注意：

① 当为线性组合时，拆成两个非齐方程分别求通解

② 求导的时候 $\underline{x^k e^{\alpha x}}$ 作为一部分，

$(H(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x)$ 作另一部分，

用莱布尼茨公式求导，不要展开，这样易保存形式

③ 耐心求导，仔细比对系数

多元函数

极限计算：

不可用洛必达、单调有界定理

夹挤定理，重要极限（换元换成 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$）

极坐标化简！

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0$

可微等价的极限形式

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

$$=0$$

可微的话 $z=f(x,y)$

$$dz\big|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$$

复合函数求导比较麻烦，要多做题体会

隐函数(一个方程三个变量)

$F(x,y,z)$ 满足 $F(x_0,y_0,z_0)=0$

$F'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,

则 $F(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 某邻域上唯一确定

$z=f(x,y)$，有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$，注意是对中间变量

这是公式法，要先写成 $F(x,y,z)$ 的形式

还有直接法，直接对方程两边求导，要分清谁是谁函数

还有无脑全微分法，一切变量平等，后根据全微分形式确定出偏导

隐函数方程组

记 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$

对于 $F(x,y,z)$，$G(x,y,z)$，可以确定了 $y=y(x)$，$z=z(x)$，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

公式法，

对中间变量求偏导

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

空间曲线与法平面：

曲线 l 以 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$

在 (x_0, y_0, z_0) 处的切向量为 $\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$

(如果没有 t，但 y 和 z 由 x 表示，切向量为 $\{1, y(x), z(x)\}$)

切线方程：

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

法平面（切向量是它法向量）

若曲线以方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

确定，切向量为

$$\left\{ \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right\}$$

曲面由隐函数 $F(x,y,z)=0$

法向量和切平面

法向量 $\vec{n}=\{F'_x(x_0,y_0,z_0), F'_y(x_0,y_0,z_0), F'_z(x_0,y_0,z_0)\}$

切平面 $F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0$

曲面由显函数 $z=f(x,y)$ 给出，

曲面方程化为 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$

法向量为 $\vec{n}=\{f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1\}$

方向导数

$\vec{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l_0}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \left(f'_x\cos\alpha + f'_y\cos\beta + f'_z\cos\gamma\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

梯度:

$$\mathrm{grad}\, f = f'_x(x,y)\vec{i} + f'_y(x,y)\vec{j}$$

二维向量微分算子 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$

沿梯度方向增加最快，变化率对梯度取模

沿正交方向变化率为0

二元函数极值

求出驻点(和不可导点)，再算 f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy},

一个个点代入 $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ 中，大于0为极值点，

$f''_{xx} > 0$ 为极小值点，$f''_{xx} < 0$ 为极大值点、

对于隐函数，两边对 x，y 求一阶偏导 ①②式，

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得到的式子代入原方程解出驻点，

二阶偏导则对 ①②式分别对 x，y 求导，代入驻点值和

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 可解出二阶偏导，最后计算 $AC-B^2$

条件极值：　　拉格朗日乘数法

$z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下在点 (x_0,y_0) 处

取极值的必要条件为

$$\therefore \begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,y_0)=0 & \text{对}x\text{求偏导 } \frac{\partial L}{\partial x} \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_y(x_0,y_0)=0 & \text{对}y\text{求偏导 } \frac{\partial L}{\partial y} \\ \varphi(x_0,y_0)=0 & \text{对}\lambda\text{求偏导 } \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{cases}$$

恰好是 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ —— 相当于

在 (x_0,y_0,λ) 取无条件极值的必要条件

多个条件约束时，用多个不同的 λ

$f(x,y)$ 可根据具体函数变成更容易求导的式子，只要极值点不变

二重积分

①中值定理：$f(x,y)$在有界闭区域D连续，则在D上至少存在一点(ξ,η)使得 $\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$.

