量积互换，混合积变号，即$(a,b,c) \quad (a,c,b) \quad (c,b,a) \quad (b,a,c).$

II 向量之间的位置关系及结论

设$\vec{a} \quad \{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{b} \quad \{x_2, y_2, z_2\}$，$\vec{c} \quad \{x_3, y_3, z_3\}$

(1) $\vec{a}\quad\vec{b}\qquad\vec{a}\ \vec{b}\quad 0\qquad x_1x_2\quad y_1y_2\quad z_1z_2\quad 0$；

(2) $\vec{a}//\vec{b}\qquad\vec{a}\quad\vec{b}\quad\vec{0}\qquad \frac{x_1}{x_2}\quad\frac{y_1}{y_2}\quad\frac{z_1}{z_2}$；

其中x_2,y_2,z_2之中有一个为“0”，如$x_2\quad 0$，应理解为$x_1\quad 0$；

(3) $\vec{a}$，$\vec{b}$不共线　不全为零的数 ，使 $\vec{a}\quad\vec{b}\quad\vec{0}$；

(4) 矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，可由下式求出 $\cos(\vec{a},\ \vec{b})\quad\frac{x_1x_2\quad y_1y_2\quad z_1z_2}{\sqrt{x_1^2\quad y_1^2\quad z_1^2}\sqrt{x_2^2\quad y_2^2\quad z_2^2}}$；

(5) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面　不全为零的数 ，,v，使 $\vec{a}\quad\vec{b}\quad v\vec{c}\quad\vec{0}$或者 $(a,b,c)\quad 0$.

例 1　如(　　)•　2，则[((　　)　(　　)]•(　　)　______

解：原式=(　　)•　　•(　　)　2(　,　,　)　4

例 2 证明(　,　,　)^2　　^{2}　^{2}　^{2},并且等号成立的充要条件是　,　,　两两垂直或者　,　,　中有零向量。

证明　按定义|　　|　|　||　|sin $_1$,(　,　,　)　|　　|•|　|cos $_2$

其中 $_1$是　与　的夹角, $_2$是　　与　的夹角,从而

(　,　,　)^2　|　|^2|　|^2|　|^{2}sin^2 $_1$cos^2 $_2$　|　|^2|　|^2|　|^2　　^{2}　^{2}　^{2}　等号成立的充要条件是

sin^2 $_1$　1　cos^2 $_2$，由此得 $_1$　$\frac{}{2}$, $_2$　0或　，即　　,且　　||　.于是即得结论。

2 求平面方程

求平面方程的基本方法有：

(1) 找一定点P_0及法向量n,用点法式$n\bullet\overline{P_0P}\quad 0$

(2) 找一定点 P_0 及与平面平行的两个不共线向量 U_1,U_2 ,用混合积 $(\overline{P_0P},U_1,U_2)\quad 0$

(3) 用平面束方程

(4) 用平面的一般方程(待定系数)

例 (1)与两直线 $\begin{cases} x \quad 1 \\ y \quad\quad 1 \quad t \\ z \quad 2 \quad t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x\quad 1}{1}\quad\dfrac{y\quad 2}{2}\quad\dfrac{z\quad 1}{1}$ 都平行、且过原点的平面方程是____

(2)过点 $M(1,2,\quad 1)$ 且与直线 $\begin{cases} x \quad\quad t \quad 2 \\ y \quad 3t \quad 4 \\ z \quad t \quad 1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是____

(3) 已知两直线方程是 $L_1:\dfrac{x\quad 1}{1}\quad\dfrac{y\quad 2}{0}\quad\dfrac{z\quad 3}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x\quad 2}{2}\quad\dfrac{y\quad 1}{1}\quad\dfrac{z}{1}$

则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是____

解：(1) $\vec{s_1}\quad\quad 0,1,1$ ，$\vec{s_2}\quad\quad 1,2,1$

由题意平面 $\quad //$ 两直线，则平面的法矢量 $\vec{n}$ 与该两直线的方向矢量垂直，于是可设

$$\vec{n}\quad\vec{s_1}\quad\vec{s_2}\quad\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}\quad\vec{i}\quad\vec{j}\quad\vec{k}$$

平面又过原点，所以所求平面方程为

$$x\quad y\quad z\quad 0 \quad \text{即}\quad x\quad y\quad z\quad 0$$

(2) 直线的方向矢量为 $\vec{s}\quad\{\ 1,3,1\}$，因为直线垂直与所求平面，于是可知平面的法矢量 $\vec{n}//\vec{s}$，取 $\vec{s}\quad\{\ 1,3,1\}$ 为平面的法矢量，故所求平面为

$$(\ 1)(x\quad 1)\quad 3(y\quad 2)\quad 1\ (z\quad 1)\quad 0$$

即 $x \quad 3y \quad z \quad 4 \quad 0$

(3) 直线L_1，L_2的方向矢量分别为$\vec{s_1} \quad 1,0, \quad 1$，$\vec{s_2} \quad 2,1,1$，因为平面过$L_1$且平行于$L_2$，所以平面的法矢量$\vec{n} \quad \{A,B,C\}$，即为$\vec{n} \quad \vec{s_1} \quad \vec{s_2} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \vec{i} \quad 3\vec{j} \quad \vec{k}$，由于平面过$L_1$，所以点$M(1,2,3)$在平面上，故平面方程为$(x \quad 1) \quad 3(y \quad 2) \quad (z \quad 3) \quad 0$即 $x \quad 3y \quad z \quad 2 \quad 0$

3 求空间直线方程

求空间的直线方程的基本方法有：

(1) 找出所求直线所在的两个平面，用直线的一般方程(交面式)；

(2) 找定点积直线的方向向量，再用直线的标准方程或参数方程。

例　经过点$A(\quad 1,2,3)$，垂直于直线$L:\frac{x}{4} \quad \frac{x}{5} \quad \frac{x}{6}$且与平面

$:7x \quad 8y \quad 9z \quad 10 \quad 0$平行的直线方程是_____

解法一：用交面式。所求直线在过点A以L的方向向量S为法向量的平面 $_1$上，也在过A点以 的法向量n为法向量的平面 $_2$上，

$$_1: 4(x \quad 1) \quad 5(y \quad 2) \quad 6(z \quad 3) \quad 0$$

$$_2: 7(x \quad 1) \quad 8(y \quad 2) \quad 9(z \quad 3) \quad 0$$

所求直线方程为 $\begin{matrix} 4x \quad 5y \quad 6z \quad 24 \quad 0 \\ 7x \quad 8y \quad 9z \quad 36 \quad 0 \end{matrix}$

解法二：设所求直线L_1的方向向量是S_1，由于$L \quad L_1$，即$S \quad S_1$，由于$L_1 \parallel$ ，

即$n \quad S$所以$S_1 \quad S \quad n \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \{3, \quad 6,3\}$，

故所求方程为$\frac{x \quad 1}{1} \quad \frac{y \quad 2}{2} \quad \frac{z \quad 3}{1}$

注：求直线方程的两种思路要明确，交面式往往会简明一些，相对而言，平面方程更显基础与重要的，把直线的一般方程化为对称方程要熟悉，关键是求直线的方向向量S。

4 求点、直线、平面间的关系

例 1 判断下列两直线 $L_1: \frac{x \quad 1}{1} \quad \frac{y}{1} \quad \frac{z \quad 1}{2}$ 和 $L_2: \frac{x}{1} \quad \frac{y \quad 1}{3} \quad \frac{z \quad 2}{4}$ 是否在同一平面上，若在同一平面上求交点；若不在同一平面上求两直线间的距离。

解：直线L_1与L_2的方向矢量分别为$\overrightarrow{s_1} \quad 1,1,2$，$\overrightarrow{s_2} \quad 1,3,4$，该直线分别通过$P(\quad 1,0,1)$，$Q(0, \quad 1,2)$，$\overrightarrow{PQ} \quad \{1, \quad 1,1\}$，

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & & 1 \quad 1 \end{vmatrix} \quad 2 \quad 0，\therefore \text{直线} L_1 \text{与} L_2 \text{为异面直线。}$$

直线L_1与L_2的参数方程分别为

$$L_1: \begin{cases} x \quad 1 \quad t \\ y \quad t \\ z \quad 1 \quad 2t \end{cases} \quad \text{和} \quad L_2: \begin{cases} x \quad s \\ y \quad 1 \quad 3t \\ z \quad 2 \quad 4s \end{cases}$$

设两直线将间的距离为d，则

$$d \quad \sqrt{(s \quad t \quad 1)^2 \quad (\quad 1 \quad 3s \quad t)^2 \quad (1 \quad 4s \quad 2t)^2}$$

令 $h \quad (s \quad t \quad 1)^2 \quad (\quad 1 \quad 3s \quad t)^2 \quad (1 \quad 4s \quad 2t)^2 \, 2$

$$\begin{matrix} h_s \quad 52s \quad 24t \quad 4 \quad 0 \\ h_t \quad 24s \quad 12t \quad 4 \quad 0 \end{matrix} \qquad t \quad \frac{7}{3}, s \quad 1$$

由二元函数求极值的方法可知，当$t \quad \frac{7}{3}, s \quad 1$时距离$d$最小，$d \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$

例 2 证明$L_1: \frac{x}{1} \quad \frac{y}{2} \quad \frac{z}{3}, L_2: \frac{x \quad 1}{1} \quad \frac{y \quad 1}{1} \quad \frac{z \quad 2}{1}$是异面直线，并求公垂线方程及公垂线的长。

证明：L_1的方向向量$S_1 = \{1,2,3\}$，经过点$P_1 \quad (0,0,0)$ $P_1 \quad \{0,0,0\}$，L_2的方

向向量 $S_2 \quad \{1,1,1\}$，经过点 $P_2 \quad (1,\ \ 2,2)$，由于 $(\overline{P_1P_2},S_1,S_2) \quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} \quad 5 \quad 0$ 所以 L_1,L_2 是异面直线。

公垂线 L 的方向向量 S 与 S_1,S_2 都垂直,令 $S \quad S_1 \quad S_2 \quad \begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} \quad \{\ \ 1,2,\ \ 1\}$ 那么，

经过 L_1 并且与 S 平行的平面 $\ _1$ 的方程为 $\begin{vmatrix}x\quad 0 & y\quad 0 & z\quad 0\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} \quad 0$ 整理得 $4x \quad y \quad 2z \quad 0$ 经过 L_2 并且与 S 平行的平面 $\ _2$ 的方程为 $\begin{vmatrix}x\quad 1 & y\quad 1 & z\quad 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} \quad 0$，整理得 $x \quad z \quad 1 \quad 0$。

而平面 $\ _1$ 与 $\ _2$ 的交线即是 L_1 与 L_2 的公垂线L，故 L: $\begin{matrix}4x \quad y \quad 2z \quad 0\\ x \quad z \quad 1 \quad 0\end{matrix}$

公垂线的长为 $d \quad \dfrac{\left|(\overline{P_1P_2},S_1,S_2)\right|}{\left|S_1 \quad S_2\right|} \quad \dfrac{5}{\sqrt{6}}$。

5 求投影方程

例 1　求直线 L: $\begin{matrix}x \quad 3 \quad t\\ y \quad\ \ 1 \quad 2t\\ z \quad 5 \quad 8t\end{matrix}$ 在三个坐标面及平面 $\ :x \quad y \quad 3z \quad 8 \quad 0$ 上的投影方程

解：直线 L 在 XY,XZ,YZ 坐标面上的投影方程分别为

$$\begin{matrix}x \quad 3 \quad t\\ y \quad\ \ 1 \quad 2t\\ z \quad 0\end{matrix}，\quad L: \begin{matrix}x \quad 3 \quad t\\ y \quad 0\\ z \quad 5 \quad 8t\end{matrix}，\quad L: \begin{matrix}x \quad 0\\ y \quad\ \ 1 \quad 2t\\ z \quad 5 \quad 8t\end{matrix}$$

下面求直线 L 在平面 $\ :x \quad y \quad 3z \quad 8 \quad 0$ 上的投影方程

先求出通过直线 L 且垂直与平面 的平面 * 的方程，此即直线 L 在平面 上的投影柱面 直线 L 的方向矢量 $\vec{s}$ { 1,2,8}，平面 的法线矢量 $\vec{n}$ {1, 1,3}，设平面 * 的法线矢量 $\vec{n}^*$，由投影柱面的意义有

$$\vec{n}^* \quad \vec{s} \quad \vec{n} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \{14,11, \quad 1\}$$

又平面 * 通过直线 L，可知直线 L 的点 $P(3, \quad 1,5)$，在平面 * 上，于是该平面方程为

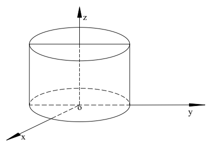
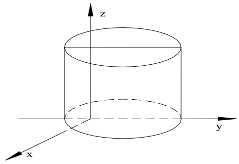
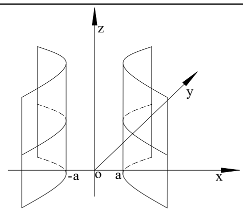
$$14(x \quad 3) \quad 11(y \quad 1) \quad (z \quad 5) \quad 0$$

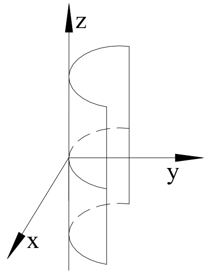
即 $14x \quad 11y \quad z \quad 26 \quad 0$，故所求 L 在 上的投影方程为

$$\begin{matrix} 14x & 11y & z & 26 & 0 \\ x & y & 3z & 8 & 0 \end{matrix}$$ 。

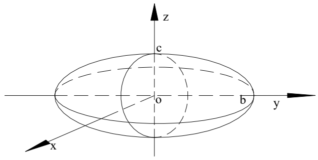
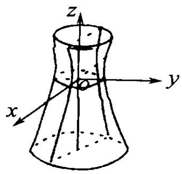
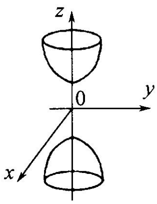
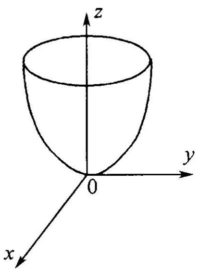
6 求曲面方程

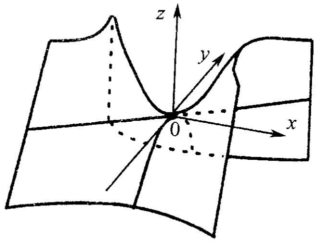
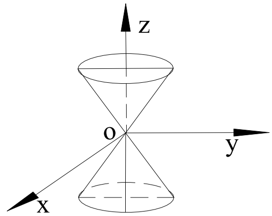
常见的柱面方程

名称	方程	图形
圆柱面	$x^2 \quad y^2 \quad R^2$	
椭圆柱面	$\dfrac{x^2}{a^2} \quad \dfrac{y^2}{b^2} \quad 1$	
双曲柱面	$\dfrac{x^2}{a^2} \quad \dfrac{y^2}{b^2} \quad 1$	

抛物柱面	$x^2 \quad 2py,\ p \quad 0$	

标准二次方程及其图形

曲面名称	方程	图形
椭球面	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad \frac{z^2}{c^2} \quad 1$ $(a,b,c$ 均为正数)	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad \frac{z^2}{c^2} \quad 1$ $(a,b,c$ 均为正数)	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad \frac{z^2}{c^2} \quad 1$ $(a,b,c$ 均为正数)	
椭圆的抛物面	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 2pz$ $(a,b,p$ 为正数)	

双曲抛物面(又名马鞍面)	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 2pz$ $(a,b,p$ 均为正数)	
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad \frac{z^2}{c^2} \quad 0$ $(a,b,c$ 为正数)	

例 圆柱面的轴线是 $L:\frac{x}{1} \quad \frac{y \quad 1}{2} \quad \frac{z \quad 2}{2}$，点 $P_0(1,\ \ 1,0)$ 是圆柱面上一点，求圆柱面方程。

解：点 $P_0(1,\ \ 1,0)$ 到轴 L 的距离 d 就是圆柱面的地面半径，在 L 上取一点 $P_1(0,\ \ 01,\ \ 2)$，L 的方向向量 $S \quad \{1,2,\ \ 2\}$，则用点到直线的距离公式有

$$d \quad \frac{\left|S \quad \overline{P_1P_0}\right|}{S} \quad \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & \ \ 2 \\ 1 & \ \ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2 \quad 2^2 \quad (\ \ 2)^2}} \quad \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

设 $P(x,y,z)$ 是柱面上任一点,则 $\left|S \quad \overline{P_1P}\right| \quad \left|S \quad \overline{P_1P_0}\right|$ 而

$$S \quad \overline{P_1P} \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & \ \ 2 \\ x & y \quad 1 & z \quad 2 \end{vmatrix} \quad \{2(z \quad 2) \quad 2(y \quad 1),\ \ 2x \quad z \quad 2, y \quad 1 \quad 2x\}$$,从而

$(2y \quad 2z \quad 2)^2 \quad (2x \quad z \quad 2)^2 \quad (2x \quad y \quad 1)^2 \quad 32$,即所求圆柱面的方程.

★练习四

1 填空题

(1)过三点 $P(2,3,0), Q(\ \ 2,\ \ 3,4), R(0,6,0)$ 的平面方程是________

(2)过点 $M_0(2,4,0)$ 且与直线 $L:\ \begin{array}{l} x\quad 2z\quad 1\quad 0 \\ y\quad 3z\quad 2\quad 0 \end{array}$ 平行的直线方程是______

(3)设平面经过原点及点 $(6,\quad 3,2)$，且与平面 $4x\quad y\quad 2z\quad 8$ 垂直，则此平面方程为______

2 若 $\vec{a}\quad 4\vec{m}\quad \vec{n},\vec{b}\quad 4\vec{m}\quad 2\vec{n},\vec{c}\quad 2\vec{m}\quad 3\vec{n}$,式中 $|\vec{m}|\quad 2,|\vec{n}|\quad 1$,又 $\widehat{\vec{m},\vec{n}}\quad \frac{}{2}$，化简表达式 $\vec{a}\quad \vec{c}\quad 3\vec{a}\quad \vec{b}\quad 2\vec{b}\quad \vec{c}\quad 1$

3 设 $\vec{A}\quad 2\vec{a}\quad \vec{b},\vec{B}\quad k\vec{a}\quad \vec{b}$，其中 $|\vec{a}|\quad 1,|\vec{b}|\quad 2$，且 $\vec{a}\quad \vec{b}$

问：(1) k 为何值时，$\vec{A}\quad \vec{B}$；

(2) k 为何值时,$\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 为邻边的平行四边行面积为 6。

4 求 $P(3,\quad 1,2)$ 点到直线 $\begin{array}{l} x\quad y\quad z\quad 1\quad 0 \\ 2x\quad y\quad z\quad 4\quad 0 \end{array}$ 的距离。

5 平面过 z 轴且与平面 $2x\quad y\quad \sqrt{5}z\quad 0$ 的夹角为 $\frac{}{3}$，求此平面方程。

6 设 a,b,c 为一平面在坐标轴上的截距，P 为原点与该平面之间的距离，证明

$$\frac{1}{a^2}\quad \frac{1}{b^2}\quad \frac{1}{c^2}\quad \frac{1}{P^2}$$

7 设一向量与三个坐标平面的夹角分别是 ， ， ，试证 $\cos^2\qquad \cos^2\qquad \cos^2\qquad 2$

★参考答案

1(1) $3x\quad 2y\quad 6z\quad 12\quad 0$ (2) $\frac{x\quad 2}{2}\quad \frac{y\quad 4}{3}\quad \frac{z}{1}$ (3) $2x\quad 2y\quad 3z\quad 0$

2 74

3 (1) $k\quad 2$, (2) $k\quad 1$ 或 $k\quad 5$

4 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$5 \quad x \quad 3y \quad 0$或 $3x \quad y \quad 0$

★本章总结

1 本章难、重点内容

(1)如何求直线方程和平面方程；

(2)求旋转曲面方程和柱面方程；

(3)点、直线、及平面之间的距离或相互之间的距离。

2 本章容易出错的地方

(1)对直线的向量，平面的法向量，两直线或平面平行，直线和平面的各种方程等基础知识掌握得不扎实导致做题错误；

(2)公式记得不清，用公式时套用错误。

习　题　一

1．填空题

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^{t}dt$，则常数 $a=$__

[解答] $$\lim_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{ax}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{ax}=e^{a}$$

$\int_{-\infty}^{a}te^{t}dt=(te^{t}-e^{t})\Big|_{-\infty}^{a}=e^{a}(a-1)$ 由题意可得 $a-1=1$ 即 $a=2$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^{2}+n+1}+\dfrac{2}{n^{2}+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^{2}+n+n})=$__

[解答] $\dfrac{1}{n^{2}+n+1}+\dfrac{2}{n^{2}+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^{2}+n+n}$

$$>\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}$$

且 $$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$$

由夹逼原则可得原式 $=\dfrac{1}{2}$

(3) 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0$，则 $a=$ __, $b=$ __, $c=$ __

[解答]当 $x\to 0$时，由 $\dfrac{0}{0}$可得 $b=0$

原式 $=\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\dfrac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\dfrac{a-\cos x}{x^2}$ 同理可得 $a=1$

故原式 $=\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$

(4) 已知 $f'(3)=2$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ __

[解答] 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}(-\dfrac{1}{2})\cdot\dfrac{f(3)-f(3-h)}{h}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1$

(5) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\le 1\\0,|x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$__

[解答] $f[f(x)]=\begin{cases}1,|f(x)|\le 1\\0,|f(x)|>1\end{cases}$，又 $|f(x)|\le 1, x\in(-\infty,+\infty)$ 所以 $f[f(x)]=1$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$__

[解答] 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})\cdot(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{3}{\sqrt{n}}}}\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{2}=2$$

(7) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$，$f'(0)=b$，若 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$__

[解答] $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)+a\cos x=f'(0)+a=b+a$

(8) 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3阶无穷小，则 $a=$__,$b=$__

[解答] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+bxe^x-1-ax}{x^3+bx^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+be^x+bxe^x-a}{3x^2+4bx^3}\xrightarrow{\frac{0}{0}}1+b-a=0$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+2b+bx)}{6x+12bx^2}\xrightarrow{\frac{0}{0}}1+2b=0$$

由此可得 $a=\frac{1}{2}$， $b=-\frac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=$__

[解答] 原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{6x^2}=\frac{1}{6}$$

⑽ 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=A(\neq 0,\neq\infty)$，则 $A=$__， $k=$__

[解答] $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1990}}{n^k[1-(\frac{n-1}{n})^k]}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1990-k}}{\frac{k}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1991-k}}{k}$

若极限存在 则 $1991-k=0$ 得 $k=1991$ 故 $A=\frac{1}{1991}$

2．选择题

⑴ 设 $f(x)$ 和 $x\to 0$ 在 (A) 内有定义， $f(x)$ 为连续函数，且 x (B)， $f(x)$ 有间断点，则

x (C) 必有间断点 $f(x)$ x 必有间断点

(D) $f(x)$ 必有间断点 x $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2^x\ln 2+3^x\ln 3=\ln 6$

必有间断点

[解答]若 (B) 连续，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}=6$, 也连续，与题设矛盾，所以应该选 a.

⑵ 设函数 (A) 则 -1 是

(B) 偶函数　　1 无界函数　　(C) 周期函数　　2 单调函数

[解答]因为 (D)，所以 3，又 $x\to 0$ 为无界函数，当任意给定一正数 8，都存在 $a=-1$ 时，使得 (A)，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,，故 $a^2+c^2\neq 0$,为无界函数，所以应该选 (A).

⑶ 当 $b=4d$ 时，函数 (B) 的极限是

$b=-4d$ 等 于 (C)　　$a=4c$ 等 于 (D)　　$a=-4c$ 为 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sec^2 x+b\sin x}{\dfrac{2c}{2x-1}+2dxe^{-x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a\sec^2 x}{\dfrac{2c}{2x-1}+2dxe^{-x^2}}+$$

不存在但不为

[解答] $=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sec^2 x}{2c}=2$

$$a=-4c$$

所以应该选 (D).

(4) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x (e^{x^2}-1)dx}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a 的值是

$(A)\ 0$　　　$(B)\ 1$　　　$(C)\ 2$　　　$(D)\ \dfrac{1}{2}$

[解答] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^{x^2}-1)dx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0$，则 $a=0$，所以应该选 (A).

(5) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}]$ 的值是

$(A)\ 0$　　　$(B)\ 1$　　　$(C)\ 2$　　　(D) 不存在

[解答] 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)^2}]=1$，所以应该选 (B).

(6) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=8$, 则 a 值是

$(A)\ 1$　　　$(B)\ 2$　　　$(C)\ \sqrt[5]{8}$　　　(D) 均不对

[解答] 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{95}\cdot(ax)^5}{x^{100}}=a^5=8$　　解得 $a=\sqrt[5]{8}$　　所以应该选 (C).

(7) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^{\alpha}}=\beta$, 则 α,β 的值为

$(A)\ \alpha=1$，$\beta=\dfrac{1}{3}$　　$(B)\ \alpha=5$，$\beta=\dfrac{1}{3}$　　$(C)\ \alpha=5$，$\beta=\dfrac{1}{3^5}$　　(D) 均不

对

[解答] 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{(3x)^{\alpha}}=\beta$，由 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 可得 $\alpha=5$, $\beta=\dfrac{1}{3^5}$，所以应该选 (C).

(8) 设 $x \longrightarrow 0$ 则当 $x\to 0$ 时，

(A) $f(x)$ 是 x 的等价无穷小 (B) $f(x)$ 与是 x 同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小 (D) $f(x)$ 是比 x 较高阶无穷小

[解答] 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2^x\ln 2+3^x\ln 3=\ln 6$，所以应该选 (B).

(9) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}=6$, 则 a 的值是

(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 3

[解答] 若原式极限存在，当 $x\to 0$ 时，由 $\dfrac{0}{0}$ 可得 $a=-1$，所以应该选 (A).

(10) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$, 其中 $a^2+c^2\neq 0$, 则必有

(A) $b=4d$ (B) $b=-4d$ (C) $a=4c$ (D) $a=-4c$

[解答] 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sec^2 x+b\sin x}{\dfrac{2c}{2x-1}+2dxe^{-x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a\sec^2 x}{\dfrac{2c}{2x-1}+2dxe^{-x^2}}+\lim_{x\to 0}\frac{b\sin x}{\dfrac{2c}{2x-1}+2dxe^{-x^2}}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{a\sec^2 x}{2c}=2$$

可得 $a=-4c$，所以应该选 (D).

3．计算题

(1) 求下列极限

① $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

[解答] 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}}=e$

② $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

[解答] 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}}=e^2$

③ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$

[解答] 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(2\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$ $\qquad(\dfrac{1}{x}=t)$

$$=\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^x(2\sin\frac{1}{x}+1)^x$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln(\cos\frac{1}{x})}\cdot e^2$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t}}\cdot e^2 = e^2$$

④ $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{x^3}}$

[解答]　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x})^{\frac{1}{x^3}}$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot(\dfrac{\csc x-1}{1+\sin x})\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

所以原极限 $=\sqrt{e}$

(2) 求下列极限

① $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$

[解答]　原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

② $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

[解答]　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}$

$$= 1 + \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1-\cos 2x}{2} - x^2}{x^4} = 1 + \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 2x - 4x}{8x^3}$$

$$= 1 + \lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{6x^2}$$

$$= 1 - \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{6x}$$

$$= \frac{2}{3}$$

③ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x\sqrt{1-x^2})}{\tan x \ln(1+x)}$

[解答] 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x\sqrt{1-x^2})}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin x\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x\cos x\sqrt{1-x^2}}$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{(1-x^2)\sin x + x\cos x}{2x\cos x(1-x^2)}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} - \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x}$$

$$= -1$$

(3) 求下列极限

① $\lim\limits_{n \to \infty} n[e^2 - (1+\frac{1}{n})^{2n}]$

[解答] 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[e+(1+x)^{\frac{1}{x}}]\cdot[e-(1+x)^{\frac{1}{x}}]}{x}$ $\qquad$ ($\dfrac{1}{n} = x$)

$$= 2e\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = 2e\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}{x}$$

$$= -2e\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= -2e^2\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= -2e^2\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}$$

$$= e^2$$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$

[解答]　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{\ln n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\ln n}{n^2}\cdot\sqrt[n]{n}}{\frac{1-\ln n}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}[(x+\frac{a}{n})+(x+\frac{2a}{n})+\cdots+(x+\frac{(n-1)a}{n})]\cdot\frac{1}{n}$

[解答]　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}x+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}\cdot(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n})$

$$= x+a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n} = x+a\int_0^1 t\,dt$$

$$= x+\frac{1}{2}a$$

④ $\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}]$

[解答] 原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n}+1)}+\dfrac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n^2}+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n^n}+1)^{\frac{1}{n}}}\right]$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{(\frac{1}{n}+1)}+\dfrac{1}{(\frac{1}{n^2}+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(\frac{1}{n^n}+1)^{\frac{1}{n}}}\right]$

且 $\dfrac{1}{n}\cdot n>\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{(\frac{1}{n}+1)}+\dfrac{1}{(\frac{1}{n^2}+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(\frac{1}{n^n}+1)^{\frac{1}{n}}}\right]>\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n}{1+\frac{1}{n}}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n}{1+\frac{1}{n}}=1$

故由夹逼原则知原式 $=1$

⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$

[解答] 当 $x>0$ 时，原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{e^{nx}}}{1+\frac{1}{e^{nx}}}=1$

当 $x=0$ 时，原式 $=0$

当 $x<0$ 时，原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=-1$

⑥ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ 其中 $a>0,b>0$

[解答] 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}} = e^{\frac{\ln ab}{2}} = \sqrt{ab}$ $\left(\dfrac{1}{n}=x\right)$

4．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x) & x<0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt & x>0\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

[解 答] ⑴ 由 $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x) = \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt = \lim_{x\to 0+}\frac{\cos x^2}{1} = 1$$

于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

⑵ 分别求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右导数

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\left[\frac{2(1-\cos x)}{x^2}-1\right] = \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\left[\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}\right] = \lim_{x\to 0-}\frac{2\sin x-2x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0-}\frac{2\cos x-2}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0-}\frac{-\sin x}{x} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt - 1\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt - x}{x^2} = \lim_{x\to 0+}\frac{\cos x^2 - 1}{2x} = 0$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导.

5．求下列函数的间断点并判别类型.

① $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$

[解答] $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点

又 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1$

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$

所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 第一类跳跃间断点.

② $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$

[解答] 当 $x=\pm 1$ 时， $f(x)=0$

当 $|x|>1$ 时， $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=-x\\ \lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=x\end{cases}$

当 $|x|<1$ 时， $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=x\\ \lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=-x\end{cases}$

即 $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x) \neq f(\pm1)$，所以 $x=\pm1$ 为函数 $f(x)$ 第一类间断点.

③ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}, x\le 0\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, x>0\end{cases}$

[解答] 当 $x=0$ 时， $\lim\limits_{x\to0+}\sin\dfrac{1}{x^2-1}=-\sin1$

$$\lim_{x\to0-}\frac{x(x+2\pi)}{2\cos x}=0$$

所以 $x=0$ 为第一类跳跃间断点.

当 $x=1$ 时， $\lim\limits_{x\to1}\sin\dfrac{1}{x^2-1}$ 不存在，所以 $x=1$ 为第二类间断点.

当 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 时， $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(x+2\pi)}{2\cos x}=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}-\dfrac{4x+\pi}{2\sin x}=-\dfrac{\pi}{2}$

所以 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 为第一类可去间断点.

当 $x=-(k\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 时， $\lim\limits_{x\to-(k\pi+\frac{\pi}{2})}\dfrac{x(x+2\pi)}{2\cos x}=\infty$

所以 $x=-(k\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 为第二类无穷间断点.

6．试确定常数 a,b 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt)$ 存在，并求该极限值.

[解答] 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^3+x+b\int_0^x e^{-t^2}dt}{x^5}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3ax^2+1+be^{-x^2}}{5x^4}$ 存在

由 $\frac{0}{0}$ 可得 $b+1=0$，即 $b=-1$

则原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3ax^2+1-e^{-x^2}}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6ax+2xe^{-x^2}}{20x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6a+2e^{-x^2}}{20x^2}$

同理由 $\frac{0}{0}$ 可得 $6a+2=0$，即 $a=-\dfrac{1}{3}$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2+2e^{-x^2}}{20x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{-x^2}\cdot(-2x)}{40x}=-\dfrac{1}{10}$

7．设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)]$，且 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 α,β 的值.

[解答] $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$ 存在，由 $\frac{0}{0}$ 可得 $\alpha=1$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\cos x+2\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}}-\beta\cos x}{2\sin x\cos x}$ 存在，同理由 $\frac{0}{0}$ 可得 $\beta=\dfrac{1}{2}$.

8．设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^{\alpha}-x]=b, b\neq 0,$ 求 a,b 的值.

[解答] 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}[(\dfrac{1}{t^5}+\dfrac{7}{t^4}+2)^{\alpha}-\dfrac{1}{t}]$ （$\dfrac{1}{x}=t$）

$$=\lim_{t\to 0}[(\frac{1+7t+2t^5}{t^5})^{\alpha}-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to 0}\frac{t^{1-5\alpha}(1+7t+2t^5)^{\alpha}-1}{t}$$

由 $\frac{0}{0}$ 可得 $1-5\alpha=0, \alpha=\dfrac{1}{5}$

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+7t+2t^5)^{\alpha}-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha(7t+2t^5)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\alpha(7+2t^4)=7\alpha=\dfrac{7}{5}$，即 $b=\dfrac{7}{5}$

9．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x},x>0\\ e^{x}+\beta,x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

[解答] 当 $\alpha>0$ 时， $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}x^{\alpha-1}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=0$

$\lim\limits_{x\to 0-}e^{x}+\beta=1+\beta$

所以若 $\beta=-1$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

若 $\beta\ne-1$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 为第一类跳跃间断点.

当 $\alpha\le 0$ 时， $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

10．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}]=0$, 求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$.

[解答] $\sin 3x=3x-\dfrac{27x^3}{3!}+0\cdot(27x^3)$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+0(x^2)$

由 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}]=0$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}[3x-\frac{27x^3}{3!}+0\cdot(27x^3)+f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+0(x^2)]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}[(3+f(0))x+f'(0)x^2+(\frac{f''(0)}{2}-\frac{27}{3!})x^3+0\cdot(27x^3)+0(x^2)]$$

$$=0$$

所以

$$f(0)=-3, f'(0)=0, f''(0)=\frac{27}{3!}\cdot 2=9$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)}{2}=\frac{9}{2}$$

第二章

一、填空题

7. 设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{3}f'(x_0)$，则 $k=$__

[解答] 原式 $=k\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{k\Delta x}=kf'(x_0)=\frac{1}{3}f'(x_0)$ 所以 $k=\frac{1}{3}$

8. 已知 $\frac{d}{dx}[f(\frac{1}{x^2})]=\frac{1}{x}$，则 $f'(\frac{1}{2})=$__

[解答] 原式 $=f'(\frac{1}{x^2})\cdot(-\frac{2}{x^3})=\frac{1}{x}$ 即 $f'(\frac{1}{x^2})=-\frac{x^2}{2}$

令 $x^2=2$，则 $f'(\frac{1}{2})=-1$

9．设 f 为可导函数， $y=\sin\{f[\sin f(x)]\}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__

[解答] 原式 $=f'(x)\cos f(x)f'[\sin f(x)]\cdot\cos\{f[\sin f(x)]\}$

10．设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为__

[解答] 两边求导 $e^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(y+xy')=0$

将 $x=0,y=1$ 代入可得 $y'|_{(0,1)}=-2$

故所求的方程为 $x-2y+2=0$

二．选择题

1． 设 $f(x)$ 可导， $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

(A) 充分必要条件　　(B) 充分但非必要条件

(C) 必要但非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

[解答] $F'_-(0)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}=f'(0)-f(0)$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}=f'(0)+f(0)$$

若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Leftrightarrow F'_-(0)=F'_+(0)$，即 $f(0)=0$，所以应该选 (A).

2．设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)dt$，则 $F'(x)=$

$(A)\ -e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ $(B)\ -e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

$(C)\ e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ $(D)\ e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

[解答] $F'(x)=f(e^{-x})\cdot(e^{-x})'-f(x)\cdot x'=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$，所以应该选 (A).

3．已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 $f(x)$ 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是

$(A)\ n![f(x)]^{n+1}$ $(B)\ n[f(x)]^{n+1}$ $(C)\ [f(x)]^{2n}$ $(D)\ n![f(x)]^{2n}$

[解答] $f'(x)=[f(x)]^2$，$f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$

$f'''(x)=2!\,3[f(x)]^2f'(x)=3![f(x)]^4$

由数学归纳法可得 $f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$，所以应该选 (A).

4．设函数对任意 x 均满足 $f(1+x)=af(x)$，且 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，则

$(A)\ f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导 $(B)\ f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$ (D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$

[解答] $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x}=af'(0)=ab$，故应选 (D).

二、选择

7．设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ ax+b & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则

(A) $a=1,b=0$ (B) $a=0,b$ 为任意常数

(C) $a=0,b=0$ (D) $a=1,b$ 为任意常数

[解答] 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续可得

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0-}(ax+b)=b=0$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导得

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-b}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{ax+b-b}{x}=0$$ 则 $a=0$，所以应该选 (C).

8．设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为

$(A)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在　　　　$(B)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

$(C)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\sinh)$ 存在　　　　$(D)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

[解答] 当 $x\to 0$ 时， $e^h-1\sim h$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{-h}f(-h+0(h))$

等价于 $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$，所以应该选 (B).

9．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

[解答] 若设 $f(x)=x$ 时， $(A)\,(C)$ 均错误，若设 $f(x)=x^2$ 时， (B) 错误，故选 (D).

10．设函数 $x=a$ 在 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件是

$(A)\ f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　　　$(B)\ f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

$(C)\ f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　　　$(D)\ f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

[解答] 令 $F(x)=|f(x)|$，由导数定义可得 $F'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$

若 $f(a)>0$，由 $f(x)$ 的连续性及保号性可得 $f(x)>0$，此时 $F'(a)=f'(a)$

若 $f(a)<0$，同理可得 $F'(a)=-f'(a)$.

故若 $F'(a)$ 不存在，则 $f(a)=0$

若 $f(a)=0$，且 $f'(a)\neq 0$，设 $f'(a)>0$，由于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=f'(a)>0$

所以当 $x>a$ 时， $f(x)>0$， $x<a$ 时， $f(x)<0$

则 $F'_{+}(a)=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{x-a}=f'(a)$

$F'_{-}(a)=\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{-f(x)}{x-a}=-f'(a)$

故 $F'(a)$ 不存在，所以应该选 (B).

三．计算题

1． $y=\ln[\cos(10+3x^2)]$，求 y'.

[解答] $y'=\dfrac{1}{\cos(10+3x^2)}\cdot[-\sin(10+3x^2)]\cdot 6x=-6x\tan(10+3x^2)$

2．已知 $f(u)$ 可导， $y=f[\ln(x+\sqrt{a+x^2})]$，求 y'.

[解答] $y' = f'[\ln(x+\sqrt{a+x^2})] \cdot \frac{x+\sqrt{a+x^2}}{\sqrt{a+x^2}\cdot(\ln(x+\sqrt{a+x^2}))} = \frac{f'[\ln(x+\sqrt{a+x^2})]}{\sqrt{a+x^2}}$

3．已知 $\int_0^y e^{t^2}dt = \int_0^{x^2}\cos t dt + \sin y^2$，求 y'.

[解答] 等式两边对 x 求导可得

$$e^{y^2}y' = \cos x^2 \cdot 2x + \cos y^2 \cdot 2y \cdot y'$$

化简可得 $y' = \frac{2x\cos x^2}{e^{y^2} - 2y\cos y^2}$

4．设 y 为 x 的函数是由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$ 确定的，求 y'.

[解答] 等式两边对 x 求导可得

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}$$

化简得 $y' = \frac{x+y}{x-y}$

5．已知 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

[解答] $x' = e^t\sin t + e^t\cos t, y' = e^t\cos t - e^t\sin t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{2}{e^t(\sin t+\cos t)^3}$$

6．设 $x=y^2+y,u=(x^2+x)^{3/2}$，求 $\dfrac{dy}{du}$.

[解答] 等式两边对 x 求导可得

$1=2y\cdot y'+y'$ 可得 $y'=\dfrac{1}{2y+1}$ 又 $u'=\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{x^2+x}\cdot(2x+1)$

所以 $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{2}{3(2y+1)(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$

7．设函数 $f(x)$ 二阶可导， $f'(0)\neq 0$，且 $\begin{cases}x=f(t)-\pi\\ y=f(e^{3t}-1)\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0},\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

[解答] $x'=f'(t),y'=3e^{3t}f'(e^{3t}-1)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{3e^{3t}f'(e^{3t}-1)}{f'(t)}\right|_{t=0}=3$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=3\cdot\frac{[3f'(0)+3f''(0)]\cdot f'(0)-f'(0)\cdot f''(0)}{[f'(0)]^3}=\frac{9f'(0)+6f''(0)}{[f'(0)]^2}$$

8．设曲线 $x=x(t),y=y(t)$ 由方程组 $\begin{cases}x=te^t\\ e^t+e^y=2e\end{cases}$ 确定，求该曲线在 $t=1$ 处的曲率 k.

[解答] $x'=e^t(1+t)\quad y'=-e^{t-y}$，则

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=-\left.\frac{1}{(e^t-2e)(1+t)}\right|_{t=1}=-\frac{1}{2e}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\left.\frac{2e^t+te^t-2e}{(e^t-2e)^2(1+t)^2}\cdot\frac{1}{e^t(1+t)}\right|_{t=1}=\frac{1}{8e^2}$$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=e(1+4e^2)^{-\frac{3}{2}}$$

四．已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有二阶连续的导数，且 $g(0)=1$

(1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续；　　(2) 求 $f'(x)$.

[解答] (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}g'(x)+\sin x=g'(0)=a$

即当 $a=g'(0)$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $x\neq 0$ 时，有

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}$$

当 $x=0$ 时，由导数的定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-a}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(0)+\cos x}{2}=\frac{1}{2}[g''(0)+1]$$

五．已知当 $x\leq 0$ 时， $f(x)$ 有定义且二阶可导，问 a,b,c 为何值时

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\le 0 \\ ax^2+bx+c & x>0 \end{cases}$$ 是二阶可导.

[解答] $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续

则 $F(+0)=\lim\limits_{x\to 0+}(ax^2+bx+c)=c=F(-0)=f_-(0)$ 即 $c=f_-(0)$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'_-(0)$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{ax^2+bx+c-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}(ax+b)=b$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处一阶可导，则有 $b=f'_-(0)$

此时， $$F'(x)=\begin{cases} f'(x) & x<0 \\ f'_-(0) & x=0 \\ 2ax+b & x>0 \end{cases}$$

$$F''_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f'(x)-f'_-(0)}{x}=f''_-(0)$$

$$F''_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{2ax+b-f'_-(0)}{x}=2a$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，则有 $a=\dfrac{1}{2}f''_-(0)$

六．已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，求 $f^{(n)}(x)$.

[解答] $f(x)=x^2\cdot(\dfrac{1}{1-x^2})=x^2\cdot(1+x^2+\cdots+x^{2n}+\cdots)$

$$= x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n+2} + \cdots \qquad |x| < 1$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林级数展开式为

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

通过比较可得，当 $n = 2k$ 时， $f^{(n)}(0) = n!$

当 $n = 2k+1$ 时， $f^{(n)}(0) = 0 \quad (k = 1,2 \cdots)$

七．设 $y = x\ln x$，求 $f^{(n)}(1)$.

[解答] $y' = \ln x + 1$，$y'' = \frac{1}{x}$，$y''' = -\frac{1}{x^2}$，$y^{(4)} = (-1)\cdot(-2)\frac{1}{x^2}$

通过递推公式可得 $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}$

当 $x = 1$ 时， $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-2}(n-2)!$

八．证明 $y = (\arcsin x)^2$ 满足方程

$$(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n-1)xy^{(n)} - (n-1)^2 y^{(n-1)} = 0$$

证明： $y' = 2\arcsin \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y''=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x-\frac{2}{1-x^2}$$

化简可得 $(1-x^2)y''-xy'+2=0$

$$\Rightarrow(1-x^2)y'''-3xy''-y'=0$$

$$\Rightarrow(1-x^2)y^{(4)}-5xy'''-4y''=0$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n-1)xy^{(n)}-(n-1)^2y^{(n-1)}=0$$ 得证.

第三章

1．求下列不定积分.

(1) $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

[解答] 原式 $=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d(\ln\frac{1+x}{1-x})=\frac{1}{4}(\ln\frac{1+x}{1-x})^2+c$

(2) $\int\frac{1}{1+x^2}\arctan\frac{1+x}{1-x}dx$

[解答] 原式 $=\int\arctan\frac{1+x}{1-x}d(\arctan\frac{1+x}{1-x})=\frac{1}{2}(\arctan\frac{1+x}{1-x})^2+c$

(3) $\int\frac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

[解答]　原式 $=\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}d(\frac{1+\sin x}{1+\cos x})=\frac{1}{2}(\frac{1+\sin x}{1+\cos x})^2+c$

(4) $\int\frac{dx}{x(x^8+1)}dx$

[解答]　原式 $=\frac{1}{8}\int\frac{d(x^8)}{x^8(x^8+1)}=\frac{1}{8}\int(\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^8+1})d(x^8)$

$$=\frac{1}{8}[\ln x^8-\ln(x^8+1)]+c$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{8}\ln(x^8+1)+c$$

(5) $\int\frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$

[解答] 设 $x=2t,dx=2dt$

原式 $=2\int\frac{1+\sin 2t}{1+\sin 2t+\cos 2t}dt=2\int\frac{1+\sin 2t}{\sin 2t+2\cos^2 t}dt$

$$=2\int\frac{(\sin t+\cos t)^2}{2\cos t\sin t+2\cos^2 t}dt=2\int\frac{\sin t+\cos t}{2\cos t}dt$$

$$=\int(1+\tan t)dt=\int dt+\int\tan t dt$$

$$=t-\ln|\cos t|+c=\frac{x}{2}-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x|+\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+c$$

2．求下列不定积分.

(1) $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

[解答] 设 $x+1=\frac{1}{t}, dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\text{原式} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$= -\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} = -\sqrt{1+t^2}+c = -\sqrt{1+\frac{1}{(x+1)^2}}+c$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{1+x}+c$$

(2) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

[解答] 设 $x=\frac{1}{t}$， $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\text{原式} = -\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^3}}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}}d(t^2)$$

$$= -\frac{1}{2}[\int \sqrt{1+t^2}d(1+t^2) - \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}d(1+t^2)]$$

$$= -\frac{1}{2}[\frac{2}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+t^2}]+c$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+c$$

(3) $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

[解答] 设 $x=\tan t, dx=\sec^2 t dt$

原式 $=\int \frac{dt}{\cos t\cdot(2\tan^2 t+1)}=\int \frac{\cos t dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t}$

$=\int \frac{d(\sin t)}{1+\sin^2 t}=\arctan(\sin t)+c$

$=\arctan(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})+c$

(4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$

[解答] 原式 $=-\int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\int \sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$=-\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}+c$

$=\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2})+c$

(5) $\int \sqrt{(1-x^2)^3}dx$

[解答] 设 $x=\sin t, dx=\cos t dt$

原式 $=\int \cos^4 t dt=\int (\frac{\cos 2t+1}{2})^2 dt=\frac{1}{4}\int (\cos^2 2t+2\cos 2t+1)dt$

$$=\frac{1}{4}\int (\frac{\cos 4t+1}{2}+2\cos 2t+1)dt$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{8}\cdot\sin 4t+\sin 2t+\frac{3}{2}t)+c$$

$$=\frac{1}{4}[\frac{1}{2}\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot(1-2\sin^2 t)+2\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}+\frac{3}{2}t]+c$$

$$=\frac{3}{8}\arcsin x+\frac{5x-2x^3}{8}\sqrt{1-x^2}+c$$

(6) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$

[解答] 设 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

原式 $=-\int t\sqrt{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int \sqrt{1-t^2}d(1-t^2)=\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}+c$

$$=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}+c=\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}+c$$

(7) $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$

[解答] 设 $x=\frac{1}{t}$， $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

原式 $=-\int\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arccos t+\sqrt{1-t^2}+c$

$=\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

3．求下列不定积分.

(1) $\int\frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$

[解答] 原式 $=\int\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}+1}dx=\int\frac{d(e^{x}-e^{-x})}{1+(e^{x}-e^{-x})^2}=\arctan(e^{x}-e^{-x})+c$

(2) $\int\frac{dx}{2^{x}(1+4^{x})}$

[解答] 设 $2^{x}=t$，则 $dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{dt}{t}$

原式 $=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{1}{t^2(1+t^2)}dt=\frac{1}{\ln 2}(\int\frac{1}{t^2}dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt)$

$=\frac{1}{\ln 2}(-\frac{1}{t}-\arctan t)+c=-\frac{1}{\ln 2}(2^{-x}+\arctan 2^{x})+c$

4．求下列不定积分.

(1) $\int\frac{x^5}{(x-2)^{100}}dx$

[解答] 设 $x-2=\frac{1}{t}$， $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

原式 $=-\int t^{98}\cdot(\frac{2t+1}{t})^5 dt=-\int t^{93}(2t+1)^5 dt$

$$=-\int(32t^{98}+80t^{97}+80t^{96}+40t^{95}+10t^{94}+t^{93})dt$$

$$=-(32\cdot\frac{t^{99}}{99}+80\cdot\frac{t^{98}}{98}+80\cdot\frac{t^{97}}{97}+40\cdot\frac{t^{96}}{96}+10\cdot\frac{t^{95}}{95}+\frac{t^{94}}{94})+c$$

$$=-[\frac{32}{99(x-2)^{99}}+\frac{40}{49(x-2)^{98}}+\frac{80}{98(x-2)^{97}}$$

$$+\frac{5}{12(x-2)^{96}}+\frac{2}{19(x-2)^{95}}+\frac{1}{94(x-2)^{94}}]+c$$

(2) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}dx$

[解答] 设 $x=\frac{1}{t}$， $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

原式 $=-\int\frac{t}{\sqrt{1+t^4}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2)}{\sqrt{1+(t^2)^2}}$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\sqrt{1+t^4}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}+c$$

5．求下列不定积分.

(1) $\int x\cos^2 xdx$

[解答]　原式 $=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int(x+x\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int xdx+\frac{1}{2}\int x\cos 2xdx=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}(x\sin 2x+\frac{\cos 2x}{2})+c$$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+c$$

(2) $\int \sec^3 xdx$

[解答] $\int \sec^3 xdx=\int \sec xd(\tan x)$

$$=\sec x\cdot\tan x-\int \tan x\cdot\sec x\cdot\tan xdx$$

$$=\sec x\cdot\tan x-\int(\sec^2 x-1)\sec xdx$$

$$=\sec x\cdot\tan x-\int \sec^3 xdx+\int \sec xdx$$

所以

$$\int \sec^3 xdx=\frac{1}{2}[\sec x\cdot\tan x+\ln|\sec x+\tan x|]+c$$

(3) $\int \frac{(\ln x)^3}{x^2}dx$

[解答]　原式 $=\int(\ln x)^3 d(-x^{-1})=-[\frac{(\ln x)^3}{x}-3\int\frac{(\ln x)^2}{x^2}dx]$

$$= -[\frac{(\ln x)^3}{x} - 3\int (\ln x)^2 d(\frac{1}{x})]$$

$$= -[\frac{(\ln x)^3}{x} + 3\frac{(\ln x)^2}{x} - 6\int \frac{\ln x}{x^2} dx]$$

$$= -[\frac{(\ln x)^3}{x} + 3\frac{(\ln x)^2}{x} - 6\int \ln x d(\frac{1}{x})]$$

$$= -[\frac{(\ln x)^3}{x} + 3\frac{(\ln x)^2}{x} + 6\frac{\ln x}{x} - 6\int \frac{1}{x^2} dx]$$

$$= -\frac{1}{x}[(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 + 6\ln x + 6] + c$$

(4) $\int \cos(\ln x) dx$

[解答] 原式 $= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

移项得

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + c$$

(5) $\int \frac{x\cos^4 \frac{x}{2}}{\sin^3 x} dx$

[解答]　原式 $=\int\dfrac{x\cos^2\dfrac{x}{2}}{8\sin^3\dfrac{x}{2}\cos^3\dfrac{x}{2}}dx=\int\dfrac{x\cos\dfrac{x}{2}}{8\sin^3\dfrac{x}{2}}dx=\dfrac{1}{4}\int xd(-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}})$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{x}{\sin^2\frac{x}{2}}-\int\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}dx)$$

$$=-\frac{x}{8}\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+c$$

6．求下列不定积分.

(1) $\int\dfrac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$

[解答]　原式 $=\dfrac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\dfrac{1}{1-x^2})$

$$=\frac{1}{2}[\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1-x^2}-\int\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx]$$

再求 $\int\dfrac{1}{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

设 $x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 tdt$

原式 $=\int\dfrac{\sec t}{1-\tan^2 t}dt=\int\dfrac{1}{\cos t}\cdot\dfrac{\cos^2 t}{\cos^2 t-\sin^2 t}dt=\int\dfrac{\cos t}{\cos 2t}dt$

$$=\int\frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+c$$

所以

$$原式 = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}\right| + c$$

(2) $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

[解答] 设 $\arctan x = t, \sec^2 t dt = dx$

$$原式 = \int \frac{t\cdot\tan t}{\sec t}\cdot\sec^2 t dt = \int t\cdot\tan t\cdot\sec t dt = \int t d(\sec t)$$

$$= t\sec t - \int \sec t dt = t\sec t - \ln|\sec t+\tan t| + c$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + c$$

(3) $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$

[解答] 设 $\arctan e^x = t, \sec^2 t dt = e^x dx$

$$原式 = \int \frac{t}{\tan^2 t}\cdot\frac{\sec^2 t}{\tan t}dt = \int \frac{t}{\sin^3 t}d(\sin t) = -\frac{1}{2}\int t d(\sin^{-2} t)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sin^2 t} - \int \frac{1}{\sin^2 t}dt\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sin^2 t} - \cot t\right) + c$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\arctan e^x\cdot\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}} + e^{-x}\right) + c$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^{x}+e^{-x}+\arctan e^{x})+c$$

7．设 $f(x)=\begin{cases}x\ln(1+x^2), x\geq 0\\(x^2+2x-3)e^{-x}, x<0\end{cases}$，求 $\int f(x)dx.$

[解答] 当 $x\geq 0$时

$$\int f(x)dx=\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}[x^2\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^3}{1+x^2}dx]$$

$$=\frac{1}{2}[x^2\ln(1+x^2)-\int\frac{x^2}{1+x^2}d(x^2)]$$

$$=\frac{1}{2}[x^2\ln(1+x^2)-\int(1-\frac{1}{1+x^2})d(x^2)]$$

$$=\frac{1}{2}[(x^2+1)\ln(1+x^2)-x^2]+c_1$$

当 $x<0$时

$$\int(x^2-2x-3)e^{-x}dx=-(x^2-2x-3)e^{-x}+2\int e^{-x}(x+1)dx$$

$$=-(x^2-2x-3)e^{-x}-2(x+1)e^{-x}+2\int e^{-x}dx$$

$$=-(x^2-2x-3)e^{-x}-2(x+1)e^{-x}+2e^{-x}+c_2$$

$$=-e^{-x}(x^2+4x+1)+c_2$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，可得 $c_2-1=c_1=c$，所以

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[(x^2+1)\ln(1+x^2)-x^2]+c, x\geq 0\\ -e^{-x}(x^2+4x+1)+c, \qquad x<0\end{cases}$$

8．设 $f'(e^x)=a\sin x+b\cos x$，(a,b 为不同时为零的常数)，求 $f(x)$.

[解答]　设 $e^x=t$， $f'(t)=a\sin(\ln t)+b\cos(\ln t)$，

则　$f(t)=\int[a\sin(\ln t)+b\cos(\ln t)]dt$

又　$\int\sin(\ln t)dt=t\sin(\ln t)-\int\cos(\ln t)dt$

$$\int\cos(\ln t)dt=t\cos(\ln t)+\int\sin(\ln t)dt$$

所以

$$f(t)=\frac{at}{2}[\sin(\ln t)-\cos(\ln t)]+\frac{bt}{2}[\sin(\ln t)+\cos(\ln t)]+c$$

即　$f(x)=\dfrac{x}{2}[(a+b)\sin(\ln x)+(b-a)\cos(\ln x)]+c$

9．求下列不定积分.

