中值证明题总结

xyfJASON

1 能解释成方程的根的问题

1.1 $F(x)=c\in[m,M]$ ——介值定理（零点存在定理）

> 例一：设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<-\frac{1}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，求证：存在 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f(\xi)+\xi=0$.
>
> 分析：设 $F(x)=f(x)+x$，即证 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点. 由已知得：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=1>0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)>0$；$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x<0$. 由零点存在定理得证.

> 例二：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，若 $f(a),f(b)$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，证明：至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(b)(\eta-a)+f(a)(b-\eta)$.
>
> 分析：设 $F(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(b)(x-a)-f(a)(b-x)$，则 $F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(a)(b-a)=(b-a)[(f(\xi)-f(a)]<0$，$F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(b)(b-a)=(b-a)[(f(\xi)-f(b)]>0$，由零点存在定理得证.
>
> 批注：不要被积分吓到了，它就是一个常数而已.

1.2 $F'(x)=0$ ——罗尔定理

- 难点：构造函数，凑出 $F'(x)=0$.
- 构造函数的方法：1. 直接观察；2. 利用定积分；3. 解微分方程。

> 例一：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 证明对任意实数 λ，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)+\lambda(f(\xi)-\xi)=1$.
>
> 分析：观察 $(f'(\xi)-1)+\lambda(f(\xi)-\xi)=0$，前一个括号是后一个括号的导数，于是构造函数：$F(x)=e^{\lambda x}[f(x)-x]$，则只需证存在 ξ 使 $F'(\xi)=0$. 由罗尔定理，只需找到 $F(x)$ 的两个零点，由于 $F(0)=0$，还需要找到另一个零点，问题转化为 1.1 类型问题. 应用零点存在定理即可.
>
> 批注：对 1 的处理及把括号视为整体很关键.

> 例二：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上二阶可导且具有相等的最大值，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

分析：设 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(a)=F(b)=0$，还差一个零点：若最大值同时取到，即再找到了一个零点；否则，在两最大值点处 $F(x)$ 异号，由零点存在定理找到了一个零点. $F(x)$ 三个零点，由罗尔定理有 $F'(x)$ 两个零点，又由罗尔定理有 $F''(x)$ 一个零点，命题得证.

批注：本质是方程 $[f(x)-g(x)]''=0$ 的根的问题，适于罗尔定理解决. 二阶导一根 $\rightarrow$一阶导二根 $\rightarrow$ 原函数三根.

例三：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0,a>0$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

分析：设 $F(x)=(b-x)^a f(x)$，则只需证 $F'(x)=0$ 在 (a,b) 有根. 由于 $F(a)=F(b)=0$，所以由罗尔定理得证.

批注：这么神仙的构造不是凭空想出来的，而是通过积分发现的。整理需要证的式子得到：$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{a}{b-x}=0$，积分得：$\ln f(x)-\ln(b-x)^{-a}=\ln C$，化简得：$(b-x)^a f(x)=C$，故构造 $F(x)=(b-x)^a f(x)$.

例四：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f(\xi)=\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

分析：设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，那么问题实际上是：已知 $F(1)=F'(0)=0$，求证 $xF'(x)=F(x)$ 在 $(0,1)$ 内有根.

设 $G(x)=\begin{cases}\frac{F(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，只需证 $G'(x)=0$. 由于 $G(1)=0,\lim\limits_{x\to 0}G(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=0$，所以由罗尔定理得证.

批注：含有积分上限函数的证明题本质上和一般的证明题是一样的，看不习惯就换个元好了. 例如下面这道题：

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足等式 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，求导数 $f'(x)$ 的表达式.

解：设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(0)=1$，且 $F''(x)+F'(x)-\frac{1}{x+1}F(x)=0$，变形：$(x+1)F''(x)+(x+1)F'(x)=F(x)$，凑导数：$[e^x(x+1)F'(x)]'=[e^xF(x)]'$，两边积分得：$F(x)=(x+1)F'(x)+Ce^{-x}$，代入条件得：$C=-1$，所以 $F(x)=(x+1)F'(x)-e^{-x}$，求导有：$f(x)=(x+1)f'(x)+f(x)+e^{-x}$，解得：$f'(x)=-\frac{1}{e^x(x+1)}$.

