Calculus IA Exercises - 定积分

硝基苯

1

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

> $$\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}\ d(\arcsin\sqrt{x})$$

2

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$$

> 配方法 $\sqrt{x^2-2x} = \sqrt{(x-1)^2-1}$

令 $\sec t = x - 1$ 则

原式 $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t}{\sec^4 t \tan t}\ dt$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\ dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\ d(\sin t)$$

$$= (\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

3

求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)\cdots(n+n)}}{n}$

> 对数化积为和

原式

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right]$$

$$=\exp\int_0^1\ln(1+x)\ dx$$

$$=\exp\left[x\ln(1+x)|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx\right]$$

$$=\exp\left[\ln 2-\int_0^1(1-\frac{1}{1+x})dx\right]$$

$$=\exp\left\{\ln 2-[x-\ln(1+x)]\Big|_0^1\right\}$$

$$=\exp(\ln 4-1)$$

$$=\frac{4}{e}$$

4

求证 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\ln x|\cdot[\ln(1+x)]^n dx=0$

> 放缩，夹挤
> $0\le x\le 1$ 时, $0\le\ln(1+x)\le x$

有 $0\le|\ln x|\cdot[\ln(1+x)]^n\le|\ln x|\cdot x^n$

> 由洛必达法则知 $\lim_{x\to 0^+}x^n|\ln x|=\lim_{x\to 0^+}nx^n$
>
> 即 0 不是瑕点

$$\therefore \int_0^1 |\ln x|[\ln(1+x)]^n dx$$

$$\leq \int_0^1 |\ln x| x^n dx$$

$$= -\int_0^1 x^n \ln x dx$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\ln x\Big|_{0^+}^{1} - \int_0^1 x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx\right]$$

5

已知 $\int_0^\pi f(x)dx = 0, \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$，求证 $\exists\xi_1, \xi_2 \in (0,\pi)$，$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

设 $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$

则 $F(0) = 0, F(\pi) = 0$

$$\begin{aligned}\therefore 0 &= \int_0^\pi f(x)\cos x\ dx \\ &= \int_0^\pi \cos x\ dF(x) \\ &= F(x)\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi F(x)\ d\cos x \\ &= \int_0^\pi F(x)\sin x\ dx\end{aligned}$$

$\because \sin x > 0,\ x \in (0,\pi)$

$\therefore \exists\eta \in (0,\pi),\ F(\eta) = 0$

由罗尔定理知：
$\exists\xi_1 \in (0,\eta) \subset (0,\pi),\ f(\xi_1) = 0$

$\exists\xi_2 \in (\eta,\pi) \subset (0,\pi),\ f(\xi_2) = 0$

6

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \quad (0<\alpha<1)$$

> 化简思路：加分点
>
> $$\int_{-a}^{a} \to \int_{-a}^{0} + \int_0^a$$
>
> $$\int_a^b \to \int_a^{(a+b)/2} + \int_{(a+b)/2}^b$$
>
> $$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \to \int_{\frac{1}{a}}^{1} + \int_1^a$$
>
> 然后换元统一积分限，合并

原式 $= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$

令 $x = t^{-1}$，$dx = -t^{-2}dt$

有 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$

$= \int_1^0 \frac{-t^{-2}dt}{(1+t^{-2})(1+t^{-\alpha})}$

$= \int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{(x^2+1)(x^\alpha+1)}$

故 原式 $= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

7

求 $f(x) = \int_x^{x+\pi/2} |\sin t| \ dt$ 的最大值和最小值

考虑 $f(x+\pi) = \int_{x+\pi}^{x+3\pi/2} |\sin t| \ dt \overset{u=t-\pi}{=} \int_x^{x+\pi/2} |\sin u| \ du = f(x)$

即 $f(x)$ 周期为 π，在 $[0,\pi]$ 上讨论 $f(x)$

$$f'(x)=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|-|\sin x|=|\cos x|-\sin x$$

令 $f'(x)=0$，则 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{3\pi}{4}$

即 $f(0)=1,\quad f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2},\quad f(\frac{3\pi}{4})=2-\sqrt{2},\quad f(1)=1$

故 最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $2-\sqrt{2}$

8

已知 $f(x)\in C^2[-a,\,a]$, $f(0)=0$，求证 $\exists\eta\in[-a,\,a]$, $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$

> 泰勒公式联系函数值和高阶导数值

泰勒展开得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2\quad$ (ξ 介于 $0,x$ 之间)

$$\therefore\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}\left[f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2\right]dx$$

