工科数学分析（下）知识点精要（内容）

一. 微分方程

1.1 微分方程解的结构

1. n 阶线性方程

形如$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$

如果$f(x)=0$ 齐次

如果$f(x)\neq 0$ 非齐次

2. 齐次方程通解结构

定理 1 设$y_1,y_2,\cdots,y_n$为 n 阶线性齐次微分方程的线性无关的解，

则$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$为方程的通解

定理 2 设$y_1,y_2,\cdots,y_n$为 n 阶线性非齐次微分方程的对应齐次方程线性无关的解，y^*是非齐次方程一个特解

则$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n+y^*$为方程的通解

注：

1）齐次解+齐次解=齐次解

2）齐次解+非齐次解=非齐次解

3）非齐次解-非齐次解=齐次解

1.2 常系数齐次微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$

$\to \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$ 特征方程

（1） 如果λ是单实特征根，则$y=e^{\lambda x}$

（2） 如果λ是 k 重实根，则方程基础解系中对应的 k 个解

$$y_1=e^{\lambda x}，y_2=xe^{\lambda x}，\ \cdots，y_k=x^{k-1}e^{\lambda x}$$

（3） 如果$\lambda=\alpha\pm i\beta$是单复特征根，则方程基础解系中对应

$$y_1=e^{\alpha x}cos\beta x，y_2=e^{\alpha x}sin\beta x$$

（4） 如果$\lambda=\alpha\pm i\beta$是 k 重复特征根，则方程基础解系中对应的 2k 个解为：

$$y_1=e^{\alpha x}cos\beta x，y_2=e^{\alpha x}sin\beta x$$

$$xe^{\alpha x}cos\beta x，\quad xe^{\alpha x}sin\beta x$$

$$x^2e^{\alpha x}cos\beta x，\quad x^2e^{\alpha x}sin\beta x$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$x^{k-1}e^{\alpha x}cos\beta x，\quad x^{k-1}e^{\alpha x}sin\beta x$$

1.3 常系数非齐次方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$$

由解的结构可知，非齐次通解=齐次通解+非齐次特解

特解解法：

基于$f(x)$设定y^*结构，

一般的，当$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}cos\beta x+Q_n(x)e^{\alpha x}sin\beta x$

可以设$y^*=x^k[\widetilde{P_t(x)}e^{\alpha x}cos\beta x+\widetilde{Q_t(x)}\,e^{\alpha x}sin\beta x]$

k 为$\alpha\pm i\beta$方程特征根的重数，$t=\max\{m,n\}$

注：

1）当$\alpha=\beta=0$时，$f(x)$为多项式

2）当$\alpha\neq0$，$\beta=0$时，$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$

3）当$\alpha=0$，$\beta\neq0$时，$f(x)=P_n(x)cos\beta x+Q_n(x)sin\beta x$

1.4 欧拉方程

称$x^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1xy'+a_0y=f(x)$为欧拉方程

做变换：$t=lnx$，则$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

D:对 t 的导数　　　　D^n:对 t 的 n 阶导

1.5 全微分方程

若一阶微分方程$Pdx+Qdy=0$ 满足$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则称此方程为全微分方程（恰当方程）

解法：$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy=C$

当$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$，但

1. $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$是 x 的函数，则所需补充因子

$$u(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx}$$

2. $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}$是 y 的函数，则所需补充因子

$$u(y)=e^{\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy}$$

二. 多元函数微分学

2.1 多元函数偏导

1）相互关系

偏导连续可以推出可微，可微推不出偏导连续；
可微可以推出连续，连续不能推出可微；
可微可以推出偏导存在，偏导存在推不出可微；
连续推不出偏导存在，偏导存在推不出连续。

2）偏导数计算“先代后求”

例：$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,1)}$可转化为$z(0,y)=\varphi(y),\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,1)}=\varphi'(1)$

2.2 复合函数求导法

设$u=u(x,y),v=v(x,y)$可导，$z=f(u,v)$在对应点有连续一阶偏导数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