例五：设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上任一非负连续函数. 试证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x$.

分析：设 $g(x)=x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $g(0)=g(1)=0$. 由罗尔定理得证.

批注：熟悉后不必换元了.

> 例六：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(1-\xi)=f'(\xi)$.
>
> 分析：容易构造函数 $g(x)=f(x)+f(1-x)$，只需证 $g'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有根. 由罗尔定理，只需找到 $g(x)$ 的两个零点.
>
> 由条件及积分中值定理易知： $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{2}}[f(x)+f(1-x)]\mathrm{d}x=2[f(\eta)+f(1-\eta)]=0$，类似的，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_{\frac{1}{2}}^1[f(x)+f(1-x)]\mathrm{d}x=2[f(\zeta)+f(1-\zeta)]=0$. 故 $g(\eta)=g(\zeta)=0$，得证.
>
> 批注：结合积分中值定理去寻找使得罗尔定理成立的条件，本质还是罗尔定理.

> 例七：设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=\int_0^1 e^{x^2}f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=2f'(\xi)-f(\xi)$.
>
> 分析：构造函数 $g(x)=e^{-x}f(x)$，只需证 $g''(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有根，只需证 $g'(x)=0$ 有两个根，只需证 $g(x)=0$ 有三个根. 已知 $g(0)=g(1)=0$，又由定积分中值定理有：$e^{\xi^2}f(\xi)=0$，知：$f(\xi)=0$，于是 $g(\xi)=0$，找到了三个根，命题得证.
>
> 批注：如果不能观察出构造的话，直接解微分方程也可得到该构造。

> 例八：设 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$，且 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\ (k>1)$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=\left(1-\frac{1}{\xi}\right)f(\xi)$.
>
> 分析：构造函数 $g(x)=xe^{-x}f(x)$，只需证 $g'(x)=0$. 由于 $g(1)=e^{-1}f(1)=\int_0^{\frac{1}{k}}g(x)\mathrm{d}x=g(\eta)$，由罗尔定理得证.
>
> 批注：要证的式子 $\iff xf'(x)+f(x)=xf(x)\iff\frac{[xf(x)]'}{xf(x)}=1\iff\ln|xf(x)|=x+\ln C\iff xe^{-x}f(x)=C$，故构造 $g(x)=xe^{-x}f(x)$.

1.3 $F'(x)<0$ ——拉格朗日中值定理

- 虽然是不等式，不是所谓方程的根的问题，但其本质与 1.2 是一致的，所以划分到这一类下.
- **难点**：构造函数，凑出 $F'(x)<0$.

> 例一：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，$f(a)=f(b)=0$，且存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>0$，求证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.
>
> 分析：思路与 1.2 的例二如出一辙，找3个原函数，2个一阶导即可. 题目已经给好了3个原函数，于是应用拉格朗日中值定理得：(a,c) 上有 $f'(\xi_1)>0$，(c,b) 上有 $f'(\xi_2)<0$，再用拉格朗日中值定理得：(ξ_1,ξ_2) 上有 $f''(\xi)<0$.

例二【2019 考研数学二】：已知函数 $f(x,y)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$，证明：

（1）存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$;

（2）存在 $\eta \in (0,1)$，使得 $f''(\eta) < -2$.

分析：（1）由罗尔定理，需要找到 $f(x)$ 的两个函数值相等的点，容易发现 $f(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(a) = 1(0<a<1)$，于是得证.

（2）构造函数 $g(x)=f(x)+x^2$，则只需证 $g''(\eta)<0$. 已知 $g(0)=0, g(a)=1+a^2 \in (1,2), g'(\xi)=2\xi \in (2a,2)$，于是在 $[0,a]$ 上应用拉格朗日中值定理有：$g'(c)=\frac{1+a^2}{a}=a+\frac{1}{a}>2$，再在 $[c,\xi]$ 上用拉格朗日中值定理得：$g''(\eta)=\frac{g'(\xi)-g'(c)}{\xi-c}<0$. 得证.

