

Calculus IA Exercises - 函数与极限

硝基苯

1

函数 $y = x \cos x$ 在 R 上是否有界? 是否为 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大?

有界: $\exists M > 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq M$

无界: $\forall M > 0, \exists x_0 \in X, |f(x_0)| > M$

无穷大: $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ (或 $\exists X > 0$), 只要 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$), 总有 $|f(x)| > M$

取 $x = 2n\pi, n \in Z$

有 $f(x) = 2n\pi \cos(2n\pi) = 2n\pi$

对任意的 $M > 0$, 总存在 n_0

使得 $|f(x_0)| = |2n_0\pi| > M$

故 $x \cos x$ 无界

取 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in Z$

对 $X > 0$, 令 $n_0 > \frac{X}{\pi} - \frac{1}{2}$

即 $x_0 = n_0\pi + \frac{\pi}{2} > X$

有 $f(x_0) = 0 < M$

故 $x \cos x$ 不是无穷大