例1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0 \\ \sin x, & 0\le x<1 \end{cases}$，求 $\int f(x)dx$

解：因为 $f(x)$ 在区间 $[-1,1)$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1)$ 上不定积分存在，积分得

$$\int f(x)dx=\begin{cases} \int x^2dx, & -1\le x<0 \\ \int \sin x dx, & 0\le x<1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^3}{3}+C, & -1\le x<0 \\ -\cos x+C_1, & 0\le x<1 \end{cases}$$

因 $\int f(x)dx$ 在 $x=0$ 处连续（可导必连续），所以

$$\lim_{x\to 0^-}\int f(x)dx=\lim_{x\to 0^+}\int f(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad C=-1+C_1 \Rightarrow C_1=C+1$$

故
$$\int f(x)dx=\begin{cases} \frac{x^3}{3}+C, & -1\le x<0 \\ 1-\cos x+C, & 0\le x<1 \end{cases}$$

例2. 设 $f'(\ln x)=\begin{cases} 1+x, & x\le 1 \\ 2+\ln x, & x>1 \end{cases}$，求函数 $f(x)$ 的表达式

解：令 $t=\ln x$，则 $x=e^t$，所以

$$f'(t)=\begin{cases} 1+e^t, & t\le 0 \\ 2+t, & t>0 \end{cases}$$

即
$$f'(x)=\begin{cases} 1+e^x, & x\le 0 \\ 2+x, & x>0 \end{cases}.$$

$\left(\int f'(x)dx=f(x)+C\right)$

积分得
$$f(x)=\int f'(x)dx=\begin{cases} \int (1+e^x)dx, & x\le 0 \\ \int (2+x)dx, & x>0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x+e^x+C, & x\le 0 \\ 2x+\frac{x^2}{2}+C_1, & x>0 \end{cases}$$

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续（可导必连续），所以

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

$$\Rightarrow \quad 1+C=C_1$$

故
$$f(x)=\begin{cases} x+e^x+C, & x\le 0 \\ 2x+\frac{x^2}{2}+1+C, & x>0 \end{cases}$$

例3. 已知$\frac{\sin x}{x}$是函数$f(x)$的一个原函数，求$\int x^3 f(x)dx$。

解：由题设知 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'$.

$$\int x^3 f(x)dx=\int x^3 d f(x)=x^3 f(x)-\int f(x)d(x^3)$$

$$=x^3 f(x)-\int 3x^2 f(x)dx=x^3 f(x)-\int 3x^2 d\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^3 f(x)-\left[3x^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)-\int \frac{\sin x}{x}d(3x^2)\right]$$

$$=x^3\left(\frac{\sin x}{x}\right)'-3x\sin x+6\int \sin x\,dx$$

$$=x^3\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-3x\sin x-6\cos x+C$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$$

例4. 设函数$f(x)$有连续导数且$f'(x)\neq 0$，$f^{-1}(x)$为$f(x)$的反函数，$F(x)$为$f(x)$的原函数，求$\int f^{-1}(x)dx$

解：令$y=f^{-1}(x)$，则$x=f(y)$，所以

$$\int f^{-1}(x)dx=\int y\,df(y)=yf(y)-\int f(y)dy$$

$$=yf(y)-F(y)+C=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C$$

例5. 计算$\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

解：$$\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=-\int\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}d(1-x)$$

$$=-2\int\frac{1}{1+(\sqrt{1-x})^2}d\sqrt{1-x}=-2\arctan\sqrt{1-x}+C$$

例6. 计算$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx\ (a>0)$

解：$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx=\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt{(a^{\frac{3}{2}})^2-(x^{\frac{3}{2}})^2}}d(x^{\frac{3}{2}})$$

$$=\frac{2}{3}\arcsin\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}+C=\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}+C$$

例7. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx = \int \frac{2}{2+\cos x}dx - \int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx$

$= \int \frac{2}{1+2\cos^2\frac{x}{2}}dx + \int \frac{1}{2+\cos x}d(2+\cos x)$

$= \int \frac{2\sec^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}+2}dx + \ln(2+\cos x)$

$= 4\int \frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+3}d\tan\frac{x}{2} + \ln(2+\cos x)$

$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \ln(2+\cos x) + C$

例18 $\int \frac{\sin x+2\cos x}{3\sin x+4\cos x}dx$

解：因为 $(3\sin x+4\cos x)' = 3\cos x - 4\sin x$

所以令

$\sin x+2\cos x = A(3\sin x+4\cos x) + B(3\cos x-4\sin x)$

$= (3A-4B)\sin x + (4A-3B)\cos x$

比较两边同类项系数得

$\begin{cases} 3A-4B=1 \\ 4A-3B=2 \end{cases} \Longrightarrow A=\frac{11}{25},\ B=\frac{2}{25}$