2 拉格朗日与柯西在等式证明中的应用

2.1 拉格朗日中值定理

- **特点**：同一个中值相关函数是加减关系（ $f(\xi)+g(\xi)$ ）. 特别说明：不可一概而论，有些乘除关系是由构造出的函数求导得到的，其本质并不是两个函数相乘除，例如 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=[xf(x)]'\big|_{x=\xi}$.
- **解法**：单中值构造函数；双中值需要谨慎选取分割点，在两个区间里分别应用拉格朗日中值定理.
- **难点**：构造函数；双中值问题选取分割点.

> 例一：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0,f(1)=\frac{1}{3}$，证明存在两个不同点 ξ,η，使 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.
>
> 分析：两个中值——两次中值定理：ξ,η 均是加减关系，所以是在两个区间上应用拉格朗日中值定理. 容易构造函数：$F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，则只需证 $F'(\xi)+F'(\eta)=0$. 没有什么系数，于是等分区间，分别使用拉格朗日中值定理命题即可得证.

> 例二：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，证明对于任意给定的正数 a,b，在 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的点 ξ,η，使得 $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$.
>
> 分析：两个中值——两次中值定理：ξ,η 都只有一个，所以是在两个区间上应用拉格朗日中值定理. 由介值定理可知，存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=\frac{a}{a+b}$，在 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,1)$ 上分别使用拉格朗日中值定理有：$f'(\xi)\cdot x_0=f(x_0)-f(0)=\frac{a}{a+b},f'(\eta)\cdot(1-x_0)=f(1)-f(x_0)=\frac{b}{a+b}$，整理两式即可.
>
> 批注：经典的拉格朗日中值定理双中值问题！分割区间遵循原则：将值域分割为 $a:b$ 的两部分. 注意与例四对比.

> 例三：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，$f(0)=0,f(1)=1$，3 个正数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的和为 1，证明存在 3 个不同的数 $x_1,x_2,x_3\in(0,1)$ 使得 $\frac{\lambda_1}{f'(x_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(x_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(x_3)}=1$.
>
> 分析：三个中值——三次中值定理：x_1,x_2,x_3 都只有一个，所以是在三个区间上应用拉格朗日中值定理. 用 c_1,c_2 将值域 $[0,1]$ 分割成 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$ 的三个部分，分别使用拉格朗日中值定理有：$\lambda_1=(c_1-0)f'(x_1),\lambda_2=(c_2-c_1)f'(x_2),\lambda_3=(1-c_2)f'(x_3)$，整理即可.
>
> 批注：和例二本质相同.

> 例四：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，若 $a>0,b>0$，求证：$\exists\xi\in(0,1),\eta\in(0,1),\xi\neq\eta$，使得 $af'(\xi)+bf'(\eta)=a+b$.

分析：两个中值——两次中值定理：ξ,η 都只有一个，所以是两个区间上应用拉格朗日中值定理. 在 $\left(0,\frac{a}{a+b}\right),\left(\frac{a}{a+b},1\right)$ 上分别使用拉格朗日中值定理有：$f'(\xi)\left(\frac{a}{a+b}-0\right)=f\left(\frac{a}{a+b}\right)-f(0), f'(\eta)\left(1-\frac{a}{a+b}\right)=f(1)-f\left(\frac{a}{a+b}\right)$，整理两式即可.

批注：**经典的拉格朗日中值定理双中值问题！**分个区间遵循原则：将定义域分割为 $a:b$ 的两部分. 注意与例二对比.

例五【2005考研数学一、二】：已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明：（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；（2）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

分析：（1）翻译成方程的根的问题，零点存在定理易证.（2）两个中值——两次中值定理：η,ζ 都只有一个，所以是在两个区间上应用拉格朗日中值定理. 分别在 $[0,\xi],[\xi,1]$ 上应用即可.

批注：ξ 是一个巧妙的点：它将定义域分割成了 $\xi:1-\xi$ 的两部分，同时又将值域分割成了 $1-\xi:\xi$ 的两部分. 如果没有第一问的铺垫，这个 ξ 的寻找很困难啊.

