一元函数极限求解方法与技巧

xyfJASON

1 定义法

函数极限的定义（以 $x \to 0$ 为例）：设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 上有定义，A 为常数. 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时有极限（收敛），并称 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0)$.

定义法多用于极限的证明，使用魏尔斯特拉斯的极限定义，极限证明转化为一系列不等式的推导，由此，对不等式的恒等变形非常重要。

值得注意的是，证明过程中可以在多处做出限定来简化证明。

> 例一：证明 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$.
>
> 证：$\forall \epsilon > 0$，$\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| = \left|x^2 + x - 2\right| = |x+2|\,|x-1|$. 限定 $0 < |x-1| < 1$，则 $|x+2| < 4$，故 $\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| < 4\,|x-1|$. 要使 $\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| < \epsilon$，只需 $4\,|x-1| < \epsilon$. 取 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{4}\}$，则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，恒有 $\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| < \epsilon$. 故 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$.

> 例二：证明 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{3x-1} = \frac{1}{3}$.
>
> 证：$\forall \epsilon > 0$，$\left|\frac{x}{3x-1} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3|3x-1|}$. 限定 $|x| > 1$，则 $\frac{1}{3|3x-1|} \leq \frac{1}{3(3|x|-1)} = \frac{1}{3(2|x|+|x|-1)} < \frac{1}{6|x|}$. 要使 $\left|\frac{x}{3x-1} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon$，只需 $\frac{1}{6|x|} < \epsilon \quad (|x| > 1)$，即 $|x| > \frac{1}{6\epsilon}$. 取 $X = \max\{\frac{1}{6\epsilon}, 1\}$，则当 $x > X$ 时，恒有 $\left|\frac{x}{3x-1} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon$. 故 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{3x-1} = \frac{1}{3}$.

2 初等变形法

用初等运算、变量代换、恒等变形等化简极限式，随后根据极限的四则运算、复合运算法则代入进行计算。

> 例一：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}{5(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}=\frac{4}{5}$.
>
> 评注：有理化是消去零因子的有效方法。

> 例二：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\xlongequal{u=\sqrt[6]{\cos x}}\lim\limits_{u\to1}\frac{u^3-u^2}{1-u^{12}}=\frac{1-u}{(u-1)(u^{11}+u^{10}+\cdots+u+1)}=-\frac{1}{12}$.
>
> 评注：变量代换在有理化因式较复杂时是一种比较好的方法。

> 例三：求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan2x\tan(\frac{\pi}{4}-x)\xlongequal{t=\frac{\pi}{4}-x}\lim\limits_{t\to0}\cot2t\cdot\tan t=\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos2t}{\sin2t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{1}{2}$.
>
> 评注：变量代换。

> 例四：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{3}{1^2\times2^2}+\frac{5}{2^2\times3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=1$.
>
> 评注：裂项相消。

> 例五：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right]$.
>
> 解：
>
> $$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot2\sin\frac{\pi}{4n}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot2\sin\frac{\pi}{4n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{k\pi}{2n}-\sin\frac{(k-1)\pi}{2n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot2\sin\frac{\pi}{4n}}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin0\right)\\&=\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$
>
> 评注：每一项乘上 $\sin\frac{\pi}{4n}$ 之后使用**积化和差**达到**裂项相消**的目的，挺难的。

> 例六：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}\cdot n(n+1)2^{n-2}=\frac{1}{4}$.
>
> 评注：一个关于二项式的公式：$\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2=n(n+1)2^{n-2}$，可通过二项式定理证明。

3 可直接判断的极限

- 无穷小乘以有界量是无穷小；
- 有界量除以无穷大是无穷小；
- 非零常数乘以无穷大是无穷大；
- 绝对值大于 1 的数的无穷大次幂为无穷大；
- 绝对值小于 1 的数的无穷大次幂为 0；
- 常数开无穷大次方为 1.

> 例一：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

> 例二：$\lim\limits_{x\to\infty} e^{\cos x}\ln(1+\frac{1}{x})=0$.

> 例三：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\frac{\sqrt{e^x}\sin x}{1+e^x}=0$. 因为 $\left|\frac{\sqrt{e^x}\sin x}{1+e^x}\right|\leqslant\frac{1}{2}$.