> $f'(0)x$ 为奇函数

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx$$

> $f''(\xi)$ 是 x 的函数，不能直接提出
> 思路：提出最值

$\because f''(x)\in C[-a,\,a]$

$\therefore\exists m\le M$ 使得 $m\le f''(x)\le M$, $x\in[-a,\,a]$

$$\therefore\frac{a^3}{3}m\le\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\le\frac{a^3}{3}M$$

即 $m\le\dfrac{3}{a^3}\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx\le M$

> $\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx$ 为介于 m,M 之间的常数

由介值定理知

$$\exists\, \eta \in [-a,\, a],\ f''(\eta) = \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

9

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(a)=f(b)=0$，求证 $|f(x)| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$

(1) 若 $f(x)\equiv 0$，显然成立

(2) 若 $f(x)\not\equiv 0$，则

$$\exists\, c \in (a,b),\ |f(c)| = \max|f(x)|$$

$$\begin{aligned}\int_a^b |f'(x)|dx &= \int_a^c |f'(x)|dx + \int_c^b |f'(x)|dx \\ &\ge \left|\int_a^c f'(x)dx\right| + \left|\int_c^b f'(x)dx\right| \\ &= 2|f(c)|\end{aligned}$$

即 $\frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx \ge |f(c)| \ge |f(x)|$

10

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，求证 $(a+b)\int_a^b f(x)dx < 2\int_a^b xf(x)dx$

> 构造函数，分析单调性

设 $F(x) = (a+x)\int_a^x f(x)dx - 2\int_a^x xf(x)dx$

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有

$$F'(x) = \cdots = \int_a^x f(t)dt - (x-a)f(x)$$

> $(x-a) = \int_a^x dt$，$f(x)$ 对于积分是常数

$$= \int_a^x [f(t) - f(x)]dt < 0$$

$\therefore F(b) < F(a) = 0$

即证

11

已知 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2}\arctan x^2$，$f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)dx$

令 $u = 2x - t$，则 $du = -dt$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^x tf(2x-t)dt &= \int_{2x}^x (2x-u)f(u)(-du) \\ &= 2x\int_x^{2x} f(u)du - \int_x^{2x} uf(u)du \\ &= \frac{1}{2}\arctan x^2 \end{aligned}$$

求导得

> 目的：消去 $\int_x^{2x} uf(u)du$，使能解出 $\int_x^{2x} uf(u)du$

$$2\int_x^{2x} f(u)du + 2x\left[f(2x)\cdot 2 - f(x)\right] - \left[2xf(2x)\cdot 2 - xf(x)\right] = \frac{x}{1+x^4}$$

即 $$\int_x^{2x} f(u)du = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^4} + xf(x)\right]$$

代入 $x = 1$，解得 原式 $= 3/4$

12

设 $f(x)$ 连续，且 $f(0) \neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$

> 综合所学

> 变限积分化简
> $\int_0^x f(x-t)dt \overset{u=x-t}{=} \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}$$

> 洛必达法则

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(t)dt + xf(x)}$$

> 积分中值公式

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(\xi_1)\cdot x}{f(\xi_2)\cdot x + xf(x)} \qquad \xi_1, \xi_2 \text{ 介于 } 0, x \text{ 之间}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(\xi_1)}{f(\xi_2) + f(x)}$$

$$= \frac{f(0)}{f(0) + f(0)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

13

设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上一非负连续函数
(1) 求证存在 $0 < c < 1$ 使得 $[0,c]$ 上以 $f(c)$ 为高的矩形面积等于 $[c,1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积
(2) 又设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x) > -2f(x)/x$ ，求证 (1) 中的 c 是唯一的

> 实质：方程求根问题
> 导数无关 -> 零点存在定理
> 导数相关 -> 罗尔定理

(1)

> 要证 $cf(c) = \int_c^1 f(x)dx$
> 只需证方程 $\int_1^c f(t)dt + cf(c) = 0$ 有根
> 观察知：原函数是两个函数乘积的形式，应用罗尔定理

设 $F(x) = x\int_1^x f(t)dt$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0) = F(1) = 0$

由罗尔定理知

$\exists\, c \in (0,1),\ F'(c) = \int_1^c f(t)dt + cf(c) = 0$

$\implies cf(c) = \int_c^1 f(x)dx$ 即证

(2)

$\because F'(x) = \int_1^x f(t)dt + xf(x)$

$\therefore F''(x) = f(x) + f(x) + xf'(x) > 0$ （题目条件）

故 $F'(x)$ 单调增加，方程 $F'(x) = 0$ 的根 c 是唯一的