注：可通过树形图确定结构顺序，从而确定复合关系

2.3 全微分

全微分形式不变性

设$z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$都有连续一阶偏导数，则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

2.4 隐函数求导法

1. 由一个方程所确定的隐函数

设$F(x,y,z)$有连续一阶偏导数，$F_z'\neq 0$，$z=z(x,y)$由$F(x,y,z)=0$所确定，则由公式得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

或 等式两边分别对 x, 对 y 求偏导，得：

$$F_x'+F_z'\frac{\partial z}{\partial x}=0\qquad F_y'+F_y'\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

或 利用微分形式不变性对左侧整体求微分

$$F_x'dx+F_y'dy+F_z'dz=0\qquad dz=(-\frac{F_x'}{F_z'})dx+(-\frac{F_x'}{F_y'})dy$$

注：若题中未明确给出函数与变量关系（$z=z(x,y),x=x(y,z),y=y(x,z)$），则根据隐函数存在定理，选择题中明确给出的偏导数不为零的一项的下标作为因变量。

2. 由方程组所确定的隐函数

设$u=u(x,y),v=v(x,y)$由$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$所确定，则分别对 x, 对 y 求偏导

$$\begin{cases}F_x'+F_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\G_x'+G_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_y'+F_u'\dfrac{\partial u}{\partial y}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\G_y'+G_u'\dfrac{\partial u}{\partial y}+G_v'\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

或 利用微分形式不变性

$$\begin{cases}F_x'dx+F_y'dy+F_u'du+F_v'dv=0\\G_x'dx+G_y'dy+G_u'du+G_v'dv=0\end{cases}$$

2.5 极值, 最值计算

（一）无条件极值

1）定义： 极大：$f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$;

极小：$f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$;

2）极值点不一定是驻点，驻点不一定是极值点

例：$z=|x|+|y|,(0,0)$点为极小值点，但不可导

当$f(x,y)$可导时，极值点一定是驻点，驻点不一定是极值点

3)极值的必要条件 $f_x'(x_0,y_0)=0,f_y'(x_0,y_0)=0$

4)极值的充分条件 设$f_x'(x_0,y_0)=0,f_y'(x_0,y_0)=0$

取$A=f_{xx}'',B=f_{xy}'',C=f_{yy}''$，则：

（1）当$AC-B^2>0$时，有极值$\begin{cases}A>0 & \text{最小值}\\A<0 & \text{最大值}\end{cases}$

（2）当$AC-B^2<0$时，无极值

（3）当$AC-B^2=0$时，不一定（选用定义判断）

（二）条件极值——拉格朗日乘数法

函数$f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$条件下的极值，令$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，则

$$\begin{cases}F_x'=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0\\F_y'=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0\\F_\lambda'=\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

多出现在应用题，默认极值存在，则所求驻点为极值点

（三）最值问题

求连续函数$f(x,y)$在有界闭区域D上的最大最小值

1.求$f(x,y)$在D内部可能的极值点

2.求$f(x,y)$在D边界上的最大最小值（条件极值）

3. 比较

2.6 偏导数的几何应用

切对法，线对面

1. 空间曲线的切线与法平面

切线学的早，那就求直导

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I$$

切向量： $t = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$

则切线： $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$.

法平面： $x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0$

2. 空间曲线的法线与切平面

法线来的慢，偏导玩得转

法向量： $n = \{F_x'(x_0,y_0,z_0)，F_y'(x_0,y_0,z_0)，F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$

则法线： $\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$.