> 例四：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+\sin(\cot x)}{2+\cot x}=0$.

> 例五：$\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(\sqrt{2}+\frac{1}{x})=\infty$.

4 等价无穷小，第一个重要极限

第一个重要极限：

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1 \qquad \text{注意要求 } f(x)\neq 0$$

常用等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，有：

$$\begin{aligned}&x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\\&(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\\&1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

例一：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp\left\{x\cdot\ln\frac{2+\cos x}{3}\right\}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$.

评注：注意等价无穷小：若 $f(x)\to 1$，则 $\ln f(x)\sim f(x)-1$.

例二：$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]-\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x}=2$.

评注：注意两部分可以拆开.

例三：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{\cos 2n\pi x}}{(x-1)(x^x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{n}(\cos 2n\pi x-1)}{(x-1)x\ln x}\xlongequal{t=x-1}\lim\limits_{t\to 0}\frac{-2\sin^2 n\pi t}{nt^2(t+1)}=-2n\pi^2$.

评注：注意等价无穷小：若 $f(x)\to 1$，则 $(f(x))^\alpha-1\sim\alpha(f(x)-1)$.

例四：$\lim\limits_{x\to 0}x^{-2}(1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x})$.

解：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x\left[1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}\left(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\right)\right]}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}\\&=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3\end{aligned}$$

评注：通过插入 $-\cos x+\cos x-\cdots$ 和 $-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}-\cdots$ 以拆分极限。

5 第二个重要极限

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

用于解决 1^∞ 型不定式。

> 例一：$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\tan\frac{2}{n})^n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\tan\frac{2}{n})^n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\tan\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\tan\frac{2}{n}}}\right]^{n\tan\frac{2}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\tan\frac{2}{n}\right)^{-\frac{1}{\tan\frac{2}{n}}}\right]^{-n\tan\frac{2}{n}}}=e^{2\lim\limits_{n\to\infty}n\tan\frac{2}{n}}=e^4.$
>
> 评注：强行凑出 e 即可。

> 例二：求 $\lim\limits_{x\to\infty}[x-(x^2+x+1)\ln(1+\frac{1}{x})]$.
>
> 解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]-\lim\limits_{x\to\infty}[(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})]$.
>
> 其中，$\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to\infty}x^2[\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}$.
>
> $\lim\limits_{x\to\infty}[(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\frac{1}{x})^{x+1}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}[(1+\frac{1}{x})^x]^{\frac{x+1}{x}}=1$.
>
> 所以原式$=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.
>
> 评注：第一步拆开对于减小计算量非常重要.

6 夹逼原理

夹逼原理：设在 $\mathring{U}(x_0)$ 上有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

> 例一：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{[x]}$.
>
> 解：因为 $x-1\leqslant[x]\leqslant x$，所以当 $x>1$ 时，$1\leqslant\frac{x}{[x]}\leqslant\frac{x}{x-1}$；当 $x<-1$ 时，$\frac{x}{x-1}\leqslant\frac{x}{[x]}\leqslant 1$.
>
> 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$，由夹逼原理知：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{[x]}=1$.
>
> 评注：见到 $[x]$ 一般会尝试放缩。

> 例二：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.
>
> 解：注意到 n 充分大时，$\frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}$ 单调，故：原式 $\leqslant n\sin\frac{\pi}{n}\to\pi$ 且原式 $\geqslant n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\to\pi$. 由夹逼原理，原式 $=\pi$.
>
> 评注：一类无穷和形式的极限的解法是：若各分母不同但为等价无穷大，则在保持等价性的前提下对分母进行放缩以形成公分母，再利用夹逼原理求极限.