(1) $\int 3^{x^2+3x}\cdot(2x+3)dx$

[解答]　原式 $=\int 3^{x^2+3x}d(x^2+3x)=\dfrac{3^{x^2+3x}}{\ln 3}+c$

(2) $\int (3x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}(3x-1)dx$

[解答] 原式 $=\frac{1}{2}\int (3x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}d(3x^2-2x+5)$

$=\frac{1}{5}(3x^2-2x+5)^{\frac{5}{2}}+c$

(3) $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

[解答] 原式 $=\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$

$=\frac{1}{2}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2+c$

(4)

[解答] 原式 $=\int \frac{xdx}{\ln(1+\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$

$=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\ln(1+\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$

$=\int \frac{d(1+\sqrt{x^2+1})}{\ln(1+\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}=\int \frac{d[\ln(1+\sqrt{1+x^2})]}{\ln(1+\sqrt{1+x^2})}$

$=\ln\left|\ln(1+\sqrt{1+x^2})\right|+c$

10．设当 $x \neq 0$ 时， $f'(x)$ 连续，求 $\int \frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx.$

[解答] 原式 $=\int[\frac{1}{e^x}\cdot\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\frac{1}{e^x}\cdot\frac{xf(x)}{x^2}]dx$

$$=\int\frac{1}{e^x}d(\frac{f(x)}{x})-\int\frac{f(x)}{xe^x}dx$$

$$=\frac{f(x)}{xe^x}+\int\frac{f(x)}{xe^x}dx-\int\frac{f(x)}{xe^x}dx$$

$$=\frac{f(x)}{xe^x}+c$$

11．设 $f'(\cos x+2)=\sin^2 x+\tan^2 x$，求 $f(x)$.

[解答] 设 $\cos x+2=t$，则 $f'(t)=\frac{1}{(t-2)^2}-(t-2)^2$

$$f(t)=\int f'(t)dt=\int[\frac{1}{(t-2)^2}-(t-2)^2]dt$$

$$=-\frac{1}{t-2}-\frac{(t-2)^3}{3}+c$$

所以 $f(x)=-\frac{1}{x-2}-\frac{(x-2)^3}{3}+c$

12．求下列不定积分.

(1) $\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$

[解答] 设 $\arctan x = t, \sec^2 t dt = dx$

$$原式 = \int \frac{t \cdot \tan t}{\sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt = \int \sin t \cdot \cos t \cdot t dt = \frac{1}{2}\int \sin 2t \cdot t dt$$

$$= -\frac{1}{4}\int t d(\cos 2t) = -\frac{1}{4}(t\cos 2t - \int \cos 2t dt)$$

$$= -\frac{1}{4}(t\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t) + c$$

$$= \frac{\arctan x}{4} + \frac{x}{4(1+x^2)} - \frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + c$$

(2) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

[解答] 设 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} = t, x = \tan^2 t, dx = 2\tan t \cdot \sec^2 t dt$

$$原式 = \int t \cdot 2\tan t \cdot \sec^2 t dt = \int t d(\tan^2 t) = t \cdot \tan^2 t - \int \tan^2 t dt$$

$$= t \cdot \tan^2 t - \int (\frac{1}{\cos^2 t} - 1)dt$$

$$= t \cdot \tan^2 t - \tan t + t + c$$

$$= (1+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{x} + c$$

(3) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

[解答] 设 $\arcsin x = t, \cos t dt = dx$

$$原式 = \int \frac{t}{\sin^2 t} \cdot \frac{1+\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t dt = \int t(\frac{1}{\sin^2 t}+1)dt$$

$$= \int \frac{t}{\sin^2 t}dt + \int t dt = \int t d(-\cot t) + \frac{t^2}{2}$$

$$= -t\cot t + \ln|\sin t| + \frac{t^2}{2} + c$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + c$$

(4) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$

[解答] 设 $\arctan x = t, \sec^2 t dt = dx$

$$原式 = \int \frac{t}{\tan^2 t \cdot \sec^2 t} \cdot \sec^2 t dt = \int \frac{t}{\tan^2 t}dt = \int \frac{t}{\sin^2 t}dt - \int t dt$$

$$= -t \cdot \cot t + \ln|\sin t| - \frac{t^2}{2}$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\arctan^2 x}{2} + c$$

13．下列不定积分.

(1) $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$

[解答] 设 $x=2\sin t, dx=2\cos t dt$

原式 $=\int 8\sin^3\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t dt=-32\int \sin^2 t\cdot\cos^2 t d(\cos t)$

$=-32\int(\cos^2 t-\cos^4 t)d(\cos t)$

$=-\dfrac{32\cos^3 t}{3}+\dfrac{32}{5}\cos^5 t+c$

$=-\dfrac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}+c$

(2) $\int\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx(a>0)$

[解答] 设 $x=a\sec t, dx=a\sec t\cdot\tan t dt$

原式 $=\int\dfrac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\cdot\tan t dt$

$=a\int\tan^2 t dt=a\int(\sec^2 t-1)dt$

$=a\tan t-at+c$

$=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\dfrac{a}{x}+c$

(3) $\int\dfrac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

[解答] 设 $e^x=t$，则

$$原式 =\int\frac{1+e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}d(e^{x})=\int\frac{1+t}{1-t^{2}}dt$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-t^{2}}}dt+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^{2}}}dt$$

$$=\arcsin t-\sqrt{1-t^{2}}+c$$

$$=\arcsin e^{x}-\sqrt{1-e^{2x}}+c$$

(4) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx(a>0)$

[解答] 设 $x-a=a\sin t$， $dx=a\cos tdt$

$$原式 =\int\frac{x^{2}}{\sqrt{2ax-x^{2}}}dx=\int\frac{x^{2}}{\sqrt{a^{2}-(x-a)^{2}}}dx$$

$$=a^{2}\int(1+\sin t)^{2}dt=a^{2}\int(1+2\sin t+\sin^{2}t)dt$$

$$=a^{2}[t-2\cos t+\int(\frac{1-2\cos 2t}{2})dt]$$

$$=a^{2}(\frac{3}{2}t-2\cos t-\frac{\sin 2t}{2})+c$$

$$=a^{2}[\frac{3}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}-\frac{3a+x}{2a}\sqrt{\frac{x(2a-x)}{a^{2}}}]+c$$

$$=-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+\frac{3a^{2}}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}+c$$

14．求下列不定积分.

(1) $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$

[解答] 原式 $=\int \frac{dx}{\sqrt{2}\sin x\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}[\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}dx]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[-\int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}d(\cos\frac{x}{2})+\int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}d(\frac{x}{2})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}d(\frac{x}{2})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+c$$

(2) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

[解答] 原式 $=2\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int\frac{d(2+\cos x)}{2+\cos x}$

$$=4\int\frac{1}{3+\tan^2\frac{x}{2}}d(\tan\frac{x}{2})+\ln(2+\cos x)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})+\ln(2+\cos x)+c$$

(3) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

[解答] 原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{2\sin x\cos x+1-1}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$$

$$\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc(x+\frac{\pi}{4})-\cot(x+\frac{\pi}{4})\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-1+2\sin^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})}{2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})\right|+c$$

15．求下列不定积分.

(1) $\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$

[解答]　设 $\sqrt{x}=t,x=t^2,dx=2tdt$

原式 $=2\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^3}}dt=-\frac{2}{3}\int\frac{d(1-t^3)}{\sqrt{1-t^3}}=-\frac{4}{3}\sqrt{1-t^3}+c$

$=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+c$

(2) $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$

[解答] 设 $e^x=\sec t,x=\ln\sec t$

原式 $=\int\frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{e^x+1}dx=\int\frac{\tan t}{\sec t+1}\cdot\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t}dt=\int\frac{\sec^2 t-1}{\sec t+1}dt$

$=\quad\int(\sec t-1)dt\quad=\ln\left|\sec t+\tan t\right|-t+c$

$=\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right|-\arccos(e^{-x})+c$

(3) $\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$

[解答]　设 $\arctan\sqrt{x-1}=t,2\tan t\cdot\sec^2 t=dx$

原式 $=\int\frac{t\cdot\tan t}{1+\tan^2 t}\cdot 2\tan t\cdot\sec^2 tdt$

$=2\int t\cdot\tan^2 tdt=2\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\cdot tdt$

$$= 2\int t d(\tan t) - 2\int t dt = 2t \cdot \tan t - 2\int \tan t dt - t^2$$

$$= 2t \cdot \tan t + 2\ln\left|\cos t\right| - t^2 + c$$

$$= 2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1} - \ln\left|x\right| - (\arctan\sqrt{x-1})^2 + c$$

习　题　四（1）

1．　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：对于任意选定的连续函数 $\Phi(x)$，均有 $\int_a^b f(x)\Phi(x)dx = 0$，则在 $[a,b]$ 上，$f(x) \equiv 0$.

证明：假设在 $[a,b]$ 上存在 ξ 使得 $f(\xi) \neq 0$，令 $f(\xi) > 0$，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故存在 x_1, x_2 在 $a < x_1 < \xi < x_2 < b$ 上，使得 $f(\xi) > 0$.

又令 $\Phi(x) = \begin{cases} 1 & x_1 \le \xi \le x_2 \\ 0 & \end{cases}$

则 $\int_a^b f(x)\Phi(x)dx = \int_a^{x_1} 0dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^b 0dx$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx > 0$$

结论与题设矛盾，故假设不成立.

2．　设 λ 为任意实数，证明：$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^\lambda}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\cot x)^\lambda}dx = \frac{\pi}{4}$.

证明：设 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^{\lambda}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cot t)^{\lambda}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan t)^{\lambda}}{1+(\tan t)^{\lambda}}dt=I$$

所以 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{1+(\tan x)^{\lambda}}+\frac{(\tan x)^{\lambda}}{1+(\tan x)^{\lambda}}]dx=\frac{\pi}{2}$

即 $I=\frac{\pi}{4}$ ，得证.

3． 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，对任意 x,y 都有 $\left|f(x)-f(y)\right|<M\left|x-y\right|$, 证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right|\le\frac{M}{2n}.$$

证明： $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx$ ，又 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\frac{k}{n})dx$

所以 $\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\frac{k}{n})dx\right|$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}[f(x)-f(\frac{k}{n})]dx\right|\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|dx$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}M\left|x-\frac{k}{n}\right|dx=M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}(\frac{k}{n}-x)dx$$

$$=M\sum_{k=1}^{n}(\frac{kx}{n}-\frac{x^2}{2})\Big|_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}$$

$$= M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^2}$$

$$= \frac{M}{2n}$$

1． 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, n$ 为大于 1的正整数，证明： $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$.

证明： $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \cdot (\sec^2 x - 1) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x d(\tan x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x dx$$

$$= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-2}$$

即 $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

若 $I_n \le \frac{1}{2(n+1)}$，则 $I_{n-2} \le \frac{1}{2(n-1)}$

于是 $I_n + I_{n-2} \le \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n-1)} = \frac{n}{(n-1)(n+1)} < \frac{1}{n-1}$

这与推论矛盾，所以 $\frac{1}{2(n+1)} < I_n$

若 $I_n \ge \frac{1}{2(n-1)}$，则 $I_{n-2} \ge \frac{1}{2(n-3)}$

于是 $I_n + I_{n-2} \geq \dfrac{1}{2(n-1)} + \dfrac{1}{2(n-3)} = \dfrac{n-2}{(n-1)(n-3)} > \dfrac{1}{n-1}$

这与推论矛盾，所以 $I_n < \dfrac{1}{2(n-1)}$

综上所述，有 $\dfrac{1}{2(n+1)} < I_n < \dfrac{1}{2(n-1)}$.

1． 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调减少， $f(x) > 0$，证明：对于满足 $0 < \alpha < \beta < 1$ 的任何 α， β，有

$$\beta\int_0^\alpha f(x)dx > \alpha\int_\alpha^\beta f(x)d(x)$$

证明：由积分中值定律有

$$\int_0^\alpha f(x)dx = \alpha f(\xi_1)$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta-\alpha)f(\xi_2) \qquad 0 \leq \xi_1 \leq \alpha \leq \xi_2 \leq \beta \leq 1$$

又 $f(x) > 0$，且单调递减，故当 $\xi_2 \geq \xi_1$时， $f(\xi_1) \geq f(\xi_2) > 0$

所以 $\alpha\beta f(\xi_1) \geq \alpha(\beta-\alpha)f(\xi_2)$

即 $\beta\int_0^\alpha f(x)dx > \alpha\int_\alpha^\beta f(x)d(x)$

2． 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x) < 0$ 证明：

$$\int_a^b f(x)dx \le (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

证明：由泰勒公式有

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

又 $f''(x)<0$，则 $f(x)\le f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$

两边积分可得 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx+\int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})dx$

$$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx$$

$$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{x^2}{2}-\frac{a+b}{2}x)_a^b$$

$$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)$$

7．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调不增，证明：任给 $\alpha\in(0,1)$，有

$$\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx$$

证明： $\alpha\in(0,1)$， $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^\beta f(x)dx$

所以 $\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha\int_0^1 f(x)dx=\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha[\int_0^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^1 f(x)dx]$

$$=(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha\int_\alpha^1 f(x)dx$$

$$=(1-\alpha)\alpha f(\xi_1)-(1-\alpha)\alpha f(\xi_2)$$

又 $\xi_1 \in [0,\alpha]$， $\xi_2 \in [\alpha,1]$， $f(x)$ 单调不增，当 $\xi_1 \le \xi_2$ 时， $f(\xi_1) \ge f(\xi_2)$

所以 $$\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx$$

8．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：在 (a,b) 内存在

一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi)$$

证明：由泰勒公式有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2=f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2$$

$\therefore$ $$f(x)=\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{4}[f''(\xi_1)(x-a)^2+f''(\xi_2)(x-b)^2]$$ ，

$\xi_1 \in (a,x), \xi_2 \in (x,b)$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{4}\int_a^b [f''(\xi_1)(x-a)^2+f''(\xi_2)(x-b)^2]dx$$

其中 $I=\frac{1}{4}\int_a^b [f''(\xi_1)(x-a)^2+f''(\xi_2)(x-b)^2]dx$

$f(x)$ 具有二阶导数，设 $f''(x)$ 最大值为 M，最小值为 m，即 $m \le f''(x) \le M$

则 $\frac{m}{4}\int_a^b [(x-a)^2+(x-b)^2]dx \le I \le \frac{M}{4}\int_a^b [(x-a)^2+(x-b)^2]dx$

即 $m \le \dfrac{I}{\frac{1}{6}(b-a)^3} \le M$，

由介值定理可得，至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{I}{\frac{1}{6}(b-a)^3} = f''(\xi)$

即 $I = \dfrac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi)$，得证.

9．设 $f(x)$ 连续，证明：$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

证明：设 $x = \pi - t$，则

$$I = \int_0^\pi xf(\sin x)dx = \int_\pi^0 (\pi - t)f[\sin(\pi - t)]d(-t)$$

$$= \int_0^\pi (\pi - t)f(\sin t)dt = \pi\int_0^\pi f(\sin t)dt - \int_0^\pi tf(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^\pi f(\sin t)dt - I$$

$$\therefore \quad I = \int_0^\pi xf(\sin t)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin t)dx$$

10．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在且可积， $f(a) = f(b) = 0$，证明：

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx, (a < x < b)$$

证明: 由 $f(a) = f(b) = 0$，可得

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x - a) = \int_a^x f'(t)dt$$

$$f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b)=\int_b^x f'(t)dt$$

$\therefore$ $|f(x)|\le\int_a^x|f'(t)|dt$ ， $|f(x)|\le\left|\int_b^x f'(t)dt\right|\le\int_x^b|f'(t)|dt$ 其中 $a<x<b$

$$\therefore\quad 2|f(x)|\le\int_a^x|f'(t)|dt+\int_x^b|f'(t)|dt=\int_a^b|f'(x)|dx$$

即 $$|f(x)|\le\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$$

12．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则

$$\ln[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx]\ge\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx$$

证明：令 $f(x)=u$， $\ln u=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(u-x_0)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\xi^2}\cdot(u-x_0)^2$

则 $\ln u\le\ln x_0+\frac{1}{x_0}(u-x_0)$

两边积分得 $\int_a^b\ln udu\le\int_a^b\ln x_0du+\int_a^b\frac{1}{x_0}(u-x_0)du$

$$=(b-a)\ln x_0+\frac{1}{x_0}(\int_a^b udu)-(b-a)$$

令 $x_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，消除 $b-a$ 后得

$$\int_a^b\ln f(x)dx\le(b-a)\ln[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx]$$

即 $\ln[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx] \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx$

13．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续导数，且 $f(1)-f(0)=1$，证明：

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$$

证明：由柯西不等式有

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \cdot \int_0^1 dx \geq [\int_0^1 f'(x)dx]^2$$

$$= [f(1)-f(0)]^2 = 1$$

14．设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $\int_0^2 f(x)dx = 0$， $\int_0^2 xf(x)dx = a > 0$，证明：

$\exists \in [0,2]$，使 $|f(\xi)| \geq a$

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，则必存在一点 ξ，使得 $|f(\xi)| = \max|f(x)|$，即

$|f(\xi)| \geq f(x)$， $x \in [0,2]$

$$a = \int_0^2 xf(x)dx - \int_0^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^2 (x-1)f(x)dx \leq \int_0^2 |x-1| \cdot |f(\xi)| dx$$

$$= |f(\xi)| \int_0^2 |x-1| dx = |f(\xi)| [\int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx]$$

$$= |f(\xi)|$$

即 $\left|f(\xi)\right| \geq a$

习　　　　　　题　　　　　　五

1.　　设函数在 $f(x)$ 在闭区间 $\exists$ 上可微，对于 $\xi \in (a,b)$ 每一个 $\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$，函数 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$的值都在开区间 $F(a)=F(b)=0$ 内，且 $F(x)$，证明：在 (a,b) 内有且仅有一个 $\xi(a<\xi<b)$，使 $F'(\xi)=0$.

证明：设 $\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又 $0 < f(x) < 1$，所以 $F(0) > 0$，$F(1) < 0$，由零值定理可知，

在 $(0,1)$ 内至少存在一个 x，使 $F(x)=0$，即 $f(x)=x$.

利用反证法证明 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个零点.

设 $x_1, x_2 \in (0,1)$ 且 $x_1 < x_2$ 使得 $f(x_1)=x_1$，$f(x_2)=x_2$，则由拉格朗日中值定理可得，至少存在一个 $x \in (x_1, x_2) \subset (0,1)$，使得

$$f(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 1$$

这与题设矛盾，综上所述，命题得证.

2．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(0)$，证明：在 $(0,1)$ 内 ∃一个 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

证明： 由积分中值定理，可知在 $[\frac{2}{3},1]$ 上存在一点 ξ_1，使 $\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = \frac{1}{3}f(\xi_1)$，

$(\frac{2}{3}<\xi_1<1)$，从而有 $f(0)=f(\xi_1)$.

于是由洛尔定理可知，在 $(0,\xi_1)$ 内存在一个 ξ，使 $f'(\xi)=0$， $\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$

3．设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=f(2)=0$，又 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$，证明：在 $(1,2)$ 内至少 ∃一个 ξ，使 $F''(\xi)=0$.

证明：由题意可得 $F(1)=F(2)=0$，根据洛尔定理可得至少存在 $\xi_1\in(1,2)$，使得 $F'(\xi_1)=0$.

又 $F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2 f(x)$ 当 $x=1$时， $F'(1)=0$.

再对 $F'(x)$ 在 $[1,\xi_1]$上应用洛尔定理，可得至少存在一个 $\xi\in(1,\xi_1)\subset(1,2)$，

使得 $F''(\xi)=0$，命题得证.

4．设函数 $f(x)$ 在 $[0,x]$ $(x>0)$ 上连续，在 $(0,x)$ 内可导，且 $f(0)=0$，证明：在 $(0,x)$ 内 ∃一个 ξ，使 $f(x)=(1+\xi)\ln(1+x)f'(\xi)$.

证明：设 $g(x)=\ln(1+x)$， $g(x)$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 内可导，且 $g(0)=0$，

则 $f(x), g(x)$ 在 $[0, x]$ 满足柯西定理，于是有 $\xi(0<\xi<x)$，使

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即
$$\frac{f(x)}{\ln(1+x)}=f'(\xi)(1+\xi)$$

所以
$$f(x)=(1+\xi)\ln(1+x)f'(\xi)$$

5．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $ab>0$，证明：$\exists$ 一个 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=[nf(\xi)+\xi f'(\xi)]\xi^{n-1} \qquad (n\geq 1)$$

证明：设 $g(x)=x^n f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，于是有 $\xi(a<\xi<b)$ 使

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(\xi)$$

即
$$\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{b-a}=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)$$

所以
$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=[nf(\xi)+\xi f'(\xi)]\xi^{n-1}$$

6．设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $\exists$ 内可导，证明：$\exists$ 一个 $\xi\in(a,b)$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

证明：设 $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$ 则 $F(a) = F(b) = 0$

$F(x)$ 在 (a,b) 上满足洛尔定理，于是存在 $\xi(a < \xi < b)$，使 $F'(\xi) = 0$，即

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

7．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0) = f(1) = 0$，证明：至少 $\exists$ 一个

$$\xi \in (0,1) \text{ 使 } f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

证明：设 $F(x) = (1-x)f(x)$，则 $F(0) = F(1) = 0$，由洛尔定理可得，存在 $\xi(0 < \xi < 1)$，使得 $F'(\xi) = 0$,又 $F'(x) = (1-x)f'(x) - f(x)$ 则 $F'(1) = 0$

在 $(\xi,1)$ 上，由洛尔定理可得，存在 $\xi_1(\xi < \xi_1 < 1) \subset (0,1)$，使得 $F''(\xi_1) = 0$,即

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

8．设函数 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上可导，且 $0 < x_1 < x_2$，证明：在 (x_1, x_2) 内至少 $\exists$ 一个 ξ，使

$$\frac{1}{e^{x_1}-e^{x_2}}\begin{vmatrix} e^{x_1} & e^{x_2} \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(\xi)-f'(\xi)$$

证明：设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x},h(x)=\dfrac{1}{e^x}$，则在 $[x_1,x_2]$内，由柯西中值定理可得，至少存在一个 $\xi(x_1<\xi<x_2)$，使得

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{h(x_2)-h(x_1)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} \qquad \text{即} \quad \frac{\dfrac{f(x_2)}{e^{x_2}}-\dfrac{f(x_1)}{e^{x_1}}}{\dfrac{1}{e^{x_2}}-\dfrac{1}{e^{x_1}}}=f(\xi)-f'(\xi)$$

所以
$$\frac{1}{e^{x_1}-e^{x_2}}\begin{vmatrix} e^{x_1} & e^{x_2} \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(\xi)-f'(\xi)$$

9．若 $x_1x_2>0$，证明： $\exists$一个 $\xi\in(x_1,x_2)$或 (x_2,x_1)，使

$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$$

证明：设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x},h(x)=\dfrac{1}{x}$，则在 (x_1,x_2)上，由柯西中值定理可得，存在一个 $\xi(x_1<\xi<x_2)$，使得

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{h(x_2)-h(x_1)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} \qquad \text{即} \quad \frac{\dfrac{e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^{x_1}}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=(1-\xi)e^{\xi}$$

化简可得
$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$$

10．函数 $f(x),g(x)$在 $[a,b]$上连续，在 (a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，

$g(x)\neq 0$，证明：至少 $\exists$一个 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)g(\xi)=g'(\xi)f(\xi)$.

证明：设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，由 $f(a)=f(b)=0, g(x)\neq 0$，可得 $F(a)=F(b)=0$

由洛尔定理可得，至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)g(\xi)=g'(\xi)f(\xi)$

11. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$上连续，在 (a,b) 内可导，证明：至少 $\exists$一个 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}$$

证明：设 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}x-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix}$，则 $F(a)=F(b)$，由洛尔定理

可得，至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}$$

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，证明：至少 $\exists$一个 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

证明：　　在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处的泰勒展开式为

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-\frac{a+b}{2})^2\ (\xi_1<\xi_2)$$

两式相加得 $f(a)+f(b)=2f(\dfrac{a+b}{2})+\dfrac{(b-a)^2}{4}\cdot\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$

又 $f(x)$ 在 (a,b) 内有连续二阶导数，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$，所以

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(0<a<b)$，在 (a,b) 内可导，证明：在 $(a,b)\ \exists\ \xi,\eta$，使

$$f'(\xi)=\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$$

证明：设 $g(x)=\dfrac{1}{x}$，由柯西中值定理，在 $f(x),g(x)$ 内至少存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}\quad 即\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$$

对于 $f(x)$，由拉格朗日中值定理可得，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

从而 $$f'(\xi)=\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$$

14．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：

$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$$

证明：设 $F(x)=e^x f(x),G(x)=x$，由柯西中值定理可得，至少存在 η，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)}，\text{即}\quad \frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\eta f(\eta)+e^\eta f'(\eta)$$

设 $\varphi(x)=e^x$，由拉格朗日中值定理可得，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\xi \quad \text{从而}\quad e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]=e^\xi，$$

即 $$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$$

15．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$，证明：

$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$$

证明：设 $g(x)=e^{x}$，由柯西中值定理可得，对于 $f(x),g(x)$，存在 $\eta\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^{b}-e^{a}}=\frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$$

对于 $f(x)$，由拉格朗日中值定理可得，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

由两式可得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}\cdot e^{-\eta}$$

习　题　六

一．求解下列微分方程.

(1) $y'-e^{x-y}+e^{x}=0$

[解答] 令 $e^{y}=t$，则原微分方程可变化为 $t'+e^{x}t=e^{x}$ 解其对应的齐次方程 $t'+e^{x}t=0$，可得 $t=ce^{-e^{x}}$

令 $t=c(x)e^{-e^{x}}$ 为原方程的解，代入方程有 $c'(x)e^{-e^{x}}=e^{x}$，

解得 $c(x)=e^{e^{x}}+c$，所以 $t=1+ce^{-e^{x}}$ 故原方程的解为 $y=\ln(1+ce^{-e^{x}})$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=(1-y^{2})\tan x,y(0)=2$

[解答] 原方程可变换为 $\dfrac{dy}{1-y^2}=\tan x dx$

解得 $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right|=-\ln\left|\cos x\right|+c$，即 $\dfrac{1+y}{1-y}=\dfrac{c}{\cos^2 x}$，

又 $y(0)=2$，则 $c=-3$，故 $y=\dfrac{3+\cos^2 x}{3-\cos^2 x}$

二．求解下列微分方程.

(1) $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\dfrac{x}{y})dy=0$

[解答] 令 $x=yt$，则 $dx=ydt+tdy$，原方程可变换为 $(1+e^t)(tdy+ydt)+e^t(1-t)dy=0$

即 $-\dfrac{dy}{y}=\dfrac{1+e^t}{t+e^t}dt$，解得 $y=\dfrac{c}{t+e^t}$，将 $x=yt$ 代入可得 $x+ye^{\frac{x}{y}}=c$

(2) $y'=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$ $\quad y(1)=-1$

[解答] 设 $\dfrac{y}{x}=t$，将方程右端同除 x^2 后可变换为

$$\frac{t^2+2t-1}{(t+1)(t^2+1)}dt=-\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int(\frac{1}{t+1}-\frac{2t}{t^2+1})dt=\int\frac{1}{x}dx$$

解得 $\ln(\dfrac{t+1}{t^2+1})=\ln x+c$ $\quad$ 即 $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=c$

由 $y(1)=-1$ 可得 $c=0$，故所求方程为 $y=-x$

三．求解下列微分方程.

(1) $\sqrt{1+x^2}y'\sin 2y=2x\sin^2 y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$

[解答] 令 $\sin^2 y=t$，又 $y'\sin 2y=2\sin y\cos y\cdot y'=(\sin^2 y)'$，则原方程式可变换为

$$t'-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}t=\frac{e^{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}$$

解其对应的齐次方程，可得 $t=ce^{2\sqrt{1+x^2}}$

令 $t=c(x)e^{2\sqrt{1+x^2}}$ 为原方程的解，代入方程有

$$c'(x)e^{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{e^{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}$$

解得 $c(x)=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c$

所以 $\sin^2 y=e^{2\sqrt{1+x^2}}(\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c)$

(2) $(x-2xy-y^2)dy+y^2dx=0$

[解答] 方程可变换为 $\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1-2y}{y^2}x=1$

其对应其次方程 $\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1-2y}{y^2}x=0$ 可解为

$\frac{dx}{x}=\frac{2y-1}{y^2}dy$，积分可得 $\ln x=2\ln y+\frac{1}{y}+c$，

即 $\ln\frac{x}{y^2}=\frac{1}{y}+c$，齐次方程的通解为 $x=cy^2e^{\frac{1}{y}}$

令 $x=c(y)y^2e^{\frac{1}{y}}$，代入原式中有 $c'(y)=\frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2}$，积分可解得 $c(y)=e^{-\frac{1}{y}}+c$

故原方程的通解为

$$x=(e^{-\frac{1}{y}}+c)y^2e^{\frac{1}{y}}=y^2+cy^2e^{\frac{1}{y}}$$

(3) $xy'\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$

[解答] 设 $\cos y=z$，则 $\sin y=\sqrt{1-z^2}$， $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}z'$

所以原式可变换为 $z'-\frac{1}{x\ln x}z=-\frac{1}{\ln x}z^2$

由贝努利方程，设 $u=z^{-1}$，则方程变换为 $u'+\frac{1}{x\ln x}u=\frac{1}{\ln x}$

其对应的齐次方程的解为 $u=c\frac{1}{\ln x}$，

令 $u=c(x)\frac{1}{\ln x}$，代入原方程中可解得 $u=(x+c)\frac{1}{\ln x}$

所以 $z=\cos y=\frac{\ln x}{x+c}$，即 $(x+c)\cos y=\ln x$

五．求解下列微分方程

(1) $y'=\dfrac{y^2-x}{2y(x-1)}$

[解答] 原式可变换为 $2y(x-1)\dfrac{dy}{dx}=y^2-x$，即 $(x-1)\dfrac{dy^2}{dx}=y^2-x$

设 $y^2=z$，则原方程可变换为 $z'-\dfrac{1}{x-1}z=-\dfrac{x}{x-1}$

其对应的齐次方程的通解为 $z=c(x-1)$

令 $z=c(x)(x-1)$ 为原方程的解，代入原式中有

$c'(x)(x-1)=-\dfrac{x}{x-1}$，可解得 $c(x)=-\ln(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+c$

故 $z=y^2=c(x-1)-(x-1)\ln(x-1)+1$

(2) $xy'+y=x^3y^6$

[解答] 原式可变换为 $y'+\dfrac{1}{x}y=x^2y^6$

由贝努利方程，设 $u=y^{-5}$，则原式可变换为 $u'-\dfrac{5}{x}u=-5x^2$

其对应的齐次方程的通解为 $u=cx^5$

令 $u=c(x)x^5$ 为原方程的解，代入可得 $c'(x)x^5=-5x^2$

解得 $c(x)=\dfrac{5}{2x^2}+c$

所以 $u=y^{-5}=\frac{5}{2}x^3+cx^5$

六．函数 $\varphi(x)$ 在实轴上连续，$\varphi'(0)$ 存在，且具有性质 $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$，试求出 $\varphi(x)$.

[解答] $\varphi(x)$ 在实轴上连续，设 $\varphi(x_0)\neq 0$，则

$$\varphi(x_0)=\varphi(x_0+0)=\varphi(x_0)\varphi(0) \quad \text{可得} \quad \varphi(0)=1$$

又 $\varphi'(0)$ 存在，则对任意 x，有

$$\varphi'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x)\varphi(\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x)[\varphi(\Delta x)-1]}{\Delta x}=\varphi(x)\cdot\varphi'(0)$$

即 $\varphi(x)$ 处处可微且满足

$$\varphi'(x)=\varphi(x)\varphi'(0) \qquad \text{解得} \qquad \varphi(x)=ce^{\varphi'(0)x}$$

又 $\varphi(0)=1$ 故 $\varphi(x)=e^{\varphi'(0)x}$

八．求解下列方程

(1) $ydx+(y-x)dy=0,\quad y(0)=1$

[解答] 原式可变换为 $ydx+ydy+xdy-2xdy=0$，即 $d(xy)+(y-2x)dy=0$

令 $xy = t$，则又变换为 $\dfrac{dt}{dy} + y - \dfrac{2t}{y} = 0$，即 $t' - \dfrac{2}{y}t = -y$

解此方程可得 $t = y^2 \cdot (-\ln y + c) = xy$

又 $y(0) = 1$，则 $c = 0$，所以 $x = -y\ln y$

(2) $x(y'+1) + \sin(x+y) = 0,\qquad y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

[解答] 令 $x + y = t$，则 $y' = t' - 1$，

则原式可变换为 $x \cdot t' + \sin t = 0$

解此方程可得 $\ln\left|\csc t - \cot t\right| = \ln \dfrac{c}{x}$，即 $\dfrac{1-\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \dfrac{c}{x}$

又 $y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$，则 $c = \dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{1-\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \dfrac{\pi}{2x}$

九．求解下列方程

(1) $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$

[解答] 令 $y' = p, y'' = p'$，则原方程可变换为 $(1+x^2)p' + p^2 + 1 = 0$

即 $\dfrac{dp}{p^2+1} = -\dfrac{dx}{x^2+1}$，积分可得 $\arctan p = -\arctan x + c$

即 $y' = p = \tan\left(c - \arctan x\right) = \dfrac{\tan c - x}{1 + x\tan c} = \dfrac{c_1 - x}{1 + c_1 x} = \dfrac{1+c_1^2}{c_1\left(1+c_1 x\right)} - \dfrac{1}{c_1}$

解得 $y=\dfrac{1+c_1^2}{c_1^2}\ln\left|1+c_1x\right|-\dfrac{x}{c_1}+c_2$

(2) $xy''+x(y')^2-y'=0 \qquad y(2)=2,y'(2)=1$

[解答] 令 $y'=p,y''=p'$，则原方程可变换为 $\dfrac{xp'-p}{p^2}+x=0\Rightarrow(\dfrac{x}{p})'=x$

解得 $\dfrac{x}{p}=\dfrac{1}{2}x^2+c_1$，又 $p(2)=y'(2)=1$，可得 $c_1=0$

所以 $y'=p=\dfrac{2}{x}$，则 $y=\ln(c_2x^2)$，又 $y(2)=2$，可得 $c_2=\dfrac{e^2}{4}$

故 $\qquad y=2+\ln(\dfrac{x}{2})^2$

(3) $2y''+(y')^2=y \qquad y(0)=2,y'(0)=1$

[解答] 令 $y'=p,y''=p\dfrac{dp}{dy}$，则原方程可变换为 $2p\dfrac{dp}{dy}+p^2=y$

令 $p^2=z$，则原方程又可变换为 $\dfrac{dz}{dy}+z=y$

解此方程可得 $z=(y')^2=(y-1)+c_1e^{-y}$，当 $y=2$时， $y'=1$，可得 $c_1=0$

则 $y'=\sqrt{y-1}\Rightarrow2\sqrt{y-1}=x+c_2$，又 $y(0)=2$，可得 $c_2=2$ 所以 $\sqrt{y-1}=\dfrac{1}{2}x+1$

十二．求解下列微分方程.

(1) $x^2y''+xy'+y=2\sin(\ln x)$

[解答] 令 $x=e^t$，即 $t=\ln x$，则原方程可变化为

$$D(D-1)y+Dy+y=2\sin t$$

即 $$\frac{d^2y}{dt^2}+y=2\sin t$$

相应特征方程为 $r^2+1=0$ $r_{1,2}=\pm i$

齐次方程通解 $y=c_1\cos t+c_2\sin t$

特解 $y^*(t)=\dfrac{1}{D^2+1}2\sin t=t\dfrac{1}{2D}2\sin t=-t\cos t$

所以原式的通解为

$$y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)-\ln x\cos(\ln x)$$

(2) $(x+1)^2y''-(x+1)y'+y=6(x+1)\ln(x+1)$

[解答] 令 $x+1=e^t$，即 $t=\ln(x+1)$，则原方程可变化为

$$D(D-1)y-Dy+y=6te^t$$

即 $$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=6te^t$$

相应特征方程为 $r^2-2r+1=0$ $r_1=r_2=1$ 齐次方程通解 $y=(c_1+c_2t)e^t$

特解 $y^*(t)=\dfrac{1}{D^2-2D+1}6te^t=e^t\dfrac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+1}6t=e^t\dfrac{1}{D^2}6t=e^tt^3$

所以原式通解为

$$y=c_1(x+1)+c_2(x+1)\ln(x+1)+(x+1)\ln^3(x+1)$$

五．一质量为 m 的物体，在粘性液体中由静止自由下落，假如液体阻力与运动速度成正比，试求物体运动的规律.

[解答] 物体受到的重力为 mg，阻力为 $-kv$，则 $-kv+mg=ma$，其中 $v=\dfrac{dx}{dt}$，

$a=\dfrac{d^2x}{dt^2}$，则方程式变为 $mx''+kx'=mg$

令 $x'=p, x''=p'$，则方程式变化为 $p'+\dfrac{k}{m}p=g$

解其对应的齐次方程，可得 $p(t)=ce^{-\frac{k}{m}t}$

令 $p(t)=c(t)e^{-\frac{k}{m}t}$ 为原方程的解，代入方程有 $c'(t)e^{-\frac{k}{m}t}=g$，

解得 $c(t)=\dfrac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}+c_1$，所以 $x'=p=\dfrac{mg}{k}+c_1e^{-\frac{k}{m}t}$，

又 $v(0)=x'(0)=0$，则 $c_1=-\dfrac{mg}{k}$

$$x=\frac{mg}{k}t+c_1(-\frac{m}{k})e^{-\frac{k}{m}t}+c_2\text{，又 } x(0)=0\text{，则 } c_2=-(\frac{m}{k})^2g$$

所以 $x=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)$

十六．有一盛满水的圆锥形漏斗，高 $10cm$，顶角 $\alpha=60^\circ$，漏斗尖处有面积为 0.5㎡ 的小孔，求水流出时漏斗内水深的变化规律，并求出全部流出所需要的时间.

[解答] 从时刻 t 到 $t+dt$ 小孔流出的水量为

$$Q_1=s\cdot v\cdot dt=0.5\times0.6\sqrt{2gh}dt=0.3\sqrt{2gh}dt$$

在此时间内，液面由 h 降至 $h+dh(dh<0)$，水量减少为 $Q_2=-\pi(\frac{\sqrt{3}}{3})^2dh$

由题意可知 $Q_1=Q_2$，则 $0.3\sqrt{2gh}dt=-\pi(\frac{\sqrt{3}}{3})^2dh$，且当 $t=0$ 时，$h=10$ ㎝.

所以方程为 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}h^2dh=0.3\sqrt{2gh}dt\\ h(0)=10\end{cases}$

当水全部流出时，$h=0$，$t\approx10(s)$.

十七．设经过原点的曲线族上任一点 P 处的切线交 x 轴于点 T，从 P 点向 x 轴作垂线，其垂足为 Q，已知 PT,PQ 与 x 轴所围成的三角形的面积与曲边三角形 OPQ 的面积之比等于常数 k，$k>\frac{1}{2}$ 试求该曲线族.

[解答] $P(x,y)$ 为曲线上一点，则切线 PT 的方程为 $Y-y=y'(X-x)$，T 坐标为

$(x-\frac{y}{y'},0)$，由题意可知

三角形 ΔPTQ 的面积为 $S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{y'}\cdot y$

曲边三角形 ΔOPQ 的面积为 $S_2=\int_0^x ydx$

又 $S_1/S_2=k$，则 $k\int_0^x ydx=\frac{y^2}{2y'}$，对方程两边求导可得 $2ky(y')^2=2y(y')^2-y''y^2$

化简可得 $yy''+2(k-1)(y')^2=0$

令 $py\frac{dp}{dy}+2(k-1)p=0$，代入方程可得 $py\frac{dp}{dy}+2(k-1)p=0$

解得 $p=cy^{2(1-k)}$，即 $\frac{dy}{dx}=cy^{2(1-k)}$

又 $k>\frac{1}{2}$，则解得 $\frac{1}{2k-1}y^{2k-1}=cx$，即 $y^{2k-1}=cx$.

十八．有一房间容积为 100 m^3，开始时房间空气中含有二氧化碳 0.12%，为了改善房间的空气质量，用一台风量为 10 m^3/分的排风扇通入含 0.04% 的二氧化碳的新鲜空气，同时以相同的风量将混合均匀的空气排出，求排出 10 分钟后，房间中二氧化碳含量的百分比？

[解答] 设在 t 时刻，co_2 的含量为 $x\%$，则在 dt 时间内进入房间的 co_2 的含量为

$10\times0.04\%dt=0.004dt$，排出房间的 co_2 的含量为 $10\times x\%dt=0.1xdt$

所以在 dt 内 co_2 的改变量为

$dx = 0.004dt - 0.1xdt$ 化简得 $\frac{dx}{dt} + 0.1x = 0.004$

解得 $x = 0.04 + ce^{-0.1t}$ 又 $x(0) = 0.12$ 则 $c = 0.08$，即 $x = 0.04 + 0.08e^{-0.1t}$

所以当 $t = 10$时， $x = 0.04 + 0.08e^{-1} = 0.07$，即 co_2 的含量为 0.07%.

习　题　七

2．填空题

(1) 函数 $F(x) = \int_1^x (2 - \frac{1}{\sqrt{t}})dx \ (x > 0)$ 的单调减少区间__

[解答] $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$，令 $F'(x) = 0$，可得 $x = \frac{1}{4}$

当 $0 < x < \frac{1}{4}$时， $F'(x) < 0$， $F(x)$ 单调递减.

所以 $F(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \frac{1}{4})$ 或 $(0, \frac{1}{4}]$.

(2) 曲线 $y = x^3 - x$ 与其在 $x = \frac{1}{3}$ 处的切线所围成的部分被 y 轴分成两部分,这两部分面积之比是__

[解答] 直线方程为 ，即 $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{27}$，

两直线的交点可求得 $x^3 - x = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{27}$，即求解 $27x^3 - 9x + 2 = 0$

方法一：已知其一根为 $x_1 = \frac{1}{3}$，设方程为 $(x - \frac{1}{3})(ax^2 + bx + c) = 0$

通过比较可得 $a=27,b=9,c=-6$，可解得另外一根为 $x_2=-\frac{2}{3}$

方法二：分解方程有 $27x^3-3x-6x+2=0$

$$3x(3x-1)(3x+1)-2(3x-1)=0$$

$$(3x-1)(9x^2-3x-2)=0 \quad 即 \quad (3x-1)^2(3x+2)=0$$

所以

$$S_1=\int_{-\frac{2}{3}}^{0}[(x^3-x)+(\frac{2}{3}x+\frac{2}{27})]dx=\int_{-\frac{2}{3}}^{0}(x^3-\frac{1}{3}x+\frac{2}{27})dx=\frac{2}{27}$$

$$S_2=\int_{0}^{\frac{1}{3}}[(x^3-x)+(\frac{2}{3}x+\frac{2}{27})]dx=\frac{3}{324}$$

则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{8}{1}$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，当 $a=$__时， $F(a)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-a\cos nx]^2dx$ 取最小值.

[解答] $F(a)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-a\cos nx]^2dx$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f^2(x)-2af(x)\cos nx+a^2\cos^2 nx]dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2a\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx+a^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx$$

令 $F'(a)=0$，则

$$2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx$$

即 $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 2a\int_{0}^{\pi}\cos^2 nx dx \quad = a\int_{0}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx = a\pi$$

所以 $$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

(4) $x^2+y^2=a^2$ 绕 $x=-b\ (b>a>0)$ 旋转所成旋转体体积__

[解答] 令 $x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi$，则

当 $x>0$ 时，

$$V_1 = \pi\int_{-a}^{a}(x+b)^2 dy$$

$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a^2\cos^2\varphi+2ab\cos\varphi+b^2)a\cos\varphi d\varphi = \pi(\frac{4}{3}a^3+\frac{\pi}{2}a^2b+2ab^2)$$

当 $x<0$ 时，

$$V_2 = \pi\int_{a}^{-a}(x+b)^2 dy$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(a^2\cos^2\varphi+2ab\cos\varphi+b^2)a\cos\varphi d\varphi = \pi(-\frac{4}{3}a^3+\frac{\pi}{2}a^2b-2ab^2)$$

所以

$$V = V_1 - V_2 = 4\pi(ab^2+\frac{2}{3}a^3)$$

(5) 求心脏线 $\rho=4(1+\cos\theta)$ 和直线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成的图形绕极轴旋转所成旋转体体积__

[解答] 将极坐标化为直角坐标形式为 $x=4(1+\cos\theta)\cos\theta$， $y=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

则 $dv=\pi y^2dx=64\pi(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot[-\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta]d\theta$

$$=64\pi(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\sin^3\theta d\theta$$

所以 $V=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)\qquad(x=\cos\theta)$

$$=64\pi\int_0^1(1+x)^2(1+2x)(1-x^2)dx$$

$$=64\pi\int_0^1(1+x)^3(1+2x)(1-x)dx\qquad(t=1+x)$$

$$=64\pi\int_1^2 t^3(2-t)(2t-1)dt$$

$$=64\pi(5t^4-2t^5-2t^3)_1^2\quad=160\pi$$

4．计算题

(1) 在直线 $x-y+1=0$ 与抛物线 $y=x^2-4x+5$ 的交点上引抛物线的法线，求由两法线及连接两交点的弦所围成的三角形的面积.

[解答] 由题意可计算两法线的方程为

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1)\text{，即 }x-2y+3=0$$

$$y-5=-\frac{1}{4}(x-4)\text{，即 }x+4y-24=0$$

两直线的交点为 $(6,\frac{9}{2})$，则

$$S=\int_1^4(x+1-\frac{x+3}{2})dx+\int_4^6(\frac{24-x}{4}-\frac{x+3}{2})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4(x-1)dx+\frac{1}{4}\int_4^6(18-3x)dx$$

$$=\frac{15}{4}$$

(2) 过抛物线 $y=x^2$ 上的一点 (a,a^2) 作切线，问 a 为何值时所作的切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围成的面积最小.

[解答] 直线的斜率 $k=2x=2a$，则直线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，与抛物线相交，

即 $x^2+(2a-4)x+1-a^2=0$，设方程的两根为 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$，则

$x_1+x_2=4-2a$， $x_1x_2=1-a^2$ 从而

$$x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{2a^2-4a+3}$$

$$x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)=4(2-a)\sqrt{2a^2-4a+3}$$

$$S=\int_{x_1}^{x_2}(-x^2+4x-1-2ax+a^2)dx=\int_{x_1}^{x_2}[a^2-1-x^2+(4-2a)x]dx$$

$=$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2a^2-4a+3}\cdot(2a^2-4a+3)$$

$$=\frac{4}{3}(2a^2-4a+3)^{\frac{3}{2}}$$

$$S' = 2\sqrt{2a^2 - 4a + 3}(4a - 4) = 0$$

又 $2a^2 - 4a + 3 > 0$，所以 $a = 1$

⑶ 求通过点 $(1,1)$ 的直线 $y = f(x)$ 中使得 $\int_0^2 [x^2 - f(x)]^2 dx$ 为最小的直线方程.

[解答] 设 $y - 1 = k(x - 1)$，则 $y = f(x) = kx + 1 - k = kx + b \quad (b = 1 - k)$

则 $F(x) = \int_0^2 [x^2 - f(x)]^2 dx = \int_0^2 [x^4 - 2x^2 f(x) + f^2(x)]dx$

$$= \int_0^2 [x^4 - 2kx^3 + (k^2 - 2b)x^2 + 2kbx + b^2]dx$$

$$= \frac{32}{5} - 8k + \frac{8}{3}(k^2 - 2b) + 4kb + 2b^2$$

$$= \frac{32}{5} + 2 - 8k + \frac{8k^2 + 16k - 16}{3} - 2k^2$$

由 $F'(x) = 0$ 可得 $-8 + \dfrac{16k + 16}{3} - 4k = 0$ 即 $4k = 8$ 可得 $k = 2$

又 $F''(x) > 0$ 则当 $k = 2$ 时 $F(x)$ 为最小，此时 $f(x)$ 方程为 $f(x) = 2x - 1$

⑷ 求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2 - t)e^{-t} dt$ 的最大值与最小值.

[解答] $f'(x) = 2x(2 - x^2)e^{-x^2}$ 令 $f'(x) = 0$，可得

$$f''(x) = 2(2 - 3x^2)e^{-x^2} - 4x(2x - x^3)e^{-x^2}$$

当 $x=0$ 时， $f''(0)>0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 取最小值，此时 $f(x)=0$

当 $x=\sqrt{2}$ 时， $f''(\sqrt{2})=-8e^{-2}<0$，即 $f(x)$ 在 $x=\sqrt{2}$ 取最大值

此时 $f(x)=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=1+e^{-2}$.

⑸ 求曲线 $y=x^3-2x$ 与 $y=x^2$ 所围阴影部分面积 S，并将此面积绕 y 轴旋转所构成的旋转体体积，如图所示.

[解答] $S=\int_{-1}^0(x^3-2x-x^2)dx+\int_0^2(x^2-x^3+2x)dx$

$$=(\frac{x^4}{4}-x^2-\frac{x^3}{3})_{-1}^0+(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^2)_0^2 \qquad =\frac{37}{12}$$

$$V=2\pi\int_{-1}^0 x(x^3-2x-x^2)dx+2\pi\int_0^2 x(x^2-x^3+2x)dx$$

$$=2\pi(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4})_{-1}^0+2\pi(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3})_0^2$$

$$=\frac{163}{30}\pi$$

⑹ 已知圆 $(x-b)^2+y^2=a^2$，其中 $b>a>0$，求此圆绕 y 轴旋转所构成的旋转体体积和表面积.

[解答] 令 $y=a\sin\theta$，如图所示，则

$$V_y=\int_{-a}^a\pi(b+\sqrt{a^2-y^2})^2dy-\int_{-a}^a\pi(b-\sqrt{a^2-y^2})^2dy$$

$$= 4\int_{-a}^{a} \pi b\sqrt{a^2 - y^2}dy = 8\int_{0}^{a} \pi b\sqrt{a^2 - y^2}dy$$

$$= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \pi b a^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 2a^2 b\pi^2$$

$$S = \int_{-a}^{a} 2\pi(b - \sqrt{a^2 - y^2})^2 \sqrt{1 + (\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}})^2}dy$$

$$+ \int_{-a}^{a} 2\pi(b + \sqrt{a^2 - y^2})^2 \sqrt{1 + (\frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}})^2}dy$$

$$= 4\pi\int_{-a}^{a} \frac{ab}{\sqrt{a^2 - y^2}}dy$$

$$= 8\pi ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a\cos\theta} \cdot a\cos\theta d\theta = 4ab\pi^2$$

⑺ 设有一薄板其边缘为一抛物线，如图所示，铅直沉入水中，

① 若顶点恰好在水平面上，试求薄板所受的静压力，将薄板下沉多深，压力加倍？

[解答] 抛物线方程为 $x = \frac{5}{9}y^2$，则在水下 x 到 $x + dx$ 这一小块所受的静压力为

$$dP = 6x\sqrt{\frac{x}{5}}dx$$

所以整块薄板所受的静压力为

$$P_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}\int_{0}^{20} x^{\frac{3}{2}}dx = 1920$$

若下沉 l，此时受到的静压力为

$$P_2 = 6\int_0^{20}(6+x)\sqrt{\frac{x}{5}}dx = 160l + 1920$$

要使 $P_2 = 2P_1$，解得 $l = 12$.

② 若将薄板倒置使弦恰好在水平面在上，试求薄板所受的静压力，将薄板下沉多深，压力加倍？

[解答] 建立如图坐标系，则抛物线方程为 $x = \frac{5}{9}y^2$，则在水下 x 到 $x+dx$ 这一小块所受的静压力为

$$dP = 6(20-x)\sqrt{\frac{x}{5}}dx$$

所以整块薄板所受的静压力为

$$P_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}\int_0^{20}(20-x)\sqrt{x}dx = \frac{120}{\sqrt{5}}\int_0^{20}\sqrt{x}dx - \frac{6}{\sqrt{5}}\int_0^{20}x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= 3200 - 1920 = 1280$$

若下沉 l，此时受到的静压力为

$$P_2 = 6\int_0^{20}(20+l-x)\sqrt{\frac{x}{5}}dx = 160l + 1280$$

要使 $P_2 = 2P_1$，解得 $l = 8$.

第八章、第九章没有答案!!

习　　　　题　　　　十

1．设 f,g 为连续的可微函数， $u=f(x,xy),v=g(x+xy)$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$.

[解答] 令 $w=xy$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial w}\quad,\quad\frac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g'$$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g'\cdot(\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial w})$$

2．设 $x^2+z^2=y\varphi(\frac{z}{y})$，其中 φ 为可微函数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

[解答] 直接对 y 求导可得

$$2z\cdot z'=\varphi(\frac{z}{y})+y\varphi''(\frac{z}{y})\cdot\frac{z'y-z}{y^2}$$ 化简可得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y\varphi(\frac{z}{y})-z\varphi'(\frac{z}{y})}{2yz-y\varphi'(\frac{z}{y})}$$

3．设 $u=f(x,y,z)$，又 $y=\varphi(x,t),t=\phi(x,z)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

[解答] 直接对 x 求导可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x'+f_y'\varphi_x'+f_y'\varphi_t'\phi_x'$$

4．求下列方程确定函数的全微分.

(1) $f(x+y,y+z,z+x)=0$，求 dz.

[解答] 直接微分可得

$$f_1'd(x+y)+f_2'd(y+z)+f_3'd(z+x)=0$$

即 $f_1'(dx+dy)+f_2'(dy+dz)+f_3'(dz+dx)=0$ 化 简 可 得

$$dz=-\frac{(f_1'+f_3')dx+(f_1'+f_2')dy}{f_2'+f_3'}$$

(2) $z=f(xz,z-y)$，求 dz.

[解答] $dz=f_1'(zdx+xdz)+f_2'(dz-dy)$ 化简可得 $dz=\dfrac{-zf_1'dx+f_2'dy}{xf_1'+f_2'-1}$

5．设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[解答] $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'e^x\sin y+2xf_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f_{11}''e^x\cos y+2yf_{12}'')e^x\sin y+f_1'e^x\cos y+2x(f_{21}''e^x\cos y+2yf_{22}'')$$

$$=f_{11}''e^{2x}\sin y\cos y+2e^x(y\sin y+x\cos y)f_{12}''+4xyf_{22}''+f_1'e^x\cos y$$

6．已知 $z=f(2x,\dfrac{x}{y})$，求 z_{x^2}'',z_{y^2}''.

[解答] $z_x'=2f_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$

$$z_{x^2}''=2(2f_{11}''+\frac{1}{y}f_{12}'')+\frac{1}{y}(2f_{21}''+\frac{1}{y}f_{22}'')\qquad=4f_{11}''+\frac{4}{y}f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}''$$

$$z'_y=-\frac{x}{y^2}f'_2$$

$$z''_{y^2}=f''_{22}(-\frac{x}{y^2})^2+\frac{2}{y^3}f'_2=\frac{x^2}{y^4}f''_{22}+\frac{2x}{y^3}f'_2$$

7．已知 $z=f(x\ln y,x-y)$，求 $z''_{x^2},z''_{xy},z''_{y^2}$.

[解答] $z'_x=\ln yf'_1+f'_2$

$$z''_{x^2}=\ln y(\ln yf''_{11}+f''_{12})+\ln yf''_{21}+f''_{22}\qquad=(\ln y)^2f''_{11}+2\ln yf''_{12}+f''_{22}$$

$$z''_{xy}=\ln y(\frac{x}{y}f''_{11}-f''_{12})+\frac{1}{y}f'_1+\frac{x}{y}f''_{21}-f''_{22}$$

$$=\frac{x}{y}\ln yf''_{11}+(\frac{x}{y}-\ln y)f''_{12}-f''_{22}+\frac{1}{y}f'_1$$

$$z'_y=\frac{x}{y}f'_1-f'_2$$

$$z''_{y^2}=\frac{x}{y}(\frac{x}{y}f''_{11}-f''_{12})-\frac{x}{y^2}f'_1-\frac{x}{y}f''_{21}+f''_{22}=\frac{x^2}{y^2}f''_{11}-\frac{2x}{y}f''_{12}+f''_{22}-\frac{x}{y^2}f'_1$$

8．设 $y=y(x),z=z(x)$，由 $\begin{cases}x+y+z+z^2=0\\x+y^2+z+z^3=0\end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$.