切平面：

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

三.　　多元函数积分学

3.1 二重积分　　　积分符号$d\sigma$

物理意义：以$f(x,y)$为面密度，有限平面区域内质量的代数和

几何意义：表示以 D 为底，以 z=$f(x,y)$为顶的曲顶柱体体积的代数和

常用性质：

1. $\iint_D dxdy$ =D 的面积

2.中值定理：　$\iint_D f(P)d\sigma = f(P^*)S_D, S_D$为区域 D 的面积

适用于积分式中 x,y 分开，无相乘项

例：$\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\int_0^{2t} dx \int_0^{2t-x} cos(|x|+|y|+\sqrt{x^2+y^2})dy$

3.与泰勒展开或变上限积分函数结合，适用于有 xy 相乘项

例：$\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\int_0^t dx \int_0^t tan[(xy)^2]dy}{t^6}$

计算方法：将二重积分化为累次积分

1. 利用直角坐标计算

 1) 先 y 后 x　　$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$

 2) 先 x 后 y　　$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$

 3）积分换序　　$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$

2. 利用极坐标计算

存在$\rho = \rho_1(\theta)$，$\rho = \rho_2(\theta)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

$$d\sigma = \rho d\rho d\theta$$

注：适合用极坐标的被积函数：

$$f(\sqrt{x^2+y^2}), f(\frac{y}{x}), f(\frac{x}{y})$$

适合用极坐标计算的积分域：

$x^2+y^2 \le R^2$; $r^2 \le x^2+y^2 \le R^2$; $x^2+y^2 \le 2ax$; $x^2+y^2 \le 2by$

当圆心坐标(x_0,y_0)时,利用平移，令$\begin{cases}\rho\cos\theta = X - x \\ \rho\sin\theta = Y - y\end{cases}$

3. 利用对称性和奇偶性计算

① 若积分域 D 关于 x 对称，则：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D(x>0)} f(x,y)d\sigma & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$

② 若积分域 D 关于 y 对称，则：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D(y>0)} f(x,y)d\sigma & f(x,-y)=f(x,y)\\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

4. 利用对换对称性计算

若积分域 D 关于$y=x$对称,则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma$$

3.2 三重积分　　　积分符号dV

物理意义：以$f(x,y,z)$为体密度有限空间体 Ω 质量的代数和

计算方法：把三重积分化为累次积分

1. 在直角坐标系下

1）先一后二

先一后二适合于柱形域$\begin{cases}(x,y)\in D_{xy}\\ \varphi(x,y)\le z\le \Psi(x,y)\end{cases}$ 投影到xoy面为定图形

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{\varphi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)dz$$

2）先二后一

先二后一适合于片型域$\begin{cases}a\le z\le b\\ (x,y)\in D_z\end{cases}$ 截面与 z 有关

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=\int_m^n dz\iint_{\sigma 1} f(x,y,z)dxdy$$

2. 在柱坐标系下

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=\iiint_\Omega f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdrd\theta dz$$

$$dV=rdrd\theta dz$$

注：适合用柱坐标的被积函数如：

$$\varphi(z)f(\sqrt{x^2+y^2})$$

适合用柱坐标的积分域： 柱面，锥面，两者所围成区域

3. 在球坐标系下

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\rho d\varphi d\theta$$

$$dV=\rho^2\sin\varphi\, d\rho d\varphi d\theta$$

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$$

注：适合用球坐标的被积函数

$$f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

适合用球坐标的积分域：　球面，$\frac{1}{4}$球体(如限制在第一卦限内)，球壳

4. 利用对称性和奇偶性

若积分域Ω关于xoy坐标面对称，则：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV=\begin{cases} 2\iint_{\Omega\,(z>0)} f(x,y,z)d\sigma & f(x,y,-z)=f(x,y,z) \\ 0 & f(x,y,-z)=-f(x,y,z) \end{cases}$$

若积分域Ω关于yoz坐标面对称，则：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV=\begin{cases} 2\iint_{\Omega\,(x>0)} f(x,y,z)d\sigma & f(-x,y,z)=f(x,y,z) \\ 0 & f(-x,y,z)=f(x,y,z) \end{cases}$$

若积分域Ω关于zox坐标面对称，则：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV=\begin{cases} 2\iint_{\Omega\,(y>0)} f(x,y,z)d\sigma & f(x,-y,z)=f(x,y,z) \\ 0 & f(x,-y,z)=-f(x,y,z) \end{cases}$$