于是 $\int \frac{\sin x+2\cos x}{3\sin x+4\cos x}dx = \int \frac{\frac{11}{25}(3\sin x+4\cos x)+\frac{2}{25}(3\cos x-4\sin x)}{3\sin x+4\cos x}dx$

$= \frac{11}{25}\int dx + \frac{2}{25}\int \frac{1}{3\sin x+4\cos x}d(3\sin x+4\cos x)$

$= \frac{11}{25}x + \frac{2}{25}\ln|3\sin x+4\cos x| + C$

例19 $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{4}{3}}}dx$ $\quad t=x^{\frac{1}{6}}$

令 $x=t^6$，则 $dx=6t^5dt$，于是

$\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{4}{3}}}dx = \int \frac{t^2}{t^9+t^8}6t^5dt = 6\int \frac{dt}{t(t+1)}$

$= 6\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = 6(\ln|t| - \ln|1+t|) + C$

$= 6\ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + C = 6\ln\frac{x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{6}}} + C$

例110 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx$ ~~$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int dx$~~

$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$

令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，所以

$\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = \int t\,d\frac{1}{t^2-1} = \frac{t}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C_1$

$= x\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}\right| + C_1 = x\sqrt{\frac{1+x}{x}} + \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}) + C_1$

故 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left[x\sqrt{\frac{1+x}{x}} + \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}) + C_1\right]$

$= \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}) + C \quad (C=-\frac{1}{2}C_1)$

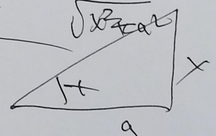
例11 $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx$

解 令 $x=a\tan t\ \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $dx=a\sec^2 t\,dt$，于是

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx=\int \frac{\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}}{a^2\tan^2 t}a\sec^2 t\,dt$$

$$=\int \frac{a\sec t}{a^2\tan^2 t}\cdot a\sec^2 t\,dt=\int \frac{1}{\sin^2 t\cos t}dt$$

$$=\int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cos t}dt=\cancel{\int\left(\sec t+\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)}$$



$$=\int \sec t\,dt+\int \frac{1}{\sin^2 t}d\sin t$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|-\frac{1}{\sin t}+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C_1$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C$$

$(C=C_1-\ln a)$

$\sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$

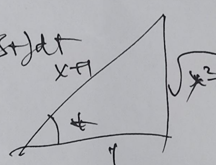
$\tan t=\frac{x}{a}$

例12 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2}dx=\int \frac{\sqrt{(x+1)^2-1}}{(x+1)^2}dx$

令 $x+1=\sec t\ \left(0\le t<\frac{3\pi}{2}\text{ 或 }\pi<t<\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $dx=\sec t\tan t\,dt$，

于是 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2}dx=\int \frac{\sqrt{\sec^2 t-1}}{\sec^2 t}\cdot\sec t\tan t\,dt$

$$=\int \frac{\tan t}{\sec^2 t}\cdot\sec t\tan t\,dt=\int(\sec t-\cos t)dt$$



$$=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+C$$

$$=\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|-\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}+C$$

$\sin t=\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$

$\tan t=\sqrt{x^2+2x}$

$\sec t=x+1$

例13. $\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx=\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}dx$

$$=\int \frac{x\cos\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{4}\int \frac{x}{\sin^3\frac{x}{2}}d\sin\frac{x}{2}$$

$$=-\frac{1}{8}\int x\,d\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)=-\frac{1}{8}\int x\,d\csc^2\frac{x}{2}$$

$$=-\frac{1}{8}\left[x\csc^2\frac{x}{2}-\int \csc^2\frac{x}{2}dx\right]$$

$$=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int \csc^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C$$

例14 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx=\int e^{2x}(\sec^2 x+2\tan x)dx$

$$=\int e^{2x}\sec^2 x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx$$

$$=\int e^{2x}d\tan x+2\int e^{2x}\tan x\,dx$$

$$=e^{2x}\tan x-\int \tan x\,de^{2x}+2\int e^{2x}\tan x\,dx$$

$$=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx=e^{2x}\tan x+C$$

例15 设$F(x)$是函数$f(x)$的原函数，且当$x>0$时 $f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0)=1$，$F(x)>0$，试求函数$f(x)$的表达式。

解 因为 $F'(x)=f(x)$，所以

$$2F'(x)F(x)=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow \left(F^2(x)\right)'=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow F^2(x)=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=\int\frac{e^x}{1+x}dx-\int\frac{e^x}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\int e^x\,d\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\frac{e^x}{1+x}-\int\frac{e^x}{1+x}dx=\frac{e^x}{1+x}+C$$