[解答] 对方程组求导可得

$$\begin{cases}1+y'+z'+2z\cdot z'=0\\1+2y\cdot y'+z'+3z^2\cdot z'=0\end{cases}$$

求解可得 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2y-1}{1+3z^2-2y-4yz}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2z-3z^2}{1+3z^2-2y-4yz}$

9．设 $z=xf(\dfrac{y}{x})+\varphi(\dfrac{y}{x})$，求 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

[解答] $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f+xf'\cdot(-\dfrac{y}{x^2})+\varphi'\cdot(-\dfrac{y}{x^2})=f-\dfrac{y}{x}f'-\dfrac{y}{x^2}\varphi'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x^3}f''+\frac{2y}{x^3}\varphi'+\frac{y^2}{x^4}\varphi''$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'+\frac{\varphi'}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{f''}{x}+\frac{\varphi''}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{x^2}f''-\frac{1}{x^2}\varphi'-\frac{y}{x^3}\varphi''$$

所以 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$=\frac{y^2}{x}f''+\frac{2y}{x}\varphi'+\frac{y^2}{x^2}\varphi''-\frac{2y^2}{x}f''-\frac{2y}{x}\varphi'-\frac{2y^2}{x^2}\varphi''+\frac{y^2}{x}f''+\frac{y^2}{x^2}\varphi''=0$$

10．设 $z=f[x^2-y,\varphi(xy)]$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续导数，$\varphi(u)$ 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[解答] $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+y\varphi f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(x\varphi' f_{12}''-f_{11}'')+\varphi' f_2'+y\varphi'(x\varphi' f_{22}''-f_{21}'')+xy\varphi'' f_2'$$

$$=(\varphi'+xy\varphi'')f_2'-2xf_{11}''+(2x^2-y)\varphi' f_{12}''+xy(\varphi')^2f_{22}''$$

11．已知 $z=z(u)$，且 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$，其中 $z(u)$ 可微， $\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$， $p(t)$ 连续 ，试求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

[解答] $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$，又 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+p(x)$ 即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{p(x)}{1-\varphi'(u)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$，又 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}+p(y)$ 即 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}$

$$\therefore\quad p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=p(y)\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)}+p(x)\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}=0$$

12．设 $F(x,y(x),z(x))=P(x,y(x))+Q(x,y(x))z(x)$，其中出现的函数是连续可微的，试计算 $\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}(\dfrac{\partial F}{\partial z})$.

[解答] $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial y}+\dfrac{\partial Q}{\partial Y}\cdot z(x)\qquad \dfrac{\partial F}{\partial z}=Q(x,y(x))$

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial z})=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y'(x)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial z})=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}+[z(x)-y'(x)]\frac{\partial Q}{\partial y}$$

13．设 $z=u(x,y)e^{ax+y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试确定常数 a，使 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

[解答] $\frac{\partial z}{\partial x}=u'_x e^{ax+y}+aue^{ax+y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=u'_y e^{ax+y}+ue^{ax+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=u''_{xy}e^{ax+y}+u'_x e^{ax+y}+au'_y e^{ax+y}+aue^{ax+y}$$

由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=u'_y e^{ax+y}(a-1)=0 \quad \Rightarrow a=1$

14．若 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中有 $f(u)$ 连续的二阶导数，求 z.

[解答] 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3})$

同理 $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3})$

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=0$

化简得 $rf''(r)+f'(r)=0$ 即 $[rf'(r)]'=0$

解得 $z=c_1\ln r+c_2$

即 $z=c_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+c_2$ （c_1,c_2 为任意常数)

15．求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=12$ 的平行于平面 $x+4y+3z=0$ 的切平面方程.

[解答] 曲面方程在 $M(x,y,z)$ 处切平面的法向量为 $(2x,4y,6z)$

则曲面在 M 处切平面方程为 $2x(X-x)+4y(Y-y)+6z(Z-z)=0$

由题意可知 $\dfrac{2x}{1}=\dfrac{4y}{4}=\dfrac{6z}{3}=t$，即 $x=\dfrac{t}{2},y=t,z=\dfrac{t}{2}$ 则

$$\frac{t^2}{4}+2t^2+\frac{3}{4}t^2=12$$

解得 $t=\pm 2$ 即 $x=\pm 1,y=\pm 2,z=\pm 1$

所以切平面的方程为 $x+4y+3z-12=0$ 或 $x+4y+3z+12=0$

16.求圆周 $x^2+y^2+z^2-3x=0,2x-3y+5z-4=0$ 在 $M(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程.

[解答] 由题意，对 x 求导得：

$2x+2yy'+2zz'-3=0$ ， $2-3y'+5z'=0$

可解得 $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{5z'+2}{3}=\frac{9}{16}$ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{9-6x-4y}{10y+6z}=-\frac{1}{16}$

所以，圆周在 $M(1,1,1)$ 的切向量 $T=\{1,\frac{9}{16},-\frac{1}{16}\}$

$\therefore$ 圆周在 $M(1,1,1)$ 处的切线方程为 $\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$

法平面方程为 $16x+9y-z-24=0$

17. 试求函数 $z=x^2+y^2-xy+x+y$ 在闭区域上 $D: x\le 0, y\le 0$ 与 $x+y\ge -3$ 的最大值

[解答] 先求函数在 D 内的驻点

由 $z_x'=2x-y+1=0, z_y'=2y-x+1=0$ 可得 $x=-1, y=-1$，即函数在 D 内只有唯一的驻点 $(-1,-1)$， $z(-1,-1)=-1$

再求在边界上的最值

在边界 $x=0(-3\le y\le 0)$， $z=y^2+y$，此时 $z_{\max}(-3)=6, z_{\min}(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$

在边界 $y=0(-3\le x\le 0)$， $z=x^2+x$，此时 $z_{\max}(-3)=6, z_{\min}(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$

在 $x+y=-3$ 上，将 $y=-3-x$ 代入 z 中化简可得 $z=3x^2+9x+6$

$z_x'=6x+9=0$，可得 $x=-\frac{3}{2}$，此时 $z=-\frac{1}{4}$

$\therefore$ $z_{\max}=6, z_{\min}=-1$

18．在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内作内接直角平行六面体，求其最大体积.

[解答] 设 (x,y,z) 位于第一挂限内椭球面上，则 $V=8xyz$，由题意有

$$L(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$$ 则

$$\begin{cases} L_x' = 8yz+\frac{2x\lambda}{a^2}=0 \\ L_y' = 8xz+\frac{2y\lambda}{b^2}=0 \\ L_z' = 8xy+\frac{2z\lambda}{c^2}=0 \\ L_\lambda' = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

解得唯一解 $x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$

所以 $V_{\max}=8xyz=\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$

19．求原点到曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 的最短距离.

[解答] 设 (x,y,z) 位于球面 $(x-y)^2-z^2=1$ 上，则 $S=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

令 $f(x,y,z)=S^2=x^2+y^2+z^2$，由题意可得，即求 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $(x-y)^2-z^2=1$ 下的最小值.

$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1]$，则

$$\begin{cases} L_x'=2x+2\lambda(x-y)=0 \\ L_y'=2y-2\lambda(x-y)=0 \\ L_z'=2z-2z\lambda=0 \\ L_\lambda'=(x-y)^2-z^2-1=0 \end{cases}$$

当 $z\neq 0$时，无解

当 $z=0$时，由 $(x-y)^2=1, x+y=0$，可得 $x=-y=-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \quad S_{\min}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

20．当时 $x>0,y>0,z>0$，求函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值，并证明对任意的正实数 a,b,c 成立不等式

$$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$$

[解答] 由题意可得

$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^3)$，则

$$\begin{cases} L_x'=\dfrac{1}{x}+2x\lambda=0 \\ L_y'=\dfrac{2}{y}+2y\lambda=0 \\ L_z'=\dfrac{3}{z}+2z\lambda=0 \\ L_\lambda'=x^2+y^2+z^2-6r^2=0 \end{cases}$$

解得 $x=r, y=\sqrt{2}r, z=\sqrt{3}r$，

即 u 在 $(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)$ 处值最大，此时 $u=\ln xy^2z^3=\ln(6\sqrt{3}r^6)$

对于任意正数 a,b,c ，设 $a+b+c=D$ ，即求 $f(a,b,c)=ab^2c^3$ 在条件：$a+b+c=D$ 下的最大值，则

$$L(a,b,c,\lambda)=ab^2c^3+\lambda(a+b+c-D)$$

$$\begin{cases} L_a'=b^2c^3+\lambda=0 \\ L_b'=2abc^3+\lambda=0 \\ L_c'=3ab^2c^2+\lambda=0 \\ L_\lambda'=a+b+c-D=0 \end{cases}$$

解得唯一解 $a=\dfrac{D}{6}, b=\dfrac{D}{3}, c=\dfrac{D}{2}$

又 f 在平面 $a+b+c=D$ 位于第一挂限部分的边界上为零，故 f 在点 $(\dfrac{D}{6},\dfrac{D}{3},\dfrac{D}{2})$ 处取最大值，即有

$$ab^2c^3\le(\frac{D}{6})\cdot(\frac{D}{3})^2\cdot(\frac{D}{2})^3=108(\frac{D}{6})^6=108(\frac{a+b+c}{6})^6$$

21．过平面 $x+28y-2z+17=0$ 和平面 $5x+8y-z+1=0$ 的交线，作球面 $x^2+y^2+z^2-=1$ 的切平面，求切平面方程.

[解答] 由平面束方程可知，所求平面方程为

$$x+28y-2z+17+\lambda(5x+8y-z+1)=0$$

化简可得

$$(5\lambda+1)x+(28+8\lambda)y-(2+\lambda)z+17+\lambda=0$$

由题意可得点到平面距离为

$$\frac{|17+\lambda|}{\sqrt{(5\lambda+1)^2+(28+8\lambda)^2+(2+\lambda)^2}}=1$$

化简可得 $89\lambda^2+428\lambda+500=0$ 即 $(\lambda+2)(89\lambda+250)=0$

解得 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=-\dfrac{250}{89}$

当 $\lambda=-2$ 时，代入方程可得切平面方程为 $3x-4y-5=0$

当 $\lambda=-\dfrac{250}{89}$ 时，代入方程可得切平面方程为 $387x-164y-24z-421=0$

22．求直线 $l_1:\begin{cases}x=3z-1\\y=2z-3\end{cases}$ 与直线 $l_2:\begin{cases}y=2x-5\\z=7x+2\end{cases}$ 之间的垂直距离.

[解答] 过 l_1 作平行于 l_2 的平面，设平面的法向量为 n，则 n 同时垂直于 l_1 和 l_2 的方向向量，故

$$n=s_1\times s_2=\{3,2,1\}\times\{1,2,7\}=\{12,-20,4\}$$

所求得的平面方程为

$$12(x+1)-20(y+3)+4z=0$$

化简可得 $3x-5y+z-12=0$

设 $M(0,-5,2)$ 是 l_2 上的一点，则 M 到平面的距离为

$$d=\frac{|25+2-12|}{\sqrt{35}}=\frac{3\sqrt{35}}{7}$$

故所求直线的距离为 $\dfrac{3\sqrt{35}}{7}$.

习 题 十 一

4．求解下列二重积分：

(1) $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$

[解答] 原式 $=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=\frac{4}{\pi^2}(1+\frac{2}{\pi})$

(2) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$

[解答] 原式 $=\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dx=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}(1-y^2)dy$

$$=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy-\int_0^1 y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy+[ye^{-\frac{y^2}{2}}]_0^1-\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

(3) $\iint\limits_D \frac{\sin xy}{x} dxdy$　D：由 $x = y^2$ 与 $x = 1 + \sqrt{1-y^2}$ 所围的区域

[解答] 积分区域 D 关于 x 对称，同时被积函数是关于 y 的奇函数，所以原式 $= 0$.

(4) $\iint\limits_D \frac{y}{x^6} dxdy$　D：由 $y = x^4 - x^3$ 的上凸弧段部分与 x 轴所形成的曲边梯形

[解答] 对 $y = x^4 - x^3$ 求二次导数，由题意可得 $y'' = 12x^2 - 6x < 0$ 时在此区间上为上凸区间，即 $0 < x < \frac{1}{2}$

所以，原式 $= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x^4-x^3}^{0} \frac{y}{x^6} dy = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)^2 dx = -\frac{7}{48}$

(5) $\iint\limits_D \frac{xy}{x+y} d\sigma$　D：$y \ge x, 1 \le x^2 + y^2 \le 2$

[解答] 原式 $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2 \sin\theta \cos\theta}{r^2} \cdot r dr$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r \sin\theta \cos\theta dr$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin 2\theta d\theta = 0$$

5．计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2} dxdy$　D：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$

[解答] 由广义极坐标：$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = ar\sin\theta \end{cases}$，则 $D_{xy} \leftrightarrow D_{r\theta}$、$0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$，由区域与函数的对称性可得：

$$\text{原式} = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abr\sqrt{1 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}\,dr = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$= -\pi ab\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2) = \frac{2}{3}ab\pi$$

(2) $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy \qquad D$：$\xi^2 \le x^2+y^2 \le 1$，并求上序二重积分当 $\xi \to 0^+$ 的极限

[解答] 原式 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_\xi^1 r\ln r^2 dr = \pi(\xi^2 - 2\xi^2\ln\xi - 1)$

$$\because \quad \lim_{\xi\to 0^+}\xi^2 = 0 \;, \quad \lim_{\xi\to 0^+}\xi^2\ln\xi = \lim_{\xi\to 0^+}\frac{\ln\xi}{\frac{1}{\xi^2}} = \lim_{\xi\to 0^+}\frac{\frac{1}{\xi}}{-\frac{1}{\xi^3}} = 0$$

$\therefore$ 原式 $= -\pi$

(3) $\int_0^a dx\int_0^x \dfrac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy$

[解答] 原式 $= \int_0^a f'(y)dy\int_y^a \dfrac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx$

$$= \int_0^a f'(y)dy\int_y^a \frac{1}{\sqrt{(\frac{a-y}{2})^2 - (x - \frac{a+y}{2})^2}}dx$$

$$=\int_0^a f'(y)[\arcsin 1-\arcsin(-1)]dy$$

$$=\pi\int_0^a f'(y)dy$$

$$=\pi[f(a)-f(0)]$$

(4) $\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy\qquad D:\quad x^2+y^2\le 1, x\ge 0$ 及 $y>0$

[解答] 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sqrt{\dfrac{1-r^2}{1+r^2}}dr=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}dt\qquad(r^2=t)$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{\pi}{4}[(\arcsin t)_0^1+(\sqrt{1-t^2})_0^1]$$

$$=\frac{\pi}{8}(\pi-2)$$

8．设 $f(t)$ 是半径为 t 的周长，证明：

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^a f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

证明：将积分化为极坐标形式为

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=\frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{-\frac{r^2}{2}}2\pi rdr=\frac{1}{2\pi}\int_0^a f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

9．设 $p(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负连续函数， $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增，证明：

$$\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx \le \int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

证明：左边 $\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(y)g(y)dy = \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(x)g(y)dxdy$ (1)

右边 $= \int_a^b p(y)dy\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx = \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(x)g(x)dxdy$ (2)

(2) — (1) 可得

$$\Delta = \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(x)[g(x)-g(y)]dxdy = \int_a^b\int_a^b p(y)p(x)f(y)[g(y)-g(x)]dxdy$$

(2) ＋ (1) 可得

$$2\Delta = \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]dxdy$$

由于 f,g 都是连续且单调递增函数，所以

$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \ge 0$，即 ，从而 $\Delta \ge 0$，则

$$\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx \le \int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

10．设 m,n 均为正整数，且其中至少有一个是奇数，证明：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} x^m y^n = 0$$

证明：当 n 为奇数时，将积分化为先对 y 后对 x 的二重积分

$$I = \int_{-a}^a x^m dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^n dy$$

因为 n 为奇数，于是 y^n 关于 y 是奇函数

从而 $\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^n dy = 0$，所以 $I = 0$.

当 m 为奇数时，同理可证 $I = 0$.

11．设函数 $f(x)$ 在 $[0,t]$ 上连续，令 $F(t) = \int_0^t dz\int_0^z dy\int_0^y (y-z)^2 f(x)dx$，证明：

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{3}\int_0^t (t-x)^3 f(x)dx$$

证明：$\frac{dF}{dt} = \int_0^t dy\int_0^y (y-t)^2 f(x)dx = \int_0^t f(x)dx\int_x^t (y-t)^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^t (t-3)^3 f(x)dx$

12．计算 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \frac{\sin z}{1-z}dz$

[解答] 原式 $= \int_0^1 \frac{\sin z}{1-z}dz\int_z^1 dx\int_z^x dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin z}{1-z}\cdot(z-1)^2 dz$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)\sin z dz$$

$$= \frac{1}{2}(z\cos z - \cos z - \sin z)_0^1$$

$$= \frac{1-\sin 1}{2}$$

13．$\iiint\limits_{\Omega} (2y+\sqrt{x^2+z^2})dxdydz$， Ω：由 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=4a^2$ 及 $x^2-y^2+z^2=0 (y\geq 0, a>0)$ 所围之区域.

[解答] 设 $x = r\sin\varphi\cos\theta, z = r\sin\varphi\sin\theta, y = r\cos\varphi$，则

$$I=\iiint_{\Omega}(2r\cos\varphi+r\sin\varphi)r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos\varphi+\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi\int_a^{2a}r^3dr$$

$$=\pi\cdot(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8})\cdot\frac{15}{2}a^4$$

$$=\frac{15\pi}{16}(2+\pi)a^4$$

14．计算下列三重积分：

(1) $\iiint_{\Omega}(1+x+y+z)^{-3}dv$， Ω：由 $x+y+z=1,x=0,y=0$ 及 $z=0$ 所围形体

[解答] 原式 $=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)^{-3}dz$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}]dy$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1-x}{8}-\frac{1}{4}]dx$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$$

(2) $\iiint_{\Omega}e^{x+y+z}dv$， a^2： $y=1,y=-x,x=0,z=0$ 及 $z=-x$ 所围形体

[解答] 原式

$$=\int_{-1}^0 dx\int_{-x}^1(e^y-e^{x+y})dy$$

$$\int_{-1}^{0}(e+1-e^{1+x}-e^{-x})dx$$

$$=3-e$$

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}dv$， Ω：由 yoz 面上的区域 D 绕 z 轴旋转一周而成的空间区域，其中

$$D：\quad y^2+z^2\le 1, z\ge 2y-1, y\ge 0, z\ge 0$$

[解答] 利用“先二后一”法将区间分为两部分

$$\Omega_1：\quad x^2+y^2\le 1-z^2，\quad \frac{4}{5}\le z\le 1$$

$$\Omega_2：\quad \sqrt{x^2+y^2}\le\frac{z+1}{2}，\quad 0\le z\le\frac{4}{5}$$

则原式 $=\int_{\frac{4}{5}}^{1}2zdz\iint\limits_{\Omega_1}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+\int_{0}^{\frac{4}{5}}2zdz\iint\limits_{\Omega_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

$$=\int_{\frac{4}{5}}^{1}2zdz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1-z^2}}dr+\int_0^{\frac{4}{5}}2zdz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{z+1}{2}}dr$$

$$=4\pi\int_{\frac{4}{5}}^{1}z\sqrt{1-z^2}dz+2\pi\int_0^{\frac{4}{5}}z(z+1)dz$$

$$=\frac{89}{75}\pi$$

(4) $\iiint\limits_{\Omega}xydv$, Ω：由 $z=xy, x+y=1$ 及 所围形体

[解答] 原式 $=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{xy}xydz$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 y^2 dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5)dx \quad = \frac{1}{180}$$

(5) $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$，$\Omega$：由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围的空间区域

[解答] 原式 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{\pi}{20}$

(6) $\iiint\limits_{\Omega} r^2 dv$， Ω 为底面为单位正方形，高为 h 的正四棱锥体，而 r 为锥体中任一点到顶点 P 的距离

[解答] 以底面正方形中心为 O，建立坐标系，其中 $A(\frac{1}{2},0,0)$， $B(0,\frac{1}{2},0)$， $C(0,0,h)$， $E(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，则 $r^2 = x^2+y^2+(z-h)^2$，此函数关于 x,y 对称，故只需计算第一象限上的部分，由于 CEB,CEA 的方程分别为 $z=h(1-2y)$ 和 $z=h(1-2x)$，所以

原式 $= 4\iiint [x^2+y^2+(z-h)^2]dv$

$$4\{\iiint\limits_{\Omega_1} [x^2+y^2+(z-h)^2]dv + \iiint\limits_{\Omega_2} [x^2+y^2+(z-h)^2]dv\}$$

$$= 8\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{h(1-2y)} [x^2+y^2+(z-h)^2]dz$$

$$= 8h\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{\frac{1}{2}} [(\frac{h^2}{3}+x^2) - 2x^2 y + y^2 - (2+\frac{8}{3}h^2)y^3]dy$$

$$= 8h\int_0^{\frac{1}{2}}[-\frac{h^2}{3}x + \frac{x^2}{4} - \frac{4}{3}x^3 + (\frac{3}{2} + \frac{2}{3}h^2)x^4 + \frac{h^2}{8} + \frac{1}{96}]dx$$

$$= 8h(\frac{h^2}{40} + \frac{1}{240})$$

$$= \frac{h}{30}(6h^2 + 1)$$

15．求下列曲线所围图形的面积.

(1) $xy = a^2, x + y = \frac{5}{2}a(a > 0)$

[解答] 两曲线的交点为 $(\frac{a}{2}, 2a^2)$ $(2a, \frac{a}{2})$

所以 $S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a - x} dy = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} (\frac{5}{2}a - x - \frac{a^2}{x})dx$

$$= 3a^2 - \frac{9}{8}a^2 + a^2 \ln\frac{1}{4} = \frac{a^2}{8}(15 - 16\ln 2)$$

(3) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy(a > 0)$

[解答] 将原式化为极坐标形式为 $r^2 = a\sin 2\theta$，令 $r = 0$，可得 $2\theta = 0$或 $2\theta = \pi$

所以 $S = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} rdr = \int_0^{2\pi} a^2 \sin 2\theta d\theta = a^2$

(4) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)(a > 0)$

[解答] 设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，原式化为极坐标形式为 $r = a(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

原式 $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a(4\cos^3\theta-3\cos\theta)}rdr$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16\cos^6\theta-24\cos^4\theta+9\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{4}\pi$$

16．求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 夹在两曲面 $x^2+y^2=y, x^2+y^2=2y$ 之间的部分的面积.

[解答]　由题意可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

则　$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_D dxdy$

$$=\sqrt{2}(\pi-\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$$

17．求用平面 $x+y+z=b$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$ 相截所得的截断面之面积.

[解答] 方法一：由 $z=b-x-y$，可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-1$

则所得的截断面之面积 $S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+1+1}dxdy=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$

即求 D_{xy} 之面积，其中 D_{xy}： $x^2+y^2-bx-by+xy=\dfrac{a^2-b^2}{3}$

令 $\begin{cases} x=u-v \\ y=u+v \end{cases}$， $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$，则 $D_{xy}\leftrightarrow D_{uv}$

其中 D_{uv}： $3u^2+v^2-2bu=\dfrac{a^2-b^2}{3}$，即 $(u-\dfrac{b}{3})^2+\dfrac{v^2}{3}=\dfrac{a^2}{9}$

故 $S=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{uv}}|J|dudv=2\sqrt{3}\iint\limits_{D_{uv}}dudv$

又椭圆 $(u-\dfrac{b}{3})^2+\dfrac{v^2}{3}=\dfrac{a^2}{9}$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}a^2$

所以 $S=2\sqrt{3}\iint\limits_{D_{uv}}dudv=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}a^2=\dfrac{2\pi}{3}a^2$

方法二：由两方程可得

$x^2+y^2+z^2=R^2=\dfrac{2a^2+b^2}{3}$， 设所截圆面的半径为 r，

又原心到平面 $x+y+z=b$ 的距离 $d^2=\dfrac{b^2}{3}$，则圆面半径

$$r^2=R^2-d^2=\frac{2a^2}{3}$$

所以 $S=\pi r^2=\dfrac{2\pi}{3}a^2$

18．求下列曲面所围形体的体积.

（1）$z = xy, x + y + z = 1, z = 0$

[解答]　$V = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} dy \int_0^{xy} dz + \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(\frac{1-x}{1+x})^2 dx + \int_0^1 [(1-x)y - \frac{y^2}{2}]_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-\frac{2x}{1+x})^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^2 x^2}{(1+x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 [x - \frac{4x^2}{1+x} + \frac{4x^3}{(1+x)^2}] dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x)^2 x^2 - 4x^3}{(1+x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x dx - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{17}{12} - 2\ln 2$$

（2）$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$

[解答]　$V = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_0^{x^2+y^2} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r^3 dr$

$$= \frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{45}{32}\pi$$

（3）$z = 8 - x^2 - y^2, z = x^2 + y^2$

[解答] $V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{r^2}^{8-r^2}dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r(8-2r^2)dr=16\pi$

21．设质量为 M，半径为 a 的非均匀球体，球上任一点的密度与该点到球心的距离成正比，求球关于切线的转动惯量.

[解答] 以球心为坐标原点，建立直角坐标系

令 $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}kr\cdot r^2\sin\varphi d\varphi=k\pi a^4$$

设切线过点 $(a,0,0)$，方向向量为 $(0,0,a)$，则切线的转动惯量为

$$I=\iiint\limits_{\Omega}[(x-a)^2+y^2+z^2-\frac{(az)^2}{a^2}]\rho(x,y,z)dv$$

$$=k\iiint\limits_{\Omega}[(x-a)^2+y^2]\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$$

$$=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}r^5\sin^3\varphi dr-k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}2ar^4\cos\theta\sin^2\varphi dr$$

$$+k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}a^2r^3\sin\varphi dr=\frac{4}{9}k\pi a^6-0+k\pi a^6=\frac{13}{9}k\pi a^6=\frac{13}{9}Ma^2$$

习 题 十 二

1．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导函数，求

$I=\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$，其中 L 是从点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段.

[解答] 令 $P=\frac{1+y^2f(xy)}{y}$， $Q=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故在单连通区域内曲线积分与路径无关

方法一：选取积分路径：从 $A(3,\frac{2}{3})$ 到 $E(1,\frac{2}{3})$，再从 E 到 $B(1,2)$ 的折线段，于是

$$I=\int_{AE}+\int_{EB}=\int_3^1\frac{1+\frac{4}{9}f(\frac{2}{3}x)}{\frac{2}{3}}dx+\int_{\frac{2}{3}}^2\frac{1}{y^2}[y^2f(y)-1]dy$$

$$=\frac{3}{2}(1-3)+\int_2^{\frac{2}{3}}f(y)dy+\int_{\frac{2}{3}}^2f(y)dy+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$$

$$=-4$$

方法二：可取曲线 L：$xy=2$，从 A 到 B 则

$$I=\int_3^1\frac{1+y^2f(2)}{y}dx+\frac{x(y^2f(2)-1)}{y^2}\cdot(-\frac{2}{x^2})dx$$

$$=\int_3^1(\frac{1}{y}+\frac{2}{xy^2})dx$$

$$=\int_3^1 xdx=-4$$

2．计算 $I=\int_{L(0,0)}^{(1,2)}(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$，其中 L 为过 $O(0,0)$，$A(0,1)$，$B(1,2)$ 三点的圆周.

[解答] 连接 BO，使 OAB 与 BO 围成区域 D，令 $P=e^y+x$，$Q=xe^y-2y$

则 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^y+x)=e^y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(xe^y)=e^y$$

由格林公式可得

$$\int_{OAB}+\int_{\overline{BO}}=-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$$

所以 $$\int_{OAB}=-\int_{\overline{BO}}=\int_{\overline{OB}}=\int_0^1(e^{2x}+x)dx+2(xe^{2x}-4x)dx$$

$$=\int_0^1(e^{2x}+2xe^{2x}-7x)dx$$

$$=\frac{e^2-1}{2}+\frac{e^2+1}{2}-\frac{7}{2}=e^2-\frac{7}{2}$$

1．计算 $I=\int_{L(AMB)}(e^x\sin y+8y)dx+(e^x\cos y-7x)dy$，$L_{AMB}$是上半圆周，$A$，$B$ 的坐标分别为 $(1,0)$，$(7,0)$.

[解答] 连接 BA，使 AMB 与 BA 围成区域 D，令 $P=e^x\sin y+8y$，$Q=e^x\cos y-7x$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y+8y)=e^x\cos y+8\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y-7x)=e^x\cos y-7$$

由格林公式可得

$$\int_{AMB}+\int_{\overline{BA}}=-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=15\iint_D dxdy=\frac{135}{2}\pi$$

则 $$\int_{AMB}=-\int_{\overline{BA}}-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0+\frac{135}{2}\pi=\frac{135}{2}\pi$$

2. 计算 $\int_{ABC}(a_1x+a_2y+a_3)dx+(b_1x+b_2y+b_3)dy$，其中 $a_i,b_i(i=1,2,3)$ 为常数，$A(-1,0)$，$B(0,1)$，$C(1,0)$，AB 为 $x^2+y^2=1$ 上的一段弧，BC 为 $y=1-x^2$ 上的一段弧.

[解答] 连接 CA，使 ABC 与 CA 围成区域 D，令

$$P=a_1x+a_2y+a_3,\qquad Q=b_1x+b_2y+b_3$$

则 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(a_1x+a_2y+a_3)=a_2,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(b_1x+b_2y+b_3)=b_1$$

由格林公式可得

$$\int_{ABC}+\int_{\overline{CA}}=-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

则 $$\int_{ABC}=-\int_{\overline{CA}}-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1}(a_1x+a_3)dx+\iint_D(a_2-b_1)dxdy$$

$$=2a_3+(a_2-b_1)(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dx\int_0^{1-x^2}dy)$$

$$=2a_3+(a_2-b_1)(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3})$$

5．计算 $I=\int_{L(A)}^{L(B)}(\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y})dx-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}dy$，其中 L 为连接 $A\ (\pi,1)$ 与 $B\ (\pi,2)$ 的曲线弧段.

[解答] 令 $P=\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}$，$Q=-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^3}\sin\frac{x}{y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故在单连通区域内曲线积分与路径无关，因此取曲线 L： $x=\pi$，从 A 到 B 则

$$I=-\int_1^2\frac{\pi^2}{y^2}\cos\frac{\pi}{y}dy=\pi\int_1^2\cos\frac{\pi}{y}d(\frac{\pi}{y})=\pi$$

6． 计算 $I=\int_{AB}\frac{(x-c)dx+ydy}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}}(c>0)$，其中 AB 是沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的正向从 $A\ (a,0)$ 到 $B\ (0,b)$ 的一段弧.

[解答] 连接 BO，OA 使 ABO 围成区域 D，令 $P=\frac{(x-c)}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}}$，

$Q=\frac{y}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}}$

则 $$\frac{\partial P}{\partial y}=-3y(x-c)[(x-c)^2+y^2]^{-5/2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

由格林公式可得

$$\int_{AB}+\int_{\overline{BO}}+\int_{\overline{OA}}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$$

则 $$\int_{AB}=-\int_{\overline{BO}}-\int_{\overline{OA}}$$

$$=-\int_b^0\frac{ydy}{(c^2+y^2)^{3/2}}-\int_0^a\frac{(x-c)dx}{(x-c)^3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c^2+y^2}}\Bigg|_b^0+\frac{1}{|x-c|}\Bigg|_0^a=\frac{1}{|a-c|}-\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\quad(a\neq c)$$

7. 计算 $I=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_L(e^{y^2-x^2}\cos 2xy-3y)dx+(e^{y^2-x^2}\sin 2xy-b^2)dy\ (b>0)$，其中 L 是依次连接 $A\,(a,0)$， $B\,(a,\dfrac{\pi}{a})$， $C\,(0,\dfrac{\pi}{a})$， $D\,(0,0)$ 的有向折线.

[解答] 连接 DA，使 $ABCD$ 围成区域 D，

令 $P=e^{y^2-x^2}\cos 2xy-3y$， $Q=e^{y^2-x^2}\sin 2xy-b^2$

则 $$\frac{\partial P}{\partial y}=2ye^{y^2-x^2}\cos 2xy-2xe^{y^2-x^2}\sin 2xy-3$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2ye^{y^2-x^2}\cos 2xy-2xe^{y^2-x^2}\sin 2xy$$

由格林公式可得

$$\int_{\overline{ABEO}}+\int_{\overline{OA}}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

所以 $$\int_{\overline{ABEO}}=-\int_{\overline{OA}}+\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=-\int_0^a e^{-x^2}dx+3\iint_D dxdy$$

$$=-\int_0^a e^{-x^2}dx+3\pi$$

则 $$I=\lim_{a\to+\infty}\left(-\int_0^a e^{-x^2}dx+3\pi\right)=3\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

8. 设平面 $z=y$ 与椭圆柱面 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ 相截，求其在 $z\ge 0, y\ge 0$ 及平面 $x0y$ 之间的椭圆柱面的侧面积.

[解答] 设 $x=\sqrt{5}\cos t, y=3\sin t, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

则 $dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=\sqrt{5\cos^2 t+9\sin^2 t}dt$

根据弧长的曲面积分

$$S=2\int_L zdl=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{5\cos^2 t+9\sin^2 t}dt$$

$$=-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{5+9\cos^2 t}d(\cos t)$$

$$=6\int_0^1\sqrt{5+9x^2}dx \qquad (\cos t=x)$$

令 $x=\frac{\sqrt{5}}{2}\tan\alpha$，当 x 从 $0\to1$ 时，$\tan\alpha$ 从 $0\to\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sec\alpha$ 从 $1\to\frac{3}{\sqrt{5}}$

原式 $=\frac{15}{2}[\sec\alpha\cdot\tan\alpha+\ln(\sec\alpha+\tan\alpha)]$

$=9+\frac{15}{4}\ln 5$

9．计算 $I=\int_{AnB}[\Phi(y)e^{x}-my]dx+[\Phi'(y)e^{x}-m]dy$，其中 $\Phi(y)$ 和 $\Phi'(y)$ 为连续函数，AnB 为连接 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任何路径，但与线段 AB 围成图形 $AnBA$ 有定面积 S.

[解答] $I=\int_{AnB}\Phi(y)e^{x}dx+(\Phi'(y)e^{x}-m)dy-\int_{AnB}mydx$

$$=\int_{AnB}d[e^{x}\Phi(y)-my]-\oint_{AnBA}mydx+\int_{\overline{BA}}mydx$$

$$=[e^{x}\Phi(y)-my]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}+\iint_{D}dxdy+\int_{\overline{BA}}mydx$$

$$=e^{x_2}\Phi(y_2)-e^{x_1}\Phi(y_1)+m(y_1-y_2)+ms+\int_{x_1}^{x_2}m[y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)]dx$$

$$=e^{x_2}\Phi(y_2)-e^{x_1}\Phi(y_1)+m(y_1-y_2)+ms-\frac{m(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2}$$

10. 计算 $I=\int_{AMB}(e^{x}\sin y-ay)dx+(e^{x}\cos y-bx)dy$，其中 AMB 是通过点 $A(a,0)$，$M(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2})$，$B(b,0)$ 的半圆周 $(a>b>0)$.

[解答] 连接 AB，使 AMB 围成区域 D，

令 $P=e^{x}\sin y-ay$，$Q=e^{x}\cos y-bx$

则 $$\frac{\partial P}{\partial y}=e^{x}\cos y-a$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^{x}\cos y-b$$

由格林公式有

$$\int_{AMB}+\int_{BA}=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=(a-b)\iint_{D}dxdy$$

所以 $$\int_{AMB}=(a-b)\iint_{D}dxdy=\frac{\pi(a-b)^{3}}{8}$$

11．$\oint_{L}3ydx-xzdy+yz^{2}dz$,其中 L 是圆周 $x^{2}+y^{2}=2z$， $z=2$,若从 z 轴正向看去，这个圆周取逆时针方向.

[解答] 设 $\sum$为 $\begin{cases}x^{2}+y^{2}\le 4\\ z=2\end{cases}$ 上侧，则

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3y & -xz & yz^{2}\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}(z^{2}+x)dydz-(3+z)dxdy=-5\iint_{x^{2}+y^{2}\le 4}dxdy=-20\pi$$

12．计算 $I=\iint_{\Sigma}|xyz|dS$，其中 $\sum$是 $z=x^{2}+y^{2}$ 被平面 $z=1$所割下的部分.

[解答] 由对称性，只要计算第一挂限的部分，则

$$= 4\iint_{D_{xy}} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}dr$$

$$= 2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}dr$$

$$= \int_0^1 u^2\sqrt{1+4u}du \qquad (\ u = r^2)$$

$$= \frac{1}{32}\int_1^{\sqrt{5}}(t^4-2t^2+1)t^2dt \qquad (\ t=\sqrt{1+4u}\ )$$

13．计算 $I = \iint_{\Sigma}\frac{e^x}{\sqrt{y^2+z^2}}dydz$， $\sum$:锥面 $x^2-y^2-z^2=0$ 及平面 $x=1, x=2$ 所围立体的外侧.

[解答] 由 $x=\sqrt{y^2+z^2}$ 可得

$$X_y = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \qquad X_z = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

则

$$I = \iint_{\Sigma}(P - X_yQ - X_zR)dydz \qquad = \iint_{\Sigma}(\frac{e^x}{\sqrt{y^2+z^2}})dydz$$

$$=-\iint\limits_{Dyz}\left(\frac{e^{x}}{\sqrt{y^{2}+z^{2}}}\right)dydz=-\int_{0}^{2\pi}d\sigma\int_{1}^{2}e^{r}dr$$

$$=2\pi(e-e^{2})$$

14．求 $u=u(x,y,z)=x^{2}+y^{2}-z^{2}$ 在 $P(3,4,5)$ 处沿曲线：$\begin{cases}2x^{2}+2y^{2}-z^{2}=25\\x^{2}+y^{2}=z^{2}\end{cases}$，在 $P(3,4,5)$ 处的切线方向的方向导数.

[解答] $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{p}=2x\big|_{p}=6$ $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{p}=2y\big|_{p}=8$ $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{p}=-2z\big|_{p}=-10$

曲线切线方向向量 $\vec{n}=\{-4,3,0\}$

则 $\dfrac{\partial u}{\partial n}=\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}\cdot\dfrac{n}{|n|}=\{6,8,-10\}\cdot\{-4,3,0\}\cdot\dfrac{1}{5}=0$

习 题 十 三

1． 证明不等式

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^{2}}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^{2}}$$

证明：设 $f(x)=a^{\frac{1}{x}}$ $(x\geq 1)$ 则 $f'(x)=-a^{\frac{1}{x}}\cdot\ln a\cdot\dfrac{1}{x^{2}}$

由拉格朗日中值定理可知，在 $(n,n+1)$ 上，至少存在一个 ξ，使

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f'(\xi) \qquad 即 \quad \frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=\frac{a^{\frac{1}{\xi}}}{\xi^2}$$

又 $n<\xi<n+1$，则 $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{\xi^2}<\frac{1}{n^2}$，且 $a^{\frac{1}{n+1}}<a^{\frac{1}{\xi}}<a^{\frac{1}{n}}$，

所以 $$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

2． 若 $a\geq 0,b\geq 0,0<p<1$，证明： $(a+b)^p\leq a^p+b^p$．

证明：设 $f(x)=(1+x)^p,g(x)=1+x^p$，则

$g(0)=f(0)=1$，又 $f(x),g(x)$ 为连续函数 $(x>0)$

所以 $$f'(x)=p(1+x)^{p-1}=\frac{p}{(1+x)^{1-p}}$$

$$g'(x)=px^{p-1}=\frac{p}{x^{1-p}}$$

故 $$f'(x)<g'(x)$$

又设 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，则 $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 为单调减函数.

$\varphi(0)=f(0)-g(0)=0$，所以 $\varphi(x)<0$

所以 当 $x>0$ 时， $f(x)<g(x)$，即 $(1+x)^p<1+x^p$

令 $x=\frac{b}{a}$，则 $(1+\frac{b}{a})^p<1+(\frac{a}{b})^p$，即 $(a+b)^p\le a^p+b^p$

(原式中等号仅当　与　至少有一个为零时成立)

3．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，满足 $0<f'(x)<1$，并且 $f(0)=0$，求证：

$$[\int_0^1 f(x)dx]^2\ge\int_0^1(f(x))^3dx$$

证明：设 $F(x)=[\int_0^x f(t)dt]^2-\int_0^x[f(t)]^3dt$，

则 $F'(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)dt-f^2(t)]$

令 $g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(t)$　　有 $g(0)=0$

又 $g'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0$　　且当 $x>0$ 时，$f(x)>0$

所以 $g(x)>0$，即 $F'(x)>0$，从而 $F(x)$ 单调递增，则 $F(1)>F(0)=0$

即 $$[\int_0^1 f(x)dx]^2\ge\int_0^1(f(x))^3dx$$

目　录

注：资料当中标注了，数学理工类与经济类有些考点的侧重是不同的，大家可以根据所标注的记号，结合自己的情况有针对性的复习。

第一章 函数、极限、连续

※本章要求

1 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系。

2 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。

3 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

4 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。

5 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在左、右极限间的关系。(▲数三、数四：了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念)

6 掌握极限的性质及四则运算法则。(▲数三、数四：了解极限性质、掌握极限四则运算法则)

7 掌握极限存在的两个准则，并会利用他们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。

8 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限。(▲数三、数四：理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法，了解无穷大量的概念及其无穷小量的方法)。

9 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判断函数间断点的类型。

10 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质。

第 1 节 函数

★基本内容学习

一 基本概念和性质

1 函数的定义

设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作：$y \quad f \quad x$ 。

2 函数概念的两要素

①定义域：自变量 x 的变化范围②对应关系：给定 x 值,求 y 值的方法。

3 函数的三种表示方法

①显式：形如$y=f(x)$的称作显式，它最直观，也是初等函数一般采用的形式。

②隐式：有时有些关系用显式无法完全表达，这时要用到隐式，形如$F(x,y)=0$，如椭圆函数$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

③参数式：形如平抛运动的轨迹方程$\begin{cases} x=vt \\ y=\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$称作参数式。参数式将两个变量的问题转化为一个变量的问题，从而使很多难以处理的问题简化。

4 函数的四个基本性质

①奇偶性：设函数$f(x)$在对称区间X上有定义，如果对于$\forall x\in X$恒有

$f(x)=f(-x)$

(或)$f(x)=-f(-x)$，则称$f(x)$为偶函数(或$f(x)$奇函数)。注：偶函数$f(x)$图形关于y轴对称，奇函数$f(x)$的图形关于坐标原点对称。

②有界性：设函数$f(x)$在区间X上有定义,如果$\exists M>0$,使得对一切$x\in X$,恒有：$|f(x)|\le M$,则称$f(x)$在区间X上有界；若不存在这样的$M>0$，则称$f(x)$在区间X上无界.注：函数$f(x)$有无界是相对于某个区间而言的。

③周期性：设函数$f(x)$在区间X上有定义,若存在一个与x无关的正数T，使对任一$x\in X$，恒有$f(x+T)=f(x)$则称$f(x)$是以T为周期的周期函数，把满足上式的最小正数T称为函数$f(x)$的周期。

④单调性：设函数$f(x)$在区间X上有定义，如果对$\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$,恒有：$f(x_1)\le f(x_2)$(或$f(x_1)\ge f(x_2)$)则称$f(x)$在区间$X$上是单调增加(或单调减少)的；如果对于$\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$,恒有：$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)则称$f(x)$在区间$X$上是严格单调增加(或严格单调减少)的。

5 其它函数定义

①复合函数：设函数$y\quad f\quad u$ 的定义域为D_f，而函数$u\qquad x$ 的定义域是D 值域为Z ，若$D_f\quad Z$ ，则称函数$y\quad f\qquad x$ 为x的复合函数，它的定义域是$\{x$ | $x\quad D$ 且 $(x)\quad D_f\}$。这里 表示空集。

②反函数：设函数$y\quad f\quad x$ 的值域为Z_f，如果对于Z_f中任一y值，从关系式 $y\quad f\quad x$ 中可确定唯一的一个x值，则称变量x为变量y的函数，记为：$x\qquad y$ ，其中 y 称为函数$y\quad f\quad x$ 的反函数，习惯上$y\quad f\quad x$ 的反函数记为：$y\quad f^{\ 1}\ x$ 。

6 初等函数

①常值函数 C (C 为常数)，$x\quad R$

②幂函数 $y\quad x\qquad R$ ，定义域由 确定，但不论 如何，在$(0,\quad)$内总有定义。

③指数函数 $y\quad a^x$ ($a\quad 0$ 且 $a\quad 1$) $x\quad R$

④对数函数 $y\quad \log_a^x$ ($a\quad 0$ 且 $a\quad 1$) $x\quad (0,\quad)$

⑤三角函数 如$y\quad \sin x,\ x\quad R$ ；$y\quad \cos x,\ x\quad R$ ；

$y\quad \tan x, x\quad (k\quad \frac{}{2}, k\quad \frac{}{2}), k\quad Z$ ；$\cot x,\ x\quad (k\ ,(k\quad 1)\ ),\ k\quad Z$ 等

⑥反三角函数 $y\quad \arcsin x,\ x\quad [\ 1,1]$ ；$y\quad \arccos x,\ x\quad [\ 1,1]$ ；$y\quad \arctan x, x\quad R$ ；$y\quad \mathrm{arc}\cot x, x\quad R$.

以上六类函数称基本初等函数。

由基本初等函数经有限次加、减、乘、除、复合而成的函数称初等函数。

7 分段函数

一个函数在其定义域内，对应于不同的区间段有着不同的表达式，则该函数称为分段函数。分段函数仅是说函数的表示形式，并不是说它是几个函数。

常见的分段函数：

①符号函数 $$y\quad \mathrm{sgn}\, x\quad \begin{matrix} 1 & \text{当} x\quad 0, \\ 0 & \text{当} x\quad 0, \\ 1 & \text{当} x\quad 0. \end{matrix}$$

②取整函数 $[x]$表示不超过x的最大整数；$[x]\quad n$,当$n\quad x\quad n\quad 1$，其中n为整

数。

③狄利克莱(Dirichlet)函数 $y=f(x)=\begin{cases}1 & 当x为有理数时,\\ 0 & 当x为无理数时.\end{cases}$

④绝对值函数 $|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

★基本题型训练

一 典型例题

1 判断函数的等价性

例 1.1 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2,\quad g(x)=2\lg x$;　　(2) $f(x)=x,\quad g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},\quad g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；(4) $f(x)=1,\quad g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$；

解：(1)不相同，因为 $\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $2\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$。

(2)不相同，因为两者对应法则不同，当 $x<0$ 时，$g(x)=-x$。

(3)相同，因为两者定义域、对应法则均相同。

(4)不相同，因为两者定义域不同。

2 求函数的定义域

例 1.2 设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a](a>0)$ 则 $f(x)$ 的定义域为多少？

解：函数 $f(x-1)$ 的定义域是指 x 的变化范围，即 $0\quad x\quad 1\quad a$, 令 $t=x-1$, 则 $-1\le t\le a-1$。故对函数 $f(x)$ 而言，t 的变化范围为 $[-1,a-1]$，由函数表达式的“变量无关性”，知：$f(x)$ 的定义域为 $[-1,a-1]$。

常见错误：$[1,a+1]$。主要是对定义域所指的变量取值范围理解不深，误认为 $0\quad x\quad 1\quad a$，由此得到 $1\le x\le a+1$。

3 判断函数奇偶性

例 1.4 下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数？

(1) $y=e^{x^2}\sin x$,　　(2)

$y \quad \log_a(x \quad \sqrt{1 \quad x^2}) \ (a \quad 0, a \quad 1)$

解：(1)因为 $\sin x$ 为奇函数，x^2 为偶函数，所以 $y \quad e^{x^2}\sin x$ 为奇函数。

(2) $f(\quad x) \quad \log_a(\quad x \quad \sqrt{1 \quad a^2}) \quad \log_a \dfrac{1}{x \quad \sqrt{1 \quad x^2}} \quad \log_a(x \quad \sqrt{1 \quad x^2}) \quad f(x)$，

故 $f(x)$ 为奇函数

4 判断函数的周期性

例 1.5 下列哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期。

(1) $y \quad \cos(x \quad 2)$　　　　(2) $y \quad 1 \quad \sin \quad x$

解 (1) $y \quad \cos(x \quad 2)$ 是周期函数，周期为 2 ；

(2) $y \quad 1 \quad \sin \quad x$ 是周期函数，周期是 2

5 判断函数单调性

例 1.6 设 $f(x)$ 在 $(\quad , \quad)$ 上有定义，且对任意 x， $y \quad (\quad , \quad)$ 有 $|f(x) \quad f(y)| \quad |x \quad y|$ 证明 $F(x) \quad f(x) \quad x$ 在 $(\quad , \quad)$ 上单调增加。

证明：设 $x_1, x_2 \quad (\quad , \quad), x_1 \quad x_2$ 所以 $|f(x_2) \quad f(x_1)| \quad |x_2 \quad x_1| \quad x_2 \quad x_1$，

而 $f(x_1) \quad f(x_2) \quad |f(x_2) \quad f(x_1)| \quad x_2 \quad x_1$ 所以 $f(x_1) \quad x_1 \quad f(x_2) \quad x_2$ 所以 $F(x_1) \quad F(x_2)$

即 $F(x)$ 在 $(\quad , \quad)$ 上单调增加。

6 求反函数

例 1.7 求函数 $y \quad \dfrac{1 \quad \sqrt{1 \quad x}}{1 \quad \sqrt{1 \quad x}}$ 的反函数

解：令 $t \quad \sqrt{1 \quad x}$，则 $y \quad \dfrac{1 \quad t}{1 \quad t}$。所以 $t \quad \dfrac{y \quad 1}{y \quad 1}$， 即 $\sqrt{1 \quad x} \quad \dfrac{y \quad 1}{y \quad 1}$，所以

$$x \quad 1 \quad \frac{y \quad 1}{y \quad 1}^{2} \quad \frac{4y}{(y \quad 1)^2},$$

所以反函数 $y \quad \dfrac{4x}{(x \quad 1)^2}$ 即为所求。

7 复合函数求法

例 1.8 设 $f(x) \quad \begin{matrix} 1 \quad x, & x \quad 0 \\ x \quad 2, & x \quad 0 \end{matrix}$, $g(x) \quad \begin{matrix} x^2, & x \quad 0 \\ x, & x \quad 0 \end{matrix}$ 则 $f[g(x)]$ 等于多少？

解：当 $x \quad 0$ 时，$g(x) \quad\quad x \quad 0$，所以当 $x \quad 0$ 时有 $f[g(x)] \quad 1 \quad x$；

当 $x \quad 0$ 时，$g(x) \quad x^2 \quad 0$ 所以 $x \quad 0$ 时有 $f[g(x)] \quad x^2 \quad 2$，故

$$f[g(x)] \quad \begin{matrix} 1 \quad x, & x \quad 0 \\ x^2 \quad 2, & x \quad 0 \end{matrix}$$。

注：求复合函数一般用三种方法：分析法，代入法，图示法。本题用的是分析法，下面分别介绍这三种方法。

(1)分析法：是抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法，该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合。

(2) 代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，这种构成复合函数的方法，称之为代入法，该法适用于初等函数或抽象函数的复合，这种方法在求复合函数时一般最先想到。

(3) 图示法：借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法，适用于分段函数，尤其是两个均为分段函数的复合。关于图示法解题的一般步骤如下：

①先画出中间变量函数 $u \quad\quad x$ 的图形；

②把 $y \quad f \quad u$ 的分界点在 xou 平面上画出(这是若干条平行于 x 轴的直线)；

③写出 u 在不同区间段上 x 所对应的变化区间；

④将③所得结果代入 $y \quad f \quad u$ 中，便得 $y \quad f \quad\quad x$ 的表达式及相应 x 的变化区间。关于这种方法我们会在后面的练习或者能力拓展中用到。

二 能力拓展

例 1 设 F(x)是连续函数 f(x)的一个原函数，"$M \quad\quad N$" 表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有

(A)F(x)是偶函数　　f(x)是奇函数。

(B)F(x)是奇函数　　f(x)是偶函数。

(C) F(x)是周期函数　　f(x)是周期函数。

(D)F(x) 是单调函数　　f(x) 是单调函数。

[A]

解法一：任一原函数可表示为$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$，且$F'(x)=f(x)$. 当 F(x)为偶函数时，

有 $F(-x)=F(x)$，于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即 $-f(-x)=f(x)$，也即 $f(-x)=-f(x)$，

可见 f(x)为奇函数；反过来，若 f(x)为奇函数，则$\int_0^x f(t)dt$为偶函数，

从而$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$为偶函数，可见选(A)。

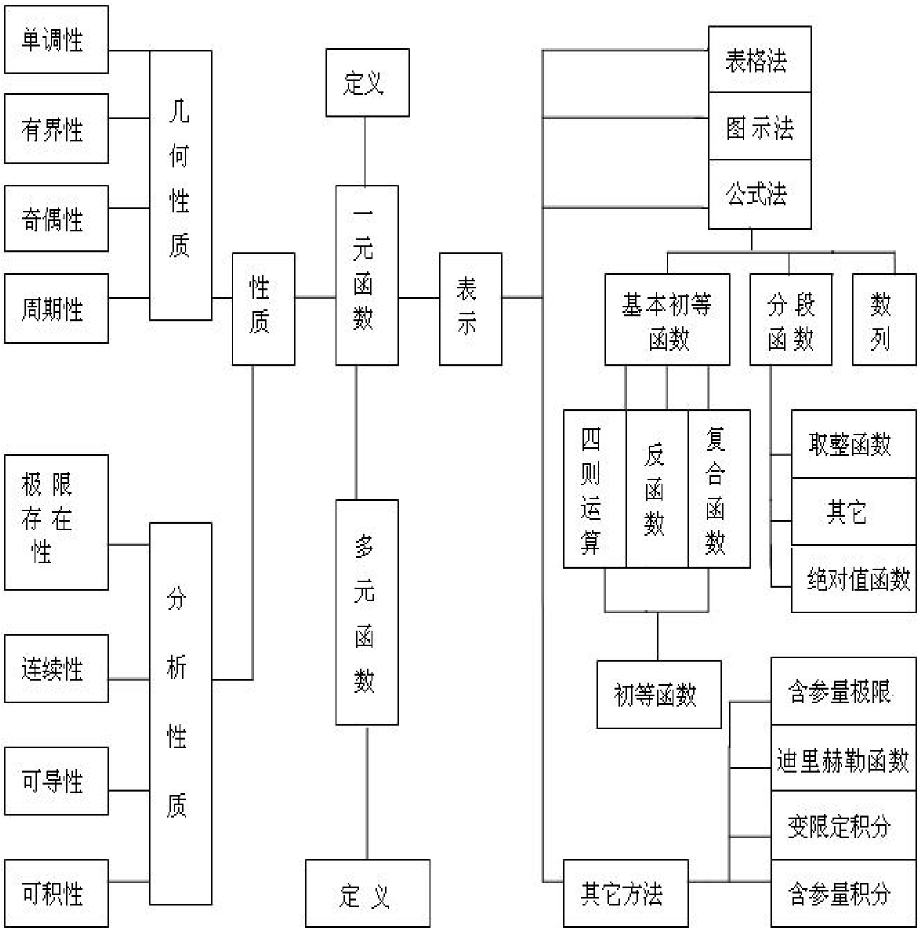
解法二：令 f(x)=1，则取 F(x)=x+1，排除(B)、(C)；令 f(x)=x，则取 F(x)=$\frac{1}{2}x^2$，排除(D)；故应选(A)。

例 2 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$则$f\{f[f(x)]\}$等于_______。

(A) 0　　(B)1　　(C) $\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\le 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

解：由$f[f(x)]$＝1 得，$f\{f[f(x)]\}$＝1，故应选(B)

★函数理论框架图



第 2 节 极限与连续性

★基本内容学习

一 基本概念

1 极限的概念

定义 2.1 $\lim\limits_{n} x_n \quad a$ 0, 一个正整数 N ，当 $n \quad N$ 时，恒有 $|x_n \quad a|$ 。若 x_n 存在极限，称 $\{x_n\}$ 收敛，否则称 $\{x_n\}$ 发散。

定义 2.2 $\lim\limits_{x} f(x) \quad a$ 0, 一个整数 X，当 $|x| \quad X$ 时，有 $|f(x) \quad a|$

定义 2.3 $\lim\limits_{x \quad x_0} f(x) \quad a \qquad 0,$ 正数 ，当 $0 \quad |x \quad x_0| \qquad$ 时，有 $|f(x) \quad a|$

2 数列、函数极限的基本性质与相关定理

定理 2.1(极限的不等式性质)