5. 利用轮换对称性计算

当积分域表达式中 x,y,z 任意交换位置，积分域不变时，称其具有轮换对称性，常见于 $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=C$，$L\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

以Ω：$x^2+y^2+z^2=R^2$为例，则：

$$\iiint_{\Omega} x^2dV=\iiint_{\Omega} y^2dV=\iiint_{\Omega} z^2dV=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV\neq\frac{1}{3}\iiint_{\Omega} R^2dV$$

3.3 一型曲线　　　积分符号ds

物理意义：$\int_C f(x,y,z)ds$表示以$f(x,y,z)$为线密度的曲线 C 质量代数和

几何意义：$\int_C f(x,y,z)ds$表示以 C 为准线，母线平行于 oz 轴的柱面介于 oxy 平面与$z=f(x,y)$之间面积的代数和

性质：与路径方向无关　　$\int_{L(A-B)} = \int_{L(B-A)}$

计算方法：

（一）直接法

1）若$C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$　　$\alpha \le t \le \beta$

则 $\int_C f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

此时积分上下限：由小到大

设空间曲线 L 的方程为：

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$$

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

2）若$C: y=y(x),$　　$a \le x \le b$

则$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$

3）若$C: \rho=\rho(\theta),$　　$\alpha \le \theta \le \beta$

则$\int_C f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(\rho cos\theta, \rho sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$

注：常用曲线：

1. 心形线　　$\rho = a(1+cos\theta)$
2. 星形线　　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$　　$\begin{cases} x=acos^3t \\ y=asin^3t \end{cases}$
3. 摆线　　$\begin{cases} x=a(t-sint) \\ y=a(1-cost) \end{cases}$　　参数方程计算
4. 双纽线　　$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$　　$\rho^2=a^2cos2\theta$

（二）利用奇偶性

1）若积分曲线关于 x 对称，则：

$$\int_C f(x,y)ds = \begin{cases} 2\int_{C(x\ge 0)} f(x,y)ds & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$

2）若积分曲线关于 y 对称，则：

$$\int_C f(x,y)ds = \begin{cases} 2\int_{C(y\ge 0)} f(x,y)ds & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

3.4 二型曲线　　　　积分符号ds

物理意义：变力沿曲线做功

性质：与路径方向有关　　$\int_{L(A—B)} = -\int_{L(B—A)}$

计算方法：

1. 平面二型线积分

（一）直接法

设$L:\begin{cases}x = x(t)\\ y = y(t)\end{cases}$　　$t \in [\alpha, \beta]$ 则：

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

此时积分上下限：从起点到终点，与大小无关

（二）格林公式

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

适用范围：C 单连通或复连通域　（平面闭曲线）

注：对于不封闭曲线但适合用格林公式计算可采用补线用格林公式

格林公式意义：将闭曲线上二型线积分转化为积分域在线包围区域内的二重积分

（三）与路径无关

1）判定：

1.D 上任意闭曲线 C,有$\oint_C Pdx + Qdy = 0$

2.D 上第二型曲线积分$\int_{AB} Pdx + Qdy$与路径无关

3. $Pdx + Qdy$是全微分

4. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

常见常用：$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$　（区域 D 单连通）

2）计算方法：

1. 改换路径

$$\oint_C Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$$

常见：先 x 轴方向后 y 轴方向，先 y 轴方向后 x 轴方向

特殊：x 或 y 在分母位置出现，则选取特殊路径消除分母

注：对于包含奇异点的二型线积分，可采用转换路径以规避奇异点

例：计算$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$,其中 L 是以(1,0)为中心，R 为半径的圆周