由$F(0)=1$得$C=0$，所以

$$F(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+x}}$$

故 $$f(x)=F'(x)=\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

例16 $\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int x\,d\sin(\ln x)$

$$=x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx$$

$$=x\sin(\ln x)-\left[x\cos(\ln x)-\int x\,d\cos(\ln x)\right]$$

$$=x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+\int x(-\sin(\ln x))\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]-\int\sin(\ln x)dx$$

$$\Rightarrow \int\sin(\ln x)dx=\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+C.$$

例17 $\int xe^x\sin x\,dx$

解 $$\int e^x\sin x\,dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$$

$$\int e^x\cos x\,dx=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C$$

因此 $$\int xe^x\sin x\,dx=\int x\,d\left[\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)\right]$$

$$=\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)-\int\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\frac{x}{2}e^x(\sin x-\cos x)+\frac{e^x}{2}\cos x+C$$

例18 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx = 2\int x\,d\sqrt{e^x-1}$

$= 2x\sqrt{e^x-1} - 2\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(1+t^2)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$，因此

$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$= 2t - 2\arctan t + C_1 = 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C_1$

于是 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx = 2x\sqrt{e^x-1} - 2\left[2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C_1\right]$

$= (2x-4)\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C \quad (C=-2C_1)$

例19 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = -\int \arcsin e^x\,de^{-x}$

$= -\left[e^{-x}\arcsin e^x - \int e^{-x}\,d\arcsin e^x\right]$

$= -e^{-x}\arcsin e^x + \int e^{-x}\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}e^x\,dx$

$= -e^{-x}\arcsin e^x + \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$= -e^{-x}\arcsin e^x + \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}}dx$

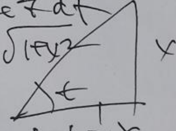
$= -e^{-x}\arcsin e^x - \int \frac{1}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}}de^{-x}$

$= -e^{-x}\arcsin e^x + \ln\left|e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}-1}\right| + C$

例20 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

解：令 $x=\tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $t=\arctan x$，$dx=\sec^2 t\,dt$，

于是 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{\tan t\cdot e^t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sec^2 t\,dt$



$= \int e^t \sin t\,dt = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C$

$= \frac{e^{\arctan x}}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$

$= \frac{1}{2}e^{\arctan x}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} + C$

$\tan t = x$

$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

例21 $\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}dx$

$=\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx$

$=\int e^{-\frac{x}{2}}d(2\sqrt{\sin x})-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx$

$=2\sqrt{\sin x}e^{-\frac{x}{2}}-\int 2\sqrt{\sin x}de^{-\frac{x}{2}}-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx$

$=2\sqrt{\sin x}e^{-\frac{x}{2}}+\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx$

$=2\sqrt{\sin x}e^{-\frac{x}{2}}+C$

例22. $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^{x}dx$

$=\int\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^{x}dx$

$=\int\frac{e^{x}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int e^{x}\tan\frac{x}{2}dx$

$=\int e^{x}d\tan\frac{x}{2}+\int e^{x}\tan\frac{x}{2}dx$

$=e^{x}\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}\cdot e^{x}dx+\int e^{x}\tan\frac{x}{2}dx$

$=e^{x}\tan\frac{x}{2}+C$

例23 $\int\frac{e^{x}}{e^{2x}-2e^{x}-3}=\int\frac{1}{(e^{x})^2-2e^{x}-3}de^{x}$

$\xlongequal{t=e^{x}}\int\frac{1}{t^2-2t-3}dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\ln|t-3|-\frac{1}{4}\ln|t+1|+C$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-3}{t+1}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^{x}-3}{e^{x}+1}\right|+C$

例24. $\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx\quad(x>0)$

令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，于是

$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx=\int\ln(1+t)d\frac{1}{t^2-1}$

$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\frac{1}{1+t}dt$

又 $\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+C_1=\frac{1}{4}\ln\frac{t-1}{t+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+C_1$

故原式 $=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\left[\frac{1}{4}\ln\frac{t-1}{t+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+C_1\right]$

$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+C\quad(C=-C_1)$

$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}+C$

例25、设n是大于等于2的整数，试证递推公式

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx$$

证：令 $I_n=\int \sec^n x\,dx$，则

$$I_n=\int \sec^{n-2}x\sec^2 x\,dx=\int \sec^{n-2}x\,d\tan x$$

$$=\sec^{n-2}x\tan x-\int \tan x\,d\sec^{n-2}x$$

$$=\sec^{n-2}x\tan x-\int \tan x\,(n-2)\sec^{n-3}x\cdot\sec x\tan x\,dx$$

$$=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)\int(\sec^2 x-1)\sec^{n-2}x\,dx$$

$$=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)\int \sec^n x\,dx+(n-2)\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2}$$

$$\Longrightarrow I_n=\frac{\sec^{n-2}x\tan x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\qquad n=3,4,\cdots\cdots,$$

得证