设 $\lim\limits_{n} x_n \quad a$，$\lim\limits_{n} y_n \quad b$ 若 $a \quad b$，则 N，当 $n \quad N$ 时，$x_n \quad y_n$；若 $n \quad N$ 时，$x_n \quad y_n$，则 $a \quad b$。

定理 2.2(极限的唯一性) 设 $\lim\limits_{n} x_n \quad a$，$\lim\limits_{n} x_n \quad b$ 则 $a \quad b$。

定理 2.3(收敛数列的有界性) 设 x_n 收敛，则 x_n 有界（即 常数 $M \quad 0, |x_n| \quad M, n \quad 1,2,\cdots$）。

定理 2.4(极限的不等式性质) 设 $\lim\limits_{x \quad x_0} f(x) \quad A$，$\lim\limits_{x \quad x_0} g(x) \quad B$ 若 $A \quad B$ 则 >0，当 $0 \quad |x \quad x_0| \qquad$ 时 $f(x) \quad g(x)$；若 $f(x) \quad g(x)$ $(0 \quad |x \quad x_0| \qquad)$，则 $A \quad B$。

[推论](极限的保号性) 若 $\lim\limits_{x \quad x_0} f \;\; x \quad A, A \quad 0$ 或 $A \quad 0$，则存在一个 $\quad 0$，当 $x \quad x_0 \quad ,x_0 \quad ,x \quad x_0$ 时，$f \;\; x \quad 0$ (或 $f \;\; x \quad 0$)。

定理 2.5(极限的唯一性)设 $\lim\limits_{x \quad x_0} f(x) \quad A$，$\lim\limits_{x \quad x_0} f(x) \quad B$ 则 $A \quad B$。

定理 2.6(夹逼准则) 设在 x_0 的领域内，恒有 $\quad x \quad f \;\; x \qquad x$，且 $\lim\limits_{x \quad x_0} \quad x \quad \lim\limits_{x \quad x_0} \quad x \quad A$，则 $\lim\limits_{x \quad x_0} f \;\; x \quad A$。

定理 2.7(单调有界准则) 单调有界数列 x_n 必有极限。

3 函数连续性定义

定义 2.1 设函数 $f \;\; x$ 在 x_0 的某领域内有定义，给 x 在 x_0 处以增量 $\quad x$，相应地得到函数增量 $\quad y \quad f \;\; x_0 \quad x \quad f \;\; x_0$。若极限 $\lim\limits_{x \quad 0} \quad y \quad 0$，则称 $f \;\; x$ 在 $x \quad x_0$ 处连续。

定义 2.2 设函数 $f \;\; x$ 满足条件：(1) $f \;\; x$ 在 x_0 的某领域内有定义；(2) $\lim\limits_{x \quad x_0} f \;\; x$ 存在；(3) $\lim\limits_{x \quad x_0} f \;\; x \quad f \;\; x_0$ 则称 $f \;\; x$ 在 $x \quad x_0$ 处连续。

定义 2.3 若 $f \;\; x$ 在 a,b 内任一点均连续，则称 $f \;\; x$ 在 a,b 内连续。

定义 2.4 若 $f \;\; x$ 在 a,b 内连续，在 $x \quad a$ 处右连续(即 $\lim\limits_{x \quad a} f \;\; x \quad f \;\; a$)，在 $x \quad b$

处左连续(即 $\lim\limits_{x\ \ b} f\ \ x\quad f\ \ b$)，则称 $f\ \ x$ 在 a,b 内连续。

4 间断点及分类

间断点定义　若 $f\ \ x$ 在 x_0 处出现以下三种情形之一：

(1) $f\ \ x$ 在 x_0 处无定义；(2) $\lim\limits_{x\ \ x_0} f\ \ x$ 不存在；(3) $\lim\limits_{x\ \ x_0} f\ \ x\quad f\ \ x_0$ 。则称 x_0 为 $f\ \ x$ 的间断点。

间断点 x_0 的分类：第Ⅰ类间断点 $f\ \ x_0\ ,f\ \ x_0$ 均存在。其中若 $f\ \ x_0\quad f\ \ x_0\quad f\ \ x_0$ ，$x\quad x_0$ 称为可去间断点。若 $f\ \ x_0\quad f\ \ x_0\ ,x\quad x_0$ 称为跳跃间断点。

第Ⅱ类间断点：$f\ \ x_0\ ,f\ \ x_0$ 至少有一个不存在。若 $f\ \ x_0\ ,f\ \ x_0$ 之中有一个为　，则 $x\quad x_0$ 称为无穷间断点。

5 闭区间上连续函数的性质

(1)(连续函数的有界性)设函数 $f\ \ x$ 在 a,b 上连续，则 $f\ \ x$ 在 a,b 上有界，即　常数 $M\quad 0$，对任意的 $x\quad a,b$ ，恒有　$|f\ \ x|\quad M$ 。

(2) (最值定理)设函数 $f\ \ x$ 在 a,b 上连续，则在 a,b 上 $f\ \ x$ 至少取得最大值与最小值各一次，即　,　使得：

$$f\qquad \max_{a\ \ x\ \ b} f\ \ x\ ,\qquad a,b\qquad f\qquad \min_{a\ \ x\ \ b} f\ \ x\ ,\qquad a,b$$

(3) (介值定理)若函数 $f\ \ x$ 在 a,b 上连续，　是介于 $f\ \ a$ 与 $f\ \ b$ (或最大值 M 与最小值 m)之间的任一实数，则在 a,b 上至少　一个　，使得 $f\qquad .\quad a\qquad b$ 。

(4) (零点定理或根的存在性定理)设函数 $f\ \ x$ 在 a,b 上连续，且 $f\ \ a\ \ f\ \ b\quad 0$，则在 a,b 内至少　一个　，使得 $f\qquad 0.\quad a\qquad b$

5 无穷小及其阶

(1)无穷小与无穷大的定义

定义 2.5 在某一过程中以零为极限的变量称为无穷小（量）。

$\lim\limits_{x} f \quad x \quad 0 \qquad 0,$ 一个$X \quad 0$，当$|x| \quad X$时，恒有$|f \quad x|$ 。

$\lim\limits_{x \quad x_0} f \quad x \quad 0 \qquad 0, \qquad 0$，当$0 \quad |x \quad x_0|$ 时，恒有$|f \quad x|$ 。

定义 2.6 在自变量的某一变化过程中，若函数$f \quad x$ 的绝对值无穷增大，则称函数$f \quad x$ 为无穷大量。

$\lim\limits_{x} f \quad x \qquad M \quad 0,$ 一个$X \quad 0$，当$|x| \quad X$时，恒有$|f \quad x| \quad M.$

$\lim\limits_{x \quad x_0} f \quad x \qquad M \quad 0,$ 一个 $\quad 0$，当$0 \quad |x \quad x_0|$ 时，恒有$|f \quad x| \quad M.$

(2)无穷小与无穷大、无穷小与极限的关系

$\lim\limits_{x \quad x_0} f \quad x \quad A \quad f(x)$,其中$\lim\limits_{x \quad x_0} (x) \quad 0$；

在同一极限过程中，$f(x)$为无穷小，$f(x) \quad 0$则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大；$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小。

(3)无穷小阶的概念

定义 2.7 设在同一极限过程中，$\quad x$ 、$\quad x$ 为无穷小且存在极限

$\lim\limits_{\substack{x \quad x_0 \\ (x \quad)}} \quad x \quad 0, \lim\limits_{\substack{x \quad x_0 \\ (x \quad)}} \quad x \quad 0$。

①若$\lim \dfrac{x}{x} \quad 0$,则称$\quad x$ 是比$\quad x$ 高阶的无穷小,记为$\quad x \quad o \quad x \quad .$

②若$\lim \dfrac{x}{x}$ ，则称$\quad x$ 是比$\quad x$ 低阶的无穷小。

③ 若$\lim \dfrac{x}{x} \quad C$，则称$\quad x$ 与$\quad x$ 是同阶无穷小。

④ 若$\lim \dfrac{x}{x} \quad 1$，则称$\quad x$ 与$\quad x$ 是等价无穷小，记为$\quad x \sim \quad x$ 。

⑤若$\lim \dfrac{x}{{}^{k} \quad x} \quad C \; C \quad 0 , k \quad 0$，则称$\quad x$ 为$\quad x$ 的k阶无穷小。

(4)等价无穷小的重要性质

① 若 $x \quad a \quad (x) \sim \quad (x), \ (x) \sim \quad (x)$ ，且 $\lim \frac{(x)}{(x)}$ 存在，则

$$\lim \frac{(x)}{(x)} \quad \lim \frac{(x)}{(x)}$$

该结论表明：在求极限过程中等价无穷小因子可以替换。

② $(x) \sim \quad (x)\,(x \quad a) \qquad (x) \qquad (x) \quad o(\ \ (x))$

(5)确定无穷小阶的方法

①利用洛必达法则 确定 $k \quad 0$ 使得 $\lim\limits_{x \quad x_0} \frac{f \ x}{(x \quad a)^k} \quad A \quad 0$，则 $x \quad a$ 时，$f(x)$ 是 $x \quad a$ 的 k 阶无穷小。

洛必达法则：法则Ⅰ $(\frac{0}{0}$ 型)设函数 $f \ x \ ,g \ x$ 满足条件：$\lim\limits_{x \quad x_0} f \ x \quad 0, \lim\limits_{x \quad x_0} g \ x \quad 0$；$f \ x \ ,g \ x$ 在 x_0 的领域内可导(在 x_0 处可除外)且 $g \ x \quad 0$；$\lim\limits_{x \quad x_0} \frac{f \ x}{g \ x}$ 存在(或)。则 $\lim\limits_{x \quad x_0} \frac{f \ x}{g \ x} \quad \lim\limits_{x \quad x_0} \frac{f \ x}{g \ x}$.

法则Ⅰ $(\frac{0}{0}$ 型)设函数 $f \ x \ ,g \ x$ 满足条件：$\lim\limits_{x} f \ x \quad 0, \lim\limits_{x} g \ x \quad 0$；一个 $X \quad 0$，当 $|x| \quad X$ 时，$f \ x \ ,g \ x$ 可导，且 $g \ x \quad 0$；$\lim\limits_{x \quad x_0} \frac{f \ x}{g \ x}$ 存在(或)。则

$$\lim_{x \quad x_0} \frac{f \ x}{g \ x} \quad \lim_{x \quad x_0} \frac{f \ x}{g \ x}.$$

法则Ⅱ(— 型) 设函数 $f \ x \ ,g \ x$ 满足条件：$\lim\limits_{x \quad x_0} f \ x \qquad , \lim\limits_{x \quad x_0} g \ x \qquad$ ；$f \ x \ ,g \ x$ 在 x_0 的领域内可导(在 x_0 处可除外)且 $g \ x \quad 0$；$\lim\limits_{x \quad x_0} \frac{f \ x}{g \ x}$ 存在(或)。则 $\lim\limits_{x \quad x_0} \frac{f \ x}{g \ x} \quad \lim\limits_{x \quad x_0} \frac{f \ x}{g \ x}$. 同理法则Ⅱ (— 型)仿法则Ⅰ可写出。

②泰勒公式 $f(x) \quad f(a) \quad f^{'}(a)(x \quad a) \quad \cdots \quad \frac{f^{n}(a)}{n!}(x \quad a)^{n} \quad o((x \quad a)^{n})$ 。

若 $f(a) \quad f^{'}(a) \quad \cdots \quad f^{n \ 1}(a) \quad 0, f^{n}(a) \quad 0$ 则 $f(x) \quad \frac{f^{n}(a)}{n!}(x \quad a)^{n} \quad o((x \quad a)^{n})$ 。因

此 $f(x)$ 是 $(x \quad a)$ 的 n 阶无穷小(后面章节还会讲到)。

③利用无穷小的运算性质　如若 $x \quad a$ 时，$f \ x$,$g \ x$ 分别是 $x \quad a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小，则 $f \ x \ g \ x$ 是 $x \quad a$ 的 $(n \quad m)$ 阶无穷小，当 $n \quad m$ 时，$f \ x \quad g \ x$ 是 $x \quad a$ 的 n 阶无穷小。

★本章需要记忆知识

1 重点概念、性质

函数的定义、函数连续的定义、间断点及其类型、夹逼准则、单调有界准则等。

2 重点公式

$$\lim_{x \quad 0}\frac{\sin x}{x} \quad 1, \qquad \lim_{x \quad 0} 1 \quad x^{\frac{1}{x}} \quad e \quad (\text{或}\lim_{x} \ 1 \quad \frac{1}{x}^{\ x} \quad e)\ ;$$

常用极限：$\lim_{n} \sqrt[n]{\ } \qquad 0 \quad 1$　　特例 $\lim_{n} \sqrt[n]{n} \quad 1$

$\lim_{x} \arctan x \quad \frac{}{2}$　　$\lim_{x} \arctan x \quad \frac{}{2}$　　$\lim_{x} \operatorname{arc}\cot x \quad 0$

$\lim_{x} \operatorname{arc}\cot x$　　$\lim_{x} e^x \quad 0$　$\lim_{x} e^x$　　$\lim_{x \quad 0} x^x \quad 1$

★基本题型训练

1 求复合函数

例　设 $f \ x \quad \begin{matrix} e^x, & x \quad 1 \\ x, & x \quad 1 \end{matrix}$, $\quad x \quad \begin{matrix} x \quad 2, & x \quad 0 \\ x^2 \quad 1, & x \quad 0 \end{matrix}$，求 $f \quad x$ 。

解：由题设 $f \quad x \quad \begin{matrix} e^{\ x}, & x \quad 1 \\ x \ , & x \quad 1 \end{matrix}$, 分以下情况讨论。

(1)当 $\quad x \quad 1$时，

或 $x \quad 0, \quad x \quad x \quad 2 \quad 1$，　　即 $\begin{matrix} x \quad 0 \\ x \quad 1 \end{matrix} \qquad x \quad 1.$

或 $x \quad 0, \quad x \quad x^2 \quad 1 \quad 1$， 即 $\begin{matrix} x & 0 \\ x^2 & 2 \end{matrix}$ $\quad 0 \quad x \quad \sqrt{2}.$

(2)当 $x \quad 1$时，

或 $x \quad 0, \quad x \quad x \quad 2 \quad 1$， 即 $\begin{matrix} x & 0 \\ x & 1 \end{matrix}$ $\quad 1 \quad x \quad 0.$

或 $x \quad 0, \quad x \quad x^2 \quad 1 \quad 1$， 即 $\begin{matrix} x & 0 \\ x^2 & 2 \end{matrix}$ $\quad x \quad \sqrt{2}.$

综上所述，$f \quad x \quad \begin{matrix} e^{x \ 2}, & x \quad 1 \\ x \quad 2, & 1 \quad x \quad 0 \\ e^{x^2 \ 1}, & 0 \quad x \quad \sqrt{2} \\ x^2 \quad 1, & x \quad \sqrt{2} \end{matrix}$

2 利用函数概念求函数表达式

例 已知 $f(e^x) \quad 1 \quad x \quad \sin x$，求 $f(x)$。

解：令 $e^x \quad t$，则 $x \quad \ln t$。于是 $f(t) \quad 1 \quad \ln t \quad \sin(\ln t)$ 从而 $f(x) \quad 1 \quad \ln x \quad \sin(\ln x)$。

注：设 $f(\ (x)) \quad (x)$，其中 (x) 是已知函数，则有两类问题：一是已知 f求 ；二是已知 求f。

①若 f 是已知，并存在反函数，则 $(x) \quad f^{\ 1}(\ (x))$。

②若 已知，并存在反函数，令 $t \quad (x)$，则 $x \quad {}^{1}(t)$，从而 $f(t) \quad (\ {}^{1}(t))$，即 $f(x) \quad (\ {}^{1}(t))$。

因此，这两类问题都是求反函数问题。

3 求未定型函数极限

例 求下列极限

① $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$ ② $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x\sqrt{1-x^2})}{\tan x\ln(1+x)}$　　　④ $\lim\limits_{n\to\infty} n[e^2-(1+\dfrac{1}{n})^{2n}]$

解：①原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

②原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos 2x}{2}-x^2}{x^4}=1+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x-4x}{8x^3}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{6x^2}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{6x}=\frac{2}{3}$$

③原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x\sqrt{1-x^2})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x\cos x\sqrt{1-x^2}}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)\sin x+x\cos x}{2x\cos x(1-x^2)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}$$

$$=-1$$

④原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[e+(1+x)^{\frac{1}{x}}]\cdot[e-(1+x)^{\frac{1}{x}}]}{x}$　　（$\dfrac{1}{n}=x$）

$$=2e\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=2e\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}{x}$$

$$=-2e\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\frac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= -2e^2 \lim_{x\to 0} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= -2e^2 \lim_{x\to 0} \frac{1-1-\ln(1+x)}{2x} \qquad = e^2$$

4 求变限积分不等式的极限

例 求极限 $\lim\limits_{x} \dfrac{({}_{0}^{2x} e^{t^2}dt)^2}{{}_{3x}^{0} e^{2t^2}dt}$

解：原式

$$= \lim_{x} \frac{2({}_{0}^{2x} e^{t^2}dt)({}_{0}^{2x} e^{t^2}dt)'}{3e^{18x^2}} \quad \lim_{x} \frac{4e^{4x^2}\,{}_{0}^{2x} e^{t^2}dt}{3e^{18x^2}} \quad \frac{4}{3}\lim_{x} \frac{{}_{0}^{2x} e^{t^2}dt}{e^{14x^2}} \quad \frac{4}{3}\lim_{x} \frac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}} \quad 0$$

注：在验证条件 $\lim\limits_{x} {}_{0}^{(x)} f(t)dt$ 时，要用到以下结论:若 $f(x)$ 连续，又

$\lim\limits_{x} f(x)$ A 0(也可为) $\lim\limits_{x}$ (x) ，则 $\lim\limits_{x} {}_{0}^{(x)} f(t)dt$ 。

5 由极限确定函数中的参数

例 确定 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} = c \neq 0$

解：当 $x \to 0$ 时，由 $\dfrac{0}{0}$ 可得 $b=0$

原式 $= \dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} = \dfrac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \dfrac{a-\cos x}{x^2}$ 同理可得 $a=1$

故原式 $= \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$ 故 c=$\dfrac{1}{2}$

例 试确定常数 a,b 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt)$ 存在，并求该极限值.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax^3+x+b\int_0^x e^{-t^2}dt}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3ax^2+1+be^{-x^2}}{5x^4}$ 存在

由 $\dfrac{0}{0}$ 可得 $b+1=0$，即 $b=-1$

则原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3ax^2+1-e^{-x^2}}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6ax+2xe^{-x^2}}{20x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6a+2e^{-x^2}}{20x^2}$

同理由 $\dfrac{0}{0}$ 可得 $6a+2=0$，即 $a=-\dfrac{1}{3}$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2+2e^{-x^2}}{20x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{-x^2}\cdot(-2x)}{40x}=-\dfrac{1}{10}$

6 利用函数收敛准则求极限

例 1 (利用夹逼准则)

$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n})=$________________

解： $\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$

$>\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}$

且 $\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}<\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\dfrac{1}{2}$

由夹逼原则可得原式 $=\dfrac{1}{2}$

例 2 (利用单调有界准则)

若序列 a_n 的项满足：$a_1 \quad \sqrt{a}$ (a 为正的常数)，且 $a_{n\ 1} \quad \dfrac{1}{2} \quad a_n \quad \dfrac{a}{a_n}$ ，(这里 $n \quad 1,2,\cdots$)。

试证 a_n 有极限，并求出它。

解：由 $a_1 \quad \sqrt{a}$ ，又 $a_2 \quad \dfrac{1}{2} \quad a_1 \quad \dfrac{a}{a_1} \quad \dfrac{a_1^2 \quad a}{2a_1} \quad \dfrac{2a_1\sqrt{a}}{2a_1} \quad \sqrt{a}$ ，

今 用 数 学 归 纳 法 证 $a_k \quad \sqrt{a}$ 。 这 只 须 注 意 到 ：

$$a_{k\ 1}\quad \frac{1}{2}\quad a_k\quad \frac{a}{a_k}\quad \frac{a_k^{\ 2}\quad a}{2a_k}\quad \frac{2a_k\sqrt{a}}{2a_k}\quad \sqrt{a}\text{。}$$

又 $a_n\quad a_{n\ 1}\quad \frac{1}{2}\quad a_n\quad \frac{a}{a_n}\quad \frac{a_n^{\ 2}\quad a}{2a_n}\quad 0$，故 a_n 单调且有下界，从而其极限 $(n$ 　时)存在，令其为 A。

由 $a_{n\ 1}\quad \frac{1}{2}\quad a_n\quad \frac{a}{a_n}$ 有 $\lim\limits_{n} a_{n\ 1}\quad \lim\limits_{n}\frac{1}{2}\quad a_n\quad \frac{a}{a_n}$，即 $A\quad \frac{1}{2}\quad A\quad \frac{a}{A}$，即

$A^2\quad a$，

所以 $A\quad \sqrt{a}\quad A\quad 0$。从而 $\lim\limits_{n} a_n\quad \sqrt{a}$.

7 求 n 项和数列的极限

例　求 $\lim\limits_{n}[\frac{\sin\frac{}{n}}{n\quad 1}\quad \frac{\sin\frac{2}{n}}{n\quad \frac{1}{2}}\quad \cdots\quad \frac{\sin\frac{n}{n}}{n\quad \frac{1}{n}}]$

解：$\frac{\sin\frac{}{n}}{n\quad 1}\quad \frac{\sin\frac{2}{n}}{n\quad \frac{1}{2}}\quad \cdots\quad \frac{\sin\frac{n}{n}}{n\quad \frac{1}{n}} < \frac{1}{n}(\sin\frac{}{n}\quad \sin\frac{2}{n}\quad \cdots\quad \sin\frac{n}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i\ 1}^{n}\sin\frac{i}{n}$

而 $\lim\limits_{n}\frac{1}{n}\sum_{i\ 1}^{n}\sin\frac{i}{n}\quad \int_0^1\sin\quad xdx\quad \frac{2}{}$，另一方面，

$\frac{\sin\frac{}{n}}{n\quad 1}\quad \frac{\sin\frac{2}{n}}{n\quad \frac{1}{2}}\quad \cdots\quad \frac{\sin\frac{n}{n}}{n\quad \frac{1}{n}} > \frac{1}{n\quad 1}(\sin\frac{}{n}\quad \sin\frac{2}{n}\quad \cdots\quad \sin\frac{n}{n}) = \frac{n}{n\quad 1}\frac{1}{n}\sum_{i\ 1}^{n}\sin\frac{i}{n}$

且 $\lim\limits_{n}\frac{n}{n\quad 1}\frac{1}{n}\sum_{i\ 1}^{n}\sin\frac{i}{n}\quad \frac{2}{}$，故由夹逼定理原式$=\frac{2}{}$

8 求 n 项积数列极限

例　当 $x\quad 0$ 时，$\lim\limits_{n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

原极限　$\lim\limits_{n}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$\lim_{n} \frac{2^{n\ 1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots(\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n})}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$\lim_{n} \frac{2^{n\ 2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ \ (2\cos\frac{x}{2^{n\ 1}}\sin\frac{x}{2^{n\ 1}})}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \quad \cdots\cdots$$

$$\lim_{n} \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \xlongequal{\sin\frac{x}{2^n}\ \ \frac{x}{2^n}} \lim_{n} \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \quad \frac{\sin x}{x}$$

9 利用函数极限求数列极限

例 求$\lim\limits_{n}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$

解：因为$\lim\limits_{n} n\tan\frac{1}{n}\quad \lim\limits_{n}\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\quad 1$, 可化为求$\lim\limits_{n}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}$

又因为$\lim\limits_{n}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2} \xlongequal{t\quad\frac{1}{x}} \lim\limits_{t\ 0}(1\quad\frac{\tan t\quad t}{t})^{\frac{t}{\tan t\ \ t}\cdot\frac{\tan t\ \ t}{t^3}}$，其中 $\lim\limits_{t\ 0}\frac{t}{\tan t\quad t}\quad 0$ 而

$\lim\limits_{t\ 0}\frac{\tan t\quad t}{t^3}\quad \lim\limits_{t\ 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 t}\quad 1}{3t^2}\quad \frac{1}{3}\lim\limits_{t\ 0}\frac{(1\quad\cos t)(1\quad\cos t)}{t^2\cos^2 t}\quad \frac{1}{3}$，故原式=$e^{\frac{1}{3}}$

10 无穷小的比较与无穷小的阶的确定

例 设函数$f(x)\quad \lim\limits_{n}\sqrt[n]{1\quad |x|^{3n}}$，则 f(x)在 (,) 内

(A) 处处可导 (B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点 (D) 至少有三个不可导点 [C]

解：先求出 f(x) 的表达式，再讨论其可导情形当$|x|\quad 1$时，$f(x)\quad \lim\limits_{n}\sqrt[n]{1\quad |x|^{3n}}\quad 1$；

当$|x|\quad 1$时，$f(x)\quad \lim\limits_{n}\sqrt[n]{1\quad 1}\quad 1$；

当$|x|\quad 1$时，$f(x)\quad \lim\limits_{n}|x|^3(\frac{1}{|x|^{3n}}\quad 1)^{\frac{1}{n}}\quad |x|^3$.

即 $f(x) \quad \begin{cases} x^3, & x \quad 1, \\ 1, & 1 \quad x \quad 1, \\ x^3, & x \quad 1. \end{cases}$ 可见 f(x)仅在 x= 1时不可导，故应选(C)

11 函数连续性与间断点类型的讨论

例 判断 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$ 间断点并判别类型

解：当 $x=\pm 1$ 时， $f(x)=0$ 当 $|x|>1$ 时， $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=-x \\ \lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=x\end{cases}$

当 $|x|<1$ 时， $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=x \\ \lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=-x\end{cases}$ 即 $\lim\limits_{x\to\pm 1}f(x)\neq f(\pm 1)$，

所以 $x=\pm 1$ 为函数 $f(x)$ 第一类间断点

12 有关极限的证明

例 设 $f(x)$ 在[0,) 连续, $\lim\limits_{x} f(x) \quad A \quad 0$,求证 $\lim\limits_{x} \ {}_0^x f(t)dt$

证明因 $\lim\limits_{x} f(x) \quad A \quad \dfrac{A}{2}$，由极限的不等式性质可知，

X,当$x \quad X$时, $f(x) \quad \dfrac{A}{2}$,则$x \quad X$时, 有

${}_0^x f(t)dt \quad {}_0^X f(t)dt \quad {}_X^x f(t)dt \quad {}_0^X f(t)dt \quad \dfrac{A}{2}(x \quad X)$ ， 因 此 $\lim\limits_{x} \ {}_0^x f(t)dt$

注： 若 $A \quad 0$,则 $\lim\limits_{x} \ {}_0^x f(t)dt$ ，

类似可知，若 $A \quad 0$,则 $\lim\limits_{x} \ {}_0^x f(t)dt$ 。

13 利用泰勒公式求极限

例 求下列极限(关于泰勒展式有关内容可参见第三章)

(1) $\lim\limits_{x \quad 0}\dfrac{\cos x \quad e^{\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}$； (2) $\lim\limits_{x}[x \quad x^2\ln(1 \quad \dfrac{1}{x})]$；

(3) $\lim\limits_{x\quad 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1\quad 5x}\quad(1\quad x)}$；　(4) $\lim\limits_{x\quad 0}(1\quad \dfrac{1}{x^2}\quad \dfrac{1}{x^3}\ln\dfrac{2\quad x}{2\quad x})$；

解 (1) $\lim\limits_{x\quad 0}\dfrac{\cos x\quad e^{\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}\quad \lim\limits_{x\quad 0}\dfrac{\cos x\quad e^{\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

∵分母的次数为 4，∴ 只要把 $\cos x$，$e^{\frac{x^2}{2}}$ 展开到出现 x 的四次幂即可。

$$\cos x\quad 1\quad \frac{1}{2!}x^2\quad \frac{1}{4!}x^4\quad o(x^4)$$

$$e^{\frac{x^2}{2}}\quad 1\quad \frac{1}{2}x^2\quad \frac{1}{2!}(\quad \frac{1}{2}x^2)^2\quad o(x^4)$$

故　原极限 $\lim\limits_{x\quad 0}\dfrac{(\frac{1}{4!}\quad \frac{1}{8})x^4\quad o\quad x^4}{x^4}\quad \dfrac{1}{12}$

(2) $\ln(1\quad \dfrac{1}{x})$ 的展开式只要取到 2 项即可

$$\ln(1\quad \frac{1}{x})\quad \frac{1}{x}\quad \frac{1}{2}(\frac{1}{x})^2\quad o((\frac{1}{x})^2)$$

原极限 $\lim\limits_{x}[x\quad x^2(\dfrac{1}{x}\quad \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x})^2\quad o((\dfrac{1}{x})^2))]\quad \lim\limits_{x}[\dfrac{1}{2}\quad o(1)]\quad \dfrac{1}{2}$

(3) ∵分子关于 x 的次数为 2。

∴ $\sqrt[5]{1\quad 5x}\quad (1\quad 5x)^{\frac{1}{5}}\quad 1\quad \dfrac{1}{5}(5x)\quad \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{5}\quad 1)\ (5x)^2\quad o(x^2)$

$$1\quad x\quad 2x^2\quad o(x^2)$$

原极限 $\lim\limits_{x\quad 0}\dfrac{x^2}{[1\quad x\quad 2x^2\quad o(x^2)]\quad (1\quad x)}\quad \dfrac{1}{2}$

(4) ∵ $\ln\dfrac{2\quad x}{2\quad x}\quad \ln\dfrac{1\quad \frac{x}{2}}{1\quad \frac{x}{2}}\quad \ln(1\quad \dfrac{x}{2})\quad \ln(1\quad \dfrac{x}{2})$

$[\dfrac{x}{2}\quad \dfrac{1}{2}(\dfrac{x}{2})^2\quad \dfrac{1}{3}(\dfrac{x}{2})^3\quad o(x^3)]\quad [\quad \dfrac{x}{2}\quad \dfrac{1}{2}(\dfrac{x}{2})^2\quad \dfrac{1}{3}(\dfrac{x}{2})^3\quad o(x^3)]$

$x\quad \dfrac{1}{12}x^3\quad o(x^3)$

∴ $1\quad \dfrac{1}{x^2}\quad \dfrac{1}{x^3}[x\quad \dfrac{1}{12}x^3\quad o(x^3)]\quad 1\quad \dfrac{1}{12}\quad \dfrac{o(x^3)}{x^3}$

故 $\lim\limits_{x\quad 0}(1\quad \dfrac{1}{x^2}\quad \dfrac{1}{x^3}\ln\dfrac{2\quad x}{2\quad x})\quad \dfrac{11}{12}$

★练习题一

1 填空题

(1) 已知 $f'(3)=2$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$__

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$，$f'(0)=b$，若 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$________

(3) 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3 阶无穷小，则 $a=$__,$b=$__

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=$________

(5) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=A(\neq 0,\neq\infty)$，则 $A=$_____ ，$k=$______

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$_______

(7) $\lim\limits_{n}(\dfrac{1^2}{n^3\quad 1}\quad\dfrac{2^2}{n^3\quad 2}\quad\cdots\quad\dfrac{n^2}{n^3\quad n})$ ________

(8) $\lim\limits_{n}\dfrac{x^m\quad 1}{x^n\quad 1}=$________ ($m$ 和 n 为正整数且 $m\quad n$)

(9)设 $f(x)\quad\begin{matrix}a\quad bx^2, & x\quad 0\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x\quad 0\end{matrix}$ 在 $x\quad 0$ 处间断，则 a 与 b 应满足的关系是______

2 选择题

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x(e^{x^2}-1)dx}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a 的值是

$(A)\ 0$ $\qquad(B)\ 1$ $\qquad(C)\ 2$ $\qquad(D)\ \dfrac{1}{2}$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$, 其中 $a^2+c^2\neq 0$, 则必有

$(A)\ b=4d$ $(B)\ b=-4d$ $(C)\ a=4c$ $(D)\ a=-4c$

(3) 函数 $f\ \ x\ \ \ \dfrac{x}{1\ \ x^2}$ 在定义域内为

(A)有上界无下界. (B)有下界无上界.

(C)有界,且 $\dfrac{1}{2}\ \ f\ \ x\ \ \dfrac{1}{2}$. (D)有界且 $2\ \ \dfrac{x}{1\ \ x^2}\ \ 2$

(4) $\lim\limits_{x} x^3(\sqrt{x^2\ \ 2}\ \ 2\sqrt{x^2\ \ 1}\ \ x)$ __

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 2 (D)4

(5) $f(x)\ \ \begin{matrix} x\ \ 1, & x\ \ 1 \\ 2, & x\ \ 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x\ \ 1 \end{matrix}$ 则 $\lim\limits_{x\ \ 1} f(x)$ __

(A)1 (B)0 (C) 2 (D)不存在

(6) 设 $f(x)\ \ \dfrac{x^3\ \ x}{\sin\ \ x}$,则__

(A) 有无穷多个第一类间断点, (B) 自由一个可去间断点

(C) 有两个跳跃间断点 (D) 有 3 个可去间断点

3 计算与证明

(1) 求极限① $\lim\limits_{x\ \ 0}\dfrac{\sqrt[m]{(1\ \ x)^n}\ \ 1}{x}$ ② $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right]$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x) & x<0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos t^2dt & x>0\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

(3) 试确定常数 a,b 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\right)$ 存在，并求该

极限值.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)]$，且 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 α,β 的值。

(5) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=b, b\neq 0$, 求 a,b 的值。

(6) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}]=0$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$.

(7) 设 $f(x)$ 是三次多项式，且有 $\lim\limits_{x \quad 2a}\dfrac{f(x)}{x \quad 2a} \quad \lim\limits_{x \quad 4a}\dfrac{f(x)}{x \quad 4a} \quad 1 \quad (a \quad 0)$，求 $\lim\limits_{x \quad 3a}\dfrac{f(x)}{x \quad 3a}$。

(8) 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n \quad (a,b)$，试证：

(a,b)，使

$$f(\quad) \quad \frac{1}{n}[f(x_1) \quad f(x_2) \quad \cdots \quad f(x_n)]。$$

(9) 设 $f(x)$ 在 $(\quad , \quad)$ 上连续，且 $f[f(x)] \quad x$，证明： 一个 ，使得 $f(\quad)$

(10) 设 $f(x)$， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \quad g(a), f(b) \quad g(b)$，则在 (a,b) 内至少 一个 ，使：$f(\quad) \quad g(\quad)$

(11)证明方程 $x^3 \quad 9x \quad 1 \quad 0$ 恰有 3 个实根.

(12)求复合函数设 $f \quad x \quad \dfrac{1}{2} \quad x \quad |x|$， $x \quad \begin{matrix} x, & x \quad 0 \\ x^2, & x \quad 0 \end{matrix}$,求 $f \quad x$ ， $f \quad x$

★参考答案

1 (1)-1　　(2)a+b　　(3) $a=\dfrac{1}{2}$， $b=-\dfrac{1}{2}$

(4) $\dfrac{1}{6}$　　(5) $A=\dfrac{1}{1991}$, $k=1991$

(6) 2　　(7) $\dfrac{1}{3}$

(8) $\dfrac{m}{n}$　　(9) $a \quad b$

2 (1) (A)　　(2) (D)　　(3) (C)　　(4) (A)　　(5) (D)　　(6) (D)

3 (1) $\frac{n}{m}$　　(2) 1　　(3) $a=-\frac{1}{3}$, $b=-1$　　(4) $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{2}$

(5) $1-5\alpha=0, \alpha=\frac{1}{5}$, $b=\frac{7}{5}$　　(6) $\frac{9}{2}$　　(7) $\frac{1}{2}$

(8) 提示：用介值定理

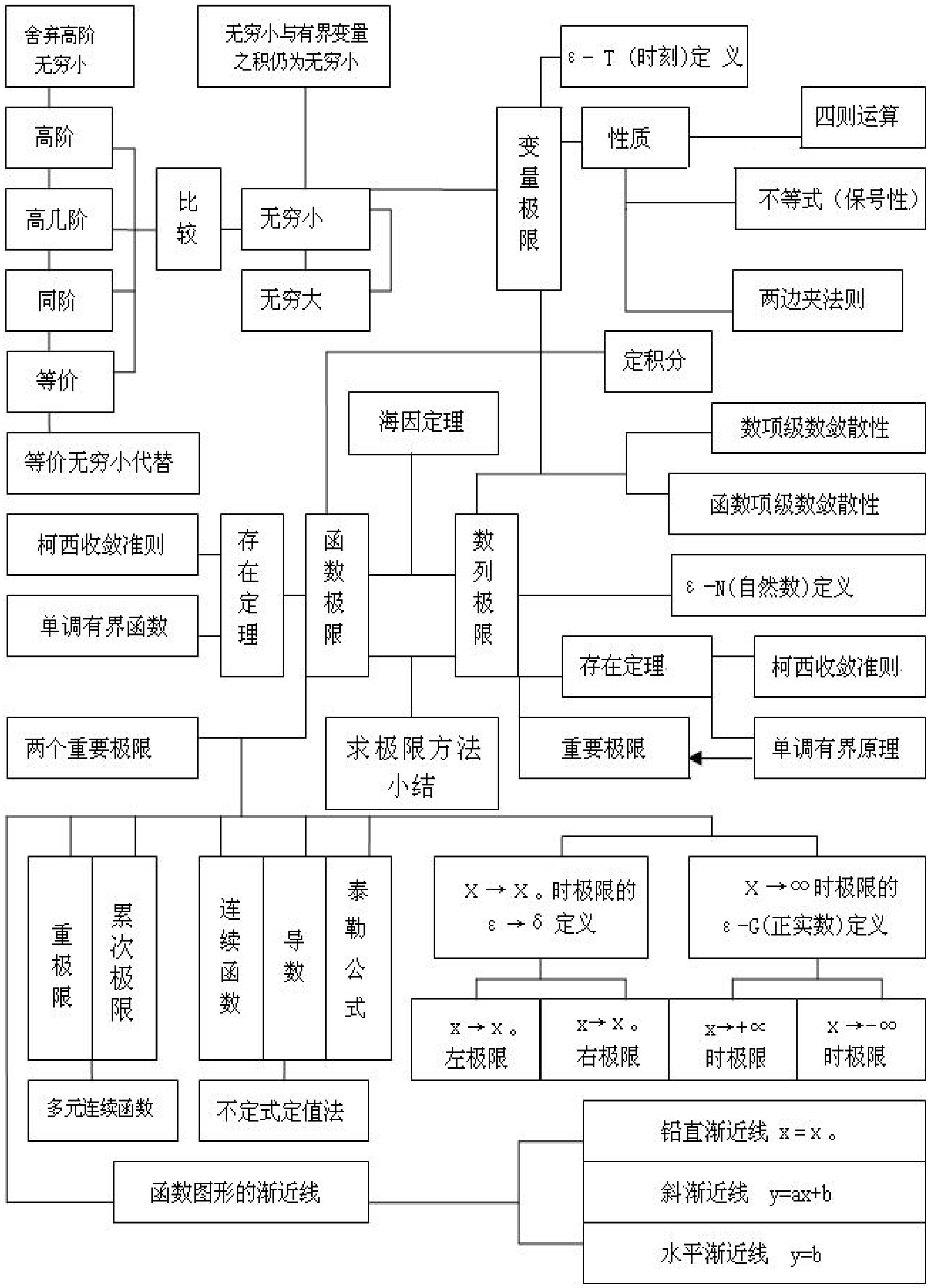
(9) 提示：辅助函数 $F(x)$　$f(x)$　x，用零点定理

(10) 辅助函数 $F(x)$　$f(x)$　$g(x)$，利用介值定理

(11) 可利用零点定理

(12) 可利用前面讲到的求复合函数当中的图示法

★极限理论框架图



第二章 一元函数微分学

※本章要求

1 理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量(▲数三、数四不要求)，理解函数的可导性与连续性之间的关系。(▲数三、数四增加要求了解经济意义（含边际与弹性的概念）。

2 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式。了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。

3 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数。

4 会求分段函数的导数，会求隐函数和参数方程所确定的函数以及反函数的导数。(▲数三、数四参数方程求导不要求)

5 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理泰勒定理，了解并会用(▲数三、数四不要求)柯西中值定理。

6 掌握用洛必达法则求未定型极限的方法(▲数三、数四会用洛必达法则求极限)。

7 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其应用。

8 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形。

9 了解曲率和曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径(▲数三、数四不要求)。

第 1 节　导数与微分

★基本内容学习

一 基本概念与定理

1 导数的概念

定义 1(函数在某点的导数)：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的领域内有定义，给 x 在 x_0 处以增量 $\Delta x(\neq 0)$，函数 y 和相应地得到增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$……(1) 存在，则函数在点处可导，该函数值称为函数在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，$y'(x_0)$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 令 $x_0+\Delta x=x$，则 (1)

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

定义 2(左右导数)：函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数分别定义为

$$\text{左导数}\quad f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},(x=x_0+\Delta x)$$

$$\text{右导数}\quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

定义 3(函数在区间上可导)：如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点均可导；则称该函数在 (a,b) 内可导；若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且在 $x=a$ 和 $x=b$ 处分别具有右导数 $f'_+(a)$ 和左导数 $f'_-(b)$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导。

2 导数的几何意义与物理意义

导数的几何意义：导数 $f'(x_0)$ 在几何上可表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率，曲线 $y=f(x)$ 在点 M 的切线方程及法线方程分别是 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 及 $y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$ （当$f'(x_0)\neq 0$时）

导数的物理意义：设 $s=f(t)$ 表示直线运动，其中 s 表示位移，t 表示时刻，则 $v=\dfrac{ds}{dt}=f'(t)$ 表示在时刻 t 的瞬时速度，$a=\dfrac{dv}{dt}$ 表示在时刻 t 的加速度。如果 $y=f(x)$ 表示物理上的其他量，即导数 $\dfrac{dy}{dx}=f'(x_0)$ 表示该量的变化量。

3 微分的概念

定义 4：如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的某邻域内有定义，当自变量在点 x 取得增量 Δx 时，函数的增量 Δy 可表示为 $\Delta y=A\Delta x+\alpha$ 其中 A 是与 Δx 无关的量，α 是当 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小，则称 $y=f(x)$ 在 x 处可微，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x 处的微分，记为 dy 或 $df(x)$，即 $dy=df(x)=A\Delta x$ (1)由于当 x 为自变量时，$dx=\Delta x$，同时可证 $f'(x)=A$，所以(1)又可写成 $dy=f'(x)dx$ (函数的一阶微分与其导数的关系)。

二 基本定理

1 与导数有关的几个基本定理

(1)可微与可导之间的关系: 函数 $f(x)$ 在 x 处可微 $\quad f(x)$ 在 x 处可导

(2)可导与连续的关系：若函数 $y \quad f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y \quad f(x)$ 在点 x 处连续，但函数连续不一定可导。

(3)导数与左右导数的关系：$f\ (x_0)$ 存在 $\quad f\ (x_0) \quad f\ (x_0)$。

★基本知识记忆

1 导数的运算法则

四则运算法则：设函数 $u \quad u(x)$，$v \quad v(x)$ 在点 x 可导则

(1) $(u \quad v) \quad u \quad v \qquad d(u \quad v) \quad du \quad dv$

(2) $(uv) \quad uv \quad vu \qquad d(uv) \quad udv \quad vdu$

(3) $(\frac{u}{v}) \quad \frac{vu \quad uv}{v^2}(v \quad 0) \quad d(\frac{u}{v}) \quad \frac{vdu \quad udv}{v^2}$

2 反函数的运算法则

设 $y \quad f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续，在点 x 处可导且 $f\ (x) \quad 0$，则其反数在点 x 所对应的 y 处可导，并且有 $\frac{dy}{dx} \quad \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$。

3 复合函数的运算法则

若 $\quad (x)$ 在点 x 可导，而 $y \quad f(\ )$ 在对应点 $(\quad (x))$ 可导，则复合函数 $y \quad f(\ (x))$ 在点 x 可导，且 $y' \quad f'(\ ) \quad '(x)$。

4 基本导数与微分表

(1) $y \quad c$（常数） $\qquad y \quad 0 \qquad dy \quad 0$

(2) $y \quad x^a$ (为实数) $\qquad y \quad x^{\ \ 1} \qquad dy \quad x^{\ \ 1}dx$

(3) $y \quad a^x \qquad y \quad a^x \ln a \qquad dy \quad a^x \ln a dx$

特例 $(e^x)'=e^x$ $d(e^x)=e^x dx$

(4) $y=\log_a x, a>0, a\neq 1$ $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $dy=\dfrac{1}{x\ln a}dx$

特例 $y=\ln x$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$

(5) $y=\sin x$ $y'=\cos x$ $d(\sin x)=\cos x dx$

(6) $y=\cos x$ $y'=-\sin x$ $d(\cos x)=-\sin x dx$

(7) $y=\tan x$ $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ $d(\tan x)=\sec^2 x dx$

(8) $y=\cot x$ $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$ $d(\cot x)=-\csc^2 x dx$

(9) $y=\sec x$ $y'=\sec x\tan x$ $d(\sec x)=\sec x\tan x dx$

(10) $y=\csc x$ $y'=-\csc x\cot x$ $d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$

(11) $y=\arcsin x$ $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(12) $y=\arccos x$ $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(13) $y=\arctan x$ $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$

(14) $y=\operatorname{arccot} x$ $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$ $d(\operatorname{arccot} x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$

(15) $y=shx$ $y'=chx$ $d(shx)=chxdx$

(16) $y=chx$ $y'=shx$ $d(chx)=shxdx$

★基本题型训练

1 一元函数导数与微分概念的命题

例 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，求 $f'(1)$。

解：由导数定义 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$，而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

$$\therefore\quad f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$$

$$\therefore\quad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

2 几类一元函数的导数与微分

例　求下列函数的导数或微分

(1) $y \quad \arcsin e^{\quad\sqrt{x}}$　　　　(2) 设 $y \quad \ln(1 \quad 3^{\quad x})$　　　求 dy

解：(1) $y' \quad \dfrac{1}{\sqrt{1 \quad e^{\ 2\sqrt{x}}}}(e^{\quad\sqrt{x}})' \quad \dfrac{1}{\sqrt{1 \quad e^{\ 2\sqrt{x}}}}e^{\quad\sqrt{x}}(\quad\sqrt{x})' \quad \dfrac{1}{2e^{\sqrt{x}}\sqrt{(1 \quad e^{\ 2\sqrt{x}})x}}$

(2) $dy \quad \dfrac{1}{1 \quad 3^{\quad x}}d(1 \quad 3^{\quad x}) \quad \dfrac{3^{\quad x}\ln 3}{1 \quad 3^{\quad x}}dx \quad \dfrac{1}{3^{x} \quad 1}dx$

例　求由参数式确定的函数的导数

设 $\begin{matrix} x & \ln(1 \quad t^2) \\ y & \arctan t \end{matrix}$　求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}\underline{\underline{\text{参数式求导公式}}}\dfrac{y'_t}{x'_t} \quad \dfrac{\dfrac{1}{1 \quad t^2}}{\dfrac{2t}{1 \quad t^2}} \quad \dfrac{1}{2t}$，

将该式对 x 求导，右端先对 t 求导再乘上 $\dfrac{dt}{dx}$ 得

$$\frac{d^2y}{dx^2}\underline{\underline{\text{复合函数求导法}}}(\frac{1}{2t})' \ \frac{dt}{dx}\underline{\underline{\text{反函数求导法}}} \quad \frac{1}{2t^2} \ \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{2t^2 \quad \dfrac{2t}{1 \quad t^2}} \quad \frac{1 \quad t^2}{4t^3}$$

例　求隐函数的导数或微分

隐函数求导：由方程 $F(x,y) \quad 0$ 所确定的函数 $y \quad y(x)$，称为 y 是变量 x 的隐函数。

隐函数导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 的求法一般有三种方法：

(1)方程两边对 x 求导，要记住 y 是 x 的函数，则 y 的函数是 x 的复合函数。例如 $\dfrac{1}{y}$， y^2， $\ln y$， e^y 等均是 x 的复合函数。对 x 求导应按复合函数连锁法则做。

(2)公式法。由 $F(x,y) \quad 0$ 知 $\dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ 其中，$F_x(x,y)$，$F_y(x,y)$ 分别表示 $F(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导数。

(3)利用微分形式不变性。在方程两边求微分，然后解出 $\dfrac{dy}{dx}$。举例说明如下：

例　设方程 $xy^2 \quad e^y \quad \cos(x \quad y^2)$，求 y 。

方法一：

$y^2+2xyy'+e^y y'=-\sin(x+y^2)\cdot(1+2yy')$，$y'=-\dfrac{y^2+\sin(x+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)}$

方法二：

令 $F(x,y)=xy^2+e^y-\cos(x+y^2)$

因为 $F_x=y^2+\sin(x+y^2)$， $F_y=2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\dfrac{y^2+\sin(x+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)}$

方法三：

$d(xy^2+e^y)=d(\cos(x+y^2))$，$y^2dx+2xydy+e^ydy=-\sin(x+y^2)(dx+2ydy)$

$[2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)]dy=-[y^2+\sin(x+y^2)]dx$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2+\sin(x+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)}$$

注：关于隐函数的三种方法，大家可以根据具体题目具体分析，采用适合题目的最好方法。

分段函数的求导

例 确定常数 a 和 b，使得函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1\\ x^2, & x\le 1\end{cases}$ 处处可导。

解：由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，由表达式知， $f(x)$ 在 $x=1$ 是左连续的，于是， $f(x)$ 在 $x=1$ 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=f(1)\Leftrightarrow a+b=1$。又 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导 $\Leftrightarrow f'_-(1)=f'_+(1)$，在 $a+b=1$ 条件下，$f(x)$ 可改写成 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1\\ x^2, & x\le 1\end{cases}$。

于是， $f'_+(1)=(ax+b)'|_{x=1}=a$， $f'_-(1)=(x^2)'|_{x=1}=2$， 因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导 $\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=1,\\ a=2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2.\\ b=-1\end{cases}$ 故仅当 $a=2,b=-1$ 时， $f(x)$ 处处可导。

注：对这类问题的依据是①函数在某点可导则在该点处连续；②函数在某点处可导，则在该点处左右导数相等这两个性质，建立两个特定常数之间的两个关系式，然后再解出来。

3 变限积分的求导

例 设 $f(x)$ 连续且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$，则 $f(7) =$ ____________

解：这是含变限积分的恒等式，两边对 x 求导得 $f(x^3-1)\cdot 3x^2 = 1$，令 $x = 2$，即得 $f(7) = \frac{1}{12}$

4 可导与连续命题的讨论

例 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt, & x>0 \end{cases}$，在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解：由于函数具有分段形式，我们可分别按定义求出 $f'_-(0), f'_+(0)$ 来讨论 $f'(0)$ 是否存在。

按定义

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt - x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2 - 1}{2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2x\sin x^2}{2} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2(\sin x - x)}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x - 1}{2x} = 0$$

因此，$f'_+(0) = f'_-(0) = 0$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导,因而也必连续。

5 导数概念的应用问题

例 求平面曲线的切线方程或法线方程

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式

$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 的高阶无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程。

解：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程 $y - f(6) = f'(6)(x-6)$，由周期性，

$f(6) = f(1)$，

$f'(6) = f'(1)$，故只需求 $f(1)$ 与 $f'(1)$。又已知只给出 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，所以

利用导数定义求 $f'(1)$ 由连续性，有 $\lim_{x\to 0}[f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)] = \lim_{x\to 0}[8x+\alpha(x)]$ 即

$f(1)\quad 3f(1)\quad 0$ 故 $f(1)\quad 0$ 因此，$f\ (1)\quad \lim\limits_{u\quad 0}\frac{f(1\quad u)\quad f(1)}{u}\quad \lim\limits_{u\quad 0}\frac{f(1\quad u)}{u}$ 又

$\lim\limits_{x\quad 0}\frac{f(1\quad \sin x)\quad 3f(1\quad \sin x)}{\sin x}\quad \lim\limits_{x\quad 0}\frac{8x\quad (x)}{\sin x}$

即 $\lim\limits_{x\quad 0}[\frac{f(1\quad \sin x)}{\sin x}\quad \frac{3f(1\quad \sin x)}{\sin x}]\quad \lim\limits_{x\quad 0}\frac{8x\quad (x)}{\sin x}$， $(\sin x \sim x)$

也即 $f\ (1)\quad 3f\ (1)\quad 8$，故 $f\ (1)\quad 2$，所以要求的切线方程为 $y\quad 2(x\quad 6)$。

第 2 节 高阶导数

★基本内容学习

一 基本概念

定义 1 若 $y = f(x)$ 导函数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，则称 $f'(x)$ 在点 x 处的导数为 $y = f(x)$ 在点 x 处的**二阶导数**，记为 $\frac{d^2y}{dx^2}, f''(x)$，即 $f''(x)\quad \lim\limits_{x}\frac{f'(x+Dx)-f'(x)}{Dx}$，同样可定义函数的 n 阶导数为 $f^{(n)}(x)\quad \lim\limits_{x\quad 0}\frac{f^{(n\quad 1)}(x\quad x)\quad f^{(n\quad 1)}(x)}{x}$。

二 高阶导数的求法

直接法：所谓直接法是指求出所给函数的 1~3 阶或 4 阶导数后，分析所得结果的规律性，从而写出 n 阶导数的方法。

间接法：利用已知的高阶导数公式，通过四则运算、变量代换、泰勒级数的方法求 n 阶导数。

★基本知识记忆

常用高阶导数公式

（1）$(a^x)^{(n)}\quad a^x\ln^n a\quad (a\quad 0)\qquad (e^x)^{(n)}\quad e^x$

（2）$(\sin kx)^{(n)}\quad k^n\sin(kx\quad n\ \frac{}{2})$

（3）$(\cos kx)^{(n)}\quad k^n\cos(kx\quad n\ \frac{}{2})$

（4）$(x^m)^{(n)}\quad m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$

（5）$(\ln x)^{(n)}\quad (\quad 1)^{(n\quad 1)}\frac{(n\quad 1)!}{x^n}$

（6）莱布尼兹公式：若$u(x),v(x)$均n阶可导，则 $(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n} c_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$，其中$u^{(0)}=u$， $v^{(0)}=v$

★基本题型训练

6 求一元函数的n阶导数

例 1 设$y=\mathrm{e}^x\cos x$，求$y^{(n)}$。

解：$y'=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}\mathrm{e}^x\cos(x+\frac{\pi}{4})$，

$$y''=\sqrt{2}\left[\mathrm{e}^x\cos(x+\frac{\pi}{4})-\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{\pi}{4})\right]=(\sqrt{2})^2\mathrm{e}^x\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{4}),$$

$$y'''=(\sqrt{2})^2\left[\mathrm{e}^x\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{4})-\mathrm{e}^x\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{4})\right]=(\sqrt{2})^3\mathrm{e}^x\cos(x+3\cdot\frac{\pi}{4}),$$

……

$$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^x\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{4})$$

例 2 $f(x)$任意可导，且$f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}, f(0)=1$，求$f^{(n)}(0)$。

解：对$f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$两边求导得：

$$f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)},$$

$$f'''(x)=2\mathrm{e}^{2f(x)}f'(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)},$$

$$f^{(4)}(x)=3\cdot 2\mathrm{e}^{3f(x)}\cdot f'(x)=3\cdot 2\mathrm{e}^{4f(x)},$$

……

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\mathrm{e}^{-nf(x)},$$

所以，$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!\mathrm{e}^{-nf(0)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\mathrm{e}^{-n}$

例 3 设$y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$，求$y^{(n)}$.

解：$y=(x+3)+\dfrac{7x-6}{(x-2)(x-1)}=x+3+\dfrac{8}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$,

$$y^{(n)} \quad (x \quad 3)^{(n)} \quad 8(x \quad 2)^{\ 1 \quad (n)} \quad (x \quad 1)^{\ 1 \quad (n)}$$

$$0 \quad (\quad 1)^n \ 8 \ n!(x \quad 2)^{\ 1 \ n} \quad (\quad 1)^n n!(x \quad 1)^{\ 1 \ n}$$

$$(\quad 1)^n n! \ \frac{8}{(x \quad 2)^{n \ 1}} \quad \frac{1}{(x \quad 1)^{n \ 1}} .(n \quad 2)$$

例 4 设 $y \quad \sin x \sin 2x \sin 3x$, 求 $y^{(n)}$.