②投影法分区域

积不出考虑换序

看到积分先观察区域，看有无对称性、对等性、分段

还有常数换积分的神奇操作(证明题)

$b-a=\int_a^b dx=\int_a^b dy$

③极坐标：

适用范围：对于积分区域D为圆、圆环、圆扇形

对于被积函数为 x^2+y^2, x^2-y^2, xy, $\frac{x}{y}$复合函数

不一定用极坐标，不要什么都用极坐标

遇到根本无法积的就用

一般都是先积 r 再积 θ

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\sin\theta, r\cos\theta)\, r\,dr$$

△

对于区域不过原点，用坐标轴平移，先将原被积函数转换成新坐标系下的函数，再进行极坐标变换

三重积分

①投影法 要找一个好的面投影

最先积的变量可以轻松找到上下限 (先一后二)

$$\underbrace{\int_a^b}_{\text{常数}} dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}}_{\text{一元}} dy \underbrace{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}}_{\text{二元}} f(x,y,z)\,dz$$

常要换序，即换个先积的变量，平行其坐标轴可轻松得到上下限那种

②截面法 (先二后一)

适用于被积函数为单变量函数时，积分可化为先积个好算面积的面，再积该单变量

椭圆面积 $S=\pi ab$ （a长 b短）

③ 类似有对称性与对等性，但是对于面对称

④ 柱坐标 (r,θ,z)

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$

适用范围与二重积分中的极坐标表示法类似

投影法 $(r,\theta)\in D_{r,\theta}$，$z\in(z_1(r,\theta),z_2(r,\theta))$

截面法 $a\leq z\leq b$，$(r,\theta)\in D(z)$

两个平面截

⑤ 球坐标 (ρ,φ,θ)

$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$，$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$，$z=\rho\cos\varphi$

适用于积分区域 Ω 球心在原点或球面过原点的情况

或顶点在原点，以坐标轴为轴的圆锥（不一定在z轴，可换序调整）

被积函数为 $x^2+y^2+z^2$ 的复合函数

一般是：

$$\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\varphi\int_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)}f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\varphi\,d\rho$$

固定一个θ，找φ与ρ的关系来积分

积分应用

①曲面面积

曲面方程 $z=f(x,y)$，$ds=\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}\,dxdy$

对于方程为$x=f(y,z)$或$y=f(x,z)$的曲面，类似

②质心（一阶矩）

在二维空间是对于坐标轴来说的，

在三维空间是对于坐标面来说的

△矩和坐标和脚标字母

对于y轴的矩得M_y，求出质心横坐标$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$

对于x轴的矩得M_x，求出质心纵坐标$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$

$dM_y=\boxed{x}\rho(x,y)d\sigma$ → 面积

$dM_x=\boxed{y}\rho(x,y)d\sigma$

当ρ为常数时，$\frac{M_y}{M}$中$\rho(x,y)$可提出，$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,d\sigma}{\iint_D d\sigma}$

三维空间类似 ($\rho=\rho(x,y,z)$ 简写)

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho\,dV}{\iiint\limits_{\Omega}\rho\,dV}$$

$$\bar{y}=\frac{M_{zx}}{M}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\rho\,dV}{\iiint\limits_{\Omega}\rho\,dV}$$

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\rho\,dV}{\iiint\limits_{\Omega}\rho\,dV}$$

求质心经常要利用对称性，不会三个坐标都要求出

③转动惯量(二阶矩)

对轴或点的转动

二维 $I_x=\iint\limits_{D}\rho(x,y)y^2d\sigma$, $I_y=\iint\limits_{D}\rho(x,y)x^2d\sigma$

三维 $I_x=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y)(y^2+z^2)dV$

$I_y=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y)(x^2+z^2)dV$

$I_z=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y)(x^2+y^2)dV$

对原点：$I_o=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y)(x^2+y^2+z^2)dV$

④引力：Ω区域内质点对另一个Ω外的质点的引力

$$F = G\underline{m_0}\iiint_\Omega \frac{f(x,y,z)\vec{r}}{r^3}dV \quad \vec{r}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$$

一个小质点

$\vec{r}$分方向后，分别求出 $F_x = Gm_0\iiint_\Omega \frac{f(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dV$

$$F_y = Gm_0\iiint_\Omega \frac{f(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dV$$

$$F_z = Gm_0\iiint_\Omega \frac{f(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dV$$