（R≠ 1），取逆时针方向

解：$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$， $(x,y)\neq(0,0)$

(1) 若 R<1，则（0,0）点不在曲线围成区域内，由单连通判理一得

$$I=0$$

(2) 若 R>1，则（0,0）点在曲线围成区域内，由原式与路径无关

设 C 为椭圆 $4x^2+y^2=1$ 且取逆时针方向，则

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_C\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_C xdy-ydx=\iint_D(1+1)d\sigma=\pi$$

总结：被积表达式分母上包含奇异点（0,0），除奇异点外$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，则

① 如果闭曲线围成区域不包含原点，则积分值等于 0

② 包含原点的任何回路积分值均相等

③ 包含原点时路径选择根据分母形式

常见：

$\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，$\oint_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，
$\oint_L\frac{(x-y)dx-(x+y)dy}{x^2+y^2}$，$\oint_L\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$

2. 利用原函数：

存在$dF(x,y)=Pdx+Qdy$，则由牛顿，莱布尼茨公式：

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}Pdx+Qdy=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}dF=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)$$

求原函数方法：偏积分/凑微分

（四）转换为一型曲线积分

$$\oint_C Pdx+Qdy=\oint_L(Pcos\alpha+Qcos\beta)ds$$

$$对应关系\ \begin{cases}dscos\alpha=dx\\ dscos\beta=dy\end{cases}$$

2. 空间二型线积分：

（一）直接法

$$设L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta]$$

则：$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)]$$
$$+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt$$

此时积分上下限：从起点到终点

（二） 斯托克斯公式

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz=\iint_D(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

或记做：$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz=$

$$\iint_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}dS$$

L 为空间曲线，S 为空间以 L 为边界曲面，方向满足右手螺旋定则

适用范围：C 为空间闭曲线

常见常用于：对平面与空间体的交线积分

注：1.当 z=0 时，dz=0 化为平面曲线，斯托克斯公式变为格林公式。

2.当曲线不封闭但形式适合运用斯托克斯公式，可选择补线法

3.当积分为平面与空间体交线时，若平面方程较简单，可选择利用平面表达式将 z 化为 x，y 函数利用格林公式计算

例：计算$I=\oint_L(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$,其中 L 是平面 x+y+z=2 与柱面$|x|+|y|=1$的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针

【解 1】$I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}dS$

$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)dS$

$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)dS$

$=-2\iint_S(x-y-6)dxdy$

$=-12\iint_D dxdy=-24$

【解 2】$z=2-x-y$ $dz=-dx-dy$ C: $x|+|y|=1$

$$I=\oint_C[y^2-(2-x-y)^2]dx+[2(2-x-y)^2-x^2]dy+(3x^2-y^2)(-dx-dy)$$

$=\oint_C[2y^2-3x^2-(2-x-y)^2]dx+[2(2-x-y)^2+y^2-4x^2]dy$

由格林公式 $=\iint_D[-4(2-x-y)-8x-4y-2(2-x-y)]dxdy$

由奇偶性 $=-12\iint_D dxdy=-24$

斯托克斯公式意义：将二型线积分转化为积分域在定线包围区域内的二型面积分

（三） 与路径无关 （较少）

满足：$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$，$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

则: $\oint_C Pdx+Qdy+Rdz=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz$

3.5 一型曲面 积分符号dS

物理意义：以$f(x,y,z)$为面密度的曲面 S 的质量的代数和

性质：与积分曲面方向无关 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{-\Sigma} f(x,y,z)dS$

计算方法：

1） 直接法

$$\Sigma: z=z(x,y) \quad (x,y)\in D$$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,d\sigma$$

积分域D: 曲面Σ在xy面上投影

若无法写成 $z=z(x,y)$,但可以写成 $x=x(y,z)$或 $y=y(x,z)$,可向不同面投影

$$x=x(y,z) \qquad dS=\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}d\sigma$$

$$y=y(x,z) \qquad dS=\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}d\sigma$$

2） 利用奇偶性

若曲面Σ关于xoy坐标面对称，则：

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dV=\begin{cases}2\iint_{\Sigma(z>0)}f(x,y,z)d\sigma & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\\ 0 & f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\end{cases}$$