解： $y \quad \frac{1}{2}(\cos 2x \quad \cos 4x)\sin 2x \quad \frac{1}{4}\sin 4x \quad \frac{1}{4}(\sin 6x \quad \sin 2x)$

$$\frac{1}{4}(\sin 2x \quad \sin 4x \quad \sin 6x),$$

$$y^{(n)} \quad \frac{1}{4} \quad 2^n \sin(2x \quad \frac{n}{2}) \quad 4^n \sin(4x \quad \frac{n}{2}) \quad 6^n \sin(6x \quad \frac{n}{2}) \ .$$

★练习题二

1 填空题

(1)曲线 $\begin{matrix} x & e^t \sin 2t \\ y & e^t \cos t \end{matrix}$ 在点(0,1)处的法线方程为________。

(2)设函数 $f(x) \quad \begin{matrix} \dfrac{x}{1 \quad e^{\frac{1}{x}}}, & x \quad 0 \\ 0, & x \quad 0 \\ \dfrac{2x}{1 \quad e^x}, & x \quad 0 \end{matrix}$ ，则函数在点 $x \quad 0$ 处的导数为________。

(3)设方程 $x \quad y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 dy ________。

(4)设函数 $y \quad y(x)$ 由参数方程 $\begin{matrix} x & t & \ln(1 \quad t) \\ y & t^3 & t^2 \end{matrix}$ 所确定，则 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}=$________。

(5)已知 $f'(x_0) \quad 1$，则 $\lim\limits_{x \quad 0} \dfrac{x}{f(x_0 \quad 2x) \quad f(x_0 \quad x)}=$________。

(6)设 $f(t) \quad \lim\limits_{x \quad 0} t(\dfrac{x \quad t}{x \quad t})^x$，则 $f'(t)=$________。

(7) 设函数 $y \quad y(x)$ 由方程 $e^{x+y} \quad \cos(xy) \quad 0$ 确定，则________。

(8) $f(x) \quad \dfrac{1 \quad x}{1 \quad x}$，则 $f^{(n)}$ ____.

(9) 设 f 为可导函数， $y \quad \sin\{f[\sin f(x)]\}$ ，则 $\dfrac{dy}{dx}$ ____.

(10) 已知 $\dfrac{d}{dx}\ f\ \dfrac{1}{x^2} \quad \dfrac{1}{x}$，则 $f'(\dfrac{1}{2})$ ____.

2 选择题

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)dt$，则 $F'(x)=$________

$(A)\ -e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ $(B)\ -e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

$(C)\ e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ $(D)\ e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(2) 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为

$(A)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在 $(B)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

$(C)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\sinh)$ 存在 $(D)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

(3) 设 $f(x) \quad 3x^3 \quad x^2|x|$，则使 $f^n(0)$ 存在的最高阶数 n 为

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D)4

(4) 设 $f(x) \quad \begin{matrix} \dfrac{2}{3}x^3, & x \quad 1 \\ x^2, & x \quad 1 \end{matrix}$，则 $f(x)$ 在 $x \quad 1$ 处的__。

(A) 左、右导数都存在 (B) 左导数存在，但右导数不存在

(C) 左导数不存在，但右导数存在 (D) 左、右导数都不存在

(5) 设 $f(x)$ 是可导函数，且 $\lim\limits_{x \quad 0}\dfrac{f(1) \quad f(1 \quad x)}{2x} \quad 1$，则曲线 $y \quad f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为_______。

(A) －1 (B) －2 (C) 0 (D)1

(6) 设函数对任意 x 均满足 $f(1 \quad x) \quad af(x)$，且 $f'(0) \quad b$，其中 a,b 为非零常数，则

(A) $f(x)$ 在 $x \quad 1$ 处不可导。

(B) $f(x)$ 在 $x \quad 1$ 处可导，且 $f'(1) \quad a.$

(C) $f(x)$ 在 $x\quad 1$ 处可导，且 $f'(1)\quad b$.

(D) $f(x)$ 在 $x\quad 1$ 处可导，且 $f'(1)\quad ab$.

(7) 设 $f(x)\quad \begin{matrix} \sqrt{x}, & x\quad 0 \\ \sqrt{\quad x}, & x\quad 0 \end{matrix}$ 则

(A) $f(x)$ 在 $x\quad 0$ 处不连续

(B) $f'(0)$ 存在

(C) $f'(0)$ 不存在，曲线 $y\quad f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处不存在切线

(D) $f'(0)$ 不存在，曲线 $y\quad f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处有切线

(8) 设 $y\quad f(x)$ 在点 x_0 处可导，当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0\quad x$ 时，记 y 为 $f(x)$ 的增量，dy 为 $f(x)$ 的微分，$\lim\limits_{x\quad 0}\frac{y\quad dy}{x}$ 等于

(A) −1　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(9) 设函数 $f(x)$ 在 $(\quad,\quad)$ 上可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x} f(x)$ 时，必有 $\lim\limits_{x} f'(x)$.

(B) 当 $\lim\limits_{x} f'(x)$ 时，必有 $\lim\limits_{x} f(x)$.

(C) 当 $\lim\limits_{x} f(x)$ 时，必有 $\lim\limits_{x} f'(x)$.

(D) 当 $\lim\limits_{x} f'(x)$ 时，必有 $\lim\limits_{x} f(x)$

(10) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ ax+b & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则

$(A)\ a=1, b=0$　　$(B)\ a=0, b$ 为任意常数

$(C)\ a=0, b=0$　　$(D)\ a=1, b$ 为任意常数

3 计算与证明

(1) 已知 $\int_0^y e^{t^2}dt=\int_0^{x^2}\cos t dt+\sin y^2$，求 y'。

(2) 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有二阶连续的导数，且 $g(0)=1$

1. 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续；2.求 $f'(x)$。

(3) 证明 $y=(\arcsin x)^2$ 满足方程：

$$(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n-1)xy^{(n)}-(n-1)^2y^{(n-1)}=0$$

(4) 已知当 $x\le 0$ 时，$f(x)$ 有定义且二阶可导，问 a,b,c 为何值时

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & x\le 0\\ ax^2+bx+c & x>0\end{cases}$$ 是二阶可导

(5) 已知 $f'(x) \quad \dfrac{1}{x}$，$y \quad f(\dfrac{x \quad 1}{x \quad 1})$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

(6) 设可导函数 $f(x)$ 满足 $af(x) \quad bf(\dfrac{1}{x}) \quad \dfrac{c}{x}$ 式中 a,b,c 为常数，且 $|a| \quad |b|$，求 $f'(x)$

(7) 设 $f(x)$ 是 $(\quad , \quad)$ 上的非零函数，对任意 $x,y \quad (\quad , \quad)$ 有 $f(x \quad y) \quad f(x)f(y)$ 且 $f'(0) \quad 1$ 证明 $f'(x) \quad f(x)$

★参考答案

1 (1) $2x \quad y \quad 1 \quad 0$　　(2) 1　　(3) $\dfrac{1}{x(1 \quad \ln y)}dx$

(4) $\dfrac{(6t \quad 5)(t \quad 1)}{t}$　　(5) 1　　(6) $f'(t) \quad (2t \quad 1)e^{2t}$

(7) $\dfrac{y\sin(xy) \quad e^{x \quad y}}{e^{x \quad y} \quad x\sin(xy)}$　　(8) $\dfrac{(\quad 1)^n 2 \quad n!}{(1 \quad x)^{n \quad 1}}$

(9) $f'(x)\cos f(x)f'[\sin f(x)] \ \cos\{f[\sin f(x)]\}$　　(10) $f'(\dfrac{1}{2}) \quad 1$

2 (1) A　(2) B　(3) C　(4) B　(5) A　(6) D　(7)　(8) B　(9) D　(10) C

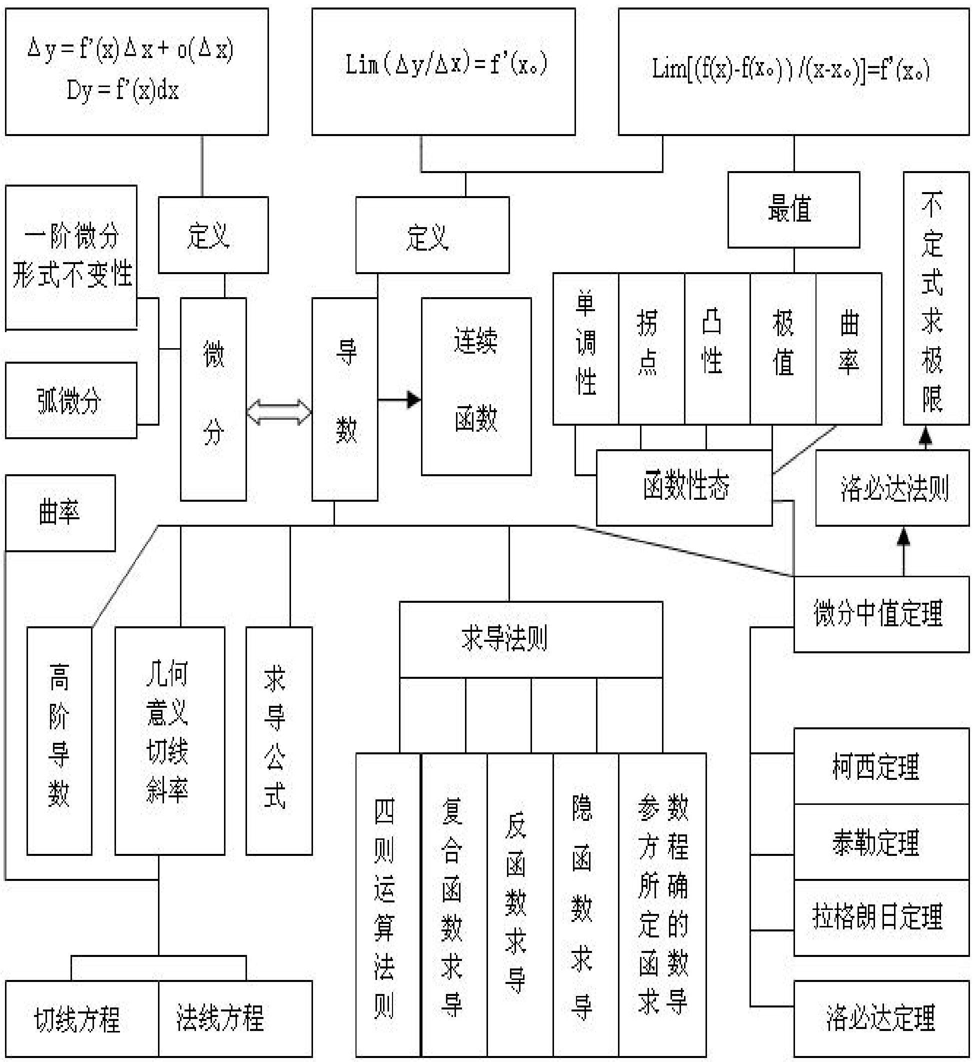
3 (1) $y' = \dfrac{2x\cos x^2}{e^{y^2} - 2y\cos y^2}$　　(2) $\dfrac{1}{2}[g''(0) \quad 1]$

(4) $a = \dfrac{1}{2} f_-''(0)\ b = f_-'(0)\ c = f_-(0)$

(5) $\dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{2}{1 \quad x^2}$　　(6) $\dfrac{bcx^2 \quad ac}{x^2(a^2 \quad b^2)}$

(7)已知条件，及导数定义

★本章知识网络



★本章总结

1 本章难、重点内容

(1)导数的极限定义、左、右导数的定义。

(2)导数的几何意义和物理意义

(3)求复合函数和隐函数的导数

(4)函数在一点可导的判定，特别是分段函数在分段点可导的判定

2 本章容易出错的地方

(1)连续函数未必是可导函数

(2)可导的前提是导数存在

(3) 复合函数求导时，在自变量的某点处是否可导取决于复合以后的形态，而与要作复合的两个函数在相应点是否可导无关

第三章一元函数积分学

※本章要求

1 理解原函数的概念，理解不定积分和定积分的概念。

2 掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理(▲数三、数四要求了解)，掌握换元积分法与分部积分法。

3 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分(▲数三、数四不要求)。

4 理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿－莱布尼茨公式。

5 了解反常积分的概念，会计算反常积分。

6 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心等)及函数的平均值。(▲数三、数四要求会利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值，会利用定积分求解简单的经济应用问题)。

第 1 节 不定积分

★基本内容学习

原函数与不定积分的概念与基本性质

1 原函数与不定积分的定义

原函数：设函数 $f(x)$ 在区间 I 中有定义，如果存在函数 $F(x)$，使得对于区间 I 中任一个 x，均有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 中的一个原函数.

注：如果函数 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则有无穷多个原函数，且其全部原函数可表示为 $F(x) \quad C$（其中 C 为任意常数）

不定积分：函数 $f(x)$ 在区间 I 中的原函数的全体，称为 $f(x)$ 在区间 I 中的不定积分，记为 $f(x)dx.$

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 中的一个原函数，则 $f(x)dx \quad F(x) \quad C.$

$f(x)$——被积函数，$f(x)dx$——被积式，x——积分变量，C——积分常数.

2 原函数与不定积分的关系

①不定积分和原函数是两个不同概念，前者是个集合，后者是该集合中的一个元素，因此 $f(x)dx \quad F(x)$.

②设 $F(x)$，$G(x)$ 均是 $f(x)$ 在区间 I 中的原函数，显然有 $f(x)dx \quad F(x) \quad C,$ $f(x)dx \quad G(x) \quad C,$ 即有 $F(x) \quad C \quad G(x) \quad C$（*）但 $F(x) \quad G(x)$ 不一定成立（因为 C 是任意取值，（*）式两边的 C 不一定相等，所以不能随意取掉）

3 求不定积分与求微分（导数）的关系——互为逆运算

(1)已知与未知相反 $dF(x) \quad f(x)dx$，已知 $F(x)$ 求 $dF(x) \quad f(x)dx$ 是微分运算；已知 $f(x)dx$ 求 $F(x)$ 使得 $dF(x) \quad f(x)dx$ 是积分运算。

(2) $(\quad f(x)dx)' \quad f(x)$ 或 $d \quad f(x)dx \quad f(x)$；

$$F'(x) \quad F(x) \quad C \quad \text{或} \quad dF(x) \quad F(x) \quad C$$

正因为原函数与导函数有互逆关系，而且不定积分就是全体原函数，所以对应于基本初等函数的导数公式，就有相应的基本积分公式：

① $x^k dx \quad \frac{1}{k \quad 1}x^{k \quad 1} \quad C$ （$k \quad 1$）

$$\frac{1}{x^2}dx \quad \frac{1}{x} \quad C \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad 2\sqrt{x} \quad C$$

② $\frac{1}{x}dx \quad \ln|x| \quad C$

③ $a^x dx \quad \frac{a^x}{\ln a} \quad C \quad (a \quad 0, a \quad 1) \qquad \mathrm{e}^x dx \quad \mathrm{e}^x \quad C$

④ $\int\cos xdx=\sin x+C$ $\quad \int\sin xdx=-\cos x+C$

⑤ $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\sec^2 xdx=\tan x+C$ $\quad \int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\int\csc^2 xdx=-\cot x+C$

⑥ $\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\csc xdx=\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$

$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\sec xdx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$

⑦ $\int\sec x\tan xdx=\sec x+C$ $\quad \int\csc x\cot xdx=-\csc x+C$

⑧ $\int\tan xdx=-\ln\left|\cos x\right|+C$ $\quad \int\cot xdx=\ln\left|\sin x\right|+C$

⑨ $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ $\quad \int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$

⑩ $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ $\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$ $\quad \int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

4 原函数的存在性

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数($\int_{x_0}^{x}f(t)dt$ 就是原函数，其中 $x_0\in I$ 为某一定点)

若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点，则 $f(x)$ 在区间 I 上不存在原函数。

5 原函数的几何意义与力学意义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则由曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a,x=x$ 围成的曲边梯形的面积函数(指代数和——x 轴上方取正号，下方取负号)是 $f(x)$ 的一个原函数，若 x 为时间变量，$f(x)$ 为直线运动的物体的速度函数，则 $f(x)$ 的原函数就是路程函数。

6 初等函数的原函数

初等函数在定义域区间上连续，因而一定存在原函数，但它的原函数不一定

是初等函数，如 $e^{x^2}dx$， $\dfrac{\sin x}{x}dx$， $\dfrac{\cos x}{x}dx$， $\dfrac{1}{\ln x}dx$， $\sin(x^2)dx$， $\cos(x^2)dx$ 等均积分不出来，即被积函数存在原函数，但原函数不是初等函数。

★基本题型训练

1 关于不定积分的计算

积分法则

最基本的积分方法是分项积分法，分段积分法，换元积分法和分部积分法。而换元积分法对不定积分又分第一换元积分法(凑微分法)与第二换元积分法，当被积函数或原函数分段表示时要用分段积分法。

(1)分项积分法

我们常把一个复杂的函数分解成几个简单的函数之和：

$f(x) \quad k_1 g_1(x) \quad k_2 g_2(x)$，若右端的积分会求，则应用法则

$f(x)dx \quad k_1 \quad g_1(x)dx \quad k_2 \quad g_2(x)dx$ 就可以积出 $f(x)dx$，这就是分项积分法。

例 1 求下列函数的不定积分

① $\dfrac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$　　② $\tan^2 xdx$

解：① $\dfrac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \dfrac{\cos^2 x \quad \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \quad \dfrac{dx}{\sin^2 x}$

$= \tan x \quad \cot x \quad C$

② $\tan^2 xdx = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \dfrac{1 \quad \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \quad dx = \tan x \quad x \quad C$

(2)分段积分法

分段函数的定积分要分段进行计算，这里重要的是搞清积分限与分段函数的分界点之间的位置关系，以便对定积分进行正确的分段。

被积函数中含有绝对值时，也可以看成分段函数，这是因为正数与负数的绝对值是以不同的方式定义的，0 就是其分界点。

例 2 计算下列定积分

① ${}_{2}^{3}\min\left|1, x^2\right|dx$　　② ${}_{0}^{2} f(x \quad 1)dx$, 其中 $f(x) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1 \quad x}, & x \quad 0 \\ \dfrac{1}{1 \quad e^x}, & x \quad 0 \end{cases}$

解：①由于函数 $\min\left|1, x^2\right|$ 的分界点为－1 和 1，所以

$${}_{2}^{3}\min\left|1, x^2\right|dx = {}_{2}^{1}dx \quad {}_{1}^{1}x^2dx \quad {}_{1}^{3}dx \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad 2 \quad \frac{11}{3}$$

②由于函数 $f(x)$ 的分界点为 0，所以，令 $t=x-1$ 后，有

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^{1} f(t)dt=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+e^x}+\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\int_{-1}^{0}\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}+\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=-\ln(1+e^{-x})\Big|_{-1}^{0}+\ln 2=\ln(1+e)$$

(3)换元积分法

①第一换元积分法(凑微分法)

设 $\int f(u)du=F(u)+C$, 则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)\underline{\underline{令u=\varphi(x)}}\int f(u)du$$

$$=F(u)+C\underline{\underline{u=\varphi(x)}}F[\varphi(x)]+C.$$

常见的凑微分形式有以下若干种：

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$$

$$\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)$$

$$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x dx=\int f(\mathrm{e}^x)d(\mathrm{e}^x)$$

$$\int f(\frac{1}{x})\frac{dx}{x^2}=-\int f(\frac{1}{x})d(\frac{1}{x})$$

$$\int f(\ln x)\frac{dx}{x}=\int f(\ln x)d(\ln x)$$

$$\int f(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$$

$$\int f(\sin x)\cos xdx=\int f(\sin x)d(\sin x)$$

$$\int f(\cos x)\sin xdx=-\int f(\cos x)d(\cos x)$$

$$\int f(\tan x)\sec^2 xdx=\int f(\tan x)d(\tan x)$$

$$\int f(\cot x)\csc^2 dx=-\int f(\cot x)d(\cot x)$$

$$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$$

$$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx=\int f(\arctan x)d(\arctan x)$$

例 3 求下列不定积分

① $\sec x dx$； ② $\dfrac{dx}{\sin 2x \quad 2\sin x}$； ③ $\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{(1 \quad x)\sqrt{x}}dx$；

④ $\dfrac{\sqrt{1 \quad 2\arctan x}}{1 \quad x^2}dx$; ⑤ $\dfrac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1 \quad x^2}}$.

解：① $\sec x dx = \dfrac{1}{\cos x}dx = \dfrac{\cos x}{1 \quad \sin^2 x}dx = \dfrac{d\sin x}{1 \quad \sin^2 x}$

$$= \frac{1}{2} \quad (\frac{1}{1 \quad \sin x} \quad \frac{1}{1 \quad \sin x})d\sin x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 \quad \sin x}{1 \quad \sin x} \quad C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(1 \quad \sin x)^2}{1 \quad \sin^2 x} \quad C = \frac{1}{2}\ln\left|\sec x \quad \tan x\right| \quad C$$

② $\dfrac{dx}{\sin 2x \quad 2\sin x} = \dfrac{dx}{2\sin x(1 \quad \cos x)}$

$$= \frac{dx}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} \quad \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{4\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \quad (\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} \quad \tan\frac{x}{2})d\tan\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{4}[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \quad \frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}] \quad C$$

③ $\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{(1 \quad x)\sqrt{x}}dx = \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{(1 \quad x)}d\sqrt{x}$

$$= 2 \quad \arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x} \quad \arctan^2\sqrt{x} \quad C$$

④ $\dfrac{\sqrt{1 \quad 2\arctan x}}{1 \quad x^2}dx \quad \dfrac{1}{2} \quad (1 \quad 2\arctan x)^{\frac{1}{2}}d(1 \quad 2\arctan x)$

$$\frac{1}{3}(1 \quad 2\arctan x)^{\frac{3}{2}} \quad C$$

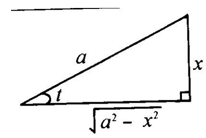
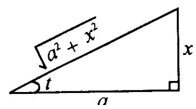
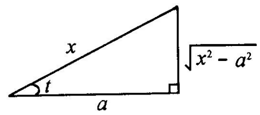
⑤ $\dfrac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1 \quad x^2}} \quad \dfrac{1}{(\arcsin x)^2}d(\arcsin x) \quad \dfrac{1}{\arcsin x} \quad C.$

②第二换元积分法

事实上，倒转第一换元积分法的公式就是第二换元积分法的公式。

常用的变量替换：三角替换、幂函数替换、指数函数替换、倒替换下面具体介绍这些方法。

1.三角函数代换

被积函数 $f(x)$ 含根式	所作代换	三角形示意图
$\sqrt{a^2\quad x^2}$	$x\quad a\sin t$	
$\sqrt{a^2\quad x^2}$	$x\quad a\tan t$	
$\sqrt{x^2\quad a^2}$	$x\quad a\sec t$	

例 4 求下列不定积分

① $\dfrac{x^3dx}{(1\quad x^2)^{\frac{3}{2}}}$;　　② $\dfrac{dx}{1\quad\sqrt{1\quad x^2}}$.

解：①被积函数 $f(x)$ 中含有 $\sqrt{1\quad x^2}$，所以应作变换 $x\quad \tan t$,

$$\text{原式}\quad \frac{\tan^3 t}{\sec^3 t}\quad \sec^2 t dt\quad \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt\quad \frac{1\quad \cos^2 t}{\cos^2 t}d(\cos t)$$

$$(1\quad \frac{1}{\cos^2 t})d(\cos t)\quad \cos t\quad \frac{1}{\cos t}\quad C\quad \frac{1}{\sqrt{1\quad x^2}}\quad \sqrt{1\quad x^2}\quad C.$$

② $\dfrac{dx}{1\quad\sqrt{1\quad x^2}}$. 令 $x\quad \sin t$, 则 $dx\quad \cos tdt$

$$\text{原式}\quad \frac{\cos t}{1\quad \cos t}dt\quad \frac{\cos t\quad \cos^2 t}{1\quad \cos^2 t}dt\quad \frac{1}{\sin^2 t}d(\sin t)\quad \frac{1\quad \sin^2 t}{\sin^2 t}dt$$

$$\frac{1}{\sin t}\quad \cot t\quad C\quad \frac{1}{x}\quad \frac{\sqrt{1\quad x^2}}{x}\quad \arcsin x\quad C.$$

幂函数替换：被积函数是 x 与 $\sqrt[n]{ax\quad b}$ 或 x 与 $\sqrt[n]{\dfrac{ax\quad b}{cx\quad d}}$ 的有理式时，常用幂函数替换 $t\quad \sqrt[n]{ax\quad b}$ 或 $t\quad \sqrt[n]{\dfrac{ax\quad b}{cx\quad d}}$ 去掉根号。

指数函数替换：被积函数由 e^x 构成的代数式时，可考虑选用指数函数替换。

例 5 求① $\dfrac{2^x dx}{1\quad 2^x\quad 4^x}$;　　② $\dfrac{dx}{1\quad e^{\frac{x}{2}}\quad e^{\frac{x}{3}}\quad e^{\frac{x}{6}}}$;

解：①令 $2^x=t$, $dx=\frac{1}{\ln 2}\frac{dt}{t}$.

原式 $=\int\frac{t}{1+t+t^2}\cdot\frac{1}{\ln 2}\frac{dt}{t}=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{(t+\frac12)^2+\frac34}=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{d(t+\frac12)}{(t+\frac12)^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}$

$$=\frac{2}{\sqrt3\ln 2}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt3}+C=\frac{2}{\sqrt3\ln 2}\arctan\frac{2^{x+1}+1}{\sqrt3}+C.$$

②令 $e^{\frac{x}{6}}=t$, $x=6\ln t$, $dx=\frac{6}{t}dt$,

原式 $=\int\frac{1}{1+t^3+t^2+t}\cdot\frac{6}{t}dt=\int(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2})dt$

$$=6\ln t-3\ln(1+t)-\frac32\ln(1+t^2)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln(1+e^{\frac{x}{6}})-\frac32\ln(1+e^{\frac{x}{3}})-3\arctan(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

倒替换：令 $x=1/t$

例 6 求下列积分

① $\int_0^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx\ (a>0)$　　② $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

解：① $\int_0^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\int_0^{2a}\frac{\sqrt{1-(\frac{a}{x})^2}}{x^3}dx=-\frac{1}{2a^2}\int_0^{2a}\sqrt{1-(\frac{a}{x})^2}\,d\frac{a^2}{x^2}$

$$=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac23[1-(\frac{a}{x})^2]^{\frac32}\Big|_a^{2a}=\frac{\sqrt3}{8a^2}$$

②记 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 则

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\operatorname{sgn}x=-\frac12\int\frac{d\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\operatorname{sgn}x$$

$$=-(1+\frac{1}{x^2})^{\frac12}\operatorname{sgn}x+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

(4) 分部积分法

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 具有连续的导数，则公式 $\int udv=uv-\int vdu$ 称为分部积分

公式.

注：如何把被积函数分成两部分，如何选取 u 和 dv。

选取的原则：①积分容易者选为 dv；②求导简单者选为 u；在二者不可兼得的情况下，首先要保证的是前者。

例 7 求下列函数的不定积分

① $\int (x^3+2x-5)\cos 2x dx.$　　② $\int \sin(\ln x)dx$　　③ $\int \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}dx$

解：①原式

$$=\frac{1}{2}\int (x^3+2x-5)d\sin 2x=\frac{1}{2}(x^3+2x-5)\sin 2x-\frac{1}{2}\int (3x^2+2)\sin 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^3+2x-5)\sin 2x+\frac{1}{4}(3x^2+2)\cos 2x-\frac{3}{2}\int x\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^3+2x-5)\sin 2x+\frac{1}{4}(3x^2+2)\cos 2x-\frac{3}{4}x\sin 2x-\frac{3}{8}\cos 2x+C.$$

②原式＝ $\int \sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$

$=x\sin(\ln x)-\int \cos(\ln x)dx$

$=x\sin(\ln x)-\{x\cos(\ln x)-\int x[-\sin(\ln x)\frac{1}{x}]dx\}$

$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int \sin(\ln x)dx$

故 $\int \sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int \sin(\ln x)dx$

③原式＝ $\int \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}dx=-\frac{1}{x+2}(x+1)e^x+\int \frac{1}{x+2}[(x+1)e^x]'dx$

$$=-\frac{1}{x+2}(x+1)e^x+\int e^x dx=\frac{e^x}{x+2}+C$$

★练习题三(1)

1 求下列不定积分

(1) $\int \frac{1}{1+x^2}\arctan\frac{1+x}{1-x}dx$　　(2) $\int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$

(3) $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$　　(4) $\int \frac{2x^3+1}{(x-1)^{100}}dx;$

2 求下列不定积分

(1) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}\quad\sqrt[3]{x}}$; （2） $\dfrac{1}{1\quad\sqrt{x}\quad\sqrt{x\quad 1}}dx$; （3） $\dfrac{\sqrt{x(x\quad 1)}}{\sqrt{x}\quad\sqrt{x\quad 1}}dx.$

3 求下列函数不定积分

(1) $\dfrac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$; (2) $\sqrt{1\quad\sin x}\,dx$; (3) $\displaystyle\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$ (5) $\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$ (6) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

4 求下列不定积分

(1) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$ (2) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$ (3) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$

5 设 $f'(\cos x+2)=\sin^2 x+\tan^2 x$，求 $f(x)$.

6 设当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)$ 连续，求 $\displaystyle\int\frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx.$

★参考答案

1(1) $=\dfrac{1}{2}(\arctan\dfrac{1+x}{1-x})^2+c$ (2) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\ln|\sin x|+\dfrac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+c$

(3) $\arccos\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

(4) $\dfrac{1}{33}\dfrac{1}{(x\quad 1)^{99}}\quad\dfrac{3}{49}\dfrac{1}{(x\quad 1)^{98}}\quad\dfrac{6}{97}\dfrac{1}{(x\quad 1)^{97}}\quad\dfrac{1}{48}\dfrac{1}{(x\quad 1)^{96}}\quad C.$

2(1) $2\sqrt{x}\quad 3\sqrt[3]{x}\quad\sqrt[6]{x}\quad 6\ln(1\quad\sqrt[6]{x})\quad C.$

(2) $\sqrt{x} \quad \frac{1}{2}x \quad \frac{1}{2}\sqrt{x^2 \quad x} \quad \frac{1}{4}\ln\left|2x \quad 1 \quad 2\sqrt{x^2 \quad x}\right|) \quad C.$

(3) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \quad \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \quad \frac{2}{5}(x \quad 1)^{\frac{5}{2}} \quad \frac{2}{3}(x \quad 1)^{\frac{3}{2}} \quad C.$

3 (1) $\frac{\sin x}{\cos^5 x} \quad \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \quad \frac{\cos x}{\sin^3 x} \quad \frac{3}{\sin x\cos x},$

(2) $\frac{dx}{\sin^3 x} \quad \frac{1}{2}\ln|\csc x \quad \cot x| \quad \frac{1}{2}\cot x\csc x \quad C.$

(3) $-\frac{x}{8}\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+c$

(4) $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+c$

(5) $\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})+\ln(2+\cos x)+c$

(6) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})\right|+c \quad \int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

4 (1) $2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln|x|-(\arctan\sqrt{x-1})^2+c$

(2) $\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right|-\arccos(e^{-x})+c$

(3) $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+c$

5 $f(x)=-\frac{1}{x-2}-\frac{(x-2)^3}{3}+c$ 6 $\frac{f(x)}{xe^x}+c$

第 2 节 定积分

★基本内容学习

一 基本概念

1 定积分

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，在 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$ 把 $[a,b]$ 分为 n 个子区间 $[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$，用 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 表示各子区间的长度，在每个子区间上任取一点 $\xi_i, x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$，作如下和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n$. 令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且 $[a,b]$ 的划分和 ξ_i 的取法无关，则该极限值就称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，其中，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积式，x 称为积分变量，$[a,b]$ 称为积分区间，a,b 分别称为积分的上下限。

2 定积分的几何意义与力学意义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示界于 x 轴，曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a,x=b$ 之间各部分面积的代数和，在 x 轴上方取正号，在 x 轴下方取负号，若 x 为时间变量，$f(x)$ 为作直线运动的物体的速度函数，则 $\int_a^b f(x)dx$ 就是物体从时刻 a 到 b 所走过的路程。

3 函数的可积性

可积的必要条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

可积的充分条件：(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点；(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，以上函数类在 $[a,b]$ 上可积。

4 不定积分与变限定积分的关系

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $\int f(x)dx=\int_{x_0}^{x}f(t)dt+C$，其中 $x_0\in I$ 为某定值。

5 定积分的基本性质

（1）定积分只与被积函数和积分限有关，而与积分变量无关，即

$_a^b f(x)dx \quad _a^b f(u)du \quad _a^b f(t)dt \quad \cdots$

（2） $_a^b f(x)dx \qquad _b^a f(x)dx$ 特例： $_a^a f(x)dx \qquad _b^b f(x)dx \quad 0$

（3） $_a^b dx \quad b \quad a$

（4） $_a^b [f(x) \quad g(x)]dx \qquad _a^b f(x)dx \qquad _a^b g(x)dx$

（5） $_a^b kf(x)dx \quad k\ _a^b f(x)dx$ （k 为常数）

（6） $_a^b f(x)dx \qquad _a^c f(x)dx \qquad _c^b f(x)dx$

6 定积分的基本定理

定理 1 （定积分比较定理）设 $f(x) \quad g(x)$， $x \quad [a,b]$，则 $_a^b f(x)dx \quad _a^b g(x)dx$.

推论：（1）当 $f(x) \quad 0$， $x \quad [a,b]$时 $_a^b f(x)dx \quad 0$.（2） $\left| _a^b f(x)dx \right| \quad _a^b |f(x)|dx.$

定理 2 （估值定理）设 $m \quad f(x) \quad M,\ x \quad [a,b]$，其中 m,M 为常数，则 $m(b \quad a) \quad _a^b f(x)dx \quad M(b \quad a)$。

定理 3 （积分中值定理）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少 一个点 ，使 $_a^b f(x)dx \quad f(\ )(b \quad a)$. 也可写成 $f(\ ) \quad \frac{1}{b \quad a}\ _a^b f(x)dx$，所以积分中值定理也称之为平均值公式。

定理 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $x \quad [a,b]$，则变上限积分 $_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。

定理 5 （牛顿—莱布尼兹公式）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $_a^b f(x)dx \quad F(x)\Big|_a^b \quad F(b) \quad F(a).$

定理 6 （变上限积分求导）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $x \quad [a,b]$，则变上限积分 $\ (x) \qquad _a^x f(t)dt$ 对 x 可导，并且有 $\ '(x) \quad \frac{d}{dx}(\ (x)) \quad \frac{d}{dx}(\ _a^x f(t)dt) \quad f(x).$

推论 1 设 $F(x) \qquad _a^{\ (x)} f(t)dt,$ 则 $F'(x) \quad f[\ (x)] \quad '(x).$

推论 2 设 $F(x) \qquad _{\ (x)}^{\ (x)} f(t)dt,$ 则 $F'(x) \quad f[\ (x)] \quad '(x) \quad f[\ (x)] \quad '(x).$

推论 3 设 $F(x) \qquad _a^{\ (x)} f(t)g(x)dt,$ 则 $F'(x) \quad [g(x) \quad _a^{\ (x)} f(t)dt]'_x$

$$g'(x) \quad {}_{a}^{(x)} f(t)dt \quad g(x)f[\ \ (x)] \quad '(x).$$

★基本题型训练

二 关于定积分的计算

(1) 利用牛顿—莱布尼兹公式

例 1 $\quad {}_{1}^{4}\dfrac{dx}{x(1 \quad \sqrt{x})}$;

解：原式＝ ${}_{1}^{4}\dfrac{dx}{x(1 \quad \sqrt{x})} \quad {}_{1}^{4}\dfrac{dx}{\sqrt{x}\ \ \sqrt{x}(1 \quad \sqrt{x})} \quad 2\ {}_{1}^{4}\dfrac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1 \quad \sqrt{x})}$

$$2\ {}_{1}^{4}(\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{1}{1 \quad \sqrt{x}})d(\sqrt{x}) \quad 2[\ln\sqrt{x} \quad \ln(1 \quad \sqrt{x})]\Big|_{1}^{4} \quad 2\ln\frac{4}{3}.$$

(2) 定积分的换元积分法

定理 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若变换 $x \quad (t)$ 满足以下条件：

（1） (t) 在 $[\ \ ,\ \ ]$ 上连续，且 $'(t) \quad 0$;

（2） $(\ \ ) \quad a,\ (\ \ ) \quad b,$ 并且当 t 在 $[\ \ ,\ \ ]$ 上变化时， (t) 的值在 $[a,b]$ 上变化，则 ${}_{a}^{b} f(x)dx \qquad f[\ \ (t)] \quad '(t)dt.$

注：①在定理的叙述中要注意： $(\ \ ) \quad a,\ (\ \ ) \quad b,\ (t)$ 定义与区间 $[\ \ ,\ \ ]$，说明 (t) 呈上升趋势，实际上， (t) 呈下降趋势也是允许的，即将定理中区间 $[\ \ ,\ \ ]$ 改为 $[\ \ ,\ \ ]$ 也是可以的；

②在定积分作变量替换时，一定要同时更换积分的上下限；

③我们知道不定积分的换元法有两个，相应于第二换元积分法，在定积分换元法中就相当于把定积分变量左端的 x 换成右端的 t；相应于第一换元积分法(凑微分法)，则是把右端的 t 换成左端的 x。定积分的换元法统一在一个公式中，由于换元也相应的换积分限，就不必变量还原。

例 2 求下列定积分

(1) $\ {}_{0}^{\overline{2}}\dfrac{\sin^{10}x \quad \cos^{10}x}{4 \quad \sin x \quad \cos x}dx$; $\qquad$ (2) $\ {}_{0}^{a}\dfrac{dx}{x \quad \sqrt{a^2 \quad x^2}}$; $\qquad$ (3) $\ {}_{0}^{1}\dfrac{\ln(1 \quad x)}{1 \quad x^2}dx.$

解：（1）令 $x \quad \dfrac{}{2} \quad u, dx \qquad du.$

原积分

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{10}u-\sin^{10}u}{4-\cos u-\sin u}(-du)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{10}x-\sin^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx,$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}+\frac{\cos^{10}x-\sin^{10}x}{4-\sin x-\cos x}\right)dx=0,$$

故 原积分=0。

（2）令 $x=a\sin t, dx=a\cos t dt.$

原积分 $=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos t}{a\sin t+a\cos t}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt.$

又因为 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt \underline{\underline{t=\frac{\pi}{2}-u}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin u}{\cos u+\sin u}(-du)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt,$

所以2 原积分 $=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t+\sin t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{\pi}{2}$. 故 原积分 $=\frac{\pi}{4}$.

常见错误：

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t(\cos t-\sin t)}{(\cos t+\sin t)(\cos t-\sin t)}dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2}t-\cos t\sin t}{\cos 2t}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t-\sin 2t}{\cos 2t}dt.$$

理由是 $\cos t-\sin t$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处为“零”。

（3）令 $x=\tan t$, 则

原式 $=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}\right)dt$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+t)}{\cos t}\right)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dt+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin\frac{\pi}{4}+t)dt-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)dt.$$

因为 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dt=\frac{\pi}{8}\ln 2,$

所以 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin(\frac{\pi}{8}+t))dt \underline{\underline{t=\frac{\pi}{4}-u}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln(\sin(\frac{\pi}{2}-u))(-du)=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos u)du$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)dt, \text{所以原积分}=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

★习题三(2)

1 填空题

(1) ${}_{1}^{1}\frac{x\quad |x|}{1\quad x^2}dx=$______ (2) ${}_{1}^{1}\sqrt{1\quad x^2}\ln\frac{x\quad\sqrt{1\quad x^2}}{2}dx$ ___

(3) ${}_{1}^{1}\frac{2x^2\quad x\cos x}{1\quad\sqrt{1\quad x^2}}dx$ ______ (4) ${}_{0}^{\overline{4}}\frac{\sin x}{1\quad\sin x}dx$ ______

(5) ${}_{0}^{2a}x\sqrt{2ax\quad x^2}dx\quad(a\quad 0)$ ___ (6) ${}_{0}^{1}\frac{dx}{x\quad\sqrt{a^2\quad x^2}}$ ______

(7) $\frac{d}{dx}{}_{0}^{x}\cos(x\quad t)^2dt$ ______

(8)设 $f(x)$ 连续,则 $\frac{d}{dx}{}_{1}^{2}f(x\quad t)dt$ ____

(9) ${}_{0}^{\overline{2}}\frac{1}{1\quad(\tan x)^{\sqrt{3}}}dx$ ______

(10) 设 $f(x)$ 连续,且 ${}_{0}^{x^2\ 1}f(t)dt\quad 1\quad x^3$,则 $f(8)=$___

2 计算与证明

(1) 由方程 ${}_{0}^{y}e^{t^2}dt\quad{}_{0}^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\quad 1$,确定 y 为 x 的函数,求 $\frac{dy}{dx}$.

(2) 设当 $x\quad 0$ 时,$f(x)$ 可导,且满足方程 $f(x)\quad 1\quad\frac{1}{x}{}_{1}^{x}f(t)dt\quad(x\quad 0)$,求 $f(x)$.

(3) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)\quad 0,\ F(x)\quad{}_{0}^{x}t^{n\ 1}f(x^n\quad t^n)dt$.证明:$\lim\limits_{x\quad 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}\quad\frac{1}{2n}f'(0)$.

(4) 设 $f(x)\quad\begin{matrix} kx & 0\quad x\quad\frac{l}{2} \\ c & \frac{l}{2}\quad x\quad l\end{matrix}$,求 $\quad(x)\quad{}_{0}^{x}f(t)dt$.

(5) 求积分 ${}_{a}^{b}|x|dx\quad a\quad b$.

(6) 设函数 $f\ x$ 在区间 $0,1$ 上连续,并设 ${}_{0}^{1}f\ x\quad A$.求 ${}_{0}^{1}dx\ {}_{x}^{1}f\ x\ f\ y\ dy$

(7) 设 $F\ \ a\ \ \ {}_{0}\ \ln\ 1\ \ 2a\cos x\ \ a^{2}\ \ dx$.求 $F\ \ a\ \ ,F\ \ a^{2}$

★参考答案

1(1)ln2　(2) $\frac{\ }{2}\ln 2$　(3) 4　(4) $\frac{\ }{4}\ \ 2\ \ \sqrt{2}$　(5) $\frac{\ }{2}a^{3}$

(6) $\frac{\ }{4}$　(7) $\cos x^{2}$　(8) $f(2\ \ x)\ \ f(1\ \ x)$　(9) $\frac{\ }{4}$　(10) $\frac{9}{2}$

2(1) $y'\ \ 2e^{\ y^{2}}\sin x^{2}.$　(2) $f(x)\ \ \ln x\ \ 1.$

(3) 设 $u\ \ x^{n}\ \ t^{n}$

(4) $(x)\ \ \int_{0}^{x} f(t)dt\ \ \begin{matrix} \frac{1}{2}kx^{2} & 0\ \ x\ \ \frac{l}{2} \\ \frac{1}{8}kl^{2}\ \ c(x\ \ \frac{l}{2}) & \frac{l}{2}\ \ x\ \ l \end{matrix}.$

(5) $\int_{a}^{b}|x|dx\ \ \begin{matrix} \frac{1}{2}\ b^{2}\ \ a^{2}\ , & a\ \ b\ \ 0 \\ \frac{1}{2}\ b^{2}\ \ a^{2}\ , & a\ \ 0\ \ b \\ \frac{1}{2}\ b^{2}\ \ a^{2}\ , & 0\ \ a\ \ b \end{matrix}$

(6) $\frac{1}{2}A^{2}$　(7) $F\ \ a\ \ ,F\ \ a^{2}\ \ \ 2F\ \ a$

第 3 节 积分中值定理、定积分的应用、广义积分

★基本知识学习

一 基本定理

定理 1(费尔马定理)若函数 $f(x)$ 满足条件：

(1)函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x)\ \ f(x_0)$ 或

$f(x)\ \ f(x_0)$

(2) $f(x)$ 在 x_0 处可导。则有 $f\ (x_0)\ \ 0$

定理 2 (洛尔定理) 设函数 $f(x)$ 满足条件：

(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2)在 (a,b) 内可导；

则在 (a,b) 内 一个 ，使 $f\ (\ )\quad 0$

定理 3 (拉各朗日中值定理) 设函数 $f(x)$ 满足条件：

(1)在 $[a,b]$ 上连续；(2)在 (a,b) 内可导；

则在 (a,b) 内 一个 ，使 $\dfrac{f(b)\quad f(a)}{b\quad a}\quad f\ (\ )$

定理 4 (柯西中值定理) 设函数 $f(x)$， $g(x)$ 满足条件：

(1)在 $[a,b]$ 上连续；

(2)在 (a,b) 内 $f\ (x)$， $g\ (x)$ 均存在，且 $g\ (x)\quad 0$

则在 (a,b) 内 一个 ，使 $\dfrac{f(b)\quad f(a)}{g(b)\quad g(a)}\quad \dfrac{f\ (\ )}{g\ (\ )}$

二 基本概念

1 泰勒公式

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n\quad 1$ 阶导数，则对该邻域内异与 x_0 的任意点 x，在 x_0 与 x 之间至少 一个 ，使得

$$f(x)\quad f(x_0)\quad f\ (x_0)(x\quad x_0)\quad \frac{1}{2!}f\ (x_0)(x\quad x_0)^2\quad \cdots\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x\quad x_0)^n\quad R_n(x)$$

其中 $R_n(x)\quad \dfrac{f^{(n\quad 1)}(\ )}{(n\quad 1)!}(x\quad x_0)^{n\quad 1}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶泰勒余项。

令 $x_0\quad 0$，则 n 阶泰勒公式

$$f(x)\quad f(0)\quad f\ (0)x\quad \frac{1}{2!}f\ (0)x^2\quad \cdots\quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\quad R_n(x) \tag{1}$$

其中 $R_n(x)\quad \dfrac{f^{(n\quad 1)}(\ )}{(n\quad 1)!}x^{n\quad 1}$， 在 0 与 x 之间。(1)式称为麦克劳林公式。

常用五种函数在 $x_0=0$ 处的泰勒公式

(1) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$

或 $= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

(2) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi)$

或 $= x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} + o(x^n)$

(3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi)$

或 $= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + o(x^n)$

(4) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$

或 $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

(5) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$

或 $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

2 无穷限的广义积分概念 (无穷积分)

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)\,dx$

(2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)\,dx$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^C f(x)\,dx + \lim\limits_{B\to+\infty}\int_C^B f(x)\,dx$

若极限存在，则无穷积分收敛，否则发散。

注意：(3)中右边若有一个极限不存在,则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 便发散。

3 判断广义积分的收敛准则

准则 1 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$, $M>0$，

(ⅰ)若当 $x\geq N$ 时，$0\leq f(x)\leq \dfrac{M}{x^m}, m>1$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛。

(ⅱ)若当 $x\geq N$ 时，$\dfrac{M}{x^m}\leq f(x), m\leq 1$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散。

准则 2 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $f(x)\geq 0$,

(ⅰ)若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^m f(x)=k, 0\leq k<+\infty, m>1$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛。

(ⅱ) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^m f(x)=k, 0<k\leq+\infty, m\leq 1$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散。

注意：积分区间为 $(-\infty,b]$ 及 $(-\infty,+\infty)$ 有类似准则。

4 无界函数的广义积分(瑕积分)

(1) $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, (当 $x\to b^-$ 时, $f(x)\to\infty$)

(2) $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, (当 $x\to a^+$ 时, $f(x)\to\infty$)

(3) $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to0^+\\ \varepsilon_2\to0^+}}\left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx\right]$，(当 $x\to c$ 时, $f(x)\to\infty$)

若右边的极限存在,则瑕积分收敛，否则发散。

注意：(3)等式右边的两个极限若有一个不存在，则瑕积分发散。

5 判断瑕积分收敛的准则

准则 3 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续， 且 $f(x)\geq 0$, $M>0$，

(ⅰ)当 $b-\delta\leq x<b$ 时，$0\leq f(x)\leq \dfrac{M}{(b-x)^m}, 0<m<1$， 则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛。

(ⅱ) 当 $b-\delta\leq x<b$ 时，$\dfrac{M}{(b-x)^m}\leq f(x), m\geq 1$， 则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散。

准则 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$,

(ⅰ)若 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=k, 0\leq k<+\infty, 0<m<1$,则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛。

(ⅱ) 若 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=k, 0<k\leq+\infty, m\geq 1$,则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散。

注意：$x=a, x=c\ (a<c<b)$ 为瑕点时有类似的判敛准则。

6 Γ函数： $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx\ (r>0)$．

Γ函数的性质: $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r),(r>0)$;当$n$为自然数时, $\Gamma(n+1)=n!$

★基本题型训练

3 积分值的比较或积分符号的判断

例 比较下列定积分的大小

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$与$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx$ （2）$\int_0^{\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx$与$\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx$

解:（1）积分区间相同,被积函数连续,只须比较被积函数的大小,$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

由$0\le\sin x\le 1\Rightarrow\sin^6 x\le\sin^3 x$ 故$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$

（2）被积函数连续,积分区间不同,先通过变量替换,转化为积分区间相同的情形,再比较被积函数,

$$\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx\overset{t=x-\pi}{=\!=\!=}\int_0^{\pi}e^{-(t+\pi)^2}\cos^2(t+\pi)dt$$

$$=\int_0^{\pi}e^{-(t+\pi)^2}\cos^2 tdt=\int_0^{\pi}e^{-(x+\pi)^2}\cos^2 xdx<\int_0^{\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx$$

4 估计积分值

例 估计下列各积分值

（1）$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan xdx$; （2）$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}}$.

解:（1）令$f(x)=x\arctan x,x\in[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$

$\because f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}>0,\therefore f(x)$“↗”.于是

$\max f(x)=f(\sqrt{3})=\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$,

$\min f(x)=f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$,

因此$\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\le f(x)\le\frac{\pi}{\sqrt{3}}$,由估值定理有$\frac{\pi}{9}\le\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan xdx\le\frac{2}{3}\pi$.

（2）∵ $4 \quad 4 \quad 2x \quad x^2 \quad x^3 \quad 4 \quad 2x \quad x^2, x \quad [0,1]$

$$\therefore \frac{1}{2} \quad f(x) \quad \frac{1}{\sqrt{4 \quad 2x \quad x^2 \quad x^3}} \quad \frac{1}{\sqrt{4 \quad 2x \quad x^2}},$$

由估值定理有$\frac{1}{2} \quad {}_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 \quad 2x \quad x^2 \quad x^3}} \quad {}_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 \quad 2x \quad x^2}}$,而

$${}_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 \quad 2x \quad x^2}} \quad {}_0^1 \frac{d(x \quad 1)}{\sqrt{5 \quad (x \quad 1)^2}} \quad \arcsin \frac{x \quad 1}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 \quad \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}},$$

故$\frac{1}{2} \quad {}_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 \quad 2x \quad x^2 \quad x^3}} \quad \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}.$

5 由函数方程求积分

例 设$f(x^2 \quad 1) \quad \ln \frac{x^2}{x^2 \quad 2}$且$f(\quad (x)) \quad \ln x$，求 $\quad (x)dx$

解：题目中由函数方程给出了 (x)，要先要求 (x)出再求积分。

由$f(x^2 \quad 1) \quad \ln \frac{x^2}{x^2 \quad 2} \quad \ln \frac{(x^2 \quad 1) \quad 1}{(x^2 \quad 1) \quad 1}$，

得$f(\quad (x)) \quad \ln \frac{(x) \quad 1}{(x) \quad 1} \quad \ln x$,则$\frac{(x) \quad 1}{(x) \quad 1} \quad x$,即

$(x) \quad \frac{x \quad 1}{x \quad 1} \quad 1 \quad \frac{2}{x \quad 1}$,故 $\quad (x)dx \quad (1 \quad \frac{2}{x \quad 1})dx \quad x \quad \ln(x \quad 1)^2 \quad C$

6 广义积分的计算

例 求下列广义积分

(1) ${}_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 \quad 2x \quad 1}}$； (2) ${}_1 \frac{1}{x\sqrt{1 \quad x}}dx$； (3) ${}_1^e \frac{1}{x\sqrt{1 \quad 1nx}^{\,2}}dx$

解：(1) ∵ $\lim_{x \quad 1} f(x) \quad \lim_{x \quad 1} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 \quad 2x \quad 1}}$

$x \quad 1$为$f \quad x$ 的瑕点。

$$I \quad {}_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 \quad 2x \quad 1}} \quad \lim_{0} \ {}_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 \quad 2x \quad 1}}$$

$$\lim_{0}[\ {}_{1}^{2}\frac{d(1\quad\frac{1}{x})}{\sqrt{2^2\quad(1\quad\frac{1}{x})^2}}]\quad \lim_{0}\arcsin\frac{1\quad\frac{1}{x}}{2}\Big|_1^2$$

$$\lim_{0}[\arcsin\frac{2}{2(1\quad)}\quad\arcsin\frac{3}{4}]\quad\frac{}{2}\quad\arcsin\frac{3}{4}$$

(2) $\because\ \lim_{x\quad 1}f(x)\quad\lim_{x\quad 1}\frac{1}{x\sqrt{x\quad 1}}$

$x\quad 1$为$f\quad x$的瑕点,因此该广义积分为混合型的。

$$I\quad {}_{1}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x\quad 1}}dx\quad {}_{2}\frac{1}{x\sqrt{x\quad 1}}dx\ ,$$

$$I_1\quad {}_{1}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x\quad 1}}dx\underline{\underline{令x\quad 1\quad t^2}}\ {}_{0}^{1}\frac{2tdt}{t^2\quad 1\ t}\quad 2\arctan t\Big|_0^1\quad\frac{}{2}$$

$$I_2\quad {}_{2}\frac{1}{x\sqrt{x\quad 1}}dx\quad {}_{1}\frac{2dt}{t^2\quad 1}\quad 2\arctan t\Big|_1\quad 2\ \frac{}{2}\quad\frac{}{4}\ ,$$

故　原广义积分　.