2.2 柯西中值定理

- **特点**：同一个中值相关函数是**乘除**关系（$f(\xi)g(\xi)=\frac{f(\xi)}{\frac{1}{g(\xi)}},\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$）.
- **解法**：构造函数.
- **难点**：构造函数.

例一：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $ab>0$，证明在 (a,b) 内至少存在两点 ξ,η，使得 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

分析：两个中值——两次中值定理：ξ 只有一个，是由拉格朗日中值定理产生的；η 有两个且为**除法关系**，是柯西中值定理产生的.

应用拉格朗日中值定理有：$f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)$；观察 η 的形式，构造函数：$g(x)=x^2$，应用柯西中值定理有：$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$.

联立两式，原式得证.

例二：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$a>0$，证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $abf'(\xi)=\eta^2f'(\eta)$.

分析：两个中值——两次中值定理：ξ 只有一个，是由拉格朗日中值定理产生的；η 有两个且为**乘除关系**，是由柯西中值定理产生的.

应用拉格朗日中值定理有：$f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)$；观察 η 的形式，构造函数：$g(x)=\frac{1}{x}$，应用柯西中值定理有：$\frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}}=\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$.

联立两式，原式得证.

例三：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$0<a<b$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

分析：容易构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则问题转化为证明 $\xi^2 g'(\xi)=\frac{ab}{b-a}[g(b)-g(a)]$. 中值 ξ 有两个且为乘除关系，是由柯西中值定理产生的. 观察 ξ 的形式，构造函数 $h(x)=\frac{1}{x}$，应用柯西中值定理有：$\frac{g'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}}=\frac{g(b)-g(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$，化简即可.

3 泰勒展开

- **特点**：在同一个点处多次求导；有高阶导；有时有奇怪的数字.
- **难点**：想到用泰勒展开；选取展开点.

> 例一：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$，其中 a,b 都是非负常数，c 是区间 $(0,1)$ 内任意一点，证明：$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$.
>
> 分析：将 $f(x)$ 在 $x=c$ 处展开为一阶拉格朗日余项形式：$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$. 分别将 $x=0,1$ 代入后两式相减化简即可.

> 例二：设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内具有连续的三阶导数，且 $f(0)=1, f(1)=2, f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，证明在 $(0,1)$ 内存在至少一点 ξ，使 $|f'''(\xi)|\ge 24$.
>
> 分析：将 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处展开为二阶拉格朗日余项形式：$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{f'''(\xi)}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$. 带入条件化简得：$48=48f\left(\frac{1}{2}\right)+6f''\left(\frac{1}{2}\right)-f'''(\xi_1)$，$96=48f\left(\frac{1}{2}\right)+6f''\left(\frac{1}{2}\right)+f'''(\xi_2)$. 相减得：$f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=48$. 设 $f'''(\xi)$ 是 $f'''(x)$ 在 $(0,1)$ 上的最大值，则 $|f'''(\xi)|\ge f'''(\xi)\ge\frac{1}{2}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))=24$. 命题得证.

> 例三：设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$c\in(a,b)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{2}f''(\xi)$.
>
> 分析：将 $f(x)$ 在 $x=c$ 处展开为一阶拉格朗日余项形式：$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$. 分别将 $x=a,b$ 代入得：$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-c)^2, f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-c)^2$. 代入左式得：$\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)\frac{a-c}{a-b}+f''(\xi_2)\frac{b-c}{b-a}\right]$. 由介值定理得证.

> 例四：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且 $|f''(x)|\le 2$，试证：当 $x\in[0,1]$ 时，$|f'(x)|\le 1$.
>
> 分析：将 $f(x)$ 在 $x=x_0(0\le x_0\le 1)$ 处展开为一阶拉格朗日余项形式：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$. 分别将 $x=0,1$ 代入得：$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2, f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2$，两式相减得：$f'(x_0)=\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2$. 故 $|f'(x_0)|\le\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2\right|+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2\right|\le 2x_0^2-2x_0+1=2x_0(x_0-1)+1\le 1$. 又由 x_0 的任意性可知原命题成立.