若积分域Ω关于yoz坐标面对称，则：

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dV=\begin{cases}2\iint_{\Sigma(x>0)}f(x,y,z)d\sigma & f(-x,y,z)=f(x,y,z)\\ 0 & f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\end{cases}$$

若积分域Ω关于zox坐标面对称，则：

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dV=\begin{cases}2\iint_{\Sigma(y>0)}f(x,y,z)d\sigma & f(x,-y,z)=f(x,y,z)\\ 0 & f(x,-y,z)=-f(x,y,z)\end{cases}$$

3） 利用轮换对称性

常见于当积分面为$x^2+y^2+z^2=R^2$，$x+y+z=C$时

例：曲面Σ：$x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS=\iint_{\Sigma} y^2 dS=\iint_{\Sigma} z^2 dS=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma} R^2 dS=\frac{1}{3}R^2\cdot 4\pi R^2$$

注：只有线面积分才能代入，因为只有线面积分才沿着给定方程方向，
二重、三重积分为积分域，积分域内点均可代入，无某一确定轨迹。
重积分的区域由不等式决定，线面积分的区域由等式决定
不等式无法代入，等式可以

3.6 二型曲面 积分符号dS

物理意义：流体通过给定曲面一侧的流量

性质：与积分面方向有关

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iint_{-\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

计算方法：

1） 直接法（分面投影法）

设曲面： $z=z(x,y)$， $(x,y)\in D$

则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D} R(x,y,z(x,y))\,d\sigma$$

2） 高斯公式

$$\oiint_{\Sigma外} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

适用范围：Σ为空间内封闭曲面

当曲面不封闭但仍形式适合用高斯公式时，可以补面用高斯公式

高斯公式描述了空间曲面外侧二型面积分与该封闭曲面所围成空间体的三重积分间的关系。

3） 转化成第一型曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma)ds=\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$\begin{cases} dScos\alpha = dydz \\ dScos\beta = dzdx \\ dscos\gamma = dxdy \end{cases}$$

总结注：

格林公式，高斯公式完成的是线、面积分到重积分的过渡，使用后的表达式不可再代入给定方程，

斯托克斯公式完成的是二型线到二型面积分过渡，为线面积分转化关系，使用后仍可带入给定曲面方程。

3.7 黎曼积分应用——质心、形心、转动惯量

1.质心

$$\bar{x} = \frac{\int_{\Omega} x\mu(P)d\Omega}{\int_{\Omega} \mu(P)d\Omega}, \bar{y} = \frac{\int_{\Omega} y\mu(P)d\Omega}{\int_{\Omega} \mu(P)d\Omega}, \bar{z} = \frac{\int_{\Omega} z\mu(P)d\Omega}{\int_{\Omega} \mu(P)d\Omega}$$

2.形心

若Ω是一个由同种材质组成的有限集合体，$\mu(P)$为常数，则质心与密度无关，只与形状有关，称为形心

$$\bar{x} = \frac{\int_{\Omega} xd\Omega}{\Omega}, \bar{y} = \frac{\int_{\Omega} yd\Omega}{\Omega}, \bar{z} = \frac{\int_{\Omega} zd\Omega}{\Omega}$$

3.转动惯量

几何形体的转动惯量：密度$\mu(P)$

$$I = \int_{\Omega} \mu(P)\, r^2(P)d\Omega$$

四. 场论初步

4.1 梯度

若u可微，则梯度$gradu = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$ ，记为$gradu$ 或 ∇u

它的大小是数量场在点 M 处所有方向导数的最大值，它的方向是取到这个最大值所沿的那个方向.

