§ 1.2 极限的概念及其性质

1^0 极限理论的重要地位

创立微积分：

牛顿 (1642 —— 1727)

莱布尼兹 (1646 —— 1716)

对极限给出了严格的定义：

柯西 (1789—— 1857)

维尔斯特拉斯 (1815 —— 1897)

2^o 数列与收敛数列

定义　数列是以自然数集 N 为定义域的函数，若记此函数关系为 f，则

$$a_n = f(n) \quad , \quad n = 1, 2, \cdots$$

就称为**数列**，记为 $\{a_n\}$，而 a_n 称为数列的**通项**

有界数列：对于数列 $\{a_n\}$，如果存在 $M > 0$，使对一切 n 有

$$|a_n| \le M$$

则称数列 $\{a_n\}$ 为**有界数列**，否则称为**无界数列**

单调数列:

(1) 若对一切 n , 有 $a_n \le a_{n+1}$

则称数列 $\{a_n\}$ 为单调增数列 .

(2) 若对一切 n , 有 $a_{n+1} \le a_n$

则称数列 $\{a_n\}$ 为单调减数列

本段我们讨论数列 $\{a_n\}$ 的极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

定义 对任意的正数 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时，

有 $$|a_n - A| < \varepsilon$$

则称当 $n \to \infty$ 时，a_n 以 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

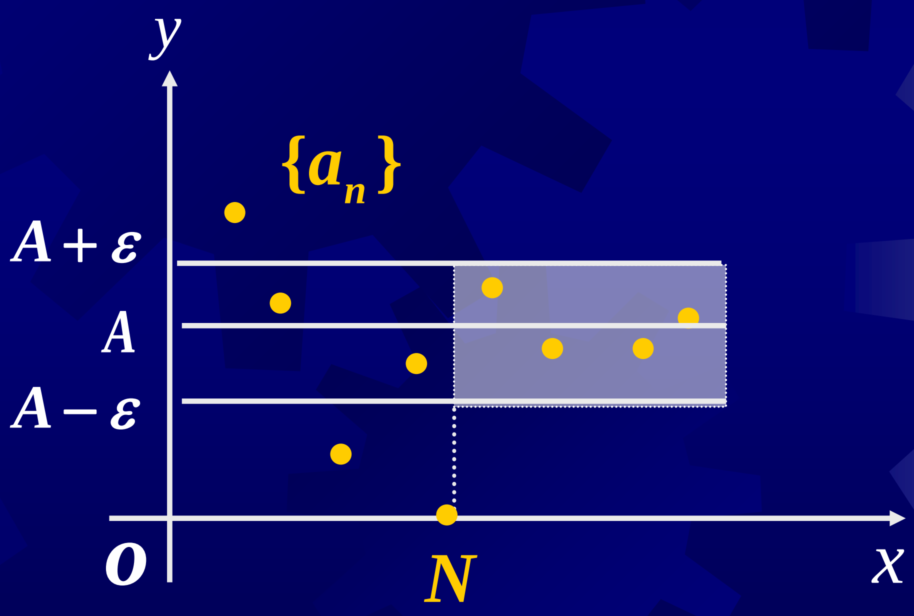
我们称有极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 的数列 $\{a_n\}$ 为收敛数列，

而 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在的数列称为发散数列

数列极限的几何意义

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时，有

$$A - \varepsilon < a_n < \varepsilon + A$$



例 对于数列 $\{ r^n \}$，证明：当 $|r|<1$ 时为收敛数列

解 当 $|r|<1$ 时，我们证明：$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

如果 $r = 0$，则 $r^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

下设 $0<|r|<1$．对任意的 $\varepsilon > 0$，要使

$$|r^n - 0| = |r^n| < \varepsilon$$

只需 $n\ln|r| < \ln\varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|r|}$，故取 $N = [\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|r|}]$

