不定积分求解思维总结

xyfJASON

---

0 基础知识

不定积分基本公式

$$\int 0\mathrm{d}x = C$$
$$\int 1\mathrm{d}x = x + C$$
$$\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$
$$\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$
$$\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C$$
$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$$
$$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$$
$$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$$
$$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$$
$$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = \arccos x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\, x + C$$
$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$
$$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a > 0)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (a > 0)$$

第一换元积分法（凑微分法）

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(g(x))\mathrm{d}(g(x))$$

第二换元积分法

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

分部积分法

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int vu'\mathrm{d}x$$

或

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

1 凑微分

【关键词：经验，灵光一现，猜原函数，优先】

凑微分是许多不定积分的关键和第一步，不仅用于第一换元积分法，也在其他积分中（如分部积分）起简化作用.

尽管凑微分的正统方法真的就是凭**经验**"凑"，但是不少题目的凑法还是比较困难的，如果做题一时不能**灵光一现**凑出微分，不妨**猜猜原函数**——取题目中某部分作为原函数，求求导，看看能否奏效.

任何题**优先**考虑凑微分.

2 相关函数乘积——第一换元积分法

【关键词：有关联】

依据第一换元积分法，我们需要凑出 $f(g(x))$ 对应的 $g'(x)$，也即，两个乘积的函数在导数方面具有一定的关联时，可以考虑第一换元积分法.

3 无关函数乘积——分部积分

【关键词：无关联，化简，原则（设 u,v），目的（简化），解方程】

有时题目可以看作两个函数乘积，但这两个函数在求导方面**没有什么关联**，此时考虑分部积分.

在分部积分前，应考虑能否先化简、**凑微分**、换元等.

设 u,v 的**总原则**是：想对谁求导就设谁为 u.

分部积分应该以**简化积分为目的**，至少不能使积分更难积——如果积分的难度没有改变不一定是一件坏事，此时往往可以通过**解方程**的思想解出积分.

4 含有根式

【关键词：凑微分，根号下二次式（配方）】

- 首先考虑能否凑微分——**根式整体**用来凑微分、**根式内部**用来凑微分（根式看成幂函数）；
- 其次如果满足下表的话，使用相应换元；

根式	变量代换	会用到的恒等式
$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t(-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2})$ $x=a\cos t(0\leq t\leq\pi)$	$\sin^2 t+\cos^2 t=1$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x=a\tan t(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$ $x=a\cot t(0<t<\pi)$	$1+\tan^2 t=\sec^2 t$ $1+\cot^2 t=\csc^2 t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t(0\leq t<\frac{\pi}{2}$ 或 $\pi\leq t<\frac{3\pi}{2})$	$\sec^2 t-1=\tan^2 t$

注意：根号下二次式都能**配方**形成上表中后三种形式，然后三角换元解之.

5 有理函数积分

【关键词：四步骤（化真分式---因式分解---拆分---积分）】

有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 积分步骤比较固定：

1. 将有理函数化为多项式+真分式的形式

   例如：$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x+6}{x^2+2x+1}$.

2. 多项式部分直接积出来，真分式部分对分母进行因式分解，即：$Q(x)=b_0(x+a)^{\lambda}\cdots(x^2+px+q)^{\mu}$，$p^2-4q<0$.

   例如：$\frac{3x}{1-x^3}=\frac{3x}{(1-x)(1+x+x^2)}$.

3. 设未知量将真分式拆分为和的形式并解之，即：

   $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{b_0(x+a)^{\lambda}\cdots(x^2+px+q)^{\mu}}=\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\cdots+\frac{A_\lambda}{(x+a)^\lambda}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_\mu+N_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}$.

   例如：$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$.

4. 对每一部分分别积分，分为以下四种情形：

   - $\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x=A\ln|x-a|+C$.
   - $\int\frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x=\frac{A}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C$.
   - $\int\frac{Bx+D}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\int\frac{E}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\ln\left|x^2+px+q\right|+\int\frac{E}{(x+a)^2+b^2}\mathrm{d}x$

     $=\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{E}{b}\arctan\frac{x+a}{b}+C$.

     其中，E 是配凑出的满足等式的常数，且 $x^2+px+q=(x+a)^2+b^2$（配方）.
   - $\int\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}+\int\frac{E}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$.

     $\int\frac{E}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=\int\frac{E}{((x+a)^2+b^2)^n}\mathrm{d}x\xlongequal{x+a=b\tan t}E\int\frac{b\sec^2 t}{b^{2n}\sec^{2n}t}\mathrm{d}t=\frac{E}{b^{2n-1}}\int\cos^{2n-2}t\mathrm{d}t$. 降阶解之即可.

     其中，E 是配凑出的满足等式的常数，且 $x^2+px+q=(x+a)^2+b^2$（配方）.

简要来说，有理函数积分遵循 **化真分式---因式分解---拆分---积分** 四步骤.

6 三角相关

【关键词：基本类型一，基本类型二，万能代换】

- 基本类型一：$\int \sin^n x \cos^m x \mathrm{d}x$ 型积分
  - n, m 中至少有一个奇数：取奇数次幂中的一个拿来**凑微分**，剩下偶数次幂用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 换三角函数名称.
  - n, m 均为偶数：用二倍角公式 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ **降阶**.
- 基本类型二：$\int \tan^n x \sec^m x \mathrm{d}x$ 型积分
  - n, m 均为奇数时，取一个 $\tan x \sec x$ **凑微分**为 $d \sec x$，剩下 $\tan x$ 的偶数次幂用 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ 换三角函数名称.
  - $m = 0$，n 是偶数且大于等于 2 时，用 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ **降阶**.
  - m 为大于 0 的偶数时，取一个 $\sec^2 x$ **凑微分**为 $d \tan x$，剩下 $\sec x$ 的偶数次幂用 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ 换三角函数名称.
  - n 为偶数，m 为奇数时，用 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ 将积分化成 $\int \sec^k x \mathrm{d}x$ 型，然后取出一个 $\sec^2 x$ 凑微分为 $d \tan x$，用分部积分法**解方程**思想解之.
- 其他类型，往往想办法凑出微分就好做了.
- 在穷途末路时（想不到怎么凑微分），可采用**万能代换**把问题转化成有理函数积分问题.

  设 $u = \tan \frac{x}{2}$，则：

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$
$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

7 分式

【关键词：拆分，化简分母】

有许多积分都是关于分式的积分，简单一点的积分也许能比较快的看出凑微分的方法，但是对于复杂一点的积分也许会没有化简的头绪. 此时，容易忘记的一点是把可以**拆分**的分式拆开，再分别计算——就算拆开后各部分积分不存在，但加在一起就会抵消掉一部分.

能拆分的分式，其分母得是单项式，对于**多项式**的分母，应用各种技巧去化简分母——首先考虑分母整体是否可以用去凑微分，其次用**恒等变形**、**三角换元**等方法去化简分母.

有时分母**次数很高**，应采用**倒代换**把高次项转移到分子上去.

指数函数在分式上有很好的性质：1. 指数函数求导还是指数函数，用于凑微分极为方便；2. 指数函数可以在分母分子之间方便地“移动”，更改一下幂次就好.（例如：$\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$）