4.2 散度

对向量$\vec{A} = (P, Q, R)$，则$div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

$$div(u\vec{v}) = udiv(\vec{v}) + \vec{v} \cdot gradu$$

4.3 旋度

对向量$\vec{A} = (P, Q, R)$，则$rot\vec{A} = \{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\}$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{dydz} & \mathrm{dzdx} & \mathrm{dxdy} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix}$$

$$rot(u\vec{v}) = urot\vec{v} + (grad\, u) \times \vec{v}$$

4.4 场

1）无旋场 $rot\vec{A} = 0$

2）无源场 $div\vec{A} = 0$

3）保守场 $\vec{A} = (P, Q, R)$满足$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$与路径无关

4）调和场 即无源又无旋

4.5 常见结论

1. 梯度场是无旋场

$$rot(grad\, u) = \vec{0}$$

2. 旋度场是无源场

$$div(rot\,\vec{v}) = 0$$

3.

$$div(grad\, u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

五．　无穷级数

5.1 数项级数敛散性

（一）级数的概念与性质

1. 级数的概念

无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

无穷级数的部分和数列　$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} S & \text{收敛} \\ \text{极限不存在} & \text{发散} \end{cases}$$

2. 级数的性质

1）　若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s，则$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且和为 ks

2）　若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛 s,σ,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛于 $s \pm \sigma$

注：收敛±发散=发散；　发散±发散=不确定

3）　在级数中去掉、增添或改变有限项不改变级数的敛散性

4）　收敛级数加括号仍收敛且和不变

和式加括号收敛，原式不一定收敛 ：1-1+1-1+1-1 •••

和式加括号发散，原级数一定发散

5）　$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\to \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要非充分条件

（二）级数的审敛准则

（1）　正项级数　（$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,$u_n > 0$）

$u_n \geq 0 \to S_n$单调增，则：

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\leftrightarrow S_n$有上界　（充分必要条件）

1）比较判别法

$$\text{设}u_n \leq v_n,\text{则}\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛，则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散，则 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \end{cases}$$

2）比较判别法极限形式

设 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = M$

若 0<M<+∞,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散性

① 若 M=0,　$\text{则}\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛，则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散，则 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \end{cases}$

② 若 M=+∞，$\text{则}\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛，则 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散，则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \end{cases}$

注：常用的v_n形式：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p>1 & 收敛 \\ p\le 1 & 发散 \end{cases}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a>0, q>0)$ $\begin{cases} q<1 & 收敛 \\ q\ge 1 & 发散 \end{cases}$

3）比值判别法：

$$设\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,则\sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\rho<1 & \textit{收敛} \\ \rho>1 & \textit{发散} \\ \rho=1 & \textit{不确定}\end{cases}$$

4）根值判别法：

$$设\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho，则\sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\rho<1 & \textit{收敛} \\ \rho>1 & \textit{发散} \\ \rho=1 & \textit{不确定}\end{cases}$$

注：

比值法，根值法使用方便，但适用范围较窄，对某些明显发散级数无法判定

标志性符号：$a^n, n^n, n!$

例：$\sum_{n=1}^{\infty} n$

比较法和比较法极限使用较复杂，但适用范围广，常与不等式结合考察

标志性符号：$n^p, ln^p n$

例：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 均收敛 ，则

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{v_n}{n^p}}\,(p>1)$均收敛

（2） 交错级数 （$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$,$u_n>0$）

莱布尼茨准则：若（1）u_n单调减；（2）$\lim_{n\to\infty}u_n = 0$

则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

（3） 任意项级数

绝对收敛与条件收敛

① 绝对收敛的级数一定收敛 ，即$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛→ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

② 条件收敛的级数的所有正项（负项）构成的级数一定发散

5.2 幂级数

（一）收敛半径 收敛区间 收敛域

定理一 阿贝尔引理

（1） 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0(x_0 \neq 0)$时收敛，则$|x| < |x_0|$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛

（2） 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0$时发散，则$|x| > |x_0|$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$发散

注：若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点$x = x_0$处条件收敛，则点$x_0$必为该幂级数收敛区间（-R,R）的一个端点

定理 2： 若$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$,则$R = \frac{1}{\rho}$