(3) $\because\ \lim_{x\quad e}f\quad x$ ，　$x\quad e$为$f\quad x$的瑕点。

$$I\quad {}_{1}^{e}\frac{1}{x\sqrt{1\quad \ln x^{\ 2}}}dx\quad\lim_{0}\ {}_{1}^{e}\frac{d\ \ln x}{\sqrt{1\quad\ln x^{\ 2}}}\quad\lim_{0}\arcsin\ \ln x\Big|_1^e\quad\frac{}{2}$$

例　位于曲线$y\quad xe^{\ x}(0\quad x\quad)$下方,$x$轴上方的无界图形的面积是_____

解：$A\quad {}_{0}\ xe^{\ x}dx\quad (x\quad 1)e^{\ x}\Big|_0\quad 1$,故应填 1

例　已知${}_{0}\ e^{\ x^2}dx\quad\frac{\sqrt{\ }}{2}$,则${}_{0}\frac{e^{\ x}\quad e^{\ \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ ______

解：${}_{0}\frac{e^{\ x}\quad e^{\ \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx\quad {}_{0}\frac{e^{\ x}}{\sqrt{x}}dx\quad {}_{0}\frac{e^{\ \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

由于${}_{0}\frac{e^{\ x}}{\sqrt{x}}dx\quad {}_{0}\frac{e^{\ (\sqrt{x})^2}}{\sqrt{x}}dx\underline{\underline{\sqrt{x}\quad t}}2\ {}_{0}\ e^{\ t^2}dt\quad\sqrt{\ }$　而

$$_{0}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \quad \lim_{b} {}_{0}^{b}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \quad \lim_{b} 2\ {}_{0}^{b} e^{\sqrt{x}} d\sqrt{x} \quad \lim_{b}(\ \ 2e^{\sqrt{x}})\Big|_{0}^{b} \quad 2$$

7 有关积分等式与不等式的证明

◆ 关于积分等式的证明

解题攻略：利用中值定理证明具有某种性质的 点存在的问题，关键就是寻找辅助函数，其中的技巧之一是要善于从结论推条件，如果看到结论有 $f(x)\quad f^{'}(x)$ 形式，马上想到可能需要构造有 $e^{x}f(x)$ 项的函数，它的导数是 $e^{x}[f(x)\quad f^{'}(x)]$；二是可以把不包含 点的所有项放一边，把包含 点的所有项放另一边，然后对比中值定理寻找辅助函数；三是结论含一个变量时，对结论整理后积分得辅助函数。

例 设函数 $f(x)$ 上 $[a,b]$ 可导，且有 $f\ (a)\ f\ (b)\quad 0$ 则在 (a,b) 内至少 一个使得 $f\ (\ )\quad 0$

证 由题设可知 $f\ (a)$ 与 $f\ (b)$ 异号，不妨设 $f\ (a)\quad 0$，$f\ (b)\quad 0$

因为 $f\ (a)\quad \lim_{x\ a}\frac{f(x)\quad f(a)}{x\quad a}\quad 0$

由极限的保号定理，可知 $_{1}\quad 0$，当 $x\quad (a,a\quad _{1})$ 时有

$$\frac{f(x)\quad f(a)}{x\quad a}\quad 0 \qquad f(x)\quad f(a)$$

同理，$_{2}\quad 0$，当 $x\quad (b\quad _{2},b)$ 时有

$$\frac{f(x)\quad f(b)}{x\quad b}\quad 0 \qquad f(x)\quad f(b)$$

又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最小值，由以上所证可知最小值点必在 (a,b) 内。设 $\quad (a,b)$，$f(\ )\quad \min_{a\ x\ b}\{f(x)\}$，由费尔马定理，$f\ (\ )\quad 0$。

例 设 $f\ x$ 、$g\ x$ 在 a,b 上连续，证明：至少 一个 $\quad a,b$ ，使得

$$f\quad {}^{b}g\ x\ dx\quad g\quad {}_{a}f\ x\ dx\text{。}$$

证 作辅助函数 $F\ x\quad {}_{a}^{x}f\ t\ dt\ {}_{x}^{b}g\ t\ dt$，由于 $f\ x$ 、$g\ x$ 在 a,b 上连续，所以 $F\ x$ 在 a,b 上连续，在 a,b 内可导，并有 $F\ a\quad F\ b\quad 0$，

由洛尔定理有 $\quad F\quad 0,\quad a,b$ 即

$$ {}_a^x f\ t\ dt\ {}_x^b g\ t\ dt \Big|_x \qquad f\ x\ {}_x^b g\ t\ dt\ \ g\ x\ {}_a^x f\ t\ dt \Big|_x $$

$$ f\qquad {}^b g\ x\ dx\ \ g\qquad {}_a f\ x\ dx\quad 0, $$

亦即 $f\qquad {}^b g\ x\ dx\ \ g\qquad {}_a f\ x\ dx$。

注：若令$f\ x\ \ {}_x^b g\ t\ dt\ \ g\ x\ \ {}_a^x f\ t\ dt\ \ F\ x$，再往下做就不容易作出，

若令$F\ x\ \ f\ x\ \ {}_x^b g\ t\ dt\ \ g\ x\ \ {}_a^x f\ t\ dt$，

则可设$F\ x\ \ {}_a^x f\ t\ dt\ {}_x^b g\ t\ dt$，不难验证该函数在 a,b 上满足洛尔定理的条件。

◆关于积分不等式的证明

解题攻略：不等式的证明是常考的综合题,结合了函数性质、中值定理等很多概念的考查，常见的三种类型为：

(1)利用中值定理证明不等式

(2)利用函数单调性证明不等式

(3)利用最值证明不等式

例　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)\quad f(b)\quad 0$,又存在 $c\quad (a,b)$，使 $f(c)\quad 0$，证明在 (a,b) 内存在　，使 $f''(\ )\quad 0$。

证明一 (反证)若对任意的 $x\quad (a,b)$ 均有 $f''(\ )\quad 0$ 成立，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的，所以曲线 $y\quad f(x)$，$x\quad (a,b)$ 应位于连续接点 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$ 的直线 l 的下方，而 l 是 x 轴故 $f(x)\quad 0$，$x\quad (a,b)$ 这与假设矛盾，所以在 $[a,b]$ 内至少存在一点　，使 $f''(\ )\quad 0$。

证明二 利用拉格朗日中值定理知，存在 $_1\quad (a,c)$及 $_2\quad (a,b)$ 使

$$ f'(\ _1)\quad \frac{f(c)\quad f(a)}{c\quad a}\quad 0,f'(\ _2)\quad \frac{f(b)\quad f(a)}{b\quad c}\quad 0 $$

在区间 $[\ _1,\ _2]$ 上对函数 $f'(x)$ 应用拉格朗日中值定理,至少存在一点 $[\ _1,\ _2]\quad (a,b)$ 使得

$$ f''(\ )\quad \frac{f'(\ _2)\quad f'(\ _1)}{_2\qquad _1}\quad 0 $$

例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数。证明：对于 $x\in[0,1]$，有 $|f(x)|\le\int_0^1\left(|f(t)|+|f'(t)|\right)dt$

证 因为 $f(t)$ 连续，$|f(t)|$ 也连续，所以由积分中值定理有

$$\int_0^1|f(t)|dt=|f(\xi)|,\quad 0\le\xi\le1$$

又 $f(x)=f(\xi)+\int_\xi^x f'(t)\,dt$，即 $f(x)=f(\xi)+\int_\xi^x f'(t)\,dt$

所以 $|f(x)|\le|f(\xi)|+\left|\int_\xi^x f'(t)\,dt\right|\le|f(\xi)|+\int_\xi^x|f'(t)|dt\le|f(\xi)|+\left|\int_0^1|f'(t)|dt\right|$，

故 $|f(x)|\le\int_0^1\left(|f(t)|+|f'(t)|\right)dt$

8 有关变限积分的讨论

例 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$,证明：

① 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数 ② 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不增

解：①令 $t=-u$ 则，

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt=\int_0^x(x-2u)f(-u)du=\int_0^x(x-2u)f(u)du=F(x)$$

故 $F(x)$ 为偶函数

②由于被积函数连续，所以函数 $F(x)$ 可导，且

$$F'(x)=[x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x 2tf(t)dt]'=\int_0^x f(t)dt+(x-2x)f(x)$$
$$=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=\int_0^x[f(t)-f(x)]dt\ge0$$

因此，$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调不增

9 有关一元函数积分学的应用

例 设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)\ (x>0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点 $(\frac{1}{2},0)$。

(1)试求曲线 L 的方程。

(2)求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围成图

形的面积最小。

解：(1)设曲线L过点$P(x,y)$的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$，令$X=0$，则得该切线在y轴上的截距为$y-xy'$。由题设知$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$令$u=\frac{y}{x}$，则此方程化为$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$解之得$y+\sqrt{x^2+y^2}=C$由$L$经过$(\frac{1}{2},0)$，知$C=\frac{1}{2}$。于是方程为$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$，即$y=\frac{1}{4}-x^2$。

(2)设第一象限那曲线$y=\frac{1}{4}-x^2$在点$P(x,y)$处的切线方程为$Y-(\frac{1}{4}-x^2)=-2x(X-x)$，即$Y=-2xX+x^2+\frac{1}{4}\ (0<x\le\frac{1}{2})$，它与$x$轴及$y$轴交点为$(\frac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},0)$与$(0,x^2+\frac{1}{4})$。

所求面积为$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+\frac{1}{4})^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-x^2)dx$。

对x求导得$S'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2(x^2+\frac{1}{4})-(x^2+\frac{1}{4})^2}{x^2}=\frac{1}{4x^2}(x^2+\frac{1}{4})(3x^2-\frac{1}{4})$。

令$S'(x)=0$，解得$x=\frac{\sqrt{3}}{6}$。当$0<x<\frac{\sqrt{3}}{6}$时，$S'(x)<0$；

$x>\frac{\sqrt{3}}{6}$时，$S'(x)>0$，因而$x=\frac{\sqrt{3}}{6}$是$S(x)$在$(0,\frac{1}{2})$内的唯一极小值点，即最小值点，于是所求切线为$Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}$。

例　函数$y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$在区间$[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$上的平均值为______

解：$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\ \underline{\underline{x=\sin x}}\ (\sqrt{3}+1)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos t}{2}dt=(\sqrt{3}+1)(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4})\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{12}$$

10 利用泰勒公式证明不等式

例　设函数$f(x)$在$[a,b]$上具有连续的二阶导数，证明：在(a,b)内存在一

点 ，使得

$$ {}_{a}^{b} f\ x\ dx \quad b\quad a\ f\ \frac{a\quad b}{2}\quad \frac{1}{24}\ b\quad a\ ^{3} f $$

证 令 $F\ x\quad {}_{a}^{x} f\ t\ dt$，则有

$$ F\ a\quad 0, F\ x\quad f\ x\ , F\ x\quad f\ x\ , F\ x\quad f\ x $$

$F\ x$ 在 $x_0\quad \frac{a\quad b}{2}$ 处的二阶泰勒公式为

$$ F\ x\quad F\ \frac{a\quad b}{2}\quad F\ \frac{a\quad b}{2}\quad x\quad \frac{a\quad b}{2}\quad \frac{1}{2!}F\ \frac{a\quad b}{2}\quad x\quad \frac{a\quad b}{2}^{2} $$

$$ \frac{1}{3!}F\qquad x\quad \frac{a\quad b}{2}^{3} $$

$$ F\ \frac{a\quad b}{2}\quad f\ \frac{a\quad b}{2}\quad x\quad \frac{a\quad b}{2}\quad \frac{1}{2!}f\ \frac{a\quad b}{2}\quad x\quad \frac{a\quad b}{2}^{2}\quad \frac{1}{3!}f\qquad x\quad \frac{a\quad b}{2}^{3} $$

其中 在 x 与 $\frac{a\quad b}{2}$ 之间。

分别将 $x\quad b, x\quad a$ 代入上式，并相减，则得

$$ F\ b\quad F\ a\quad b\quad a\ f\ \frac{a\quad b}{2}\quad \frac{1}{24}\ b\quad a\ ^{3}\frac{f\quad {}_{1}\quad f\quad {}_{2}}{2}, $$

其中 ${}_{1}$，${}_{2}$ 分别在 $\frac{a\quad b}{2}$ 与 b， a 与 $\frac{a\quad b}{2}$ 之间。

不妨设 $f\quad {}_{1}\quad f\quad {}_{2}$ ，则 $f\quad {}_{1}\quad \frac{f\quad {}_{1}\quad f\quad {}_{2}}{2}\quad f\quad {}_{2}$ ，

考虑到 $f\ x$ 的连续性及介值定理，可知在 ${}_{1}$，${}_{2}$ 之间至少存在一个 a, b ，使

$$ f\qquad \frac{f\quad {}_{1}\quad f\quad {}_{2}}{2}, $$

故 $\ {}_{a}^{b} f\ x\ dx\quad F\ b\quad F\ a\quad b\quad a\ f\ \frac{a\quad b}{2}\quad \frac{1}{24}\ b\quad a\ ^{3} f$

例 求出函数 $f(x)\quad x^2 \ln x$ 在点 $x\quad 1$ 处的 n 阶泰勒展开式

解：因为 $x^2 \quad [(x \quad 1) \quad 1]^2 \quad (x \quad 1)^2 \quad 2(x \quad 1) \quad 1$

$$\ln x \quad \ln[1 \quad (x \quad 1)]$$

$$(x \quad 1) \quad \frac{1}{2}(x \quad 1)^2 \quad \frac{1}{2}(x \quad 1)^3$$

$$\cdots \quad (\quad 1)^{n \quad 1}\frac{1}{n}(x \quad 1)^n \quad (\quad 1)^n \frac{(x \quad 1)^{n \quad 1}}{(n \quad 1) \quad ^{n \quad 1}}$$

因为 $f(x) \quad x^2 \ln x \quad [(x \quad 1)^2 \quad 2(x \quad 1) \quad 1][(x \quad 1) \quad \frac{1}{2}(x \quad 1)^2 \quad \frac{1}{3}(x \quad 1)^3$

$$\cdots \quad \frac{(\quad 1)^{n \quad 1}(x \quad 1)^n}{n} \quad \frac{(\quad 1)^n(x \quad 1)^{n \quad 1}}{(n \quad 1) \quad ^{n \quad 1}}$$

$$(x \quad 1) \quad \frac{3}{2}(x \quad 1)^2 \quad \frac{1}{3}(x \quad 1)^3$$

$$\frac{1}{12}(x \quad 1)^4 \quad \cdots \quad (\quad 1)^{n \quad 1}\frac{2(x \quad 1)^n}{n(n \quad 1)(n \quad 2)} \quad (\quad 1)^n \frac{2(x \quad 1)^n}{(n \quad 1)n(n \quad 1) \quad ^{n \quad 1}}$$

★习题三(3)

1 设 $f(x)$ 连续，证明： $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ 。

2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(a) = f'(b) = 0$，证明：在 (a,b) 内存在 一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi)$ 。

3 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：至少 ∃一个 $\xi \in (a,b)$ 使 $\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}$ 。

4 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，证明：至少 ∃一个 $\xi \in (a,b)$ 使 $f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi)$ 。

5 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(0 < a < b)$，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) ∃ ξ, η,使 $f'(\xi) = \frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$ 。

6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 1$，证明： ∃ $\xi, \eta \in (a,b)$ 使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$ 。

7 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$，证明：$\exists\ \xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$ 。

8 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且严格单调递增，证明：

$$a\quad b\quad {}_a^b f\quad x\quad dx\qquad 2\ {}_a^b xf\quad x\quad dx$$

9 用泰勒公式求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\quad 0}\dfrac{\cos x\quad e^{\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ (2) $\lim\limits_{n}[n\quad n^2\ln(1\quad \dfrac{1}{n})]$

10 求下列广义积分：

(1) ${}_0^2\dfrac{e^x}{e^x\quad 1^{\frac{1}{3}}}dx$； (2) ${}_0\dfrac{1}{x^2\quad 1\quad x^2\quad 4}dx$；

(5) ${}_2^1\dfrac{1}{x\sqrt{x^2\quad 1}}dx$； (6) ${}_0\dfrac{\arctan x}{x^2\quad 1^{3/2}}dx$；

★参考答案

1 令设 $x=\pi-t$

2 利用泰勒公式和介值定理

3 设 $F(x)=\begin{vmatrix}f(a)&g(a)\\f(b)&g(b)\end{vmatrix}x-(b-a)\begin{vmatrix}f(a)&g(a)\\f(x)&g(x)\end{vmatrix}$， 在用洛尔定理

4 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处泰勒展开

5 设 $g(x)=\dfrac{1}{x}$，利用柯西中值定理和拉格朗日中值定理

6 设 $F(x)=e^x f(x),G(x)=x$，利用柯西中值定理,再利用拉格朗日中值定理

7 先利用柯西中值定理,在利用拉格朗日中值定理

8 构造辅助函数 $F\quad x\qquad a\quad x\quad {}_a^x f\quad t\quad dt\quad 2\ {}_a^x tf\quad t\quad dt$

9 (1) $\dfrac{1}{12}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

10　(1) $\frac{3}{2}\ e^{2}\quad 1^{\frac{2}{3}}$　　(2) $\frac{\quad}{12}$

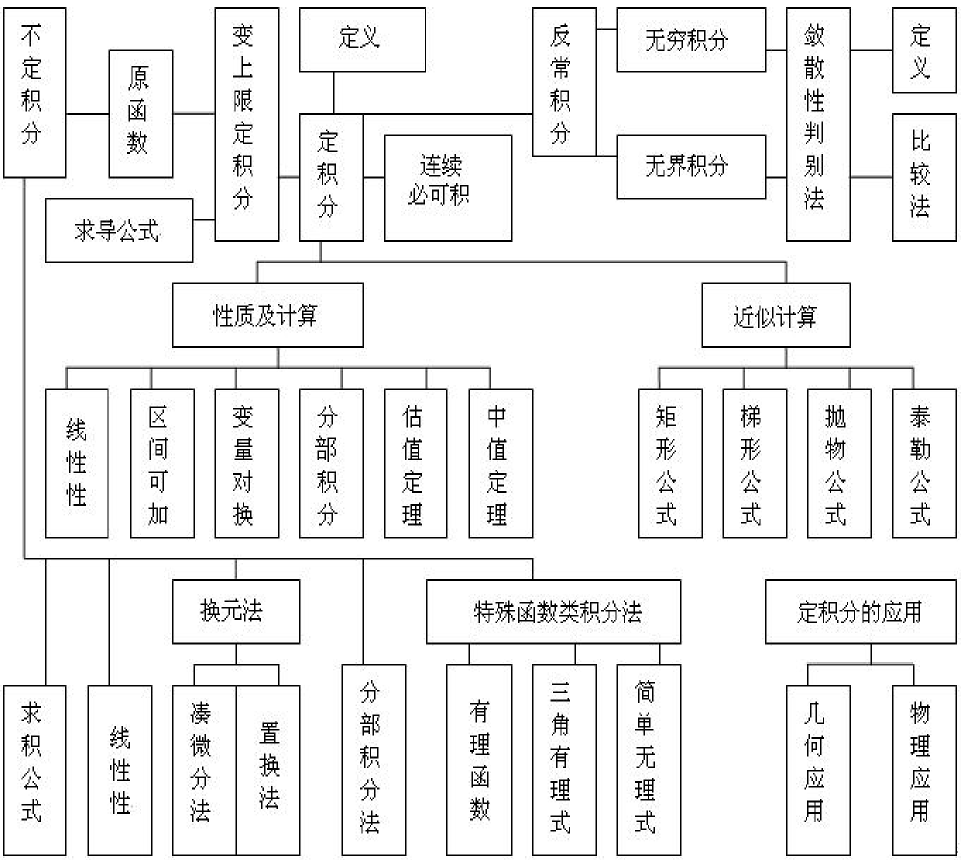
(3) 设辅助函数 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} x-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix}$,

(4) 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处的泰勒展开式　(5) $\frac{\quad}{3}$,　　(6) $\frac{\quad}{2}\quad 1$

★基本知识记忆

定积分概念、基本性质、积分中值定理、泰勒公式的几个特殊例子、构造辅助函数的题型、以及对应的一般解法。大家根据自己的需要记忆薄弱知识点。

★本章知识网络



★本章总结

1 本章难、重点内容

① 不定积分的运算,应熟练掌握换元法及分部积分法

② 牛顿-莱布尼兹公式,它为使用原函数计算定积分提供了理论基础,但应注意它的使用条件: 被积函数的偏导数在积分域必须是连续的

③ 变上限积分的求导,变限积分是被积函数的一个原函数

④通过微分中值定理讨论方程在给定区间内根的个数

⑤证明恒等式及证明在某区间存在满足某种特征的点

⑥各种辅助函数的作法

2 本章容易出错的地方

①在不定积分计算完毕后忘了加常数;

②不定积分作变量代换后在计算结果中没有还原变量;

③定积分作变量代换时没有相应地改变上下积分限;

④用莱布尼兹公式时被积函数不满足该公式的使用条件;

⑤求定积分时不能随意在分子、分母同乘以一个因子，仅当所乘因子在积分域恒不为零时，变换前后的式子才是恒等式;

⑥忽略中值定理的条件;

第四章 向量代数和空间解析几何

※本章要求(▲数二、数三、数四不要求)

1 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其性质。

2 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积)，了解两个向量垂直、平行的条件。

3 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法。

4 掌握平面方程和直线方程及其求法。

5 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、

直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题。

6 会求点到直线以及点到平面的距离。

7 了解曲面方程和空间曲线方程的概念。

8 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程。

9 了解空间曲线的参数方程和一般方程，了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求该投影曲线的方程。

★基本内容学习

一、基本概念

1 向量：既有大小又有方向的量，又称矢量.

2 向量的模：向量 $\bar{a}$ 的大小.记为 $|\bar{a}|$.

3 向量的坐标表示：若向量用坐标表示 $\bar{a} \quad x\vec{i} \quad y\vec{j} \quad z\vec{k} \quad \{x,y,z\}$，则 $\bar{a} \quad \sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}$.

4 单位向量：模为 1 的向量. 向量 $\bar{a}$ 的单位向量记作 $\overline{a^0}$，

$$\overline{a^0} \quad \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}} \quad .$$

5 向量的方向余弦：$\cos \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}},\cos \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}},\cos \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}$, 其中 , , 为向量 $\bar{a}$ 与各坐标轴正向的夹角。

6 单位向量的方向余弦：显然 $\overline{a^0} \quad \{\cos \quad ,\cos \quad ,\cos \quad \}$，且有 $\cos^2 \quad \cos^2 \quad \cos^2 \quad 1$.

7 空间直角坐标系中的向量及其模、方向余弦的坐标表示：

设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间直角坐标系中的两点，则

$\overline{M_1M_2} \quad \{x_2 \quad x_1,y_2 \quad y_1,z_2 \quad z_1\}$,

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2 \quad (z_2 \quad z_1)^2},$$

$$\cos \quad \frac{x_2 \quad x_1}{\sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2 \quad (z_2 \quad z_1)^2}},$$

$$\cos \quad \frac{y_2 \quad y_1}{\sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2 \quad (z_2 \quad z_1)^2}},$$

$$\cos \quad \frac{z_2 \quad z_1}{\sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2 \quad (z_2 \quad z_1)^2}}.$$

8 直线方程与平面方程的各种表示形式

◆平面方程

(1)一般式方程 $Ax \quad By \quad Cx \quad D \quad 0$ 法矢量 $\vec{n} \quad \{A,B,C\}$ 若方程中某个坐标不出现，则平面就平行于该坐标轴，例如 平面 $Ax \quad By \quad Cx \quad D \quad 0 // y$ 轴

(2)平面的点法式方程 $A(x \quad x_0) \quad B(y \quad y_0) \quad C(z \quad z_0) \quad 0$，$M(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上已知点，$\vec{n} \quad \{A,B,C\}$ 为法矢量

(3) 三 点 式 方 程 $\begin{vmatrix} x \quad x_1 & y \quad y_1 & z \quad z_1 \\ x_2 \quad x_1 & y_2 \quad y_1 & z_2 \quad z_1 \\ x_3 \quad x_1 & y_3 \quad y_1 & z_3 \quad z_1 \end{vmatrix}$ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ， $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ，$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 为平面上的三个点。

(4)截距式方程 $\frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} \quad \frac{z}{c} \quad 1$，$a,b,c$ 分别为平面上坐标轴上的截距，即平面通过三点

$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$

◆直线方程

(1) 一般式方程(两平面交线)

$$\begin{matrix} A_1x \quad B_1y \quad C_1x \quad D_1 \quad 0 & \text{平面}_1 \\ A_2x \quad B_2y \quad C_2x \quad D_2 \quad 0 & \text{平面}_2 \end{matrix}$$

平面 $_1$ 与平面 $_2$ 的法矢量分别为 $\vec{n_1} \quad \{A_1,B_1,C_1\}$，$\vec{n_2} \quad \{A_2,B_2,C_2\}$ 直线的方向矢量为

$$\vec{s} \quad \vec{n_1} \quad \vec{n_2} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

(2) 标准式方程

$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ $M(x_0,y_0,z_0)$为直线上已知点，$\vec{s}=\{l,m,n\}$为直线的方向矢量

(3) 两点式方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为直线上的两点

(4)参数式方程

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$ $M(x_0,y_0,z_0)$为直线上已知点，$\vec{s}=\{l,m,n\}$为直线的方向矢量

注：由平面$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$与平面$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$所确定的平面束方程为

$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$，其中$\lambda$，$\mu$不全为“0”

◆平面间的关系

设有两个平面：

平面π_1：$A_1x+B_1y+C_1x+D_1=0$

平面π_2：$A_2x+B_2y+C_2x+D_2=0$

(1)平面π_1 // 平面π_2 $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

(2)平面$\pi_1 \perp$平面$\pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

(3)平面π_1与平面π_2的夹角θ，由下式确定

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

◆平面与直线间关系

直线$L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

平面π_1：$A_1x+B_1y+C_1x+D_1=0$

(1) $L // \pi \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$

$(2)\, L \qquad \dfrac{A}{l} \quad \dfrac{B}{m} \quad \dfrac{c}{n}$

$(3)\, L$ 与　的夹角　，由下式确定

$$\sin \qquad \frac{Al \quad Bm \quad Cn}{\sqrt{A^2 \quad B^2 \quad C^2}\sqrt{l^2 \quad m^2 \quad n^2}}$$

◆直线间关系

设有两直线：

直线 $L_1 : \dfrac{x \quad x_1}{l_1} \quad \dfrac{y \quad y_1}{m_1} \quad \dfrac{z \quad z_1}{n_1}$

直线 $L_2 : \dfrac{x \quad x_2}{l_2} \quad \dfrac{y \quad y_2}{m_2} \quad \dfrac{z \quad z_2}{n_2}$

$(1)\, L_1 // L_2 \qquad \dfrac{l_1}{l_2} \quad \dfrac{m_1}{m_2} \quad \dfrac{n_1}{n_2}$

$(2)\, L_1 \quad L_2 \quad l_1 l_2 \quad m_1 m_2 \quad n_1 n_2 \quad 0$

(3)直线 L_1 与 L_2 的夹角　，由下式确定

$$\cos \qquad \frac{|l_1 l_2 \quad m_1 m_2 \quad n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 \quad m_1^2 \quad n_1^2}\sqrt{l_2^2 \quad m_2^2 \quad n_2^2}}$$

$M(x_0, y_0, z_0)$ 到平面　$: Ax \quad By \quad Cx \quad D \quad 0$ 的距离为

$$d \qquad \frac{|Ax_0 \quad By_0 \quad Cz_0 \quad D|}{\sqrt{A^2 \quad B^2 \quad C^2}}$$

$M(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L_1 : \dfrac{x \quad x_1}{l_1} \quad \dfrac{y \quad y_1}{m_1} \quad \dfrac{z \quad z_1}{n_1}$ 距离为

$$d \qquad \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \quad \overrightarrow{M_1P}\right|}{\overrightarrow{M_1P}} \qquad \frac{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 \quad x_1 & y_0 \quad y_1 & z_0 \quad z_1 \\ l & m & n \end{matrix} \right\|}{\sqrt{l^2 \quad m^2 \quad n^2}}$$

9 投影方程：设　为一条空间曲线，　是一张平面，　的每一点在平面　上均有一个垂足，由这些垂足构成的曲线就称为在平面　上的投影。经过　的每一点均有平面　的一条垂线，这些垂线，构成一个柱面，称为　到平面　的投影柱面。

由以上定义可知，　在平面　上的投影方程可由下列联立方程组成

在平面 上的投影柱面方程

平面 的方程

10 间曲线在各坐标面的投影方程

设空间曲线 : $\begin{cases} F_1(x,y,z) \quad 0 \\ F_2(x,y,z) \quad 0 \end{cases}$ (*)

求 在 XY,XZ,YZ 平面上的投影方程。

(2) 先求 在 XY 平面上的投影方程

1° 从方程(*)中消去 z，得到一个母线 $//Z$ 轴的柱面方程 $(x,y) \quad 0$

2° 将 $(x,y) \quad 0$ 与 $z \quad 0$ 联立，即得 在 XY 平面上的投影方程

$$\begin{cases} (x,y) \quad 0 \\ z \quad 0 \end{cases}$$

(2) 在 XZ 平面上的投影方程

$\begin{cases} (x,z) \quad 0 \\ y \quad 0 \end{cases}$，其中 $(y,z) \quad 0$ 为母线 $//Y$ 轴的柱面方程

(3) 在 YZ 平面上的投影方程

$\begin{cases} (y,z) \quad 0 \\ x \quad 0 \end{cases}$，其中 $(y,z) \quad 0$ 为母线 $//X$ 轴的柱面方程

11 柱面及其母线

由平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 描绘出的轨迹叫做柱面。定曲线叫做柱面的准线，动直线 L 叫做柱面的母线。

12 准线为各种形式的柱面方程的求法

(1)准线为 : $\begin{cases} f \;\; x,y \quad 0 \\ z \quad 0 \end{cases}$,母线 $//z$ 轴的柱面方程为 $f \;\; x,y \quad 0$,

准线为 : $\begin{cases} x,z \quad 0 \\ y \quad 0 \end{cases}$,母线 $//y$ 轴的柱面方程为 $x,z \quad 0$,

准线为 : $\begin{cases} y,z \quad 0 \\ x \quad 0 \end{cases}$,母线 $//x$ 轴的柱面方程为 $y,z \quad 0$.

(2) 准线为 : $\begin{cases} f \;\; x,y,z \quad 0 \\ g \;\; x,y,z \quad 0 \end{cases}$,母线的方向矢量为 l,m,n 的柱面方程的求法

首先,在准线上任取一点 x,y,z ,则过点 x,y,z 的母线方程为

$$\frac{X \quad x}{l} \quad \frac{Y \quad y}{m} \quad \frac{Z \quad z}{n}$$

其中 X,Y,Z 为母线上任一点的流动坐标,消去方程组

$$\begin{array}{l} f\ \ x,y,z \quad 0 \\ g\ \ x,y,z \quad 0 \\ \frac{X \quad x}{l} \quad \frac{Y \quad y}{m} \quad \frac{Z \quad z}{n} \end{array}$$ 中的 x,y,z 便得所求的柱面方程。

★基本题型训练

1 向量的运算

Ⅰ运算法则

(1) 加减运算与数乘运算

设有矢量 $\vec{a} \quad \{x_1,y_1,z_1\}$ ， $\vec{b} \quad \{x_2,y_2,z_2\}$ ，则 $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \{x_1 \quad x_2,y_1 \quad y_2,z_1 \quad z_2\}$.

数乘运算 $_=$ 矢量 $\vec{a}$ 与一数量　之积　$\vec{a}$ ，

$$\vec{a} \quad \begin{cases} |\ \ \vec{a}|\overline{a^0} & 0,\text{即与}\vec{a}\text{同向} \\ \bar{0} & =0,\ \text{即为零矢量} \\ -|\ \ \vec{a}|\overline{a^0} & 0,\text{即与}\vec{a}\text{反向} \end{cases}$$

设 $\vec{a} \quad \{x_1,y_1,z_1\}$ ，则 $\vec{a} \quad \{\ \ x_1,\ \ y_1,\ \ z_1\}$.

(2)数量积

矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积 $\vec{a}\ \ \vec{b} _= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\ \vec{b})$.

设 $\vec{a} \quad \{x_1,y_1,z_1\}$ ， $\vec{b} \quad \{x_2,y_2,z_2\}$ ，则 $\vec{a}\ \ \vec{b} \quad x_1x_2 \quad y_1y_2 \quad z_1z_2$.

运算律

（1）交换律　$\vec{a}\ \vec{b} \quad \vec{b}\ \vec{a}$;

（2）分配律　$\vec{a}\ (\vec{b} \quad \vec{c}) \quad \vec{a}\ \vec{b} \quad \vec{a}\ \vec{c}$;

（3）与数乘矢量有结合律　$(\vec{a}\ \ \vec{b}) \quad (\ \ \vec{a})\ \vec{b} \quad \vec{a}\ (\ \ \vec{b})$.

(3)向量积

定义 设有两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ ，若　一个矢量 $\vec{c}$ ，满足如下条件

（1）$|\vec{c}| \quad |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\ \vec{b})$；（2）$\vec{c} \quad \vec{a}, \vec{c} \quad \vec{b}$，即 $\vec{c}$ 垂直于 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所确定的平面；

（3）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 成右手系.

则称矢量 $\vec{c}$ 为矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的矢量积，记 $\vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{b}$.

设 $\vec{a} \quad \{x_1, y_1, z_1\}\ \vec{b} \quad \{x_2, y_2, z_2\}$，

则 $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$.

运算律

（1）反交换律 $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{b} \quad \vec{a}$；

（2）与数乘矢量有结合律 $(\vec{a} \quad \vec{b}) \quad (\ \vec{a}) \quad \vec{b} \quad \vec{a} \quad (\ \vec{b})$；

（3）分配律 $\vec{a} \quad (\vec{b} \quad \vec{c}) \quad \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{a} \quad \vec{c}$.

(4)混合积

定义　设有三个矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$，若先作 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的叉积 $\vec{a} \quad \vec{b}$，再与 $\vec{c}$ 作点积 $(\vec{a} \quad \vec{b}) \quad \vec{c}$，则这样的数积称为矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的混合积，记为 (a,b,c)，即 $(a,b,c) \quad (\vec{a} \quad \vec{b}) \quad \vec{c}$.

设 $\vec{a} \quad \{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{b} \quad \{x_2, y_2, z_2\}$，$\vec{c} \quad \{x_3, y_3, z_3\}$，则 $(a,b,c) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

几何意义：(a,b,c) 表示以 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为棱的平行六面体体积.

运算律

（1）具有轮换对称性，即 $(a,b,c) \quad (b,c,a) \quad (c,a,b)$；

（2）两矢量积互换，混合积变号，即 $(a,b,c) \quad (a,c,b) \quad (c,b,a) \quad (b,a,c)$.

Ⅱ向量之间的位置关系及结论

设 $\vec{a} \quad \{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{b} \quad \{x_2, y_2, z_2\}$，$\vec{c} \quad \{x_3, y_3, z_3\}$

(1) $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{a}\ \vec{b} \quad 0 \quad x_1x_2 \quad y_1y_2 \quad z_1z_2 \quad 0$；

(2) $\vec{a} // \vec{b} \quad \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{0} \quad \dfrac{x_1}{x_2} \quad \dfrac{y_1}{y_2} \quad \dfrac{z_1}{z_2}$；

其中 x_2,y_2,z_2 之中有一个为“0”，如 $x_2 \quad 0$，应理解为 $x_1 \quad 0$；

(3) $\bar{a}$，$\bar{b}$ 不共线　　不全为零的数 ，使 $\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{0}$；

(4) 矢量 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 的夹角，可由下式求出 $\cos(\bar{a},\ \bar{b}) \quad \dfrac{x_1x_2 \quad y_1y_2 \quad z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} \quad y_1^{\ 2} \quad z_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2} \quad y_2^{\ 2} \quad z_2^{\ 2}}}$；

(5) $\bar{a}$，$\bar{b}$，$\bar{c}$ 共面　　不全为零的数 ， ,v，使 $\bar{a} \quad \bar{b} \quad v\bar{c} \quad \bar{0}$ 或者 $(a,b,c) \quad 0$.

例 1　如(　　)•　　2，则[((　　)　(　　)]•(　　)　_____

解：原式=(　　)•　　•(　　)　2(　,　,　)　4

例 2 证明(　,　,　)^2　　^{2}　^{2}　^{2},并且等号成立的充要条件是　,　,　两两垂直或者　,　,　中有零向量。

证明　按定义|　　|　|　||　|sin　$_1$,(　,　,　)　|　　|•|　|cos　$_2$

其中　$_1$是　与　的夹角,　$_2$是　　与　的夹角,从而

(　,　,　)^2　|　|^2|　|^2|　|^{2}sin^2　$_1$cos^2　$_2$　|　|^2|　|^2|　|^2　　^{2}　^{2}　^{2}　等号成立的充要条件是

sin^2　$_1$　1　cos^2　$_2$，由此得　$_1$　$\overline{\ \ }\,\dfrac{}{2}$，　$_2$　0或　，即　　,且　　||　.于是即得结论。

2 求平面方程

求平面方程的基本方法有：

(1) 找一定点 P_0 及法向量 n ,用点法式 $n \bullet \overline{P_0P} \quad 0$

(2) 找一定点 P_0 及与平面平行的两个不共线向量 U_1,U_2 ,用混合积 $(\overline{P_0P},U_1,U_2) \quad 0$

(3) 用平面束方程

(4) 用平面的一般方程(待定系数)

例 (1)与两直线 $\begin{array}{l} x \quad 1 \\ y \quad\quad 1 \quad t \\ z \quad 2 \quad t \end{array}$ 及 $\frac{x \quad 1}{1} \quad \frac{y \quad 2}{2} \quad \frac{z \quad 1}{1}$ 都平行、且过原点的平面方程是____

(2)过点 $M(1,2, \quad 1)$ 且与直线 $\begin{array}{l} x \quad\quad t \quad 2 \\ y \quad\quad 3t \quad 4 \\ z \quad\quad t \quad 1 \end{array}$ 垂直的平面方程是____

(3) 已 知 两 直 线 方 程 是 $L_1 : \frac{x \quad 1}{1} \quad \frac{y \quad 2}{0} \quad \frac{z \quad 3}{1}$ 和 $L_2 : \frac{x \quad 2}{2} \quad \frac{y \quad 1}{1} \quad \frac{z}{1}$

则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是____

解：(1) $\vec{s_1} \quad\quad 0,1,1$ ，$\vec{s_2} \quad\quad 1,2,1$

由题意平面 $//$ 两直线，则平面的法矢量 $\vec{n}$ 与该两直线的方向矢量垂直，于是可设

$$\vec{n} \quad \vec{s_1} \quad \vec{s_2} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}$$

平面又过原点，所以所求平面方程为

$$x \quad y \quad z \quad 0 \quad \text{即} \quad x \quad y \quad z \quad 0$$

(2) 直线的方向矢量为 $\vec{s} \quad \{ \ 1,3,1\}$，因为直线垂直与所求平面，于是可知平面的法矢量 $\vec{n} // \vec{s}$，取 $\vec{s} \quad \{ \ 1,3,1\}$ 为平面的法矢量，故所求平面为

$$(\ 1)(x \quad 1) \quad 3(y \quad 2) \quad 1 \ (z \quad 1) \quad 0$$

即 $x \quad 3y \quad z \quad 4 \quad 0$

(3) 直线 L_1，L_2 的方向矢量分别为 $\vec{s_1} \quad\quad 1,0, \quad 1$ ，$\vec{s_2} \quad\quad 2,1,1$ ，因为平面过 L_1 且平行于 L_2 ，所以平面的法矢量 $\vec{n} \quad \{A,B,C\}$ ，即为 $\vec{n} \quad \vec{s_1} \quad \vec{s_2} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \vec{i} \quad 3\vec{j} \quad \vec{k}$，由于平面过 L_1，所以点 $M(1,2,3)$ 在平面上，故平面方程为 $(x \quad 1) \quad 3(y \quad 2) \quad (z \quad 3) \quad 0$ 即 $x \quad 3y \quad z \quad 2 \quad 0$

3 求空间直线方程

求空间的直线方程的基本方法有：

(1) 找出所求直线所在的两个平面，用直线的一般方程(交面式)；

(2) 找定点积直线的方向向量，再用直线的标准方程或参数方程。

例　经过点 $A(\quad 1,2,3)$，垂直于直线 $L:\dfrac{x}{4}\quad\dfrac{x}{5}\quad\dfrac{x}{6}$ 且与平面

$:7x\quad 8y\quad 9z\quad 10\quad 0$ 平行的直线方程是_____

解法一：用交面式。所求直线在过点 A 以 L 的方向向量 S 为法向量的平面 $_1$ 上，也在过 A 点以　的法向量 n 为法向量的平面 $_2$ 上，

$$_1:4(x\quad 1)\quad 5(y\quad 2)\quad 6(z\quad 3)\quad 0$$

$$_2:7(x\quad 1)\quad 8(y\quad 2)\quad 9(z\quad 3)\quad\quad 0$$

所求直线方程为 $\begin{matrix}4x\quad 5y\quad 6z\quad 24\quad 0\\ 7x\quad 8y\quad 9z\quad 36\quad 0\end{matrix}$

解法二：设所求直线 L_1 的方向向量是 S_1，由于 $L\quad L_1$，即 $S\quad S_1$，由于 $L_1\parallel\quad$，

即 $n\quad S$ 所以 $S_1\quad S\quad n\begin{vmatrix}i & j & k\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}\quad\{3,\ 6,3\}$，

故所求方程为 $\dfrac{x\quad 1}{1}\quad\dfrac{y\quad 2}{2}\quad\dfrac{z\quad 3}{1}$

注：求直线方程的两种思路要明确，交面式往往会简明一些，相对而言，平面方程更显基础与重要的，把直线的一般方程化为对称方程要熟悉，关键是求直线的方向向量 S。

4 求点、直线、平面间的关系

例 1 判断下列两直线 $L_1:\dfrac{x\quad 1}{1}\quad\dfrac{y}{1}\quad\dfrac{z\quad 1}{2}$ 和 $L_2:\dfrac{x}{1}\quad\dfrac{y\quad 1}{3}\quad\dfrac{z\quad 2}{4}$ 是否在同一平面上，若在同一平面上求交点；若不在同一平面上求两直线间的距离。

解：直线 L_1 与 L_2 的方向矢量分别为 $\vec{s_1}\quad 1,1,2$，$\vec{s_2}\quad 1,3,4$，该直线分别通过 $P(\quad 1,0,1)$，$Q(0,\quad 1,2)$，$\overrightarrow{PQ}\quad\{1,\quad 1,1\}$，

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 2 \quad 0$$，∴直线 L_1 与 L_2 为异面直线。

直线 L_1 与 L_2 的参数方程分别为

$$L_1: \begin{cases} x \quad 1 \quad t \\ y \quad t \\ z \quad 1 \quad 2t \end{cases} \quad 和 \quad L_2: \begin{cases} x \quad s \\ y \quad 1 \quad 3t \\ z \quad 2 \quad 4s \end{cases}$$

设两直线将间的距离为 d，则

$$d \quad \sqrt{(s \quad t \quad 1)^2 \quad (\quad 1 \quad 3s \quad t)^2 \quad (1 \quad 4s \quad 2t)^2}$$

令 $h \quad (s \quad t \quad 1)^2 \quad (\quad 1 \quad 3s \quad t)^2 \quad (1 \quad 4s \quad 2t)^2\ 2$

$$\begin{cases} h_s \quad 52s \quad 24t \quad 4 \quad 0 \\ h_t \quad 24s \quad 12t \quad 4 \quad 0 \end{cases} \quad t \quad \frac{7}{3}, s \quad 1$$

由二元函数求极值的方法可知，当 $t \quad \frac{7}{3}, s \quad 1$ 时距离 d 最小，$d \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$

例 2 证明 $L_1:\frac{x}{1} \quad \frac{y}{2} \quad \frac{z}{3}, L_2:\frac{x \quad 1}{1} \quad \frac{y \quad 1}{1} \quad \frac{z \quad 2}{1}$ 是异面直线，并求公垂线方程及公垂线的长。

证明：L_1 的方向向量 $S_1=\{1,2,3\}$，经过点 $P_1 \quad (0,0,0)\ P_1 \quad \{0,0,0\}$，$L_2$ 的方向向量 $S_2 \quad \{1,1,1\}$，经过点 $P_2 \quad (1, \quad 2,2)$，由于 $(\overline{P_1P_2}, S_1, S_2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 5 \quad 0$ 所以

L_1, L_2 是异面直线。

公垂线 L 的方向向量 S 与 S_1, S_2 都垂直,令 $S \quad S_1 \quad S_2 \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \{ \quad 1,2, \quad 1\}$ 那么，经过 L_1 并且与 S 平行的平面 $_1$ 的方程为 $\begin{vmatrix} x \quad 0 & y \quad 0 & z \quad 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 0$ 整理得

$4x \quad y \quad 2z \quad 0$ 经过 L_2 并且与 S 平行的平面 $_2$ 的方程为 $\begin{vmatrix} x \quad 1 & y \quad 1 & z \quad 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 0$,整

理得$x \quad z \quad 1 \quad 0$。

而平面 $_1$与 $_2$的交线即是L_1与L_2的公垂线L，故$L:\begin{cases} 4x \quad y \quad 2z \quad 0 \\ x \quad z \quad 1 \quad 0 \end{cases}$

公垂线的长为$d \quad \dfrac{\left|(\overline{P_1P_2}, S_1, S_2)\right|}{\left|S_1 \quad S_2\right|} \quad \dfrac{5}{\sqrt{6}}$。

5 求投影方程

例 1 求直线$L:\begin{cases} x \quad 3 \quad t \\ y \quad 1 \quad 2t \\ z \quad 5 \quad 8t \end{cases}$在三个坐标面及平面 $: x \quad y \quad 3z \quad 8 \quad 0$上的投影方程

解：直线L在XY, XZ, YZ坐标面上的投影方程分别为

$$\begin{cases} x \quad 3 \quad t \\ y \quad 1 \quad 2t \\ z \quad 0 \end{cases}, \quad L:\begin{cases} x \quad 3 \quad t \\ y \quad 0 \\ z \quad 5 \quad 8t \end{cases}, \quad L:\begin{cases} x \quad 0 \\ y \quad 1 \quad 2t \\ z \quad 5 \quad 8t \end{cases}$$

下面求直线L在平面 $: x \quad y \quad 3z \quad 8 \quad 0$上的投影方程

先求出通过直线L且垂直与平面 的平面 *的方程，此即直线L在平面 上的投影柱面 直线L的方向矢量$\vec{s} \quad \{ \; 1, 2, 8\}$，平面 的法线矢量$\vec{n} \quad \{1, \; 1, 3\}$，设平面 *的法线矢量$\vec{n}^*$，由投影柱面的意义有

$$\vec{n}^* \quad \vec{s} \quad \vec{n} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \{14, 11, \; 1\}$$

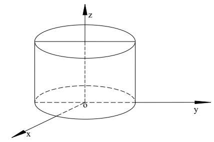
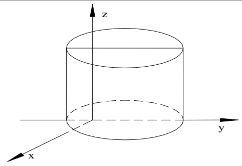
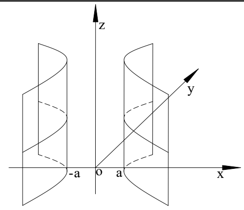
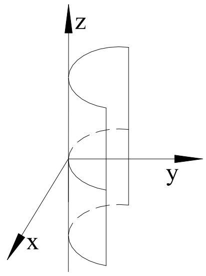
又平面 *通过直线L，可知直线L的点$P(3, \; 1, 5)$，在平面 *上，于是该平面方程为

$$14(x \quad 3) \quad 11(y \quad 1) \quad (z \quad 5) \quad 0$$

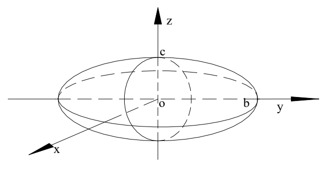
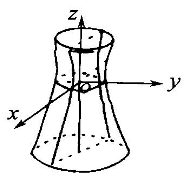
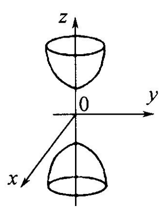
即 $14x \quad 11y \quad z \quad 26 \quad 0$，故所求$L$在 上的投影方程为$\begin{cases} 14x \quad 11y \quad z \quad 26 \quad 0 \\ x \quad y \quad 3z \quad 8 \quad 0 \end{cases}$。

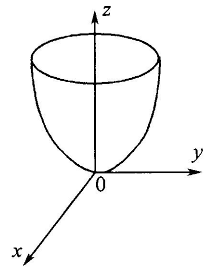
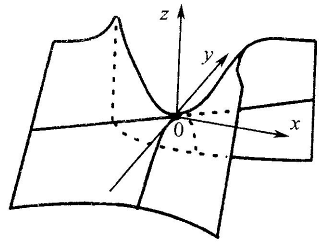
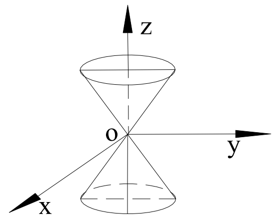
6 求曲面方程

常见的柱面方程

名称	方程	图形
圆柱面	$x^2 \quad y^2 \quad R^2$	
椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1$	
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1$	
抛物柱面	$x^2 \quad 2py,\ p \quad 0$	

标准二次方程及其图形

曲面名称	方程	图形
椭球面	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad \frac{z^2}{c^2} \quad 1$ (a,b,c 均为正数)	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad \frac{z^2}{c^2} \quad 1$ (a,b,c 均为正数)	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad \frac{z^2}{c^2} \quad 1$ (a,b,c 均为正数)	

椭圆的抛物面	$\frac{x^2}{a^2}\quad\frac{y^2}{b^2}\quad 2pz$ $(a,b,p$ 为正数$)$	
双曲抛物面(又名马鞍面)	$\frac{x^2}{a^2}\quad\frac{y^2}{b^2}\quad 2pz$ $(a,b,p$ 均为正数$)$	
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2}\quad\frac{y^2}{b^2}\quad\frac{z^2}{c^2}\quad 0$ $(a,b,c$ 为正数$)$	

例 圆柱面的轴线是 $L:\frac{x}{1}\quad\frac{y\quad 1}{2}\quad\frac{z\quad 2}{2}$，点 $P_0(1,\quad 1,0)$ 是圆柱面上一点，求圆柱面方程。

解：点 $P_0(1,\quad 1,0)$ 到轴 L 的距离 d 就是圆柱面的地面半径，在 L 上取一点 $P_1(0,\quad 01,\quad 2)$，L 的方向向量 $S\quad\{1,2,\quad 2\}$，则用点到直线的距离公式有

$$d\quad\frac{\left|S\quad\overline{P_1P_0}\right|}{S}\quad\frac{\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}}{\sqrt{1^2\quad 2^2\quad(\quad 2)^2}}\quad\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

设 $P(x,y,z)$ 是柱面上任一点,则 $\left|S\quad\overline{P_1P}\right|\quad\left|S\quad\overline{P_1P_0}\right|$ 而

$$S\quad\overline{P_1P}\quad\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 2\\ x & y\quad 1 & z\quad 2\end{vmatrix}\quad\{2(z\quad 2)\quad 2(y\quad 1),\quad 2x\quad z\quad 2, y\quad 1\quad 2x\}$$,从而

$(2y\quad 2z\quad 2)^2\quad(2x\quad z\quad 2)^2\quad(2x\quad y\quad 1)^2\quad 32$,即所求圆柱面的方程.