4 带定积分的证明题

4.1 纯积分——设积分上限函数

- 积分外没有函数或导数.
- 积分本质上就是加法，此类题目即其离散版本的连续化. 考虑离散情况，我们会想到用数学归纳法，而连续化之后，设一个积分上限函数相当于在进行归纳.

> 例一：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $0<f'(x)<1, f(0)=0$，证明：$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1(f(x))^3\mathrm{d}x$.
>
> 分析：设 $F(x)=(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$. 设 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，则 $G'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0$（$f(x)>0$ 易证），于是 $G(x)>G(0)=0$，于是 $F'(x)>0$，于是 $F(1)>F(0)=0$. 命题得证.

> 例二：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，求证：$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.
>
> 分析：设 $F(x)=2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=2xf(x)-(a+x)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)=(x-a)[f(x)-f(\xi)]>0$（其中，$a<\xi<x$），故 $F(b)>F(a)=0$，命题得证.

> 例三：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：
>
> （1）至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $\int_0^\eta f(x)\mathrm{d}x=0$.（2）至少存在不同的两点 $\lambda,\mu\in(0,1)$，使得 $f(\lambda)=f(\mu)=0$.
>
> 分析：（1）设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，只需证明 $F(x)=0$ 在 $(0,1)$ 有根. 又 $F'(x)=f(x)$，代入条件得：$\int_0^1[(x-1)f(x)]\mathrm{d}x=\int_0^1[(x-1)F'(x)]\mathrm{d}x=\int_0^1(x-1)dF(x)=[(x-1)F(x)]\Big|_0^1-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=F(0)-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=0$. 所以 $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=F(\eta)=F(0)=0$，命题得证.
>
> （2）即证 $F'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 上有两个根. 由（1）知：$F(0)=F(\eta)=F(1)=0$，由罗尔定理得证.

4.2 积分里函数，积分外导数——拉格朗日余项形式泰勒展开

- 难点：选取展开点.

> 例一：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$.

分析：将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处展开为一阶拉格朗日余项形式：$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$. 对其积分化简即可.

例二：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，$f(0)=0$，证明存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

分析：将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开为一阶拉格朗日余项形式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2$. 对其积分化简即可.

例三：设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$.

分析：将 $f(x)$ 分别在 $x=a$ 和 $x=b$ 处展开为“零阶”拉格朗日余项形式（说白了就是拉格朗日中值定理）：$f(x)=f(a)+f'(\xi_1)(x-a)=f'(\xi_1)(x-a)=f(b)+f'(\xi_2)(x-b)=f'(\xi_2)(x-b)$，分别应用在两个积分上得：$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{(a-b)^2}{8}|f'(\xi_1)|+\frac{(a-b)^2}{8}|f'(\xi_2)|\le\frac{(a-b)^2}{4}\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$.

批注：拉格朗日中值定理可以看作泰勒展开的“零阶”形式，此题满足积分里函数、积分外导数结构，所以将其归入这一类.

例四：设 $f(x)$ 是 $[0,2]$ 上的可微函数，满足 $f(0)=f(2)=1,|f'(x)|\le 1$，证明：$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|>1$.

分析：对 $f(x)$ 分别在 $x=0,x=2$ 处使用拉格朗日中值定理：$f(x)=f(0)+f'(\xi_1)x\ge 1-x$，$f(x)=f(2)+f'(\xi_2)(x-2)\ge x-1$. 于是，$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=1$. 又若取等，则 $|f'(x)|=1$，$f(x)$ 在 $x=1$ 处不可微，故不能取等，原命题得证.

例五：设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续的二阶导数，求证：存在 $\xi\in[-1,1]$，使 $\int_{-1}^{1}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi)$.

分析：将 $xf(x)$ 在 $x=0$ 处展开为一阶拉格朗日余项形式：$xf(x)=f(0)x+\frac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{2}x^2$. 对其积分化简即可.

批注：这道题也可设积分上限函数做.