> 例三：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$.
>
> 解：设 $M=\max\{a_1^n,a_2^n,\cdots,a_k^n\}$，则原式 $\leqslant\sqrt[n]{kM^n}=M\cdot k^{\frac{1}{n}}\to M$. 又有原式 $\geqslant\sqrt[n]{M^n}\to M$. 由夹逼原理，原式 $=M=\max\{a_1^n,a_2^n,\cdots,a_k^n\}$.
>
> 评注：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1^n,a_2^n,\cdots,a_k^n\}$ 非常重要！

> 例四：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{H_n}{\ln n}$，其中 $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 是调和数。
>
> 解：由于 $\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant H_n\leqslant 1+\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}$，即 $\ln(n+1)\leqslant H_n\leqslant 1+\ln n$，所以 $\frac{H_n}{\ln n}\geqslant\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\to 1$，且 $\frac{H_n}{\ln n}\leqslant\frac{1+\ln n}{\ln n}\to 1$. 由夹逼原理，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{H_n}{\ln n}=1$.
>
> 评注：这道题告诉我们：$H_n=\Theta(\ln n)$.

7 利用导数定义

导数定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

> 例一：若 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}$.
>
> 解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}$，后者倒数极限计算如下：
>
> $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}&=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{1-\cos x}\right)\\&=1+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(\cos 2x-1)}{1-\cos x}\\&=3\end{aligned}$$
>
> 评注：只知道 $f'(0)$ 存在，不能用洛必达法则（洛必达要求在去心邻域内可导）。

8 洛必达法则 L'Hospital

若 $f(x), g(x)$ 满足：

1. 形成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{*}{\infty}$ 型不定式（$x \to a$）；
2. 二者均在 a 的去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$；
3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞

则：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

其他不定式通过恒等变形进行转化：

- $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ 或 $0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$
- $\infty - \infty$：通分合并/提取公因式/倒代换……
- $1^\infty, 0^0, \infty^0$：取对数

注意：计算前一定要先观察，能化简的先化简，避免越洛越复杂。

> 例一：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x + x\cos x)(\sin x - x\cos x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}$.
>
> 评注：这是 $\infty - \infty$ 型不定式，采用通分合并的方法转化为 $\frac{0}{0}$ 型。在洛必达前一定要先化简，此题中先等价无穷小代换，再将乘积拆开计算（拆开时需要一定的技巧，要仔细观察，拆出两个存在的极限）.

> 例二：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 1$.
>
> 评注：这是 ∞^0 型不定式，采用取对数的方法转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。

> 例三：求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$.
>
> 解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right] = e \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2} = e \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-1-\ln(1+x)}{2x} = -\frac{e}{2}$.
>
> 所以，取 $x = \frac{1}{n}$，由海涅定理知：$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right] = -\frac{e}{2}$.

附注：**Stolz** 定理：设数列 $\{y_n\}$ 单调增加且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ 存在或为 ∞，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Stolz 定理可以看作数列极限的 **L'Hospital** 法则，可有效解决一些 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的数列极限。

> 例一：设 $G_n = \sqrt[n+1]{\prod\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{G_n}$.

解：首先，$\prod\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}=\prod\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}=(n!)^{n+1}\left(\prod\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)^2$，故 $G_n=n!\left(\prod\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)^{\frac{2}{n+1}}$，$\ln G_n=\ln n!+\frac{2}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\frac{1}{k!}$. 于是:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln G_n}&\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln n!+2\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\frac{1}{k!}}{n(n+1)}\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln n!-n\ln(n-1)!+2\ln\frac{1}{n!}}{n(n+1)-(n-1)n} && \textbf{Stolz}\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-\ln n!}{2n}\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-(n-1)\ln(n-1)-\ln n!+\ln(n-1)!}{2n-2(n-1)} && \textbf{Stolz}\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\ln\frac{n+1}{n}}{2}\\
&=\sqrt{e}
\end{aligned}$$

9 利用拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理：若 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

在式子中出现两个形式相同的函数相减时，可以考虑使用拉格朗日中值定理。

> 例一：$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \xi\to 0}}\frac{a}{1+a^2\xi^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=a$.

> 例二：已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，求 c.
>
> 解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{c}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{c}{x}\right)^x}=e^{2c}$. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{\xi\to\infty}f'(\xi)=e$. 故 $c=\frac{1}{2}$.