★练习四

1 填空题

(1)过三点 $P(2,3,0), Q(\ 2,\ 3,4), R(0,6,0)$ 的平面方程是________

(2)过点 $M_0(2,4,0)$ 且与直线 L: $\begin{matrix} x & 2z & 1 & 0 \\ y & 3z & 2 & 0 \end{matrix}$ 平行的直线方程是______

(3)设平面经过原点及点 $(6,\ 3,2)$，且与平面 $4x \quad y \quad 2z \quad 8$ 垂直，则此平面方程为______

2 若 $\vec{a} \quad 4\vec{m} \quad \vec{n}, \vec{b} \quad 4\vec{m} \quad 2\vec{n}, \vec{c} \quad 2\vec{m} \quad 3\vec{n}$,式中 $|\vec{m}| \quad 2, |\vec{n}| \quad 1$,又 $\widehat{\vec{m},\vec{n}} \quad \frac{}{2}$，化简表达式 $\vec{a} \quad \vec{c} \quad 3\vec{a} \quad \vec{b} \quad 2\vec{b} \quad \vec{c} \quad 1$

3 设 $\vec{A} \quad 2\vec{a} \quad \vec{b}, \vec{B} \quad k\vec{a} \quad \vec{b}$，其中 $|\vec{a}| \quad 1, |\vec{b}| \quad 2$，且 $\vec{a} \quad \vec{b}$

问：(1) k 为何值时，$\vec{A} \quad \vec{B}$；

(2) k 为何值时, $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 为邻边的平行四边行面积为 6。

4 求 $P(3,\ 1,2)$ 点到直线 $\begin{matrix} x & y & z & 1 & 0 \\ 2x & y & z & 4 & 0 \end{matrix}$ 的距离。

5 平面过 z 轴且与平面 $2x \quad y \quad \sqrt{5}z \quad 0$ 的夹角为 $\frac{}{3}$，求此平面方程。

6 设 a,b,c 为一平面在坐标轴上的截距，P 为原点与该平面之间的距离，证明

$$\frac{1}{a^2} \quad \frac{1}{b^2} \quad \frac{1}{c^2} \quad \frac{1}{P^2}$$

7 设一向量与三个坐标平面的夹角分别是 , , ,试证 $\cos^2 \quad \cos^2 \quad \cos^2 \quad 2$

★参考答案

1(1) $3x \quad 2y \quad 6z \quad 12 \quad 0$ (2) $\frac{x \quad 2}{2} \quad \frac{y \quad 4}{3} \quad \frac{z}{1}$ (3) $2x \quad 2y \quad 3z \quad 0$

2 74

3 (1) $k \quad 2$, (2) $k \quad 1$ 或 $k \quad 5$

4 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

5 $x \quad 3y \quad 0$ 或 $3x \quad y \quad 0$

★本章总结

1 本章难、重点内容

(1)如何求直线方程和平面方程；

(2)求旋转曲面方程和柱面方程；

(3)点、直线、及平面之间的距离或相互之间的距离。

2 本章容易出错的地方

(1)对直线的向量，平面的法向量，两直线或平面平行，直线和平面的各种方程等基础知识掌握得不扎实导致做题错误；

(2)公式记得不清，用公式时套用错误。

1万个QQ群

学习群+高个群、模特群+明星粉丝群+游戏群+兼职、招聘群+网红主播群+媒体记者群等（想要什么群都可以免费建）

总群主的抖音/微博“全球第一群主”

（一）2500个学习群

包含从小学、中学、大学、已工作的所有年级、所有学科，名校资料群、教师群、学生群、资料群、解题群、口语群、答疑群、作业互助群等学习考试类交流群

【加群说明】

一、默认全国群，地方性的群会标明省份或者城市

二、绿色底为人多的群或同类别中的主群，

同一类群有多个群的，序号越靠前的人越多

绿色底+红色字体为人多活跃质量高的群

三、自己加群，若进不去要看清楚系统提示

（1）学前教育群

学前		智力测试题下载群：797849111
		育儿资料群：633010272
		宝妈宝爸交流群：672477699
		儿童益智类资料群：251449638
		学前教育资料群：736519867
		幼儿园教师群：653729031
		幼儿园家长交流群：198791465
		幼儿园学习资料群：663668054

（2）小学群

小学数学	千人群	全国小学数学教师群：271730239（教师教研等）
		小学数学交流群：785040287（教师、学生、家长）
		小学数学资料群：788281323
		小学数学资料2号群：177432186
		小学数学资料3号群：276468455
		小学数学资料4号群：562656756
		小学数学资料5号群：657064100
		小学数学资料6号群：594548511
		小学数学资料7号群：660523138
		小学数学资料8号群：661534832
		小学数学资料9号群：659151253
		小学数学资料10号群：661311859
小学	2000人	全国小学奥数教练群：221739457（奥数教练教研）

奥数	500人	小学奥数交流群：413883222（教师、学生、家长）
		小学奥数资料群：783643032
		小学奥数资料2号群：470489245
		小学奥数资料3号群：555735300
		小学奥数资料4号群：457661795
		小学奥数资料5号群：361880547
		小学奥数资料6号群：623987853
		小学奥数资料7号群：494074122
		小学奥数资料8号群：480772366
		小学奥数资料9号群：346909009
		小学奥数资料10号群：770522569
		小学新定义题资料群：801527030
小升初数学压轴题		小升初数学压轴题资料群：762367797（压轴题交流）
		小升初数学压轴题资料2号群：903113553
		小升初数学压轴题资料3号群：304590553
		小升初数学压轴题资料4号群：615869288
		小升初数学压轴题资料5号群：626818657
		小升初数学压轴题资料6号群：304352827
		小升初数学压轴题资料7号群：884072881
		小升初数学压轴题资料8号群：626483509
		小升初数学压轴题资料9号群：903953917
		小升初数学压轴题资料10号群：832815877
小学语文	500人	小学语文教师群：797548706
		小学语文交流群：781889146（教师、学生、家长）
		小学语文资料群：775321959
		小学语文资料2号群：682222130
		小学语文资料3号群：682787151
		小学语文资料4号群：775052016
		小学语文资料5号群：342496541
		小学语文资料6号群：776147814
		小学语文资料7号群：775707939
		小学语文资料8号群：571685701
		小学语文资料9号群：778256566
		小学语文资料10号群：779099626
小学英语		小学英语教师群：258163775
		小学英语学生群：439139199
		小学英语资料群：185803041
		小学英语资料2号群：622933510
		小学英语资料3号群：772114090
		小学英语资料4号群：699616938
		小学英语资料5号群：777234381
		小学英语资料6号群：777465934
		小学英语资料7号群：615721189

		小学英语资料8号群：774550257
		小学英语资料9号群：775111747
		小学英语资料10号群：775392101
		小学英语听力mp3资源群：476938485
	2000人	全国英语口语交流群：168570356
道德与法治		小学道德与法治教师群：825628540
		小学道德与法治交流群：791682028
		小学道德与法治资料群：789876804
		小学道德与法治资料2号群：789445058
		小学道德与法治资料3号群：775819030
		小学道德与法治资料4号群：772620933
		小学道德与法治资料5号群：772521229
		小学道德与法治资料6号群：770864313
		小学道德与法治资料7号群：768330059
		小学道德与法治资料8号群：762290265
		小学道德与法治资料9号群：761752664
		小学道德与法治资料10号群：754528923
小学全科		小学全科资料群：700841589（小学全部学科的备用群）
		小学全科资料2号群：882079430
		小学全科资料3号群：914266416
		小学全科资料4号群：914266150
		小学全科资料5号群：769299546
		小学全科资料6号群：914265568
		小学全科资料7号群：912180297
		小学全科资料8号群：912184088
		小学全科资料9号群：912193855
		小学全科资料10号群：912196956
小学全科笔记		小学学霸笔记共享群：949354647（学霸笔记）
		小学学霸笔记共享2号群：949509596
		小学学霸笔记共享3号群：949513231
		小学学霸笔记共享4号群：779552948
		小学学霸笔记共享5号群：949513897
		小学学霸笔记共享6号群：779173265
		小学学霸笔记共享7号群：749776227
		小学学霸笔记共享8号群：949517035
		小学学霸笔记共享9号群：936557041
		小学学霸笔记共享10号群：949514349
小学全科错题本		小学错题本共享群：949506604
		小学错题本共享2号群：630300430
		小学错题本共享3号群：715309567
		小学错题本共享4号群：715058671
		小学错题本共享5号群：949505609
		小学错题本共享6号群：679771962

		小学错题本共享7号群：197978807
		小学错题本共享8号群：949507178
		小学错题本共享9号群：719591180
		小学错题本共享10号群：479699338
小学全科思维导图		小学思维导图共享群：673882511（思维导图）
		小学思维导图2号群：912196223
		小学思维导图3号群：912203038
		小学思维导图4号群：912199113
		小学思维导图5号群：912194493
		小学思维导图6号群：912197832
		小学思维导图7号群：912219756
		小学思维导图8号群：912230667
		小学思维导图9号群：914290261
		小学思维导图10号群：912215212
（3）初中群 文末另有34省中考群、名校群		
初中数学	两千人	全国初中数学教师群：95837671（教师教研）
		几何画板交流群：959481103
	千人群	初中数学交流群：579251397（教师、学生、家长）
	500人	初中数学资料群：764996811
		初中数学资料2号群：638944765
		初中数学资料3号群：691875790
		初中数学资料4号群：716688791
		初中数学资料5号群：716297113
		初中数学资料6号群：655681431
		初中数学资料7号群：664182699
		初中数学资料8号群：662373887
		初中数学资料9号群：659108360
		初中数学资料10号群：655294065
中考数学复习		中考数学复习资料群：797817218
		中考数学复习资料2号群：797769203
		中考数学复习资料3号群：479299953
		中考数学复习资料4号群：806595155
		中考数学复习资料5号群：601205135
		中考数学复习资料6号群：257813925
		中考数学复习资料7号群：279782018
		中考数学复习资料8号群：227248249
		中考数学复习资料9号群：247979484
		中考数学复习资料10号群：698183505
		中考数学复习资料11号群：589478511
		中考数学复习资料12号群：818409579

		中考数学复习资料13号群：235615689
		中考数学复习资料14号群：246805277
		中考数学复习资料15号群：819038560
		中考数学复习资料16号群：820601094
		中考数学复习资料17号群：819281461
		中考数学复习资料18号群：821208140
		中考数学复习资料19号群：547931142
		中考数学复习资料20号群：821135951
初中奥数	两千人	**全国初中奥数教练群：112464128（竞赛教练）**
	两千人	**全国初中奥数学生群:253736211**
	千人群	全国初中奥数资料群：126047790
		初中奥数资料2号群：761411993
		初中奥数资料3号群：182948643
		初中奥数资料4号群：499256019
		初中奥数资料5号群：780271950
		初中奥数资料6号群：778565719
		初中奥数资料7号群：779752792
		初中奥数资料8号群：779334052
		初中奥数资料9号群：780621534
		初中奥数资料10号群：779624080
		英文版数学资料群：464201307（小学+中学+大学）
初中数学专题	专题群	有理数专题资料群：497533387
		整式加减专题资料群：497016025
		一元一次方程资料群：608528110
		几何图形初步资料群：150924510
		相交线与平行线资料群：324703376
		实数专题资料群：695384047
		平面直角坐标系资料群：572570786
		二元一次方程组资料群：198301898
		不等式与不等式组资料群：567059236
		数据的收集、整理与描述资料群：581024519
		初中三角形专题资料群：669323293
		全等三角形专题资料群：828777104
		轴对称专题资料群：825710860
		整式乘法因式分解资料群：686106039
		初中分式专题资料群：418108207
		二次根式专题资料群：586267675
		勾股定理专题资料群：648104812
		初中四边形专题资料群：742908970
		一次函数专题资料群：690391113
		数据的分析专题资料群：579112986
		一元二次方程资料群：637619851
		初中二次函数资料群：676552338

		初中旋转专题资料群：679881922
		初中圆专题资料群：644715133
		初中概率初步资料群：686706704
		初中反比例函数资料群：688055937
		相似专题资料群：688130335
		锐角三角函数资料群：632980288
		投影与视图资料群：568653180
		初中新定义题资料群：757759580
		初中数论专题资料群：619458192
		初中组合专题资料群：799068648
初中数学解题方法		截长补短资料群：232806176
		倍长中线资料群：881588410
		待定系数法资料群：928014546
		初中构造法资料群：928846942
		初中换元法资料群：928765310
		几何变换法资料群：615883574
		初中面积法专题群：928878604
		旋转全等资料群：928877675
初中数学压轴题	500人	中考数学压轴题交流群：787763088（压轴题）
		中考数学压轴题2号群：912152440
		中考数学压轴题3号群：912159151
		中考数学压轴题4号群：912161950
		中考数学压轴题5号群：914257942
		中考数学压轴题6号群：204896737
		中考数学压轴题7号群：897316953
		中考数学压轴题8号群：801573508
		中考数学压轴题9号群：519343946
		中考数学压轴题10号群：801267378
初中物理	千人群	初中物理教师群：227284641（教师教研）
		初中物理交流群：770717376（教师、学生、家长）
		初中物理资料群：768010084
		初中物理资料2号群：852679883
		初中物理资料3号群：704341378
		初中物理资料4号群：810759081
		初中物理资料5号群：852492044
		初中物理资料6号群：829158562
		初中物理资料7号群：364740186
		初中物理资料8号群：532928499
		初中物理资料9号群：634650868
	500人	初中物理资料10号群：632732308
中考物理复习		中考物理复习资料群：829626980（复习交流）
		中考物理复习资料2号群：829631058
		中考物理复习资料3号群：838361251

		中考物理复习资料4号群：866706035
		中考物理复习资料5号群：730511128
		中考物理复习资料6号群：869030398
		中考物理复习资料7号群：820825875
		中考物理复习资料8号群：869105800
		中考物理复习资料9号群：875314718
		中考物理复习资料10号群：877077627
		中考物理复习资料11号群：891807060
		中考物理复习资料12号群：885269084
		中考物理复习资料13号群：317892190
		中考物理复习资料14号群：903411737
		中考物理复习资料15号群：903411742
		中考物理复习资料16号群：891816390
		中考物理复习资料17号群：904871906
		中考物理复习资料18号群：545624240
		中考物理复习资料19号群：101461987
		中考物理复习资料20号群：904871846
中考物理压轴题		中考物理压轴题交流群：435048086
		中考物理压轴题资料2号群：716253623
		中考物理压轴题资料3号群：633701665
		中考物理压轴题资料4号群：717232421
		中考物理压轴题资料5号群：717604919
		中考物理压轴题资料6号群：712267196
		中考物理压轴题资料7号群：162028355
		中考物理压轴题资料8号群：713934698
		中考物理压轴题资料9号群：843117771
		中考物理压轴题资料10号群：695946877
初中物理竞赛	500人	初中物理竞赛教练群：939389894（竞赛教练）
		初中物理竞赛交流群：762646851（教师、学生、家长）
		初中物理竞赛资料群：658418615
		初中物理竞赛资料2号群：913929748
		初中物理竞赛资料3号群：913919538
		初中物理竞赛资料4号群：820261454
		初中物理竞赛资料5号群：910746027
		初中物理竞赛资料6号群：391647617
		初中物理竞赛资料7号群：752221604
		初中物理竞赛资料8号群：829952338
		初中物理竞赛资料9号群：869422372
		初中物理竞赛资料10号群：857725098
初中化学	500人	初中化学教师群:462100609（教师教研）
		初中化学交流群：627176189（教师、学生、家长）
		初中化学资料群：725519708
		初中化学资料2号群：585829257

		初中化学资料3号群：479261245
		初中化学资料4号群：761471862
		初中化学资料5号群：689406652
		初中化学资料6号群：858222169
		初中化学资料7号群：740458267
		初中化学资料8号群：777535058
		初中化学资料9号群：777609266
		初中化学资料10号群：364419773
中考化学复习		中考化学复习资料群：487311738
		中考化学复习资料2号群：436135971
		中考化学复习资料3号群：866712162
		中考化学复习资料4号群：435868789
		中考化学复习资料5号群：117184096
		中考化学复习资料6号群：526495081
		中考化学复习资料7号群：119468453
		中考化学复习资料8号群：143102987
		中考化学复习资料9号群：279789105
		中考化学复习资料10号群：434154336
		中考化学复习资料11号群：434136993
		中考化学复习资料12号群：429427026
		中考化学复习资料13号群：143119178
		中考化学复习资料14号群：702280117
		中考化学复习资料15号群：262635131
		中考化学复习资料16号群：414884293
		中考化学复习资料17号群：167337807
		中考化学复习资料18号群：168248058
		中考化学复习资料19号群：806892517
		中考化学复习资料20号群：703975245
中考化学压轴题		中考化学压轴题交流群：716412840
		中考化学压轴题资料2号群：718611810
		中考化学压轴题资料3号群：713727321
		中考化学压轴题资料4号群：713623981
		中考化学压轴题资料5号群：714495528
		中考化学压轴题资料6号群：719060466
		中考化学压轴题资料7号群：719601062
		中考化学压轴题资料8号群：721232246
		中考化学压轴题资料9号群：719469155
		中考化学压轴题资料10号群：722623460
初中化学竞赛	500人	初中化学竞赛教练群：296982275（竞赛教练）
		初中化学竞赛交流群：749565142（教师、学生、家长）
		初中化学竞赛资料群：750457862
		初中化学竞赛资料2号群：869756129
		初中化学竞赛资料3号群：866896662

		初中化学竞赛资料4号群：859089997
		初中化学竞赛资料5号群：866917271
		初中化学竞赛资料6号群：869748791
		初中化学竞赛资料7号群：858270664
		初中化学竞赛资料8号群：913940497
		初中化学竞赛资料9号群：327943727
		初中化学竞赛资料10号群：913945748
初中生物	500人	初中生物教师群：260595347（教师教研）
		初中生物交流群：524722068（教师、学生、家长）
		初中生物资料群：771253357
		初中生物资料2号群：913952433
		初中生物资料3号群：702721308
		初中生物资料4号群：913954115
		初中生物资料5号群：913953555
		初中生物资料6号群：697757171
		初中生物资料7号群：913971159
		初中生物资料8号群：892390402
		初中生物资料9号群：730786887
		初中生物资料10号群：823065265
中考生物复习		中考生物复习资料群：197016879（复习交流）
		中考生物复习资料2号群：410049356
		中考生物复习资料3号群：189979245
		中考生物复习资料4号群：410039114
		中考生物复习资料5号群：317691209
		中考生物复习资料6号群：109328726
		中考生物复习资料7号群：316200663
		中考生物复习资料8号群：316154755
		中考生物复习资料9号群：374908515
		中考生物复习资料10号群：367848875
		中考生物复习资料11号群：436139989
		中考生物复习资料12号群：436152465
		中考生物复习资料13号群：472253334
		中考生物复习资料14号群：311502282
		中考生物复习资料15号群：473489294
		中考生物复习资料16号群：487214602
		中考生物复习资料17号群：109312100
		中考生物复习资料18号群：478219494
		中考生物复习资料19号群：818517099
		中考生物复习资料20号群：455921995
初中生物竞赛	500人	初中生物竞赛教练群：212446815（竞赛教练）
		初中生物竞赛交流群：758220661（教师、学生、家长）
		初中生物竞赛资料群：771010877
		初中生物竞赛资料2号群：250162026

		初中生物竞赛资料3号群：765401012
		初中生物竞赛资料4号群：817343264
		初中生物竞赛资料5号群：398409272
		初中生物竞赛资料6号群：825039218
		初中生物竞赛资料7号群：617046621
		初中生物竞赛资料8号群：375495725
		初中生物竞赛资料9号群：564097192
		初中生物竞赛资料10号群：596765240
初中信息	500人	全国信息竞赛教练群：281798334（竞赛教练）
		全国信息竞赛交流群：718253390（教师、学生、家长）
		信息竞赛NOIP资料群：364337437
初中英语	500人	全国初中英语教师群：834522688（教师教研）
		初中英语交流群：766158871（教师、学生、家长）
		初中英语资料群：159042334
		初中英语资料2号群：679833891
		初中英语资料3号群：913993972
		初中英语资料4号群：914017826
		初中英语资料5号群：645584604
		初中英语资料6号群：914013040
		初中英语资料7号群：719636957
		初中英语资料8号群：914028064
		初中英语资料9号群：256906779
		初中英语资料10号群：779358476
中考英语复习		中考英语复习资料群：216171684（复习交流）
		中考英语复习资料2号群：497955134
		中考英语复习资料3号群：496613550
		中考英语复习资料4号群：496541867
		中考英语复习资料5号群：216140799
		中考英语复习资料6号群：608547456
		中考英语复习资料7号群：594854535
		中考英语复习资料8号群：807222250
		中考英语复习资料9号群：374921939
		中考英语复习资料10号群：548715951
		中考英语复习资料11号群：823943609
		中考英语复习资料12号群：567186177
		中考英语复习资料13号群：580450800
		中考英语复习资料14号群：582578706
		中考英语复习资料15号群：733593513
		中考英语复习资料16号群：562724018
		中考英语复习资料17号群：589752318
		中考英语复习资料18号群：622580748
		中考英语复习资料19号群：626038080
		中考英语复习资料20号群：653948432

初中英语	2000人	全国英语口语交流群：168570356
		全国初高中英语竞赛群：271750414
		初中英语听力mp3资源群：810072891
初中地理	500人	全国初中地理教师群：208573393（教师教研）
		初中地理交流群：730685881（教师、学生、家长）
		初中地理资料群：556135096
		初中地理资料2号群：785977989
		初中地理资料3号群：614521354
		初中地理资料4号群：549784127
		初中地理资料5号群：914076371
		初中地理资料6号群：549664779
		初中地理资料7号群：715996247
		初中地理资料8号群：114591307
		初中地理资料9号群：869028169
		初中地理资料10号群：894337935
中考地理复习		中考地理复习资料群：824220710（复习交流）
		中考地理复习资料2号群：656575895
		中考地理复习资料3号群：262590713
		中考地理复习资料4号群：675594835
		中考地理复习资料5号群：676805924
		中考地理复习资料6号群：676823555
		中考地理复习资料7号群：653954192
		中考地理复习资料8号群：580442357
		中考地理复习资料9号群：695804340
		中考地理复习资料10号群：278416720
		中考地理复习资料11号群：616985439
		中考地理复习资料12号群：823771154
		中考地理复习资料13号群：242204883
		中考地理复习资料14号群：855635437
		中考地理复习资料15号群：855589786
		中考地理复习资料16号群：719806962
		中考地理复习资料17号群：854538426
		中考地理复习资料18号群：855068555
		中考地理复习资料19号群：858374426
		中考地理复习资料20号群：855307915
初中历史	500人	全国初中历史教师群：271752907（教师教研）
		初中历史交流群：768192953（教师、学生、家长）
		初中历史资料群：770329417
		初中历史资料2号群：777296570
		初中历史资料3号群：584537765
		初中历史资料4号群：797301658
		初中历史资料5号群：656985187
		初中历史资料6号群：808572654

		初中历史资料7号群：862426385
		初中历史资料8号群：808230842
		初中历史资料9号群：853931087
		初中历史资料10号群：713250111
中考历史复习		中考历史复习资料群：853076927
		中考历史复习资料2号群：719065875
		中考历史复习资料3号群：830806656
		中考历史复习资料4号群：859465310
		中考历史复习资料5号群：860804702
		中考历史复习资料6号群：858157502
		中考历史复习资料7号群：822930848
		中考历史复习资料8号群：773844067
		中考历史复习资料9号群：822528178
		中考历史复习资料10号群：838491541
		中考历史复习资料11号群：838910181
		中考历史复习资料12号群：865292796
		中考历史复习资料13号群：865261050
		中考历史复习资料14号群：837561904
		中考历史复习资料15号群：856853693
		中考历史复习资料16号群：837466256
		中考历史复习资料17号群：849613204
		中考历史复习资料18号群：852676850
		中考历史复习资料19号群：867158797
		中考历史复习资料20号群：272428203
初中政治	500人	全国初中政治教师群：57085681（教师教研）
		初中政治交流群：790677179（教师、学生、家长）
		初中政治资料群：689943059
		初中政治资料2号群：910811087
		初中政治资料3号群：910558686
		初中政治资料4号群：910803580
		初中政治资料5号群：786866613
		初中政治资料6号群：547397840
		初中政治资料7号群：811640822
		初中政治资料8号群：768613319
		初中政治资料9号群：914061585
		初中政治资料10号群：689442441
中考政治复习		中考政治复习资料群：808712215（复习交流）
		中考政治复习资料2号群：811476273
		中考政治复习资料3号群：830435327
		中考政治复习资料4号群：698775300
		中考政治复习资料5号群：731981835
		中考政治复习资料6号群：549748464
		中考政治复习资料7号群：810062294

		中考政治复习资料8号群：487521852
		中考政治复习资料9号群：867105549
		中考政治复习资料10号群：318779990
		中考政治复习资料11号群：758905420
		中考政治复习资料12号群：658628778
		中考政治复习资料13号群：632307322
		中考政治复习资料14号群：318031671
		中考政治复习资料15号群：867910602
		中考政治复习资料16号群：859582136
		中考政治复习资料17号群：854614628
		中考政治复习资料18号群：674911701
		中考政治复习资料19号群：857361828
		中考政治复习资料20号群：830144926
初中语文	500人	全国初中语文教师群：710391827（教师教研）
		初中语文交流群：734139505（教师、学生、家长）
		初中语文资料群：758386445
		初中语文资料2号群：835740920
		初中语文资料3号群：793909383
		初中语文资料4号群：893363020
		初中语文资料5号群：879871319
		初中语文资料6号群：893024988
		初中语文资料7号群：779416757
		初中语文资料8号群：634990477
		初中语文资料9号群：914051360
		初中语文资料10号群：817730650
中考语文复习		中考语文复习资料群：698627044
		中考语文复习资料2号群：814608428
		中考语文复习资料3号群：702257986
		中考语文复习资料4号群：814463113
		中考语文复习资料5号群：814290831
		中考语文复习资料6号群：813180200
		中考语文复习资料7号群：721259855
		中考语文复习资料8号群：705062569
		中考语文复习资料9号群：707176120
		中考语文复习资料10号群：808733232
		中考语文复习资料11号群：726759874
		中考语文复习资料12号群：807652925
		中考语文复习资料13号群：728821651
		中考语文复习资料14号群：728572036
		中考语文复习资料15号群：728310037
		中考语文复习资料16号群：728887920
		中考语文复习资料17号群：807256149
		中考语文复习资料18号群：805040543

		中考语文复习资料19号群：746398634
		中考语文复习资料20号群：805773113
初中全科	500人	全国初升高自招资料群：271737073（全科、自主招生）
	千人群	初中资料群：775983524（初中全部学科的备用群）
		初中资料2号群：682823984
		初中资料3号群：695522083
		初中资料4号群：693534327
		初中资料5号群：276225743
		初中资料6号群：338473890
		初中资料7号群：695108598
		初中资料8号群：728951699
		初中资料9号群：728639220
		初中资料10号群：912597430
中考全科复习		中考复习资料群：729826090（复习交流）
		中考复习资料2号群：734318681
		中考复习资料3号群：805439085
		中考复习资料4号群：737406487
		中考复习资料5号群：805201055
		中考复习资料6号群：799858290
		中考复习资料7号群：801089703
		中考复习资料8号群：738050806
		中考复习资料9号群：736504520
		中考复习资料10号群：792419367
		中考复习资料11号群：736493658
		中考复习资料12号群：736626264
		中考复习资料13号群：797890216
		中考复习资料14号群：798769416
		中考复习资料15号群：734902587
		中考复习资料16号群：798679929
		中考复习资料17号群：797899399
		中考复习资料18号群：787279580
		中考复习资料19号群：792445776
		中考复习资料20号群：747034474
初中全科思维导图	500人	初中思维导图共享群：831524442（思维导图）
		初中思维导图资料2号群：338767021
		初中思维导图资料3号群：722586782
		初中思维导图资料4号群：722187501
		初中思维导图资料5号群：914230517
		初中思维导图资料6号群：239736842
		初中思维导图资料7号群：914256720
		初中思维导图资料8号群：730986455
		初中思维导图资料9号群：601288270
		初中思维导图资料10号群：239025868

初中年级群		初一作业互助：807721366
		初一学霸交流：589250119
		初二作业互助：797715127
		初二学霸交流：801287145
		初三作业互助：796134837
		初三学霸交流：796289129
初中全科笔记	500人	初中学霸笔记共享群：902911824（学霸笔记）
		初中学霸笔记共享2号群：949431837
		初中学霸笔记共享3号群：949446762
		初中学霸笔记共享4号群：949448923
		初中学霸笔记共享5号群：816292337
		初中学霸笔记共享6号群：823216136
		初中学霸笔记共享7号群：914816659
		初中学霸笔记共享8号群：723445397
		初中学霸笔记共享9号群：621812588
		初中学霸笔记共享10号群：822403413
初中错题本	500人	初中错题本共享群：871974102
		初中错题本共享2号群：949496783
		初中错题本共享3号群：954185281
		初中错题本共享4号群：954192722
		初中错题本共享5号群：949501147
		初中错题本共享6号群：293558401
		初中错题本共享7号群：868869174
		初中错题本共享8号群：954192039
		初中错题本共享9号群：868558579
		初中错题本共享10号群：954195777
	千人群	衡水中学初中资料群：456879477
		浙江科学资料群：734960229
		青少年生理健康资料群：337212628

（4）高中群
文末另有34省中考群、名校群

高中数学	千人群	**全国高中数学教师群：247360252（教师教研）**
	2000人	**全国高中数学交流群：536036395（教师、学生、家长）**
	千人群	高中数学资料群：817499651
		高中数学资料2号群：285912852
		高中数学资料3号群：261523857
		高中数学资料4号群：284265896
		高中数学资料5号群：678286620
		高中数学资料6号群：822541220
		高中数学资料7号群：835636255
		高中数学资料8号群：903581094

		高中数学资料9号群：903513202
		高中数学资料10号群：730021745
高中数学		高中数学资料11号群：225177384
		高中数学资料12号群：727771557
		高中数学资料13号群：975135149
		高中数学资料14号群：975136234
		高中数学资料15号群：975136092
		高中数学资料16号群：975133785
		高中数学资料17号群：975135852
		高中数学资料18号群：975134556
		高中数学资料19号群：975151101
		高中数学资料20号群：975153464
		高中数学资料21号群：957784628
		高中数学资料22号群：180344546
		高中数学资料23号群：376848455
		高中数学资料24号群：957815378
		高中数学资料25号群：957807472
		高中数学资料26号群：957829856
		高中数学资料27号群：926935462
		高中数学资料28号群：958374897
		高中数学资料29号群：958652321
		高中数学资料30号群：910760136
高考数学复习		高考数学复习资料群：643741842（复习交流）
		高考数学复习资料2号群：740952744
		高考数学复习资料3号群：486609053
		高考数学复习资料4号群：766544069
		高考数学复习资料5号群：767278621
		高考数学复习资料6号群：683441847
		高考数学复习资料7号群：727668862
		高考数学复习资料8号群：628953896
		高考数学复习资料9号群：769355242
		高考数学复习资料10号群：463434879
		高考数学复习资料11号群：770691960
		高考数学复习资料12号群：793927151
		高考数学复习资料13号群：785111989
		高考数学复习资料14号群：415254733
		高考数学复习资料15号群：706970142
		高考数学复习资料16号群：797539626
		高考数学复习资料17号群：237998947
		高考数学复习资料18号群：797858874
		高考数学复习资料19号群：656852437
		高考数学复习资料20号群：456672477
高中	千人群	全国高中奥数教练群195949359（竞赛教练）

奥数	2000人	全国高中奥数学生群：591782992（竞赛）
	2000人	高中奥数资料群：835403229（竞赛）
		高中奥数资料2号群：739579262
		高中奥数资料3号群：618430141
		高中奥数资料4号群：721077470
		高中奥数资料5号群：758824914
		高中奥数资料6号群：762388622
		高中奥数资料7号群：755346876
		高中奥数资料8号群：413817589
		高中奥数资料9号群：274518944
		高中奥数资料10号群：731498513
		数论交流群：811287178
		组合交流群：323846406
		竞赛几何交流群：280756008
		全国数学教研组长交流：180220760（教学管理）
		英文版数学资料群：464201307（小学+中学+大学）
		高中文科数学资料群：731160321
高中数学专题	专题	集合专题资料共享群：680090124（专题群）
		初等函数资料群：290542437
		三角函数专题资料群：813618417（专题群）
		平面向量资料群：637012284（专题群）
		数列专题资料群：834165021（专题群）
		不等式资料共享群：435566829（专题群）
		复数专题资料群：619301302
		排列组合专题资料群：731541434
		命题逻辑专题资料群：684345568
		统计概率专题资料群：675682816
		算法程序框图资料群：759403420
		圆锥曲线资料共享群：707048685（专题群）
		导数专题资料群：831359777（专题群）
		立体几何专题资料群：884052994（专题群）
		高中新定义题资料群：751365702
高考数学压轴题	500人	高考数学压轴题交流群：696716455（压轴题）
		高考数学压轴题资料2号群：914189649
		高考数学压轴题资料3号群：718033224
		高考数学压轴题资料4号群：914211027
		高考数学压轴题资料5号群：912130555
		高考数学压轴题资料6号群：296035220
		高考数学压轴题资料7号群：912127595
		高考数学压轴题资料8号群：912109675
		高考数学压轴题资料9号群：794834050
		高考数学压轴题资料10号群：912131341
		数学竞赛备用资料群:749365565

高中数学秒杀方法	千人群	高中数学秒杀方法群：805983634
		高中数学秒杀方法2号群：873130177
		高中数学秒杀方法3号群：677837127
		高中数学秒杀方法4号群：882586664
		高中数学秒杀方法5号群：493331421
		高中数学秒杀方法6号群：692780928
		高中数学秒杀方法7号群：493061371
		高中数学秒杀方法8号群：574017658
		高中数学秒杀方法9号群：692367312
		高中数学秒杀方法10号群：682422334
高中物理	500人	全国高中物理教师群：631426780（教师教研）
	500人	全国高中物理学生群：708853741（教师、学生、家长）
		高中物理资料群：583865715
		高中物理资料2号群：874389774
		高中物理资料3号群：874017852
		高中物理资料4号群：758234148
		高中物理资料5号群：874213150
		高中物理资料6号群：787924789
		高中物理资料7号群：904226032
		高中物理资料8号群：904210945
		高中物理资料9号群：874919051
		高中物理资料10号群：904632567
高考物理复习		高考物理复习资料群：775668996
		高考物理复习资料2号群：775123891
		高考物理复习资料3号群：775041971
		高考物理复习资料4号群：773198552
		高考物理复习资料5号群：772011343
		高考物理复习资料6号群：774332121
		高考物理复习资料7号群：684733865
		高考物理复习资料8号群：697917587
		高考物理复习资料9号群：776537531
		高考物理复习资料10号群：766740162
		高考物理复习资料11号群：778332551
		高考物理复习资料12号群：779366704
		高考物理复习资料13号群：780332109
		高考物理复习资料14号群：779715042
		高考物理复习资料15号群：779181621
		高考物理复习资料16号群：780489597
		高考物理复习资料17号群：781612042
		高考物理复习资料18号群：723863846
		高考物理复习资料19号群：784369946
		高考物理复习资料20号群：772159084
高考		高考物理压轴题资料群：915253730（压轴题交流）

物理压轴题		高考物理压轴题资料2号群：232058978
		高考物理压轴题资料3号群：915245955
		高考物理压轴题资料4号群：915245111
		高考物理压轴题资料5号群：857783385
		高考物理压轴题资料6号群：915250498
		高考物理压轴题资料7号群：205160931
		高考物理压轴题资料8号群：914175406
		高考物理压轴题资料9号群：914245785
		高考物理压轴题资料10号群：913167211
高中物理秒杀方法	500人	高中物理秒杀方法群：876437426
		高中物理秒杀方法2号群：892610136
		高中物理秒杀方法3号群：134871447
		高中物理秒杀方法4号群：892279263
		高中物理秒杀方法5号群：892251678
		高中物理秒杀方法6号群：878250640
		高中物理秒杀方法7号群：892536654
		高中物理秒杀方法8号群：443137746
		高中物理秒杀方法9号群：777281404
		高中物理秒杀方法10号群：893743689
高中物理竞赛	千人群	**高中物理竞赛教练群：271751860（竞赛教练）**
	千人群	**高中物理竞赛学生群：271733226（竞赛）**
		高中物理竞赛资料群：746292463（竞赛）
		高中物理竞赛资料2号群：470033945
		高中物理竞赛资料3号群：809896017
		高中物理竞赛资料4号群：913856791
		高中物理竞赛资料5号群：858975673
		高中物理竞赛资料6号群：904436338
		高中物理竞赛资料7号群：913884179
		高中物理竞赛资料8号群：913888836
		高中物理竞赛资料9号群：910717993
		高中物理竞赛资料10号群：913887297
		物理竞赛备用群：901620379
		英文版物理资料群：902231804（中学+大学）
高中化学	2000人	**全国高中化学教师群:5139062（教师教研）**
	千人群	高中化学交流群：894534041（教师、学生、家长）
		高中化学资料群：765959464
		高中化学资料2号群：808971669
		高中化学资料3号群：570748542
		高中化学资料4号群：693122167
		高中化学资料5号群：570284750
		高中化学资料6号群：913827632
		高中化学资料7号群：913831585
		高中化学资料8号群：714727428

		高中化学资料9号群：910638911
		高中化学资料10号群：469611471
高考化学复习		高考化学复习资料群：620501360（复习交流）
		高考化学复习资料2号群：477128202
		高考化学复习资料3号群：723793682
		高考化学复习资料4号群：723771428
		高考化学复习资料5号群：783640330
		高考化学复习资料6号群：723653458
		高考化学复习资料7号群：786228589
		高考化学复习资料8号群：786033277
		高考化学复习资料9号群：739989958
		高考化学复习资料10号群：739765730
		高考化学复习资料11号群：464863991
		高考化学复习资料12号群：791296255
		高考化学复习资料13号群：342327928
		高考化学复习资料14号群：791101080
		高考化学复习资料15号群：792271021
		高考化学复习资料16号群：649313724
		高考化学复习资料17号群：784446723
		高考化学复习资料18号群：792501804
		高考化学复习资料19号群：793233528
		高考化学复习资料20号群：477057531
高考化学压轴题		高考化学压轴题资料群：810366448（压轴题交流）
		高考化学压轴题资料2号群：914666008
		高考化学压轴题资料3号群：929756362
		高考化学压轴题资料4号群：834355864
		高考化学压轴题资料5号群：930700745
		高考化学压轴题资料6号群：915424336
		高考化学压轴题资料7号群：915412374
		高考化学压轴题资料8号群：138457897
		高考化学压轴题资料9号群：931812559
		高考化学压轴题资料10号群：914279634
	500人	高中化学秒杀方法群：878531734
		高中化学秒杀方法2号群：878504163
		高中化学秒杀方法3号群：244729224
		高中化学秒杀方法4号群：895046671
		高中化学秒杀方法5号群：895026186
		高中化学秒杀方法6号群：879610837
		高中化学秒杀方法7号群：653226844
		高中化学秒杀方法8号群：758253523
		高中化学秒杀方法9号群：244196651
		高中化学秒杀方法10号群：895296698
高中	2000人	高中化学竞赛教练群：271751511（竞赛教练）

化学竞赛	千人群	高中化学竞赛学生群：168730781
		高中化学竞赛资料群：762556126
		高中化学竞赛资料2号群：910654925
		高中化学竞赛资料3号群：913833700
		高中化学竞赛资料4号群：822743669
		高中化学竞赛资料5号群：910662350
		高中化学竞赛资料6号群：822016661
		高中化学竞赛资料7号群：910667085
		高中化学竞赛资料8号群：392532457
		高中化学竞赛资料9号群：340292855
		高中化学竞赛资料10号群：778202971
高中生物	千人群	全国高中生物教师群：628540619（教师教研）
		高中生物交流群：779709240（教师、学生、家长）
		高中生物资料群：799532677
		高中生物资料2号群：104129903
		高中生物资料3号群：192726796
		高中生物资料4号群：784636701
		高中生物资料5号群：668906588
		高中生物资料6号群：498599960
		高中生物资料7号群：751490312
		高中生物资料8号群：751387230
		高中生物资料9号群：750330568
		高中生物资料10号群：741239696
高考生物复习		高考生物复习资料群：794584289（复习交流）
		高考生物复习资料2号群：237622097
		高考生物复习资料3号群656731938：
		高考生物复习资料4号群：225112805
		高考生物复习资料5号群：799199007
		高考生物复习资料6号群：695853490
		高考生物复习资料7号群：373212507
		高考生物复习资料8号群：799738696
		高考生物复习资料9号群：801035050
		高考生物复习资料10号群：801596925
		高考生物复习资料11号群：801564313
		高考生物复习资料12号群：645461426
		高考生物复习资料13号群：645101798
		高考生物复习资料14号群：806215290
		高考生物复习资料15号群：806408381
		高考生物复习资料16号群：806332586
		高考生物复习资料17号群：808646360
		高考生物复习资料18号群：808182078
		高考生物复习资料19号群：801512209
		高考生物复习资料20号群：809805324

高考生物压轴题		高考生物压轴题资料群：936021882（压轴题交流）
		高考生物压轴题资料2号群：716531365
		高考生物压轴题资料3号群：727368246
		高考生物压轴题资料4号群：714850024
		高考生物压轴题资料5号群：830539510
		高考生物压轴题资料6号群：177976245
		高考生物压轴题资料7号群：908012432
		高考生物压轴题资料8号群：476444210
		高考生物压轴题资料9号群：811699739
		高考生物压轴题资料10号群：642042256
高中生物竞赛	千人群	**全国高中生物竞赛教练群：254139830（竞赛）**
	千人群	高中生物竞赛学生群：271753479（教师、学生、家长）
		高中生物竞赛资料群：837638476
		高中生物竞赛资料2号群：940473069
		高中生物竞赛资料3号群：913899396
		高中生物竞赛资料4号群：866636620
		高中生物竞赛资料5号群：910725742
		高中生物竞赛资料6号群：696296832
		高中生物竞赛资料7号群：854108118
		高中生物竞赛资料8号群：913918390
		高中生物竞赛资料9号群：369691871
		高中生物竞赛资料10号群：545010870
高中信息竞赛	500人	全国信息竞赛教练群：281798334（竞赛教练）
		全国信息竞赛学生群：718253390
		信息竞赛NOIP资料群：364337437
高中英语	千人群	全国高中英语教师群：962318986（教师教研）
		全国高中英语学生群：749769773（教师、学生、家长）
	500人	全国高中英语资料群：756185855
		高中英语资料2号群：904374979
		高中英语资料3号群：875018444
		高中英语资料4号群：904694419
		高中英语资料5号群：665744509
		高中英语资料6号群：861994221
		高中英语资料7号群：620629643
		高中英语资料8号群：757795198
		高中英语资料9号群：757276249
		高中英语资料10号群：757719324
高考英语复习		高考英语复习资料群：680935786
		高考英语复习资料2号群：550803368
		高考英语复习资料3号群：815733915
		高考英语复习资料4号群：550704107
		高考英语复习资料5号群：130446837
		高考英语复习资料6号群：816480507

		高考英语复习资料7号群：805221685
		高考英语复习资料8号群：816345240
		高考英语复习资料9号群：700907814
		高考英语复习资料10号群：581390709
		高考英语复习资料11号群：684837493
		高考英语复习资料12号群：176942144
		高考英语复习资料13号群：176873941
		高考英语复习资料14号群：805751959
		高考英语复习资料15号群：176627749
		高考英语复习资料16号群：805430466
		高考英语复习资料17号群：293812737
		高考英语复习资料18号群：806531633
		高考英语复习资料19号群：309692140
		高考英语复习资料20号群：809089610
	2000人	**全国英语口语交流群：168570356**
		高中英语口语资料群：642210359
		全国初高中英语竞赛群：271750414
		高中英语听力mp3资源群：198781206
高中地理	500人	全国高中地理教师群：271753054（教师教研）
		高中地理交流群：811827999（教师、学生、家长）
		高中地理资料群：784458569
		高中地理资料2号群：799869418
		高中地理资料3号群：554574013
		高中地理资料4号群：913766384
		高中地理资料5号群：913758983
		高中地理资料6号群：839621995
		高中地理资料7号群：837093107
		高中地理资料8号群：736833556
		高中地理资料9号群：908973849
		高中地理资料10号群：913804067
高考地理复习		高考地理复习资料群：809699962（复习交流）
		高考地理复习资料2号群：737848239
		高考地理复习资料3号群：805363455
		高考地理复习资料4号群：738410243
		高考地理复习资料5号群：739720045
		高考地理复习资料6号群：743112839
		高考地理复习资料7号群：794510606
		高考地理复习资料8号群：754358753
		高考地理复习资料9号群：788253064
		高考地理复习资料10号群：788268952
		高考地理复习资料11号群：781761656
		高考地理复习资料12号群：781048200
		高考地理复习资料13号群：781053880

		高考地理复习资料14号群：778092465
		高考地理复习资料15号群：777177907
		高考地理复习资料16号群：767766215
		高考地理复习资料17号群：772019831
		高考地理复习资料18号群：759426130
		高考地理复习资料19号群：754935431
		高考地理复习资料20号群：795068467
高中历史	500人	全国高中历史教师群：271753829（教师教研）
		高中历史交流群：276804574（教师、学生、家长）
		高中历史资料群：614273822
		高中历史资料2号群：789541593
		高中历史资料3号群：913732546
		高中历史资料4号群：176504855
		高中历史资料5号群：913738257
		高中历史资料6号群：913740560
		高中历史资料7号群：484960096
		高中历史资料8号群：913739282
		高中历史资料9号群：913744583
		高中历史资料10号群：484119860
高考历史复习		高考历史复习资料群：795537538（复习交流）
		高考历史复习资料2号群：751729567
		高考历史复习资料3号群：570924076
		高考历史复习资料4号群：526467083
		高考历史复习资料5号群：512180313
		高考历史复习资料6号群：293543091
		高考历史复习资料7号群：749206845
		高考历史复习资料8号群：292039169
		高考历史复习资料9号群：749117258
		高考历史复习资料10号群：749367816
		高考历史复习资料11号群：751776924
		高考历史复习资料12号群：756151799
		高考历史复习资料13号群：751794478
		高考历史复习资料14号群：747047018
		高考历史复习资料15号群：777193556
		高考历史复习资料16号群：772356407
		高考历史复习资料17号群：759797264
		高考历史复习资料18号群：777923283
		高考历史复习资料19号群：778144148
		高考历史复习资料20号群：796580017
高中政治	500人	全国高中政治教师群：261712470（教师教研）
		高中政治交流群：908431714（教师、学生、家长）
		高中政治资料群：799712577
		高中政治资料2号群：658959685

		高中政治资料3号群：370216282
		高中政治资料4号群：495728067
		高中政治资料5号群：913660339
		高中政治资料6号群：739650458
		高中政治资料7号群：913681488
		高中政治资料8号群：913666257
		高中政治资料9号群：728468619
		高中政治资料10号群：783952176
高考政治复习		高考政治复习资料群：815233321（复习交流）
		高考政治复习资料2号群：751270614
		高考政治复习资料3号群：777912096
		高考政治复习资料4号群：779893713
		高考政治复习资料5号群：780031131
		高考政治复习资料6号群：781084860
		高考政治复习资料7号群：781087759
		高考政治复习资料8号群：781092138
		高考政治复习资料9号群：781381903
		高考政治复习资料10号群：778336896
		高考政治复习资料11号群：782255922
		高考政治复习资料12号群：785909866
		高考政治复习资料13号群：782159901
		高考政治复习资料14号群：785926459
		高考政治复习资料15号群：778644224
		高考政治复习资料16号群：789808699
		高考政治复习资料17号群：777906417
		高考政治复习资料18号群：792569603
		高考政治复习资料19号群：751833020
		高考政治复习资料20号群：815200701
高中语文	500人	全国高中语文教师群：814954399（教师教研）
		高中语文交流群：883298350（教师、学生、家长）
		高中语文资料群：882123500
		高中语文资料2号群：635901048
		高中语文资料3号群：879029440
		高中语文资料4号群：868229241
		高中语文资料5号群：868170060
		高中语文资料6号群：869104138
		高中语文资料7号群：861041630
		高中语文资料8号群：860728971
		高中语文资料9号群：871369861
		高中语文资料10号群：581984342
高考语文复习		高考语文复习资料群：799502887（复习交流）
		高考语文复习资料2号群：758718137
		高考语文复习资料3号群：758172925

		高考语文复习资料4号群：759312682
		高考语文复习资料5号群：759140617
		高考语文复习资料6号群：763184991
		高考语文复习资料7号群：197909884
		高考语文复习资料8号群：704919080
		高考语文复习资料9号群：493549850
		高考语文复习资料10号群：758726128
		高考语文复习资料11号群：141870175
		高考语文复习资料12号群：760294352
		高考语文复习资料13号群：733825359
		高考语文复习资料14号群：798733869
		高考语文复习资料15号群：734487529
		高考语文复习资料16号群：799841941
		高考语文复习资料17号群：799838640
		高考语文复习资料18号群：798887305
		高考语文复习资料19号群：801037653
		高考语文复习资料20号群：801023249
高中全科笔记	500人	高中学霸笔记共享群：901323239（学霸笔记）
		高中学霸笔记共享2号群：828138090
		高中学霸笔记共享3号群：906959782
		高中学霸笔记共享4号群：949405613
		高中学霸笔记共享5号群：954113681
		高中学霸笔记共享6号群：954120375
		高中学霸笔记共享7号群：672180379
		高中学霸笔记共享8号群：760966265
		高中学霸笔记共享9号群：895307747
		高中学霸笔记共享10号群：949413119
高中全科错题本	500人	高中错题本共享群：740103814（全科）
		高中错题本共享2号群：855642214
		高中错题本共享3号群：913150507
		高中错题本共享4号群：818524603
		高中错题本共享5号群：954152976
		高中错题本共享6号群：949460666
		高中错题本共享7号群：954152723
		高中错题本共享8号群：254120029
		高中错题本共享9号群：949465261
		高中错题本共享10号群：519134284
高中全科资料	2000人	**高中资料群：271752763（全科旗舰群）**
		高中资料2号群：680662798
		高中资料3号群：548054809
		高中资料4号群：733069285
		高中资料5号群：811533696
		高中资料6号群：537053746

		高中资料7号群：587360473
		高中资料8号群：838445682
		高中资料9号群：838166980
		高中资料10号群：837253047
		高中资料11号群：589405360
		高中资料12号群：910476037
		高中资料13号群：732608457
		高中资料14号群：634352018
		高中资料15号群：732293546
		高中资料16号群：908838629
		高中资料17号群：891874060
		高中资料18号群：903841994
		高中资料19号群：907256986
		高中资料20号群：933122149
高考全科复习	两千人	**高考复习资料群：739709358（高考复习交流旗舰群）**
		高考复习资料2号群：576582088
		高考复习资料3号群：433503147
		高考复习资料4号群：739160734
		高考复习资料5号群：641469666
		高考复习资料6号群：742244234
		高考复习资料7号群：641325731
		高考复习资料8号群：742646190
		高考复习资料9号群：742555834
		高考复习资料10号群：565146106
		高考复习资料11号群：743282822
		高考复习资料12号群：642213875
		高考复习资料13号群：745485749
		高考复习资料14号群：707917013
		高考复习资料15号群：363118735
		高考复习资料16号群：148986476
		高考复习资料17号群：722249480
		高考复习资料18号群：755534522
		高考复习资料19号群：707484352
		高考复习资料20号群：710622674
会考		小高考会考资料群：945593875
		高中会考资料2号群：811768131
		高中会考资料3号群：828169340
		高中会考资料4号群：825816207
		高中会考资料5号群：816942291
		高中会考资料6号群：816087440
		高中会考资料7号群：816084209
		高中会考资料8号群：815914384
		高中会考资料9号群：815592339

		高中会考资料10号群：814108574
成人高考		成人高考资料群：689686109
		成人高考资料2号群：814164894
		成人高考资料3号群：832721783
		成人高考资料4号群：832495893
		成人高考资料5号群：823830779
		成人高考资料6号群：818790448
		成人高考资料7号群：816302669
		成人高考资料8号群：816249283
		成人高考资料9号群：815777586
		成人高考资料10号群：809080255
自招	500人	全国大学自主招生群：336746900
		全国大学自主招生2号群：590548148
	500人	全国少年班考试资料群：700120188
高中思维导图	500人	高中思维导图共享群：748246425（思维导图）
		高中思维导图资料2号群：912073823
		高中思维导图资料3号群：914177878
		高中思维导图资料4号群：914177618
		高中思维导图资料5号群：684546029
		高中思维导图资料6号群：912068600
		高中思维导图资料7号群：539081963
		高中思维导图资料8号群：621805810
		高中思维导图资料9号群：914187574
		高中思维导图资料10号群：914190484
		全国艺考交流群：796720832
高中年级群		高一作业互助：737392021
		高一学霸交流：678085196
		高二作业互助：750784353
		高二学霸交流：231789403
		高三作业互助：793328736
		高三学霸交流：635974666
		高考复读交流群：786449704
		高考填志愿交流群：790594415
加盟群		清华大学·高考群：599465497
		青少年生理健康资料群：337212628

（5）大学群
文末另有34省份的名校群

大学数学	千人群	大学数学交流群：702457289
		大学数学资料2号群：792122928
		大学数学资料3号群：792074225

		大学数学资料4号群：792611362
		大学数学资料5号群：793237078
		大学数学资料6号群：769547921
		大学数学资料7号群：913135810
		大学数学资料8号群：773845462
		大学数学资料9号群：908760042
		大学数学资料10号群：769456021
		考研数学交流群：515772622
		英文版数学资料群：464201307（小学+中学+大学）
大学物理	500人	大学物理资料群：718011655
		大学物理资料2号群：687509116
		大学物理资料3号群：810678987
		大学物理资料4号群：792690660
		大学物理资料5号群：745989931
		大学物理资料6号群：863587530
		大学物理资料7号群：720576982
		大学物理资料8号群：773174098
		大学物理资料9号群：913443411
		大学物理资料10号群：913307457
		英文版物理资料群：902231804（中学+大学）
大学化学	500人	大学化学资料群：691761499
		大学化学资料2号群：745528014
		大学化学资料3号群：596060504
		大学化学资料4号群：512408157
		大学化学资料5号群：512327353
		大学化学资料6号群：326814968
		大学化学资料7号群：731694382
		大学化学资料8号群：614274683
		大学化学资料9号群：238013022
		大学化学资料10号群：658908644
大学生物		大学生物资料群：734414430
		大学生物资料2号群：512244348
		大学生物资料3号群：576533617
		大学生物资料4号群：633712358
		大学生物资料5号群：859813719
		大学生物资料6号群：123990948
		大学生物资料7号群：878754107
		大学生物资料8号群：790494562
		大学生物资料9号群：913632368
		大学生物资料10号群：913881364
大学英语		大学英语资料群：913489644
		大学英语资料2号群：871194257
		大学英语资料3号群：783299680

		大学英语资料4号群：914409874
		大学英语资料5号群：914221493
		大学英语资料6号群：698317967
		大学英语资料7号群：914541702
		大学英语资料8号群：914693616
		大学英语资料9号群：913618445
		大学英语资料10号群：913574938
	500人	全国四六级考试交流群：230206513
		大学英语听力mp3资源群：716375365
	2000人	**全国英语口语交流群：168570356**
		雅思考试资料群：592303082
		托福考试资料群：543339379
		考研英语交流群：647150689
大学语文		大学语文资料群：726965320
		大学语文资料2号群：793831531
		大学语文资料3号群：913665578
		大学语文资料4号群：726624140
		大学语文资料5号群：873848897
		大学语文资料6号群：726118843
		大学语文资料7号群：853756754
		大学语文资料8号群：853506786
		大学语文资料9号群：914805030
		大学语文资料10号群：913696776
大学政治		大学政治资料群：913790284（交流进这个群）
		大学政治资料2号群：913789196
		大学政治资料3号群：914941504
		大学政治资料4号群：792433171
		大学政治资料5号群：824487185
		大学政治资料6号群：316791590
		大学政治资料7号群：792179282
		大学政治资料8号群：794814119
		大学政治资料9号群：913935964
		大学政治资料10号群：860761217
		考研政治交流群：667517838
大学历史		大学历史资料群：915113892
		大学历史资料2号群：680735737
		大学历史资料3号群：154196404
		大学历史资料4号群：775781594
		大学历史资料5号群：913981871
		大学历史资料6号群：814101799
		大学历史资料7号群：706423585
		大学历史资料8号群：775364415
		大学历史资料9号群：228544971

		大学历史资料10号群：347418762
大学地理		大学地理资料群：838557356（交流到这个群）
		大学地理资料2号群：196583011
		大学地理资料3号群：196122007
		大学地理资料4号群：650831200
		大学地理资料5号群：915136208
		大学地理资料6号群：586810992
		大学地理资料7号群：902545425
		大学地理资料8号群：696431395
		大学地理资料9号群：902120849
		大学地理资料10号群：914029099
		考研全科交流群:638830693
		全国大学班干部交流群：796301429
大学全科		大学资料群：642838907（整个大学全部学科备用群）
		大学资料2号群：868430820
		大学资料3号群：694181534
		大学资料4号群：569659932
		大学资料5号群：859188612
		大学期末复习资料群：958444817
大学全科笔记		大学学霸笔记共享群：949358567（学霸笔记）
		大学学霸笔记2号群：589042543
		大学学霸笔记3号群：864427071
		大学学霸笔记4号群：864294522
		大学学霸笔记5号群：954207349
		大学学霸笔记6号群：864076472
		大学学霸笔记7号群：949532381
		大学学霸笔记8号群：628431637
		大学学霸笔记9号群：949537898
		大学学霸笔记10号群：949537560
大学思维导图		大学思维导图共享群：936107849
		大学思维导图资料2号群：686825978
		大学思维导图资料3号群：914154613
		大学思维导图资料4号群：706870427
		大学思维导图资料5号群：776236282
		大学思维导图资料6号群：914162674
		大学思维导图资料7号群：133171079
		大学思维导图资料8号群：914171954
		大学思维导图资料9号群：912062601
		大学思维导图资料10号群：462220178
		大学作业互助群：806534965
考研专业交流群		数学专业考研群：784688983
		英语专业考研群：680571248
		政治专业考研群：784878607

	林业和园林专业考研群：788235044
	计算机专业考研群：778390222
	法学专业考研群：577028115
	经济学专业考研群：296027296
	管理学专业考研群：527118224
	微电子专业考研群：786892326
	电路专业考研群：684689884
	信号与系统专业考研群：712339557
	机械原理专业考研群：823786987
	电磁场微波天线专业考研群：769642633
	高代数分概率论专业考研群：833325296
	艺术专业考研群：594959776
	教育学专业考研群：782983295
	文学专业考研群：881932102
考研专业交流群	历史学专业考研群：879071568
	理学专业考研群：878267285
	农学专业考研群：709405042
	医学专业考研群：812924591
	军事学专业考研群：718750717
	力学专业考研群：585956207
	机械工程专业考研群：754740221
	光学工程专业考研群：768198418
	仪器科学与技术考研群：769039440
	材料科学与工程专业考研群：346590341
	冶金工程专业考研群：772863936
	动力工程及工程热物理专业考研群：419796300
	电气工程专业考研群：774736548
	电子科学与技术专业考研群：606925744
	通信与信息工程专业考研群：776222054
	控制科学与工程专业考研群：903872678
	计算机科学与技术专业考研群：778447639
	建筑学专业考研群：893322036
	土木工程专业考研群：893385190
考研专业交流群	水利工程专业考研群：892049729
	测绘科学与技术专业考研群：881505937
	化学工程与技术专业考研群：781016261
	地质资源与地质工程专业考研群：623130074
	矿业工程专业考研群：557694864
	石油与天然气工程专业考研群：729211530
	纺织科学与工程专业考研群：544298150
	轻工技术与工程专业考研群：765635437
	交通运输工程专业考研群：782236007
	船舶与海洋工程专业考研群：784541488

		航空宇航科学与技术专业考研群：785670309
		兵器科学与技术专业考研群：582970885
		核科学与技术专业考研群：786875060
		农业工程专业考研群：751462370
		林业工程专业考研群：719324543
		环境科学与工程专业考研群：685729204
		生物医学工程专业考研群：535800360
		食品科学与工程专业考研群：735354184
		城乡规划学专业考研群：612982804
		会计学专业考研群：626623252
		二战考研交流群：457432446

（6）成人教育、工作党、脑力交流、娱乐群、兼职群、交友群

成人已工作		成人英语资料群：481411023
		教师资格证考试资料群：723051564
		职业认证考试资料群：421367018
		专升本资料共享群：692679648
		MBA考试资料群：768740908
脑力	500人	全国心算交流群：131033273
	500人	右脑记忆交流群：851756794
		智力题逻辑推理群：797849111
		全国数独交流群：721940315
		全国魔方交流群：670402257
		迷宫题交流群：851912894
		象棋交流及棋谱群：787043797
		国际象棋交流及棋谱共享群：305426091
		围棋交流群：775750147
		军棋交流群：790756059
		五子棋交流群：483020148
		飞行棋交流群：165578104
		斗兽棋交流群：483700528
		跳棋交流群：293058459
		黑白棋交流群：785360920
		斗地主交流群：776368544
		麻将交流群：774545719
		梭哈交流群：165774665
	2000人	全国英语口语交流群：168570356
	500人	小语种学习资料共享群：709122040
		语文文学交流群：132934369
		书法交流群：454802827
		公务员考试资料群：867450215

		职业认证考试资料群：421367018
交友娱乐		扩列互赞群：257129213
		互赞互粉互评互刷人气群：784848348
		全国高个子群：867280413
		厦门高个交友群：652129855
		抖音网红交流群：689061832
		全国追星族交流群：487788044
		小说共享群：470359039
兼职	2000人	厦门教师家教招聘群：186883776
	500人	厦门大学生兼职群：373402065
		厦门理工家教群：830471586
		集美大学家教群：788123837
		华侨大学厦门家教群：437148310
		厦门大学家教群：815894707
		厦门模特、礼仪、网红、主播通告群：271737357
		厦门模特礼仪2号群：230257834
		做兼职送网课任务群：467634656
		新东方学而思笔试面试群：423314878
		全国培训行业交流群：856350498
		全国销售顾问交流群：782986592
		全国餐饮行业交流群：271749943
		全国主播及入行交流群：598099045
		全国体育锻炼健身资料群：797166256
		减肥瘦身资料群：905876966

（7）其他类别资料群9个（内测中）

教材课本免费共享群：313854161（小学到大学的全部学科）
教材讲义的目录共享群：143874383
北师大版资料群：614283238
鲁科版资料共享群：618463102
苏教版资料共享群：622355604
浙教版资料共享群：625141588
湘教版资料共享群：632362407
粤教版资料共享群：559661969
外研版资料共享群：885768283

兴趣		数学资料群：946269521（不分年级，适合兴趣党）
		英语资料群：941021230（不分年级，适合兴趣党）
		物理资料群：640743853（不分年级，适合兴趣党）
		化学资料群：569356234（不分年级，适合兴趣党）
		生物资料群：605570632（不分年级，适合兴趣党）
		语文资料群：845114830（不分年级，适合兴趣党）
		地理资料群：653590494（不分年级，适合兴趣党）
		历史资料群：653532523（不分年级，适合兴趣党）

		政治资料群：720587198（不分年级，适合兴趣党）

（8）34省份中考群、高考群、中学群、大学新生群、本科学习群、考研群（以下省份按首字母排序）

34省份的群安徽		【安徽】
		安徽中考群：781526142
		安徽高考群：857468054
		毛坦厂复读资料群：784658266
		合肥一中资料共享群：242876325
		合肥168中学资料共享群：858459100
		六安一中资料共享群：860270668
		安师大附中资料共享群：709186909
		马鞍山二中资料共享群：823281527
		安庆一中资料共享群：821113558
		合肥八中资料共享群：822287556
		淮北一中资料共享群：823692096
		芜湖一中资料共享群：862273465
		铜陵一中资料共享群：823575395
		【澳门的群】
		澳门中考群：160465119
		澳门高考群：208132913
34省份的群福建		【福建省的群】小学+初中+高中+大学
		厦门数学教师交流群：259652195（小学初中高中）
		福建数学奥林匹克交流：2174336（小学初中高中）
		厦门小升初奥数交流群：141476835
		厦门中小学奥数交流群：85750819
		厦门奥数杯赛联赛交流：248700448
		厦门数学杯赛兴趣群：271727432
		厦门新东方奥数交流群：271749810
		厦门学而思奥数交流群：271738644
		福建中考群：451696837
		厦门中考资料群：894445052
		福建高考群：870964298
		厦门高考资料群：133472524
	500人	福建高中数学联赛交流：281202811（竞赛）
		福州一中资料共享群：937070058
		福建师大附中资料群：833873980
		莆田一中资料共享群：426898501
		仙游一中资料共享群：913918732
		泉州五中资料共享群：937076958
34省份	500人	厦门一中资料共享群：733852835