一般通过对称性消去 F_x，F_y，F_z某分力，毕竟 r^3 很难积分

对弧长的曲线积分

平行推广上述积分应用 只是积分为 $\int_L 应用\, ds$

$f(x,y)$在曲线L上连续，L参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$

$\varphi(t)$与$\psi(t)$连续，且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2 \neq 0$，

则 $\int_L f(x,y)ds$存在，值为

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

t可换为x，即$\sqrt{1+y'^2}\,dx$

类似可得三维空间下$ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\,dt$

对坐标的曲线积分

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\,dt$$

其中$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$　　更常用x当参数，$\begin{cases}x=x\\y=y(x)\end{cases}$

$$=\int_L P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)\,dx$$

换到一个坐标上去算

两类曲线积分的关系

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$\cos\alpha$和$\cos\beta$其实也是x, y的函数，是L的单位切向量的方向余弦。将L向量化$r(t)=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}$

切向量　$r'(t)=\varphi'(t)\vec{i}+\psi'(t)\vec{j}$

$$\cos\alpha=\frac{\pm\varphi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}}\qquad\cos\beta=\frac{\pm\psi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}}$$

与t增长方向一致为正，否则为负

格林公式 $\xrightarrow{\text{解决}}$ 对坐标的曲线积分 $\xrightarrow{\text{化为}}$ 平面积分

$$\underbrace{\oint_L}_{L\text{为}D\text{区域的正向边界}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 连偏

利用 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$ 求图形面积，取 $Q=x$，$P=0$，用围图形的曲线来求出面积

当曲线 L_1 不是闭曲线时：

① 加一条 L_2 使 L_1+L_2 构成闭曲线，要求围成区域中无奇导点

② 挖去奇导点，一般用在 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 的情况下

以什么图形挖需要根据原 P Q 的形式决定

四个等价命题：

前提：$P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在单连通区域 G 中有连偏导

四命题 (1) $\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy$ 与路径无关

(2) $\oint_C Pdx+Qdy=0$ （C 为闭曲线）

(3) G 中有 $du=Pdx+Qdy$

(4) G 中有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

由(4)与(1)，若偏导相等，并且新路径与原路径围成的区域内无奇异点，则换个好算的路径(平行于坐标轴)

(3)中全体原函数为 $u=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+C$

(x_0,y_0) 如 $(0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$，沿平行坐标轴直线积分

$$(x_0,y_0)\xrightarrow[dy=0]{y=y_0}(x,y_0)\xrightarrow[dx=0]{x=x}(x,y)$$

求原函数也可用解偏微分方程的方法(四个等价保证一定有解)

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \Rightarrow u=\int\frac{\partial u}{\partial y}dy+\varphi(x)$

再代入 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 中得解

一种可以解的微分方程：全微分方程

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 是全微分方程的充要条件为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow du=Pdx+Qdy$　由 $du=0$，则 $u=C$(常)

故全微分方程 $Pdx+Qdy=0$ 通解为 $u(x,y)=0$

利 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 求出 P 和 Q，再对 $Pdx+Qdy$ 进行曲线积分得 u

· 保守场概念：$\int_L \vec{F}\cdot d\underline{\vec{r}}$ （$d\vec{r} = dx\vec{i}+dy\vec{j}$）$= \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 与路径无关，再称向量场 $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ 为保守场（势场 梯度场）

曲线积分的基本定理：

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = u(B)-u(A)$$

L是A到B点的有向弧

$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 是平面区域G（无需单连通）的一个向量场，且P, Q在G上连续，并且 $\vec{F}(x,y) = \mathrm{grad}\, u$（$\vec{F}$为梯度场，grad说明$\vec{F}$是u的"导数"）则曲线积分 $\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关

$\int_A^B \mathrm{grad}\, u \, d\vec{r} = u(B)-u(A)$ 相当于 $\int_A^B F'(x)dx = F(B)-F(A)$

$$\mathrm{grad}\, u = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{P}\vec{i} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{Q}\vec{j}$$

由P, Q连续知 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 连续，故 $du = Pdx+Qdy$ 存在，三个等价仍成立（$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 不需要成立）