10 泰勒展开

常用展开：

$$
\begin{aligned}
&e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
&\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})\\
&\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
&\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\\
&(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)
\end{aligned}
$$

> 例一：求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)$.
>
> 解：由于 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(1+n)!}+o\left(\frac{1}{(1+n)!}\right)$，故：
>
> $$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)=\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)=2\pi$$
>
> 评注：由于 sin 的周期性，化简的 $\sin(2\pi en!)$ 的关键就是将 $en!$ 写作整数加小数的形式，为此将 e 泰勒展开。

> 例二：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.
>
> 解：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$
>
> 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

11 含定积分的极限

在没有涉及数学分析的高等数学范畴内，求解带有定积分的极限的核心是去积分号.

11.1 直接积出来

11.2 放缩后积出来+夹逼原理

> 例一：证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln x|[\ln(1+x)]^n\mathrm{d}x=0$.
>
> 证：由于 $\int_0^1|\ln x|[\ln(1+x)]^n\mathrm{d}x<\int_0^1|\ln x|x^n\mathrm{d}x=\frac{-1}{n+1}\int_0^1\ln x\mathrm{d}x^{n+1}=\frac{-1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x\Big|_0^1-\int_0^1x^n\mathrm{d}x\right)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\Big|_0^1=\frac{1}{(n+1)^2}\to 0$，由夹逼原理知：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln x|[\ln(1+x)]^n dx=0$.
>
> 评注：直接积原式积不出来，需要先放缩成可以积的式子，然后用夹逼原理夹这个极限.

11.3 利用定积分中值定理去积分号

> 例一：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+100}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot 100=100\cdot\lim\limits_{\xi\to+\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}=0$.

> 例二：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\sin t+x}}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ \xi\to+\infty}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\xi+\sin\xi+x}}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ \xi\to+\infty}}\frac{1}{\sqrt{\frac{\xi}{x}+\frac{\sin\xi}{x}+1}}$. 又 $1<\frac{\xi}{x}<\frac{x+1}{x}$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ \xi\to+\infty}}\frac{\xi}{x}=1$，于是原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11.4 积分上下限函数——洛必达求导去积分号

> 例一：设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，且 $f(0,0)=0, f_x'(0,0)=2020, f_y'(0,0)=2021$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$.
>
> 解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= 4\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{x^4} \\
&= 4\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^{x}\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t}{x^4} && \text{积分号换序} \\
&= -4\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{4x^3} && \textbf{L'Hospital} \\
&= -\lim_{\substack{x\to0^+\\ \xi\to0^+}}\frac{x^2f(\xi,x)}{x^3} && \text{积分中值定理} \\
&= -\lim_{\substack{x\to0^+\\ \xi\to0^+}}\frac{f(0,0)+f'_x(0,0)\xi+f'_y(0,0)x+o(\sqrt{\xi^2+x^2})}{x} && \text{微分的定义} \\
&= -2021
\end{aligned}
$$

评注：这是一道具有综合性的题目，运用了积分号换序、洛必达法则、积分中值定理以及微分的定义求解。

12 利用定积分定义

定积分定义：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

特别地，若等分 $[0,1]$ 区间，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$. 所以问题的关键常常在于找到 $\frac{1}{n}$ 和 $f\left(\frac{i}{n}\right)$.

> 例一：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$.

> 例二：求解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right]$.
>
> 解：因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n+\frac{1}{i}}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.
>
> 由夹逼原理知：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right]=\frac{2}{3}$.
>
> 评注：原式并非定积分形式，需要放缩为定积分形式，然后夹逼.

13 数列递推式

13.1 单调有界准则

单调有界准则：单调有界数列必有极限.

单调数列通解之法：先在草稿纸上算出极限 A；然后用数学归纳法证明 a_n 恒小于或大于 A，即证明有界；再前后两项做差或做商证明单调，证明单调性时会用到有界性的界限.

> 例一：设数列 $\{a_n\}$ 由关系时 $a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}, n=1,2,\cdots$ 所确定，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
>
> 解：首先证明 $\{a_n\}$ 有界：$a_n>0$ 是显然的，下面用归纳法证明 $a_n<2$：当 $n=1$ 时，$a_1=1<2$ 成立；假设当 $n=k$ 时，$a_k<2$ 成立，那么当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+2}=2$ 成立. 故 $a_n<2$ 恒成立.
>
> 然后我们证明 $\{a_n\}$ 单调：因为 $a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n=\frac{2+a_n-a_n^2}{\sqrt{2+a_n}+a_n}=\frac{(a_n+1)(2-a_n)}{\sqrt{2+a_n}+a_n}>0$，所以 $\{a_n\}$ 单调增加.
>
> 由单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，设为 A，则式 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 两边同时取极限得：$A=\sqrt{A+2}$，解得：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.