定理 3： 若$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$,则$R = \frac{1}{\rho}$

收敛半径： R

收敛区间： （-R,R）

收敛域： （-R,R）+点 $x_0 = \pm R$处敛散性

（二）幂级数的基本性质

1）有理运算性质

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R_1$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径为$R_2$，令 R=min{$R_1$，$R_2$},则当$x \in (-R, R)$

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

② $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$

③ 除法：$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

注：只说明在（-R,R）范围内成立，未说明新得出级数的收敛半径为 R，需重新计算

2） 分析性质

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为 R，和函数$S(x)$,则

（1） 连续性：和函数$S(x)$在其收敛域上连续

（2） 可导性：和函数$S(x)$在（-R,R）上可导且可逐项求导，半径不变

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

（3） 可积性：和函数$S(x)$在（-R,R）上可积且可逐项积分，半径不变

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

（三）函数的幂级数展开

定理 1 如果函数$f(x)$能展开为$x-x_0$的幂级数，则展开式唯一，为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$,称其为$f(x)$在$x=x_0$处的泰勒级数

能否展开看带有拉格朗日余项的泰勒展开的余项极限值是否为 0

注：常用展开式：

(1) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$

(2) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$

(3) $sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)\cdot$

(4) $cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$

(5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots \quad (-1<x\le 1)$

(6)$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+\cdots$

$(-1<x<1)$

展开方法：

1）直接展开法：根据定理

2）间接展开法：根据函数展开的唯一性，从某些已知函数的展开式出发，利用幂级数的性质（四则运算，逐项求导，逐项积分）及变量代换等方法，求得所给函数的展开式。

5.3 级数求和

1. 幂级数求和

同幂级数展开

注：常用公式

(1) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot \qquad (-1<x<1)$

(2) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

(2) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty<x<+\infty)$

(3) $sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot$

$(-\infty<x<+\infty)$

(4) $cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$(-\infty<x<+\infty)$

(5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

$(-1<x\le 1)$

$$(6)(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+\cdots$$

$$(-1<x<1)$$

2. 常数项级数求和

数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}bn$满足：

$$\sum_{n=0}^{\infty}bn=\sum_{n=0}^{\infty}a_n{x_0}^n=S(x_0)$$

即：将问题转化成求常数项级数所对应的幂级数在某一特定点的和函数值

5.4 傅里叶级数

(一)傅里叶系数与傅里叶级数

傅里叶系数：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx \qquad n=0,1,2$$

$$b_n=\tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnxdx \qquad n=1,2$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_ncosnx+b_nsinnx)$$

(二)收敛定理（狄利克雷条件）

设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有连续或有有限个第一类间断点，且只有有限个极值点，则$f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上处处收敛，且收敛于

$$\begin{cases} S(x)=f(x) & x为f(x)的连续点\\ S(x)=\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & x为f(x)的间断点\\ S(x)=\dfrac{f((-\pi)^+)+f(\pi^-)}{2} & x=\pm\pi \end{cases}$$

(三)函数展开为傅里叶级数

1. 周期为2π的函数的展开

（1）$[-\pi,\pi]$上展开

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnxdx \qquad n=1,2\cdots$$

（2）$[-\pi,\pi]$上奇偶展开

①$f(x)$为奇函数

$$a_n=0$$

$$b_n=\tfrac{2}{\pi}\textstyle\int_{0}^{\pi}f(x)sinnxdx \qquad n=1,2\cdots$$

② $f(x)$为偶函数

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0$$

④ 在$[0,\pi]$上展开为正弦或展为余弦

展为正弦函数：在$[-\pi,0]$做奇延拓

展为余弦函数：在$[-\pi,0]$做偶延拓

2. 任意周期$2l$函数的展开

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n = 1,2\cdots$$

2）$[-\pi,\pi]$上奇偶展开

①$f(x)$为奇函数

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n = 1,2\cdots$$

② $f(x)$为偶函数

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0$$