的群福建	500人	厦门双十资料共享群：741685177
	500人	厦门外国语资料共享群：849014346
		漳州一中资料共享群：545978938
		龙岩一中资料共享群：545978938
		三明二中资料共享群：736026794
		南平一中资料共享群：937100653
		福安一中资料共享群：872819680
	厦大	厦门大学新生群：273556175
		厦门大学学习资料群：211975196
		厦门大学考研资料群：537388018
	福大	福州大学学习资料群：768584648
		福州大学考研资料群：644814410
	华大	华侨大学新生群：621748372
		华侨大学学习资料群：712681221
		华侨大学考研资料群：427458904
		集美大学考研资料群：656466192
		厦门理工学习资料群：772329512
		厦门理工考研资料群：776209954
34省份的群北京		【北京市的群】
		北京中考群：912841920
		北京高考群：873261736
	两千人	**北京四中资料共享群：704092170（名校旗舰群）**
		北京四中资料2号群：647506735
		北京四中资料3号群：949286208
		北京四中资料4号群：943772590
		北京四中资料5号群：943776619
		北京四中资料6号群：943773433
		北京四中资料7号群：943777514
		北京四中资料8号群：366925218
		北京四中资料9号群：943775912
		北京四中资料10号群：943780089
	千人群	人大附中资料共享群：786341210（名校、全科）
		人大附中资料2号群：949292695
		人大附中资料3号群：943785481
		人大附中资料4号群：949296980
		人大附中资料5号群：943786797
		人大附中资料6号群：943783836
		人大附中资料7号群：949300933
		人大附中资料8号群：943788667
		人大附中资料9号群：949303729
		人大附中资料10号群：949302262
34省份的群		北京十一学校资料共享群：138167251（名校、全科）
		北师大附中资料群：543254172

北京		北大附中资料共享群：390877606
	千人群	清华附中资料共享群：732394739（名校、全科）
		清华附中资料2号群：915532756
		清华附中资料3号群：915552624
		清华附中资料4号群：745744374
		清华附中资料5号群：674166290
		清华附中资料6号群：793481859
		清华附中资料7号群：941110650
		清华附中资料8号群：697262840
		清华附中资料9号群：915576739
		清华附中资料10号群：576338615
		北师大二附中资料共享群：108055645
		北京八中资料共享群：764839500
		民大附中资料共享群：369399017
		北京二中资料共享群：863792538
		北京101中学资料群：742511900
		北师大实验资料共享群：330466885
		北京八十中学资料共享群：792973360
		北京五中资料共享群：789881706
		北京景山学校资料群：711837263
		清华大学资料共享群：720693852
		北京大学资料共享群：177477085
		北京理工大学资料群：882530485
34省份的群甘肃		【甘肃省的群】
		甘肃中考群：821041284
		甘肃高考群：849239901
		西北师大附中资料群：252672665
		兰州一中资料共享群：650644398
		民乐一中资料共享群：711282921
		天水一中资料共享群：864176393
		白银十中资料共享群：364748011
		皋兰一中资料共享群：865704775
		武威一中资料共享群：467756283
		庆阳一中资料共享群：866346225
		兰州新亚中学资料群：882799929
		兰州铁路局第五中学群：904740220
		榆中县一中资料共享群：903534415
		兰州铁一中资料共享群：872104289
		兰州化工公司总校一中资料群：316645614
		甘肃酒泉中学资料群：487582870
34省份的群广东		【广东省的群】
		广东中考群：665966512
		广东高考群：674628028

		华南师大附中资料群：470483498
		东华高级中学资料群：743993648
		深圳中学资料共享群：876656305
		中山一中资料共享群：874389584
		佛山一中资料共享群：908313437
		深圳高级中学资料群：876617863
		惠州一中资料共享群：454255237
		中山市纪念中学资料群：877616582
		湛江一中资料共享群：632267660
		广州执信中学资料群：909139406
		广州六中资料共享群：876398199
34省份的群广西		【广西省的群】
		广西中考群：419683575
		广西高考群：819453630
		南宁二中资料共享群：909536537
		桂林中学资料共享群：723880225
		柳州高中资料共享群：910309275
		南宁三中资料共享群：910050287
		桂林十八中资料共享群：910214558
		柳州铁路一中资料群：781667963
		河池高中资料共享群：912113688
		广西师大附中资料群：877797221
		广西田东高级中学资料群：912430376
		百色中学资料共享群：912988216
34省份的群贵州		【贵州省的群】
		贵州中考群：922636046
		贵州高考群：136557980
		贵阳一中资料共享群：826733071
		兴义八中资料共享群：115828727
		余庆中学资料共享群：457912576
		凯里市一中资料共享群：941783454
		遵义四中资料共享群：720704262
		贵阳六中资料共享群：825864578
		都匀一中资料共享群：905513673
		贵州省天柱民族中学资料共享群：
		贵州师大附中资料群：839147253
		贵州教育学院实验中学群：751510476
		思南中学资料共享群：752057834
34省份的群		【海南省的群】
		海南中考群：826376710
		海南高考群：920982097
		海南中学资料共享群：219839916
		国兴中学资料共享群：781861235

		海师附中资料共享群：781816102
		海南二中资料共享群：781773173
		海口一中资料共享群：708982203
		海口实验中学资料群：560331768
		海南农垦中学资料群：858758563
		文昌中学资料共享群：569165621
		万宁中学资料共享群：883181776
		海南农垦加来高级中学群：921089370
34省份的群		【河北省的群】
		河北中考群：700581499
		河北高考群：921730782
	两千人	**衡水中学资料共享群：491679660（名校旗舰群）**
	两千人	**衡水中学资料2号群：810663634（名校旗舰群）**
	两千人	**衡水中学资料3号群：591993305（名校旗舰群）**
		衡水中学资料4号群：798226867
		衡水中学资料5号群：851029624
		衡水中学资料6号群：809568698
		衡水中学资料7号群：799619088
		衡水中学资料8号群：833192900
		衡水中学资料9号群：816528825
		衡水中学资料10号群：809846589
		衡水中学资料11号群：836877905
		衡水中学资料12号群：716951467
		衡水中学资料13号群：799697090
34省份的群		衡水中学资料14号群：810214986
		衡水中学资料15号群：704473248
		衡水中学资料16号群：941666341
		衡水中学资料17号群：458770039
		衡水中学资料18号群：664869132
		衡水中学资料19号群：150027942
		衡水中学资料20号群：704902229
		衡水中学资料21号群：789405488
		衡水中学资料22号群：933372129
		衡水中学资料23号群：791137904
		衡水中学资料24号群：941686246
		衡水中学资料25号群：937138990
		衡水中学资料26号群：864012640
		衡水中学资料27号群：903643455
34省份的群		衡水中学资料28号群：608052339
		衡水中学资料29号群：905286956
		衡水中学资料30号群：866529127
		衡水中学资料31号群：774123979
		衡水中学资料32号群：682295373

		衡水中学资料32号群：682295373
		衡水中学资料33号群：879660523
		衡水中学资料34号群：910869018
		衡水中学资料35号群：824544710
		衡水中学资料36号群：910885404
		衡水中学资料37号群：763807114
		衡水中学资料38号群：703345780
34省份的群		衡水中学资料39号群：703194882
		衡水中学资料40号群：714951957
		衡水中学资料41号群：714869746
		衡水中学资料42号群：780765099
		衡水中学资料43号群：473735274
		衡水中学资料44号群：498533893
		衡水中学资料45号群：498286726
		衡水中学资料46号群：910541450
		衡水中学资料47号群：489823009
		衡水中学资料48号群：700919962
		衡水中学资料49号群：913484544
		衡水中学资料50号群：892883725
		衡水中学资料51号群：811805493
		衡水中学资料52号群：910976746
		衡水中学资料53号群：673562040
34省份的群		衡水中学资料54号群：910533691
		衡水中学资料55号群：876115557
		衡水中学资料56号群：856967342
		衡水中学资料57号群：913533424
		衡水中学资料58号群：872036917
		衡水中学资料59号群：912062057
		衡水中学资料60号群：905759975
		衡水中学资料61号群：912058749
		衡水中学资料62号群：786947866
		衡水中学资料63号群：829978338
		衡水中学资料64号群：242990587
		衡水中学资料65号群：770636382
34省份的群		衡水中学资料66号群：946288724
		衡水中学资料67号群：457186219
		衡水中学资料68号群：714697687
		衡水中学资料69号群：619323301
		衡水中学资料70号群：706484851
		衡水中学资料71号群：708257458
		衡水中学资料72号群：674286978
		衡水中学资料73号群：707034868
		衡水中学资料74号群：708116032

		衡水中学资料75号群：150253088
		衡水中学资料76号群：703345099
		衡水中学资料77号群：704626095
		衡水中学资料78号群：709065777
		衡水中学资料79号群：703600858
34省份的群		衡水中学资料80号群：573990071
		衡水中学资料81号群：675855288
		衡水中学资料82号群：131899275
		衡水中学资料83号群：712487139
		衡水中学资料84号群：495357154
		衡水中学资料85号群：567400827
		衡水中学资料86号群：702906110
		衡水中学资料87号群：470681738
		衡水中学资料88号群：711287402
		衡水中学资料89号群：714165655
		衡水中学资料90号群：342866245
		衡水中学资料91号群：713798575
		衡水中学资料92号群：713525434
		衡水中学资料93号群：713742411
		衡水中学资料94号群：274640602
		衡水中学资料95号群：607222941
		衡水中学资料96号群：714744551
		衡水中学资料97号群：715545120
		衡水中学资料98号群：715318050
		衡水中学资料99号群：714673740
		衡水中学资料100号群：715599780
34省份的群		衡水中学资料101号群：942348395
		衡水中学资料102号群：915610071
		衡水中学资料103号群：825126491
		衡水中学资料104号群：943264862
		衡水中学资料105号群：945644603
		衡水中学资料106号群：932795195
		衡水中学资料107号群：915817283
		衡水中学资料108号群：915822096
		衡水中学资料109号群：910986027
		衡水中学资料110号群：722582141
		衡水中学资料111号群：915856389
		衡水中学资料112号群：915881075
		衡水中学资料113号群：784015449
		衡水中学资料114号群：700450185
		衡水中学资料115号群：915904608
34省份的群		衡水中学资料116号群：559879711
		衡水中学资料117号群：819433490

		衡水中学资料118号群：545110111
		衡水中学资料119号群：526698186
		衡水中学资料120号群：516582579
		衡水中学资料121号群：526516219
		衡水中学资料122号群：526538446
		衡水中学资料123号群：533321265
		衡水中学资料124号群：551765000
		衡水中学资料125号群：537302149
		衡水中学资料126号群：518917909
		衡水中学资料127号群：512235471
		衡水中学资料128号群：567633984
		衡水中学资料129号群：571527252
		衡水中学资料130号群：576339622
34省份的群		衡水中学资料131号群：576842206
		衡水中学资料132号群：580607152
		衡水中学资料133号群：583031936
		衡水中学资料134号群：589954349
		衡水中学资料135号群：592415797
		衡水中学资料136号群：601630733
		衡水中学资料137号群：602843555
		衡水中学资料138号群：606356786
		衡水中学资料139号群：608979830
		衡水中学资料140号群：588954781
		衡水中学资料141号群：622019127
		衡水中学资料142号群：623885193
		衡水中学资料143号群：641207231
		衡水中学资料144号群：644387728
		衡水中学资料145号群：722170645
34省份的群		衡水中学资料146号群：656811139
		衡水中学资料147号群：664027382
		衡水中学资料148号群：664117958
		衡水中学资料149号群：669247007
		衡水中学资料150号群：676744014
		衡水中学资料151号群：676885605
		衡水中学资料152号群：686780756
		衡水中学资料153号群：686765190
		衡水中学资料154号群：694698738
		衡水中学资料155号群：695957524
		衡水中学资料156号群：696451383
		衡水中学资料157号群：697169915
		衡水中学资料158号群：698987717
		衡水中学资料159号群：699138829
		衡水中学资料160号群：702047778

34省份的群		衡水中学资料161号群：702374018
		衡水中学资料162号群：702449602
		衡水中学资料163号群：703279184
		衡水中学资料164号群：703335956
		衡水中学资料165号群：703845607
		衡水中学资料166号群：704127311
		衡水中学资料167号群：705318335
		衡水中学资料168号群：706828509
		衡水中学资料169号群：708338733
		衡水中学资料170号群：721763944
		衡水中学资料171号群：276346972
		衡水中学资料172号群：824270068
		衡水中学资料173号群：276299049
		衡水中学资料174号群：831414782
		衡水中学资料175号群：858448719
34省份的群		衡水中学资料176号群：254241929
		衡水中学资料177号群：249211323
		衡水中学资料178号群：246833918
		衡水中学资料179号群：839789009
		衡水中学资料180号群：242106120
		衡水中学资料181号群：242079867
		衡水中学资料182号群：837757442
		衡水中学资料183号群：241036719
		衡水中学资料184号群：231117929
		衡水中学资料185号群：246833167
		衡水中学资料186号群：231090395
		衡水中学资料187号群：216356950
		衡水中学资料188号群：216237437
		衡水中学资料189号群：483796923
		衡水中学资料190号群：497543062
34省份的群		衡水中学资料191号群：479723909
		衡水中学资料192号群：478719860
		衡水中学资料193号群：478571410
		衡水中学资料194号群：472971506
		衡水中学资料195号群：419436782
		衡水中学资料196号群：473620472
		衡水中学资料197号群：410068009
		衡水中学资料198号群：391397893
		衡水中学资料199号群：316644482
		衡水中学资料200号群：384035213
		衡水中学资料201号群：383578614
		衡水中学资料202号群：383560421
		衡水中学资料203号群：391427776

		衡水中学资料204号群：374952466
		衡水中学资料205号群：370044917
34省份的群		衡水中学资料206号群：374955697
		衡水中学资料207号群：185344873
		衡水中学资料208号群：160285959
		衡水中学资料209号群：144212450
		衡水中学资料210号群：134675834
		衡水中学资料211号群：134671018
		衡水中学资料212号群：117411110
		衡水中学资料213号群：101905621
		衡水中学资料214号群：191246848
		衡水中学资料215号群：902504698
		衡水中学资料216号群：902504104
		衡水中学资料217号群：891827842
		衡水中学资料218号群：101838673
		衡水中学资料219号群：891789666
		衡水中学资料220号群：877731257
34省份的群		衡水中学资料221号群：877122397
		衡水中学资料222号群：864730513
		衡水中学资料223号群：891813879
		衡水中学资料224号群：241063375
		衡水中学资料225号群：858666797
		衡水中学资料226号群：754326871
		衡水中学资料227号群：861660930
		衡水中学资料228号群：756348096
		衡水中学资料229号群：258416532
		衡水中学资料230号群：831408253
		衡水中学资料231号群：258443731
		衡水中学资料232号群：767961493
		衡水中学资料233号群：767949664
		衡水中学资料234号群：772949317
		衡水中学资料235号群：276333849
34省份的群		衡水中学资料236号群：824277233
		衡水中学资料237号群：755671023
		衡水中学资料238号群：754269492
		衡水中学资料239号群：777251588
		衡水中学资料240号群：777372305
		衡水中学资料241号群：752322183
		衡水中学资料242号群：751699076
		衡水中学资料243号群：747507166
		衡水中学资料244号群：780304446
		衡水中学资料245号群：750269741
		衡水中学资料246号群：780694415

		衡水中学资料247号群：780837807
		衡水中学资料248号群：750333352
		衡水中学资料249号群：780479678
		衡水中学资料250号群：782326698
34省份的群		衡水中学资料251号群：751351124
		衡水中学资料252号群：786333368
		衡水中学资料253号群：751418962
		衡水中学资料254号群：787138442
		衡水中学资料255号群：751666864
		衡水中学资料256号群：747501134
		衡水中学资料257号群：739472349
		衡水中学资料258号群：788708417
		衡水中学资料259号群：745085550
		衡水中学资料260号群：746542607
		衡水中学资料261号群：747111967
		衡水中学资料262号群：747145420
		衡水中学资料263号群：791079554
		衡水中学资料264号群：791363748
		衡水中学资料265号群：738312001
34省份的群		衡水中学资料266号群：737477472
		衡水中学资料267号群：737372076
		衡水中学资料268号群：793197061
		衡水中学资料269号群：737483781
		衡水中学资料270号群：794607209
		衡水中学资料271号群：737981464
		衡水中学资料272号群：797139432
		衡水中学资料273号群：797693253
		衡水中学资料274号群：792886626
		衡水中学资料275号群：737020506
		衡水中学资料276号群：798625177
		衡水中学资料277号群：736712813
		衡水中学资料278号群：798642411
		衡水中学资料279号群：733856315
		衡水中学资料280号群：725681556
34省份的群		衡水中学资料281号群：799805495
		衡水中学资料282号群：733647593
		衡水中学资料283号群：799788944
		衡水中学资料284号群：734556606
		衡水中学资料285号群：296825210
		衡水中学资料286号群：801327737
		衡水中学资料287号群：478919298
		衡水中学资料288号群：436167458
		衡水中学资料289号群：805131945

		衡水中学资料290号群：478917283
		衡水中学资料291号群：805715834
		衡水中学资料292号群：478917605
		衡水中学资料293号群：806037067
		衡水中学资料294号群：806079100
		衡水中学资料295号群：818577402
34省份的群		衡水中学资料296号群：117303331
		衡水中学资料297号群：653825375
		衡水中学资料298号群：819641074
		衡水中学资料299号群：818746940
		衡水中学资料300号群：822716556
		衡水中学资料301号群：818586541
		衡水中学资料302号群：823809867
		衡水中学资料303号群：823840166
		衡水中学资料304号群：823874286
		衡水中学资料305号群：817937391
		衡水中学资料306号群：815199864
		衡水中学资料307号群：814900552
		衡水中学资料308号群：814357916
		衡水中学资料309号群：814084825
		衡水中学资料310号群：812226136
34省份的群		衡水中学资料311号群：808844470
		衡水中学资料312号群：810391587
		衡水中学资料313号群：808086389
		衡水中学资料314号群：807848331
		衡水中学资料315号群：806426636
		衡水中学资料316号群：812018136
		衡水中学资料317号群：810966427
		衡水中学资料318号群：775111131
		衡水中学资料319号群：778999363
		衡水中学资料320号群：751904647
		衡水中学资料321号群：786561691
		衡水中学资料322号群：737505920
		衡水中学资料323号群：789240635
		衡水中学资料324号群：793461905
		衡水中学资料325号群：776798752
34省份的群		衡水中学资料326号群：737586185
		衡水中学资料327号群：787201801
		衡水中学资料328号群：790017892
		衡水中学资料329号群：799502195
		衡水中学资料330号群：792988357
		衡水中学资料331号群：797997923
		衡水中学资料332号群：790490868

		衡水中学资料333号群：791443156
		衡水中学资料334号群：795028548
		衡水中学资料335号群：797985332
		衡水中学资料336号群：787420412
		衡水中学资料337号群：782171685
		衡水中学资料338号群：770877817
		衡水中学资料339号群：787222781
		衡水中学资料340号群：786116951
34省份的群		衡水中学资料341号群：778923843
		衡水中学资料342号群：787185516
		衡水中学资料343号群：782187258
		衡水中学资料344号群：777049765
		衡水中学资料345号群：776590804
		衡水中学资料346号群：756970179
		衡水中学资料347号群：771326243
		衡水中学资料348号群：738338597
		衡水中学资料349号群：738295491
		衡水中学资料350号群：612467975
		衡水中学资料351号群：261265099
		衡水中学资料352号群：884835562
		衡水中学资料353号群：207249015
		衡水中学资料354号群：125388252
		衡水中学资料355号群：884991146
34省份的群		衡水中学资料356号群：125234185
		衡水中学资料357号群：207184005
		衡水中学资料358号群：884949374
		衡水中学资料359号群：877815290
		衡水中学资料360号群：836754844
		衡水中学资料361号群：818615997
		衡水中学资料362号群：817948892
		衡水中学资料363号群：818507146
		衡水中学资料364号群：818217982
		衡水中学资料365号群：817956408
		衡水中学资料366号群：813792413
		衡水中学资料367号群：545341500
		衡水中学资料368号群：631565117
		衡水中学资料369号群：808873810
		衡水中学资料370号群：808420053
34省份的群		衡水中学资料371号群：807925293
		衡水中学资料372号群：807783277
		衡水中学资料373号群：807602653
		衡水中学资料374号群：807598286
		衡水中学资料375号群：806157549

		衡水中学资料376号群：801115064
		衡水中学资料377号群：715848560
		衡水中学资料378号群：681954450
		衡水中学资料379号群：573592502
		衡水中学资料380号群：801377214
		衡水中学资料381号群：799548976
		衡水中学资料382号群：801289794
		衡水中学资料383号群：801109867
		衡水中学资料384号群：801351274
		衡水中学资料385号群：737350237
34省份的群		衡水中学资料386号群：693438862
		衡水中学资料387号群：733762328
		衡水中学资料388号群：723303210
		衡水中学资料389号群：723368651
		衡水中学资料390号群：715870563
		衡水中学资料391号群：707623415
		衡水中学资料392号群：706995641
		衡水中学资料393号群：692756310
		衡水中学资料394号群：678085005
		衡水中学资料395号群：663926420
		衡水中学资料396号群：670110489
		衡水中学资料397号群：612407205
		衡水中学资料398号群：813619385
		衡水中学资料399号群：286288324
		衡水中学资料400号群：483788153
34省份的群		衡水中学资料401号群：836756249
		衡水中学资料402号群：811738121
		衡水中学资料403号群：551905627
		衡水中学资料404号群：573697283
		衡水中学资料405号群：809794945
		衡水中学资料406号群：805734232
		衡水中学资料407号群：809529580
		衡水中学资料408号群：805654158
		衡水中学资料409号群：807591370
		衡水中学资料410号群：680803929
		衡水中学资料411号群：601929166
		衡水中学资料412号群：588973725
		衡水中学资料413号群：512158090
		衡水中学资料414号群：512174731
		衡水中学资料415号群：297896918
34省份的群		衡水中学资料416号群：279802918
		衡水中学资料417号群：279806225
		衡水中学资料418号群：514939187

		衡水中学资料419号群：526471407
		衡水中学资料420号群：377073695
		衡水中学资料421号群：542094546
		衡水中学资料422号群：379453911
		衡水中学资料423号群：545329478
		衡水中学资料424号群：547875312
		衡水中学资料425号群：179636284
		衡水中学资料426号群：167187407
		衡水中学资料427号群：557995157
		衡水中学资料428号群：558712586
		衡水中学资料429号群：561680455
		衡水中学资料430号群：156959515
34省份的群		衡水中学资料431号群：156878649
		衡水中学资料432号群：163046004
		衡水中学资料433号群：567248225
		衡水中学资料434号群：571421189
		衡水中学资料435号群：573869968
		衡水中学资料436号群：143242762
		衡水中学资料437号群：576776511
		衡水中学资料438号群：576296258
		衡水中学资料439号群：579300322
		衡水中学资料440号群：117115042
		衡水中学资料441号群：117093666
		衡水中学资料442号群：582151376
		衡水中学资料443号群：589058718
		衡水中学资料444号群：117133715
		衡水中学资料445号群：119175429
34省份的群		衡水中学资料446号群：101175904
		衡水中学资料447号群：597870624
		衡水中学资料448号群：599753449
		衡水中学资料449号群：891848852
		衡水中学资料450号群：885321999
		衡水中学资料451号群：616623112
		衡水中学资料452号群：616719772
		衡水中学资料453号群：891849013
		衡水中学资料454号群：877648168
		衡水中学资料455号群：871226299
		衡水中学资料456号群：626077204
		衡水中学资料457号群：641346985
		衡水中学资料458号群：866703766
		衡水中学资料459号群：864083027
		衡水中学资料460号群：860580106
34省份		衡水中学资料461号群：664847079

的群		衡水中学资料462号群：665917512
		衡水中学资料463号群：666975015
		衡水中学资料464号群：669141723
		衡水中学资料465号群：859320559
		衡水中学资料466号群：676780307
		衡水中学资料467号群：859327099
		衡水中学资料468号群：838330100
		衡水中学资料469号群：683462053
		衡水中学资料470号群：829619717
		衡水中学资料471号群：685676993
		衡水中学资料472号群：686696755
		衡水中学资料473号群：686708368
		衡水中学资料474号群：695437378
		衡水中学资料475号群：683473798
34省份的群		衡水中学资料476号群：814744474
		衡水中学资料477号群：814556365
		衡水中学资料478号群：818121630
		衡水中学资料479号群：818296185
		衡水中学资料480号群：703034755
		衡水中学资料481号群：703883805
		衡水中学资料482号群：812711928
		衡水中学资料483号群：807919993
		衡水中学资料484号群：809031889
		衡水中学资料485号群：705398211
		衡水中学资料486号群：812715582
		衡水中学资料487号群：715546640
		衡水中学资料488号群：708757898
		衡水中学资料489号群：718633860
		衡水中学资料490号群：719547629
		衡水中学资料491号群：719497353
		衡水中学资料492号群：725694751
		衡水中学资料493号群：807481063
		衡水中学资料494号群：807371255
		衡水中学资料495号群：727826836
		衡水中学资料496号群：728529525
		衡水中学资料497号群：728542497
		衡水中学资料498号群：807635569
		衡水中学资料499号群：807351525
		衡水中学资料500号群：805753245
34省份的群	500人	石家庄二中资料共享群：330674563
		衡水二中资料共享群：820655292
		武邑中学资料共享群：693950648
		唐山一中资料共享群：912438125

		正定中学资料共享群：912450122
		冀州中学资料共享群：745792236
		石家庄一中资料群：912456987
		邯郸一中资料共享群：912469963
		辛集中学资料共享群：912488462
34省份的群		【河南省的群】
		河南中考群：640576176
		河南高考群：367427144
		郸城一高资料共享群：132589091
		郑州外国语资料共享群：743182077
		河南省实验中学资料群：838535244
		郑州一中资料共享群：542900468
		郑大附中资料共享群：855612053
		河大附中资料共享群：887317024
		开封高中资料共享群：924211531
		洛阳一高资料共享群：531570320
		新乡市第一中学资料群：894420519
		河南省淮阳中学资料群：893261811
		信阳高级中学资料群：941638394
		商丘市第一高级中学资料群：570572970
		河南省偃师高级中学资料群：941644012
34省份的群		【黑龙江省的群】
		黑龙江中考群：160827426
		黑龙江高考群：820128474
		哈尔滨三中资料共享群：556151210
		大庆一中资料共享群：947192912
		哈尔滨师大附中资料群：947194162
		大庆中学资料共享群：947191366
		铁人中学资料共享群：947192353
		哈尔滨九中资料共享群：941648188
		哈尔滨六中资料共享群：947201701
		大庆实验中学资料群：947196582
		鹤岗市一中资料共享群：941657935
		双鸭山市一中资料共享群：735890399
34省份的群		【湖北省的群】
		湖北中考群：920914173
		湖北高考群：920946879
	两千人	**黄冈中学资料共享群：761889459（名校旗舰群）**
		黄冈中学资料2号群：791213513
		黄冈中学资料3号群：750755760
		黄冈中学资料4号群：705102346
		黄冈中学资料5号群：543721272
		黄冈中学资料6号群：543561674

		黄冈中学资料7号群：740239910
		黄冈中学资料8号群：949274884
		黄冈中学资料9号群：943756842
		黄冈中学资料10号群：943761803
		武汉外国语学校资料群：419896340
		武汉二中资料共享群：600634258
		襄阳五中资料共享群：732082589
		襄阳四中资料共享群：941659769
		荆州中学资料共享群：941665004
		武钢三中资料共享群：941664651
		孝感高中资料共享群：632837603
		沙市中学资料共享群：707067274
		宜昌一中资料共享群：524722068
34省份的群		【湖南省的群】
		湖南中考群：863048403
		湖南高考群：838591964
	千人群	长郡中学资料共享群：737070368（名校、全科）
	500人	雅礼中学资料共享群：823746785（名校、全科）
		长沙一中资料共享群：818045090
		湖南师大附中资料群：566596778
		岳阳一中资料共享群：688986679
		浏阳一中资料共享群：941660803
		株洲二中资料共享群：912465401
		衡阳八中资料共享群：861199236
		湘潭一中资料共享群：818936869
		株洲四中资料共享群：795965782
34省份的群		【吉林省的群】
		吉林中考群：922815848
		吉林高考群：761731157
		东北师大附中资料群：550814091
		吉林一中资料共享群：862317095
		毓文中学资料共享群：818970673
		长春十一中资料共享群：947430054
		延边二中资料共享群：941825834
		吉林油田高中资料共享群：941826335
		吉林省实验中学资料群：513712553
		长春市实验中学资料群：947442660
		长春六中资料共享群：156558013
		长春外国语学校资料群：615892844
34省份的群		【江苏省的群】
		江苏中考群：414617358
		江苏高考群：778386680
	千人群	启东中学资料共享群：366989308（名校、全科）

		启东中学资料2号群：830084917
		南京外国语资料共享群：743912439
		天一中学资料共享群：687448081
		徐州一中资料共享群：775997029
		常州一中资料共享群：893891950
		苏州中学资料共享群：364305804
		海门中学资料共享群：457316483
		淮阴中学资料共享群：213815291
		盐城中学资料共享群：340362325
		扬州中学资料共享群：435252329
		镇江中学资料共享群：908266175
		姜堰中学资料共享群：875479635
		宿迁中学资料共享群：610186737
		新海高级中学资料群：910395002
34省份的群		【江西省的群】
		江西中考群：922935737
		江西高考群：921399804
		临川一中资料共享群：731356816
		江西师大附中资料群：947439987
		南昌二中资料共享群：362188178
		九江一中资料共享群：941830669
		鹰潭一中资料共享群：941833067
		高安中学资料共享群：718165254
		白鹭洲中学资料共享群：941832472
		玉山一中资料共享群：941830878
		上高二中资料共享群：941836012
		金溪县一中资料共享群：776782533
34省份的群		【辽宁省的群】
		辽宁中考群：923015850
		辽宁高考群：849297140
		大连二十四中资料群：189080563
		本溪高中资料共享群：783556803
		辽宁育才中学资料共享群：941852942
		大连育明高中资料共享群：941857983
		辽宁省实验中学资料群：514227414
		抚顺一中资料共享群：941858635
		鞍山一中资料共享群：626809648
		大连八中资料共享群：947460896
		沈阳二中资料共享群：629016078
		阜新实验中学资料共享群：941922090
		辽宁师大附中资料共享群：947519042
34省份的群		【内蒙古的群】
		内蒙古中考群：922738672

		内蒙古高考群：552901029
		呼和浩特二中资料共享群：941928699
		包头一中资料共享群：941928776
		包头三十三中资料共享群：108086602
		包钢一中资料共享群：947547440
		内蒙古北方重工集团三中群：947549685
		奋斗中学资料共享群：941949551
		集宁一中资料共享群：947551650
		赤峰二中资料共享群：941958842
		牙克石林业一中资料群：941961354
		锡盟二中资料共享群：941965658
34省份的群		【宁夏的群】
		宁夏中考群：713182046
		宁夏高考群：818932306
		银川一中资料共享群：811372725
		银川实验中学资料群：537939059
		吴忠中学资料共享群：941974814
		宁夏大学附中资料群：857270087
		唐徕回中资料共享群：947621750
		平罗中学资料共享群：942046697
		贺兰一中资料共享群：947626370
		石嘴山十七中学资料群：947623506
		中卫三中资料共享群：942048875
		银川二中资料共享群：942062457
34省份的群		【青海省的群】
		青海中考群：922789860
		青海高考群：743705186
		青海湟川中学资料群：941981723
		西宁五中资料共享群：947576208
		西宁十四中资料群：941984508
		青海师大附中资料群：796520133
		青海省互助一中资料群：345580831
		乐都县一中资料共享群：657583608
		平安县一中资料共享群：949244577
		化隆一中资料共享群：949249637
		海北州祁连山中学资料群：943736156
		青海昆仑中学资料共享群：949248084
34省份的群		【山东省的群】
		山东中考群：923090778
		山东高考群：818845136
	500人	山东省实验中学资料共享群：776188077（名校、全科）
		青岛二中资料共享群：941982728
		山东师大附中资料群：941991193

		烟台二中资料共享群：941987167
		潍坊二中资料共享群：941994749
		济南外国语学校资料群：941992699
		济南一中资料共享群：726244968
		潍坊一中资料共享群：891856065
		日照一中资料共享群：947599680
		枣庄八中资料共享群：941997417
34省份的群		【山西省的群】
		山西中考群：824104949
		山西高考群：855482689
		山西师大附中资料群：752044067
		太原五中学校资料群：947610146
		山西省实验中学资料群：947609639
		康杰中学资料共享群：947608034
		山西大学附中资料群：524938762
		忻州一中资料共享群：942039868
		太原成成中学资料群：942040524
		山西平遥中学资料群：947664480
		大同一中资料共享群：903331180
		太原外国语学校资料群：947703652
		太原五十二中资料群：942147485
34省份的群		【陕西省的群】
		陕西中考群：825801329
		陕西高考群：856126338
	500人	西工大附中资料共享群：807363593
		高新一中资料共享群：257710187
		西安市铁一中资料群：751523781
		西安交大附中资料群：942152665
		陕西师大附中资料群：947730407
		西安中学资料共享群：774547202
		西安一中资料共享群：892881820
		山阳中学资料共享群：947756209
		镇安中学资料共享群：947753159
		宜川中学资料共享群：942313178
		安康中学资料共享群：947912451
34省份的群		【上海市的群】
		上海中考群：920938070
		上海高考群：271733895
	500人	上海中学资料共享群：838433053
		华东师大二附资料群群：725953786（名校、全科）
		华东师大一附资料群：819684895
		复旦附中资料共享群：942371304
		交大附中资料共享群：942369307

		上海育才中学资料群：942371434
		格致中学资料共享群：942375420
		市北中学资料共享群：942374985
		建平中学资料共享群：947970048
		上海市延安中学资料群：947972085
		教科院附属中学资料群：166307200
		青云中学资料共享群：947985990
		闵行中学资料共享群：942392158
		松江二中资料共享群：942392776
34省份的群		【四川省的群】
		四川中考群：806621880
		四川高考群：547495943
	两千人	成都七中资料共享群：666829598（名校、全科）
		成都外国语学校资料群：632106538
		绵阳中学资料共享群：816444481
		成都石室中学资料群：861585256
		成都树德中学资料群：949243015
		双流县棠湖中学资料群：949243764
		成都实验中学资料群：441090766
		彭州中学资料共享群：949247687
		南充高中资料共享群：943736652
		雅安中学资料共享群：715800504
		四川大学资料共享群：323244702
34省份的群		【台湾省的群】
		台湾中考群：816125774
		台湾高考群：383151656
		【天津市的群】
		天津中考群：149088470
		天津高考群：912967319
		南开中学资料共享群：801563902
		耀华中学资料共享群：947794050
		天津一中资料共享群：947795393
		实验中学资料共享群：597494033
		新华中学资料共享群：947810407
		天津五十一中学资料群：942246171
		天津东丽中学资料群：947816998
		天津燕山中学资料群：942264090
		天津民族中学资料群：942268505
		天津塘沽一中资料群：637261033
34省份的群		【西藏的群】
		西藏中考群：823954722
		西藏高考群：824882056
		拉萨中学资料共享群：943742553

		林芝地区一中资料群：768792049
		拉萨市第三高级中学群：711922457
		民族学院附中资料群：949257891
		林芝地区第二中学群：943746527
		拉萨北京中学资料群：949262199
		拉萨师范学校资料群：732078071
		嘉黎县中学资料共享群：943755917
34省份的群		【香港的群】
		香港中考群：807592669
		香港高考群：824919259
		【新疆的群】
		新疆中考群：526149565
		新疆高考群：824196333
		乌鲁木齐一中资料群：259745347
		新疆实验中学资料群：869862155
		乌鲁木齐八中资料群：790525606
		乌鲁木齐八一中学资料群：838712115
		乌鲁木齐市70中资料群：942330152
		乌鲁木齐高级中学群：942340332
		昌吉州回民中学资料群：942342776
		新疆吐鲁番实验中学群：947938309
		克拉玛依一中资料群：947944212
		兵团二中资料共享群：866842615
34省份的群		【云南省的群】
		云南中考群：526058329
		云南高考群：823757709
		云南师大附中资料群：877207695
		云南大理一中资料群：742969552
		昆明第八中学资料群：612417312
		楚雄一中资料群：742679952
		明德中学资料群：858394707
		思茅一中资料共享群：863310432
		昆明一中资料共享群：881335117
		禄劝民族中学资料群：688371969
		昆明三中资料群：624469883
		曲靖一中资料共享群：642368386
34省份的群		【浙江省的群】
		浙江中考群：575180307
		浙江高考群：916403419
		镇海中学资料共享群：144596099
		杭州外国语学校资料群：714063193
		杭州二中资料共享群：572883770
		学军中学资料共享群：605971311

		乐成寄宿中学资料群：820772127
		台州中学资料共享群：348705292
		宁波效实中学资料群：853784401
		诸暨中学资料共享群：873348746
		绍兴一中资料群：718872881
		嘉兴一中资料群：718694162
		杭州十四中资料群：608363472
34省份的群		【重庆市的群】
		重庆中考群：752269382
		重庆高考群：850399159
		重庆南开中学资料群：736679470
		巴蜀中学资料共享群：369258549
		重庆一中资料共享群：815888621
		重庆八中资料共享群：490794859
		重庆三中资料共享群：850663328
		重庆育才中学资料群：851250375
		西南师大附中资料群：870137240
		重庆十八中资料群：138998244
		重庆铁路中学资料群：138791616
		重庆清华中学资料群：138674083
		云阳中学资料共享群：872204154
（9）厦门各学校的群号61个（内测中）		
小学		厦门外附小资料群：698012928
		康乐小学资料群：767258534
		梧村小学资料群：580363962
		华昌小学资料群：828117717
		湖里进修附小资料群：205716280
		演武小学资料群：827078355
		滨北小学资料群：734089531
		寨上小学资料群：586048958
		鹭江新城小学资料群：817518330
		思明二实小资料群：824080799
		演武小学资料群：476285868
		观音山音乐学校资料群：314662975
		湖明小学资料群：474444352
		群惠小学资料群：481648637
		思北小学资料群：857672178
		莲花小学资料群：736198388
		人民小学资料群：536331797
		高林小学资料群：195296536
		五缘实验资料群：563720041
		天安小学资料群：452822642

		定安小学资料群：733549371
		五中（小学）资料群：532638196
		湖滨小学资料群：308190061
		槟榔小学资料群：453516075
		翔鹭小学资料群：498434479
		大同小学资料群：460013144
		故宫小学资料群：743866313
		民立第二小学资料群：814882668
		厦门实验小学资料群：822240270
		园南小学资料群：829781013
初中		厦门一中初中资料群：432212762
		厦门二中初中资料群：772595677
		厦门六中初中资料群：821445087
		厦门双十初中资料群：823425790
		厦门外国语初中资料群：214937275
		集美中学资料群：829048149
		同安一中资料群：822608362
		科技中学资料群：192386141
		厦门实验中学资料群：820788470
		翔安一中资料群：820256356
		厦门五中资料共享群：543432090
		五缘实验初中资料群：819328352
		五缘第二实验初中资料群：734839596
		音乐学校初中资料群：498476459
		鼓浪屿钢琴学校初中资料群：371547249
		体育运动学校初中资料群：828829238
		英才学校初中资料群：516373427
		康桥中学初中资料群：346165019
		厦门十一中资料群：838805331
		厦门九中资料群：228957450
		槟榔中学资料群：531406561
		莲花中学资料群：533057617
		金鸡亭中学资料群：533170562
		逸夫中学资料群：535780836
		云顶学校资料群：697450388
		厦门三中资料群：558425499
		禾山中学资料群：815340967
		湖里中学资料群：526210563
		金尚中学资料群：699850182
		湖里实验中学资料群：701187908
		蔡塘学校资料群：912885705

1万个QQ群

学习群+高个群、模特群+明星粉丝群+游戏群+兼职、招聘群+网红主播群+媒体记者群等（想要什么群都可以免费建）

总群主的抖音/微博“全球第一群主”

（二）100个高个群、模特网红主播群

【加群说明】

一、默认全国群，地方性的群会标明省份或者城市

二、绿色底为人多的群，绿色底+红色字体为人多活跃质量高的群

三、自己加群，若进不去，请看清楚系统提示

		全国高个子总群：867280413
		全国模特总群：914727746
安徽		【安徽省的群】
		合肥高个群：785995715
		合肥模特、礼仪、网红、主播通告群：902644910
澳门		【澳门的群】
		澳门高个群：515324947
		澳门模特、礼仪、网红、主播通告群：903342060
福建		【福建省的群】
		福州高个群：580681520
		福州模特、礼仪、网红、主播通告群：724570759
		莆田高个群：913056435
		莆田模特、礼仪、网红、主播通告群：679379597
		泉州高个群：261503119
		泉州模特、礼仪、网红、主播通告群：275585786
		厦门高个群：652129855
		厦门模特、礼仪、网红、主播通告群：230257834
		厦门模特礼仪通告2群：271737357
		漳州高个群：897293294
		漳州模特、礼仪、网红、主播通告群：485994791
		龙岩高个群：895120331
		龙岩模特、礼仪、网红、主播通告群：794198362
		三明高个群：869682400
		三明模特、礼仪、网红、主播通告群：740352528
		南平高个群：902522728
		南平模特、礼仪、网红、主播通告群：485466548
		宁德高个群：515044240
		宁德模特、礼仪、网红、主播通告群：742409025
北京		【北京的群】
		北京高个群：828071688
		北京模特、礼仪、网红、主播通告群：776829116

甘肃		【甘肃省的群】
		兰州高个群：620905602
		兰州模特、礼仪、网红、主播通告群：623871308
广东		【广东省的群】
		广州高个群：816730417
		广州模特、礼仪、网红、主播通告群：788277640
		深圳高个群：910646234
		深圳模特、礼仪、网红、主播通告群：715714582
		珠海高个群：769865908
		珠海模特、礼仪、网红、主播通告群：633201262
广西		【广西省的群】
		南宁高个群：640875000
		南宁模特、礼仪、网红、主播通告群：640942010
贵州		【贵州省的群】
		贵阳高个群：648326402
		贵阳模特、礼仪、网红、主播通告群：657436799
海南		【海南省的群】
		三亚高个群：657614862
		三亚模特、礼仪、网红、主播通告群：659731236
河北		【河北省的群】
		石家庄高个群：659949106
		石家庄模特、礼仪、网红、主播通告群：661057515
河南		【河南省的群】
		郑州高个群：661546812
		郑州模特、礼仪、网红、主播通告群：685919119
黑龙江		【黑龙江省的群】
		哈尔滨高个群：690815697
		哈尔滨模特、礼仪、网红、主播通告群：694947312
湖北		【湖北省的群】
		武汉高个群：696066703
		武汉模特、礼仪、网红、主播通告群：697936021
湖南		【湖南省的群】
		长沙高个群：698423896
		长沙模特、礼仪、网红、主播通告群：698776282
吉林		【吉林省的群】
		长春高个群：701235688
		长春模特、礼仪、网红、主播通告群：701318250
江苏		【江苏省的群】
		南京高个群：705935485
		南京模特、礼仪、网红、主播通告群：710997837
江西		【江西省的群】
		南昌高个群：711299927
		南昌模特、礼仪、网红、主播通告群：711959604

辽宁		【辽宁省的群】
		沈阳高个群：713308875
		沈阳模特、礼仪、网红、主播通告群：451160526
内蒙古		【内蒙古的群】
		呼和浩特高个群：713615865
		呼和浩特模特、礼仪、网红、主播通告群：713730500
宁夏		【宁夏的群】
		银川高个群：714962514
		银川模特、礼仪、网红、主播通告群：717683089
青海		【青海省的群】
		西宁高个群：720588085
		西宁模特、礼仪、网红、主播通告群：720657092
山东		【山东省的群】
		济南高个群：728933259
		济南模特、礼仪、网红、主播通告群：728948152
		青岛高个群：729796807
		青岛模特、礼仪、网红、主播通告群：732104667
		烟台高个群：732987560
		烟台模特、礼仪、网红、主播通告群：745831652
山西		【山西省的群】
		太原高个群：749644868
		太原模特、礼仪、网红、主播通告群：749658838
陕西		【陕西省的群】
		西安高个群：749704787
		西安模特、礼仪、网红、主播通告群：750493939
上海		【上海的群】
		上海高个群：751577236
		上海模特、礼仪、网红、主播通告群：785250522
		上海模特、礼仪、网红、主播通告2号群：781370830
四川		【四川省的群】
		成都高个群：751721343
		成都模特、礼仪、网红、主播通告群：724964601
台湾		【台湾的群】
		台湾高个群：787188202
		台湾模特、礼仪、网红、主播通告群：786326363
天津		【天津的群】
		天津高个群：786853951
		天津模特、礼仪、网红、主播通告群：480552749
西藏		【西藏的群】
		拉萨高个群：782994578
		拉萨模特、礼仪、网红、主播通告群：786320414
香港		【香港的群】
		香港高个群：787260164

		香港模特、礼仪、网红、主播通告群：781184569
新疆		【新疆的群】
		乌鲁木齐高个群：786317962
		乌鲁木齐模特、礼仪、网红、主播通告群：779677889
云南		【云南省的群】
		昆明高个群：776354306
		昆明模特、礼仪、网红、主播通告群：776124509
浙江		【浙江省的群】
		杭州高个群：776120814
		杭州模特、礼仪、网红、主播通告群：150213902
		温州高个群：776116804
		温州模特、礼仪、网红、主播通告群：792263084
重庆		【重庆的群】
		重庆高个群：773829724
		重庆模特、礼仪、网红、主播通告群：796666127

1万个QQ群

学习群+高个群、模特群+明星粉丝群+游戏群+兼职、招聘群+网红主播群+媒体记者群等（想要什么群都可以免费建）
总群主的抖音/微博“全球第一群主”

（三）200个明星的粉丝群

（1）男团、组合

9%男团		蔡徐坤粉丝群：818537568
		蔡徐坤粉丝2号群：725363529
		范丞丞粉丝群：814327830
		王一博粉丝群：815746551
		陈立农粉丝群：815571205
		黄明昊粉丝群：173214521
		林彦俊粉丝群：482481832
		朱正廷粉丝群：173090109
		王子异粉丝群：705379984
		王琳凯粉丝群：816505206
		尤长靖粉丝群：826508612
		9%男团团体粉丝群：827541796
TFBoys		王俊凯粉丝群：638357492
		王源粉丝群：638281895
		易烊千玺粉丝群：828468470
		TFBoys组合粉丝群：331251543

防弹少年团		金南俊粉丝群：631450964
		金硕珍粉丝群：491464989
		闵玧其粉丝群：957997270
		郑号锡粉丝群：958446471
		朴智旻粉丝群：956828286
		金泰亨粉丝群：920138964
		田柾国粉丝群：858139152
（2）个人男明星		
个人姓首字母A	A	安宰贤粉丝群：490252181
个人姓首字母B		保剑锋粉丝群：313481810
		白敬亭粉丝群：819442325
		边伯贤粉丝群：819635079
个人姓首字母C		陈赫粉丝群：818491028
		陈晓粉丝群：818459223
		陈冠希粉丝群：818284038
		陈学冬粉丝群：818278428
		陈思诚粉丝群：818234917
		陈翔粉丝群：817535030
		陈坤粉丝群：817432463
		池昌旭粉丝群：817390043
		陈浩民粉丝群：686728814
		陈楚河粉丝群：686784348
		辰亦儒粉丝群：686795086
个人姓首字母D		邓伦粉丝群：812892029
		杜淳粉丝群：690953772
		都敏俊粉丝群：778242836
个人姓首字母		冯绍峰粉丝群：787621458
		付辛博粉丝群：926391966
个人姓首字母G		古天乐粉丝群：812848232
		郭敬明粉丝群：789436876
		郭富城粉丝群：766786072
		高云翔粉丝群：282384798
个人姓首字母H		黄晓明粉丝群：239047940
		黄子韬粉丝群：711316958
		胡歌粉丝群：487458780
		华晨宇粉丝群：457625731
		黄宗泽粉丝群：457797760
		韩庚粉丝群：442079656
		黄轩粉丝群：887905775
		韩栋粉丝群：887146792

		霍尊粉丝群：878637579
		霍建华粉丝群：926176142
		韩东君粉丝群：832798884
		何炅粉丝群：823207947
个人姓首字母J		贾乃亮粉丝群：513615554
		蒋劲夫粉丝群：790100728
		井柏然粉丝群：583903155
		金在中粉丝群：583948242
		金宇彬粉丝群：587401518
		金贤重粉丝群：601216079
		焦恩俊粉丝群：587449903
		金城武粉丝群：598879358
		金秀贤粉丝群：612667734
		贾斯汀·比伯粉丝群：766590639
		金明洙粉丝群：791707294
个人姓首字母K		柯震东粉丝群：792093746
个人姓首字母L		李易峰粉丝群：467744619
		鹿晗粉丝群：809391478
		李晨粉丝群：189216067
		刘昊然粉丝群：788283875
		刘烨粉丝群：515680076
		刘恺威粉丝群：523827913
		林志颖粉丝群：527780768
		李钟硕粉丝群：530736980
		李敏镐粉丝群：531885263
		李荣浩粉丝群：531941938
		林峰粉丝群：598406223
		刘宪华粉丝群：598600318
		罗志祥粉丝群：595623612
		罗晋粉丝群：593097807
		李栋旭粉丝群：571427023
		林更新粉丝群：589035993
		林俊杰粉丝群：585918091
		李宏毅粉丝群：580866186
		梁朝伟粉丝群：580854284
		林宥嘉粉丝群：575689206
		陆毅粉丝群：572574322
		李承铉粉丝群：569474325
		李光洙粉丝群：535692707
		李准基粉丝群：540226551
		李治廷粉丝群：537596338

		李汶翰粉丝群：536442015
		赖冠霖粉丝群：776708517
		罗云熙粉丝群：812876044
个人姓首字母M		明道粉丝群：545883859
		马天宇粉丝群：551582649
		马可粉丝群：541958974
个人姓首字母		南柱赫粉丝群：545791845
		李佳航粉丝群：551541403
个人姓首字母O		欧豪粉丝群：570684580
个人姓首字母P		彭于晏粉丝群：542116182
		朴宝剑粉丝群：545572536
		朴灿烈粉丝群：541939727
		朴海镇粉丝群：542078755
		朴有天粉丝群：565331675
		潘玮柏粉丝群：537833009
个人姓首字母		权志龙粉丝群：572571625
		翟天临粉丝群：569465632
个人首字母T		唐禹哲粉丝群：794048933
个人姓首字母W		吴亦凡粉丝群：797378043
		吴彦祖粉丝群：797174908
		吴世勋粉丝群：796917728
		魏晨粉丝群：796869938
		武艺粉丝群：837059882
		汪东城粉丝群：273982273
		吴磊粉丝群：214829683
		王嘉尔粉丝群：482046090
		王凯粉丝群：328251723
		王力宏粉丝群：376527820
		汪苏泷粉丝群：107116821
		吴奇隆粉丝群：828387770
		魏大勋粉丝群：827815451
		吴尊粉丝群：826505149
个人姓首字母X		邢昭林粉丝群：540882993
		薛之谦粉丝群：825765994
		谢霆锋粉丝群：825710013
		许嵩粉丝群：825700652
		玄彬粉丝群：875892528
		萧敬腾粉丝群：762876618
		徐良粉丝群：820169729

个人姓首字母Y		炎亚纶粉丝群：789344474
		于小彤粉丝群：705353980
		言承旭粉丝群：737361098
		于朦胧粉丝群：905564490
个人姓首字母Z		周杰伦粉丝群：786938183
		张艺兴粉丝群：565824460
		张翰粉丝群：160230796
		朱一龙粉丝群：348626757
		李易峰粉丝群：958444534
		钟汉良粉丝群：792943761
		张杰粉丝群：797606130
		张一山粉丝群：798484130
		张若昀粉丝群：806547950
		郑恺粉丝群：822517885
		张彬彬粉丝群：823191208
		张根硕粉丝群：823724360
		郑容和粉丝群：291282007
		张哲瀚粉丝群：292936127
		范世錡粉丝群：807047980
		张云龙粉丝群：792133533
		左溢粉丝群：823395966

1万个QQ群

学习群+高个群、模特群+明星粉丝群+游戏群+兼职、招聘群+网红主播群+媒体记者群等（想要什么群都可以免费建）
总群主的抖音/微博“全球第一群主”

（五）18个游戏群

MOBA类		王者荣耀开黑群：391233321
		DOTA2开黑群：895012862
		英雄联盟（LOL）开黑群：134857839
		梦三国开黑群：732276271
ACT/动作类游戏		冒险岛开黑群：241047286
FPS/射击类		和平精英吃鸡开黑群：885432399
		穿越火线CF开黑群：972252306
赛车类		QQ飞车开黑群：729724195
		跑跑卡丁车开黑群：913914534
舞蹈类		QQ炫舞开黑群：725231208
MMORPG/ARPG/		梦幻西游开黑群：906657380
		完美世界开黑群：966149129

RPG		魔兽世界开黑群：897699314
		剑侠情缘三（剑网3）开黑群：778918905
冒险类		我的世界开黑群：908345434
棋牌类		QQ斗地主开黑群：931867340
		QQ桌球开黑群：972370062
策略类		战意开黑群：807743222

1万个QQ群

学习群+高个群、模特群+明星粉丝群+游戏群+兼职、招聘群+网红主播群+媒体记者群等（想要什么群都可以免费建）
总群主的抖音/微博“全球第一群主”

（三）50个兼职招聘群

安徽		合肥大学生兼职群：854813156
福建	2000人	厦门教师家教招聘群：186883776
	500人	厦门大学生兼职群：373402065
		厦门理工家教群：830471586
		集美大学家教群：788123837
		华侨大学厦门家教群：437148310
		厦门大学家教群：815894707
		厦门模特、礼仪、网红、主播通告群：271737357
		厦门模特礼仪2号群：230257834
		莆田大学生兼职群：881584057
		仙游兼职群：866278498
北京		北京大学生兼职群：868771777
甘肃		兰州大学生兼职群：272454899
广东		广州大学生兼职群：105217371
		深圳大学生兼职群：737269847
		珠海大学生兼职群：738373526
广西		南宁大学生兼职群：582513326
		桂林大学生兼职群：648578001
贵州		贵阳大学生兼职群：640810459
海南		海口大学生兼职群：640784333
		三亚大学生兼职群：739693653
河北		石家庄大学生兼职群：537140151
		衡水大学生兼职群：537083909
河南		郑州大学生兼职群：202849792
		洛阳大学生兼职群：745149643
黑龙江		哈尔滨大学生兼职群：454325329
湖北		武汉大学生兼职群：749468720
湖南		长沙大学生兼职群：745671959
吉林		长春大学生兼职群：749696768

江苏		南京大学生兼职群：694731833
		无锡大学生兼职群：570650848
江西		南昌大学生兼职群：553262879
辽宁		沈阳大学生兼职群：749219279
内蒙古		呼和浩特大学生兼职群：751297926
宁夏		银川大学生兼职群：498572278
青海		西宁大学生兼职群：751804834
山东		济南大学生兼职群：755233792
		青岛大学生兼职群：757720231
		烟台大学生兼职群：751675464
山西		太原大学生兼职群：750189803
		大同大学生兼职群：179484842
陕西		西安大学生兼职群：811706755
上海		上海大学生兼职群：812103520
四川		成都大学生兼职群：813777201
		绵阳大学生兼职群：815283251
天津		天津大学生兼职群：795347775
新疆		乌鲁木齐大学生兼职群：790876805
云南		昆明大学生兼职群：793790328
浙江		杭州大学生兼职群：795433179
		宁波大学生兼职群：796086108
		温州大学生兼职群：819034327
重庆		重庆大学生兼职群：452390234