Calculus IA Exercises - 微分中值定理

硝基苯

1

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导. $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内有相同的最大值，且 $f(a)=g(a),f(b)=g(b)$. 证明 (a,b) 内至少存在一点 t 使 $f''(t)=g''(t)$.

> 交点问题：构造 $F(a)=F(b)=0$, 使 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 个零点。反复应用罗尔定理，得 $F'(x)$ 有 $n-1$ 个零点，$F''(x)$ 有 $n-2$ 个零点。

设 $F(x)=f(x)-g(x)$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $F(a)=F(b)=0$

设 $f(x),g(x)$ 的最大值 M 分别在 p,q 处取得

1. 若 $p=q$, 取 $r=p$, 则 $F(r)=0$
2. 若 $p\neq q$, 有
   $F(p)=M-g(p)>0,\ F(q)=f(q)-M<0$
   由零点存在定理得，存在介于 p,q 之间的 r, $F(r)=0$

即 $\exists r\in(a,b)$, 使 $F(a)=F(r)=F(b)=0$

对 $F(x)$ 在区间 $[a,r]$ 和 $[r,b]$ 上应用罗尔定理，有

$\exists t_1\in(a,r),t_2\in(r,b)\to F'(t_1)=F'(t_2)=0$

对 $F'(x)$ 在 $[t1,t2]$ 上应用罗尔定理，得

$\exists t\in(t_1,t_2)\in(a,b)\to F''(t)=0$

即 $f''(t)=g''(t)$

2

设 $a>1, n\geq 1$, 证明 $\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

设 $f(x)=a^x$, 则 $f(x)$ 在 $[1/(n+1),1/n]$ 上连续，在 $(1/(n+1),1/n)$ 上可导
由拉格朗日中值定理

$$\exists\xi\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})\rightarrow f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})=f'(\xi)\cdot(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

即

$$\exists\xi\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})\rightarrow a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\xi}\ln a\cdot(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$\Rightarrow\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=\frac{a^{\xi}}{n(n+1)}$$

因为 $\frac{1}{n+1}<\xi<\frac{1}{n}$, 所以

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\xi}}{n(n+1)}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

即

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

3

函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的导数为零的点的个数是?

令 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\neq 0$
则 $f(x)=\ln|g(x)|$
$f'(x)=g'(x)/g(x)$
当 $f'(x)=0$ 时，$g'(x)=0$
由于 $g(1)=g(2)=g(3)=0$
由罗尔定理知 $g'(x)=0$ 有两解
即 $f'(x)=0$ 的点有两个

4

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 的大小关系是?

由拉格朗日中值定理知
存在 $(0,1)$ 上的实数 c 使 $f(1)-f(0)=f'(c)\cdot(1-0)=f'(c)$
因为 $f''(x)>0$
所以 $f'(x)$ 单调递增
有 $f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$

5

设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$. 证明 $\exists\xi\in(0,3), f'(\xi)=0$

> 平均数的定义 与 介值定理的应用

$\because f(0)+f(1)+f(2)=3$

$\therefore \dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$

即 $\min\{f(0),f(1),f(2)\}\leq 1\leq\max\{f(0),f(1),f(2)\}$

$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，由介值定理知

$\exists\eta\in[0,2], f(\eta)=1=f(3)$

由罗尔定理知

$\exists\xi\in(\eta,3), f'(\xi)=0$

即证

6

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0, f(1)=1$. 证明:
(1) $\exists\xi\in(0,1), f(\xi)=1-\xi$
(2) 存在两个不同的点 ξ_1，$\xi_2\in(0,\ 1)$，$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

(1)

> 无导数，考虑零点定理

构造 $F(x)=f(x)+x-1$
有 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$F(0)=-1, F(1)=1$
由零点定理知
$\exists\xi\in(0,1), F(\xi)=0$
即 $\exists\xi\in(0,1), f(\xi)=1-\xi$

(2)

> 涉及两个点的导数，考虑应用两次拉格朗日中值定理
> 需要至少三个点的函数值

有 $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(\xi)=1-\xi$
由拉格朗日中值定理

$$\exists\xi_1\in(0,\xi),\ f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}$$

$$\exists\xi_2\in(\xi,1),\ f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

$\therefore f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

7

设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)<0, f(0)=0$. 证明对任意的 $0<x_1<x_2$ 都有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

由拉格朗日中值定理
$\exists\xi_1\in(0,x_1),\ f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)(x_1-0)$
$\exists\xi_2\in(x_2,x_1+x_2),\ f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\xi_2)(x_1+x_2-x_2)$
即

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)}{x_1}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}$$

因为 $f''(x)<0$, 所以 $f'(x)$ 单调递减

$$\therefore f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=\frac{f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)}{x_1}<0$$

即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

8

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导且无界，证明 $f'(x)$ 在 (a,b) 上也无界，但逆命题不成立。

假设 $f'(x)$ 有界
即 $|f'(x)| \leq M$
在 (a,b) 上取 x, x_0
则 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$
$\therefore |f(x)|=|f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)| \leq |f(x_0)|+|f'(\xi)(x-x_0)| \leq |f(x_0)|+M(b-a)$
即 $f(x)$ 有界，产生矛盾
所以假设不成立，即 $f'(x)$ 无界

9

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\frac{x^2}{2}-1}{\text{arcsin}x-x}$$

> 优先考虑无穷小代换

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-x}{(-\frac{1}{2})(-x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{1}$$

$$=2$$

10

$$\lim_{x\to +\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$$

考察 $x^{1/x}$，有

$$(x^{1/x})' = x^{1/x}\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left[\frac{1}{\ln x}\ln(x^{1/x}-1)\right]$$

$$= \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{1/x}-1)}{\ln x}$$

$$= \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{1/x}-1}x^{1/x}\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\ln x/x}-1}\frac{1-\ln x}{x}\right]$$

> $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$$
> 等价无穷小代换

$$= \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\frac{1-\ln x}{x}$$

$$= \exp\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{\ln x}-1)$$

$$= e^{-1}$$

11

设 $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 在 R 上连续，且 $\lim_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2} = e^a$，求常数 a，b.

> 观察知：$\lim_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n}) = 1$，应使用洛必达法则

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1 \\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1 \\ ax+b, & x<1 \end{cases}$$

$f(x)$ 连续 $\Rightarrow 1=\dfrac{a+b+1}{2}=a+b\Rightarrow a+b=1$

$\because e^a=\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}=\cdots=e^{1/3}$

$\therefore a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{2}{3}$

12

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_1<\pi,\ a_{n+1}=\sin a_n,\ n=1,2,\cdots$

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{a_n^{-2}}$

(1)

> 单调有界数列必有极限

对 $\forall x\in(0,\pi)$

有 $0<\sin x<x$

$\therefore a_2=\sin a_1<a_1<\pi$

即 $a_{n+1}=\sin a_n<a_n$

$\therefore \{a_n\}$ 单调

$\because 0<a_{n+1}=\sin a_n<1$

$\therefore \{a_n\}$ 有界

即 数列极限存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n$

即 $A=\sin A$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=A=0$

(2)

对连续函数应用洛必达法则

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \cdots = e^{-\frac{1}{6}}$$