第一章　函数与极限

§1.1　导数的概念

1^0 导数问题的提出

（1）非等速直线运动的瞬时速度的计算问题

设物体作非等速直线运动，其运动方程

为$s = f(t)$, 计算物体在 $t = t_0$ 时的瞬时速度 $v(t_0)$

考虑时间段$[t_0, t_0+\Delta t]$

此时间段物体移动的路程：

$$\Delta s = f(t_0+\Delta t) - f(t_0)$$

在此时间段物体的平均速度：

$$\bar{v}(t_0)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

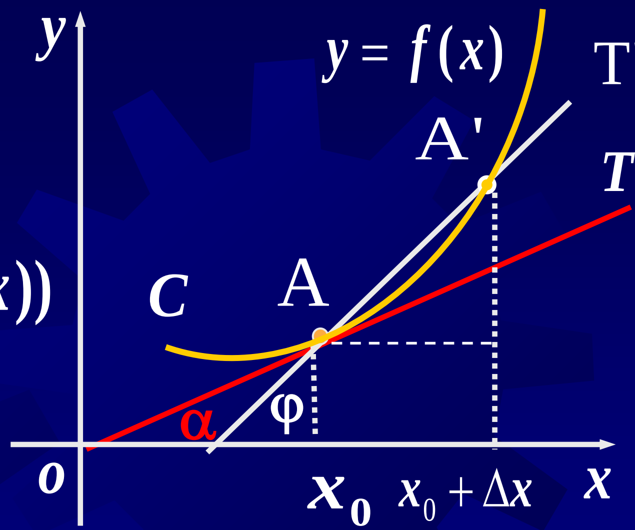
物体在 t_0 时刻的瞬时速度

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

（2）曲线切线的计算问题

设曲线 C: $y=f(x)$, 计算曲线在点 A(x_0, y_0) 处的切线方程

如何定义曲线在A点处的切线？



设点 $A(x_0, y_0)$, $A'(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$

如果 $A' \xrightarrow{\text{沿曲线C}} A$

割线 AT′ 绕点A旋转而趋向极限位置 AT

我们称直线 AT为曲线 C 在点 A 处的切线

曲线在A 点处的切线的斜率：

$$k = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

可以发现：尽管以上两个问题具有不同的背景，但数学上都面临相同的问题：

计算函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的差商的极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

类似地人们发现许多物理量的计算也将遇到类似量的计算问题 ， 例如

加速度：速度关于时间 t 的差商的极限；

角速度：角度关于时间 t 的差商的极限；

电流：电量关于时间 t 的差商的极限；

2^0 导数的定义

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $N(x_0)$ 内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增 Δx (点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内)时，相应的函数 y 取得增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果 Δy 与 Δx 之比的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**, 并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**, 记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记为 $y'\big|_{x=x_0}$　$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$　$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$

说明：（1）瞬时速度：　$v(t_0)=f'(t_0)$

曲线 C : $y=f(x)$ 在点 $A(x_0,y_0)$ 处的切线斜率：

$$k=\tan\alpha=f'(x_0)$$

（2）若记 $M=\{x \mid f(x)在x处可导\}$，则对任意的

$x\in M$，唯一确定一导数值 $f'(x)$ 与之对应，

此函数称为 $f(x)$ 的导函数, 记为 $f'(x)$

（当 x 为定点时，$f'(x)$ 指 $f(x)$ 在 x 处的导数值，

当 x 为变量时，$f'(x)$指 $f(x)$ 的导函数 ）

(3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 表示平均增加率

导数 $f'(x_0)$ 表示函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的增加率

3^0 导数计算举例

例 求函数 $y=mx+b$ 在 x 处的导数

解

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)+b-(mx+b)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0} m=m$$

例　求函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x\neq 0$ 处的导数

解　当 $x\neq 0$ 时

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right]=-\frac{1}{x^{2}}$$