第六讲　变限积分问题

1° 变限积分函数的微分法问题

求导公式: $\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt\right)' = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$

例1 设 $f(x)$ 在$[a, b]$上连续，$F(x)=\int_{\sin x}^{x^3} e^{-t^2}dt$, 求 $F'(x)$

例2 [练习十二/三] 设 $x^2+y^2-2=\int_0^{x+y}\cos t^2 dt$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,1)}$

第六讲　变限积分问题

1° 变限积分函数的微分法问题

求导公式: $(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt)' = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$

例1 设 $f(x)$ 在$[a, b]$上连续, $F(x)=\int_{\sin x}^{x^3} e^{-t^2}dt$, 求 $F'(x)$

解 $F'(x)=e^{-(x^3)^2}(x^3)'-e^{-(\sin x)^2}(\sin x)' \quad = 3x^2e^{-x^6}-e^{-(\sin x)^2}\cos x$

例2 [练习十二/三] 设 $x^2+y^2-2=\int_0^{x+y}\cos t^2dt$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,1)}$

解 两边对 x 求导得 $2x+2yy'=\cos(x+y)^2(1+y')$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(x+y)^2-2x}{2y-\cos(x+y)^2}$ 令 $x=-1, y=1$ 得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,1)}=3$

例3 设 $y=y(x)$ 由方程 $\int_x^y e^{\frac{1}{2}t^2}t\,dt=1$ 所确定，求 $y'(x),\ y''(x)$

例4 [练习十二/四] 函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $x=\int_0^t e^{u^2-2u}du,$

$y=\int_0^t e^{u^2-2u+2\ln u}du$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}$

例3 设 $y=y(x)$ 由方程 $\int_x^y e^{\frac{1}{2}t^2}tdt=1$ 所确定，求 $y'(x), y''(x)$

解 两边对 x 求导得 $e^{\frac{1}{2}y^2}y'-e^{\frac{1}{2}x^2}=0 \Rightarrow y'=e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}$

$$\therefore\ y''=e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}\cdot\frac{1}{2}(2x-2yy')=e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}(x-ye^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)})$$

$$=xe^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}-ye^{x^2-y^2}$$

例4 [练习十二/四] 函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $x=\int_0^t e^{u^2-2u}du$,

$y=\int_0^t e^{u^2-2u+2\ln u}du$ 所确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}$

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{e^{t^2-2t+2\ln t}}{e^{t^2-2t}}=t^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{e^{t^2-2t}}$$

$$\therefore \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\left(\frac{2t}{e^{t^2-2t}}\right)_{t=1}=2e$$

2° 变限积分函数的单调、极值、凹凸性等问题

例5 [练习十二/十一] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$, 试证: 若 $f(x)$ 单调不增，则

$F(x)$单调不减

例5解

$$F(x)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$$

$$\mathrm{F}'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2xf(x) \quad =\int_0^x f(t)dt-xf(x)$$

$$=f(\xi)x-f(x)x$$ (ξ 介于 0 与 x 之间)

$$=(f(\xi)-f(x))x$$

由于 $f(x)$ 单调减

$$\Rightarrow \ (f(\xi)-f(x))x\geq 0 \qquad \Rightarrow \ \mathrm{F}'(x)\geq 0$$

$\Rightarrow F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调不减

例6 设正值函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，

证明: 当 $x \geq 0$时，

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}, & x>0 \\ 0, & x=0\end{cases}$$

是单调增加的

例6 设正值函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，

证明: 当 $x\geq 0$时，

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$ 是单调增加的

解 对任意的 $x\in(0,+\infty)$，

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}$$

$$= \frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\left[x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right] \quad = \frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt > 0$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $(0\,,+\infty)$ 上严格单调增

又 $$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} \overset{洛}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{f(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} x = 0 = \varphi(0)$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[\,0\,,+\infty)$ 上严格单调增

例7 求函数 $I(x)=\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t^4}dt$ 的极值

例7 求函数 $I(x)=\int_{0}^{x^2}(t-1)e^{-t^4}dt$ 的极值

解 $I'(x)=(x^2-1)^2e^{-x^8}\cdot 2x=0$

$\Rightarrow$ 驻点： $x=0$, $x=-1$, $x=1$

当 $x<-1$ 时， $I'(x)<0$

当 $-1<x<0$ 时， $I'(x)<0$

当 $0<x<1$ 时， $I'(x)>0$

当 $x>1$ 时， $I'(x)>0$

$\Rightarrow$ $x=-1$ 不是极值点

$\Rightarrow$ $x=0$ 是极小值点

$\Rightarrow$ $x=1$ 不是极值点

所以函数有极小值 $I(0)=0$

例8 证明函数 $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t\,dt$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值不超过 $\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

例8 证明函数 $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t\,dt$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值不超过 $\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

解 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x=x(1-x)\sin^{2n}x=0$

当 $x\in(0, 1)$ 时，$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调增

当 $x\in(1, +\infty)$ 时，$f'(x)\le 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调减

$$\Rightarrow f(x)\le f(1)\ ,\ x\in[0, +\infty)$$

而 $f(1)=\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n} t\,dt < \int_0^1 (t-t^2)t^{2n}dt$

$$=\int_0^1 t^{2n+1}dt-\int_0^1 t^{2n+2}dt = \frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$$