> 例二：已知 $\begin{cases} x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^{n}+\cdots+x_{n+1}=1 \\ x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1 \end{cases}$，且 $0<x_i<1$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.
>
> 证：设 $f_i(x)=x^i+x^{i-1}+\cdots+x$，则 $f_n(x_{n+1})=1-x_{n+1}^{n+1}<1=f_n(x_n)$，又易知 $f_n(x)$ 单调增加，所以 $x_{n+1}<x_n$，即 $\{x_n\}$ 单调减少. 又因为 $\{x_n\}$ 有界，所以由单调有界准则可知：$\{x_n\}$ 收敛. 设极限为 $L(0<L<1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(L^n+L^{n-1}+\cdots+L)=\lim\limits_{n\to\infty}(L\cdot\frac{1-L^n}{1-L})=\frac{L}{1-L}=1$，解得 $L=\frac{1}{2}$.

> 例三：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}\ (a>0)$.
>
> 解：设 $x_n=\frac{a^n}{n!}$，则 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a}{n+1}$. 令 $N=a-1$，则当 $n>N$ 时，$x_{n+1}<x_n$. 由单调有界准则可知：x_n 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=X$，则在式 $x_{n+1}=\frac{a}{n+1}x_n$ 中取极限得到：$X=0\cdot X$，解得：$X=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

> 例四：设 $x_1=\frac{1}{1}, x_2=\frac{1}{1+\frac{1}{1}}, x_3=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
>
> 解：递推公式为 $x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}$。其有界性显然，下面用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 的奇子列单调递减，偶子列单调递增：
>
> 首先，可验证 $x_1>x_3, x_2<x_4$；其次，假设 $x_{2k-1}>x_{2k+1}, x_{2k}<x_{2k+2}$，则 $x_{2k+3}=\frac{1}{1+x_{2k+2}}<\frac{1}{1+x_{2k}}=x_{2k+1}, x_{2k+4}=\frac{1}{1+x_{2k+3}}>\frac{1}{1+x_{2k+1}}=x_{2k+2}$，证毕。
>
> 于是奇偶子列均存在极限，设为 A,B，那么：$A=\frac{1}{1+B}$ 且 $B=\frac{1}{1+A}$，解得：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=B=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
>
> 评注：虽然数列整体振荡，但是其奇偶子列分别单调有界。

13.2 不动点

求解数列 $\{a_n\}$ 极限的一般步骤为：先在草稿纸上算出极限 A；然后构造数列 $b_n=a_n-A$，后项与前项做比求得 b_n 表达式，用夹逼原理算出其极限.

事实上，A 被称为不动点。

> 例一：设数列 $\{a_n\}$ 由关系式 $a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n+1},n=1,2,\cdots$ 所确定，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.
>
> 解：令 $b_n=a_n-\sqrt{2}$，则 $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{\frac{a_n+2}{a_n+1}-\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+a_n}\right|<\sqrt{2}-1$.
>
> 故 $0\le|b_n|<(\sqrt{2}-1)\,|b_{n-1}|<\cdots<(\sqrt{2}-1)^{n-1}\,|b_1|=(\sqrt{2}-1)^n$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^n=0$，由夹挤原理得：$\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{2})=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$.
>
> 评注：$\sqrt{2}$ 的来源：设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $a_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n+1}$ 两边同取极限得：$A=\frac{A+2}{A+1}$，解得 $A=\sqrt{2}$.
>
> 值得注意的是，这种方法求极限必须要先说明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在！所以这一步是在草稿纸上进行的.

> 例二：设数列 $\{a_n\}$ 由关系式 $a_1=5,a_{n+1}=5+\frac{6}{a_n},n=1,2,\cdots$ 所确定，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.
>
> 解：首先容易发现 $a_n\ge5$. 令 $b_n=a_n-6$，则 $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}-6}{a_n-6}\right|=\left|\frac{5+\frac{6}{a_n}-6}{a_n-6}\right|=\left|\frac{6-a_n}{a_n(a_n-6)}\right|<\frac{1}{a_n}\le\frac{1}{5}$.
>
> 故 $0\le|b_n|<\frac{1}{5}|b_{n-1}|<\cdots<(\frac{1}{5})^{n-1}\,|b_1|=(\frac{1}{5})^{n-1}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{5})^{n-1}=0$，由夹逼原理得：$\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-6)=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=6$.
>
> 评注：6 的来源：设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $a_{n+1}=5+\frac{6}{a_n}$ 两边同取极限得：$A=5+\frac{6}{A}$，解得 $A=6$.

> 例三：证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\cos\cos\cdots\cos}_{n个}x$ 存在，且其极限是方程 $\cos x-x=0$ 的根。
>
> 证：设 $\cos a=a$，容易验证 a 是方程 $\cos x-x=0$ 唯一的根。设 $x_1=\cos x,x_n=\cos x_{n-1}$，则：
>
> $$\begin{aligned}|x_{n+1}-a|&=|\cos x_n-\cos a|=|(x_n-a)\sin\xi_n| &&\xi_n\text{ 介于 }x_n\text{ 和 }a\text{ 之间}\\&\leqslant\sin1|x_n-a| &&\text{因为 }\xi_n\leqslant1\\&\leqslant(\sin1)^n|x_1-a|\to0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$
>
> 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
>
> 评注：拉格朗日中值定理常常是有效的工具。

14 利用级数

14.1 级数收敛 → 通项趋零

该方法只适用于极限是 0，且收敛速度较快（使得级数收敛）的情况。

> 例一：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n n!}{(2n)^n}$.
>
> 解：考察级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n n!}{(2n)^n}$. 由于
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))^{n+1}}}{\frac{5^n n!}{(2n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{5}{2e}<1$$
>
> 根据比值审敛法，级数收敛，故通项极限为零，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n n!}{(2n)^n}$.

14.2 借助级数的和函数

> 例一：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]$.
>
> 解：考虑幂级数：$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{ix^{i+1}}{(i+1)!}$，有：$f'(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x^i}{(i-1)!}=xe^x$，故：$f(x)=\int_0^x te^t\,\mathrm{d}t=te^t\big|_0^x-e^t\big|_0^x=xe^x-e^x+1$. 所以原式 $=f(1)=1$.

> 例二：设序列 $\{x_n\}$ 定义为：$x_0=a,x_1=b,x_{n+1}=\frac{x_{n-1}+(2n-1)x_n}{2n}$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
>
> 解：$x_{n+1}-x_n=\frac{x_{n-1}-x_n}{2n}=\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{2^2 n(n-1)}=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n!}(x_1-x_0)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n!}(b-a)$.
>
> 考虑幂级数：$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x$，知：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_{n+1}-x_n=(b-a)f\left(-\frac{1}{2}\right)=(b-a)e^{-\frac{1}{2}}$.
>
> 故：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})+x_0=a+\frac{b-a}{\sqrt{e}}$.
>
> 评注：一个重要的结论——数列 $\{x_n\}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 有着相同的敛散性！

> 例三：已知 $x_0=1,x_{n+1}=\frac{1}{x_n^3+4}$，求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛。
>
> 证：易知 $0<x_n<1$，且：
>
> $$|x_{n+1}-x_n|=\left|\frac{1}{x_n^3+4}-\frac{1}{x_{n-1}^3+4}\right|=\frac{|x_n^3-x_{n-1}^3|}{(x_n^3+4)(x_{n-1}^3+4)}<\frac{|x_n-x_{n-1}|(x_n^2+x_nx_{n-1}+x_{n-1}^2)}{16}<\frac{3|x_n-x_{n-1}|}{16}$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛，其部分和为 $S_n=x_{n+1}-x_0$，故 $\lim_{x\to\infty}x_n$ 收敛。

评注：数列 $\{x_n\}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 有着相同的敛散性。