例9 若 $f(x)$ 是[a, b] 上取正值的连续函数，试证明:

$$y(x)=\int_{a}^{b}|x-t|f(t)dt$$ 是 [a , b]上的凸函数

例9 若 $f(x)$ 是$[a, b]$ 上取正值的连续函数，试证明:

$$y(x)=\int_a^b |x-t| f(t)dt$$ 是 $[a, b]$上的凸函数

解 $$y=\int_a^b |x-t| f(t)dt=\int_a^x (x-t) f(t)dt+\int_x^b (t-x) f(t)dt$$

$$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt+\int_x^b tf(t)dt-x\int_x^b f(t)dt$$

$$y'=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)-xf(x)-(\int_x^b f(t)dt-xf(x))$$

$$=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b f(t)dt$$

$$y''=f(x)+f(x)=2f(x)>0$$

$\Rightarrow y(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凸函数

例10 **[练习十二/十]** 求 $f(x)$，使 $f(x)$ 对任意正数 a 在

$[0, a]$上可积, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$，又满足:

$$f(x) = \sqrt{\int_0^x f(t)dt}$$

例10 [练习十二/十] 求 $f(x)$，使 $f(x)$ 对任意正数 a 在 $[0, a]$上可积, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$，又满足:

$$f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)dt}$$

解 $f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)dt} \Leftrightarrow f^2(x)=\int_0^x f(t)dt$

两边对 x 求导有 $2f(x)f'(x)=f(x)$

由 $f(x)>0 \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x+c$

又 $f(0)=\sqrt{\int_0^0 f(t)dt}=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x$

例11 已知 $f(x)$ 在 $[a, \mathrm{b}]$ 上连续，对任意的

$[\alpha, \beta] \le [a, \mathrm{b}]$，有

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \le M \left| \beta - \alpha \right|^{1+\delta}$$

其中 M，δ 为正数，证明: 在 $[a, \mathrm{b}]$ 上 $f(x) \equiv 0$

例11 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，对任意的

$[\alpha, \beta] \leq [a, b]$，有

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq M|\beta-\alpha|^{1+\delta}$$

其中 M，δ 为正数，证明: 在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$

解 设 $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$， 则 $F'(x)=f(x)$， $x \in [a,b]$

下证: $F'(x)=0$， $x \in [a,b]$

任取 $x_0 \in [a, b]$，则

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right| = \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{\alpha}^{x} f(t)dt - \int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt\right|$$

$$=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| \quad \le \frac{M|x-x_0|^{1+\delta}}{|x-x_0|}=M|x-x_0|^{\delta}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right|=0$$

$$\Rightarrow F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=0$$

由于 x_0 在 $[a,b]$ 中任取 $\quad \Rightarrow \quad F'(x)=0\,,\quad x\in[a,b]$

即 $\quad F'(x)=f(x)\equiv 0\,,\quad x\in[a,b]$

3° 与积分有关的数列极限计算

例12 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{e^{x}}{\sqrt{x}}dx$

例12 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$

解 取 $f(x)=\sqrt{x}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}}\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$，则 $a_n=f(n)$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}}\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim_{t\to0^+}\frac{\int_t^{2t}\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{t}} \overset{\text{洛}}{=\!=\!=}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{2e^{2t}}{\sqrt{2t}}-\frac{e^t}{\sqrt{t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=\lim_{t\to0^+}2(\sqrt{2}e^{2t}-e^t)=2(\sqrt{2}-1)$$

$\therefore$ 原极限 $=2(\sqrt{2}-1)$

例13 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}dx\right]^n$

例13 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}[\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}dx]^n$

解 $\because\ e^x = 1 + x + \dfrac{e^{\xi}}{2}x^2$ 令 $x = -\dfrac{x^2}{n}$

得 $e^{-\frac{x^2}{n}} = 1 - \dfrac{x^2}{n} + \dfrac{e^{\xi_n}}{2}\dfrac{x^4}{n^2}$ ， $-\dfrac{x^2}{n} < \xi_n < 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}dx = 1 - \frac{1}{3n} + \frac{1}{2n^2}\int_0^1 e^{\xi_n}x^4dx$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}dx\right]^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}dx\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}dx\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}dx\right) = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{3n}+\frac{1}{2n^2}\int_0^1 e^{\xi_n}x^4dx\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{1}{3n}+\frac{1}{2n^2}\int_0^1 e^{\xi_n}x^4dx\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}\int_0^1 e^{\xi_n}x^4dx\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}dx\right]^n = e^{-\frac{1}{3}}$$

例14 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

例14 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}]$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}}]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\sqrt{x}dx=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2$$

例15 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n^n\cdot n!}}$

例15 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n^n\cdot n!}}$

解

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+n)(n+n-1)\cdots(n+1)}{n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n}{n}\right)\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})} = e^{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}}$$

现 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}$

$$=\int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$$

$$=2\ln 2-1$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}} = e^{2\ln 2-1} = 4e^{-1}$$