则当 $n > \mathrm{N}$ 时，就有

$$|r^n| < \varepsilon$$

说明: (1) 当 $r = 1$ 时, $r^n = 1$,

$\Rightarrow \{r^n\}$ 为收敛数列

(2) 当 $r = -1$ 时, $r^n = (-1)^n$, 由于其轮番地

取 -1 或 1 , 不接近于任何常数 , 故知

$\{r^n\} = \{(-1)^n\}$ 为发散数列

定理（数列收敛的必要条件）

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\{a_n\}$ 是有界数列 ,

即存在 M > 0 , 使对任意 n 都有 $|a_n| \le M$

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$， 则对 $\varepsilon = 1$, 存在 $N > 0$,

使当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - A| < \varepsilon = 1$,

于是有

$$|a_n| = |a_n - A + A| \le |a_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1 + |A|\}$

则对任意的自然数 n, 有

$$|a_n| \le M$$

定义 在已给数列 $\{a_n\}$ 中，任意取出无限多项排成一列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots,$

$n_k \in N$，$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，构成一数列 $\{a_{n_k}\}$，

我们称 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的**子数列**

定理 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow$ 对 $\{a_n\}$ 的任一子数列

$\{a_{n_k}\}$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$

说明: 对于数列 $a_n = (-1)^n$

$$\left.\begin{array}{l} \text{取 } n_k = 2k, \text{ 则 } \{a_{n_k}\} = 1 \to 1 \\ \text{取 } n_k = 2k-1, \text{则 } \{a_{n_k}\} = -1 \to -1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = (-1)^n \text{ 发散}$$

定理 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = A$

证明 "$\Rightarrow$" 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$， 则对任意 $\varepsilon > 0$，

存在 $N > 0$，使当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

由于 $2N > N$，$2N+1 > N$， 故可取 $K = N$，使当

$k > K$ 时， 就有 $2k > 2K > N$，$2k + 1 > N$， 从而有

$$|a_{2k} - A| < \varepsilon \ , \ |a_{2k+1} - A| < \varepsilon \ ,$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = A$， $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = A$

"$\Leftarrow$" 设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = A$， $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = A$

则对任意 $\varepsilon > 0$，分别存在 $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, 使当

$k > K_1$ 时 , 有 $|a_{2k} - A| < \varepsilon$,

当 $k > K_2$ 时 , 有 $|a_{2k+1} - A| < \varepsilon$

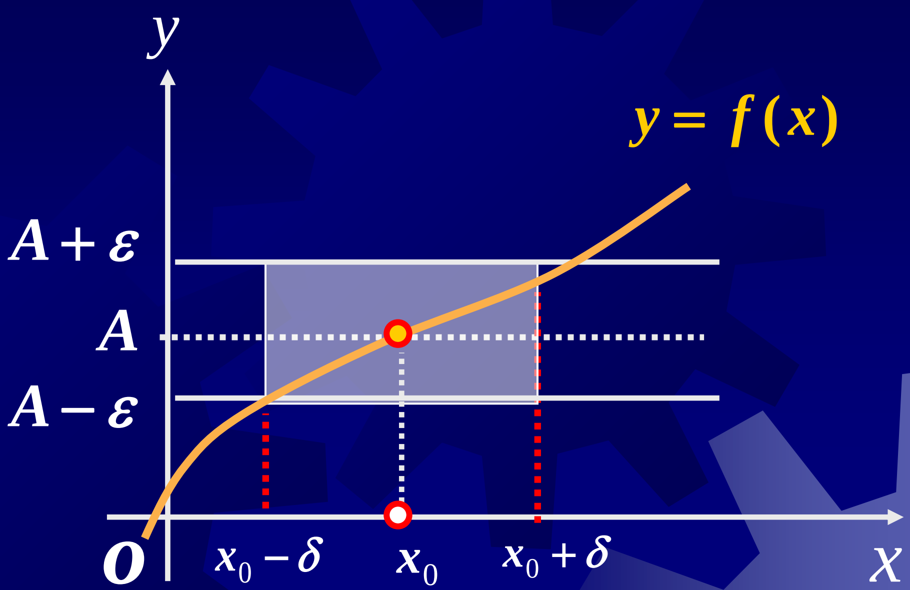
取 $N = max\{ 2K_1 ,\ 2K_2+1 \}$， 则当 $n > N$ 时 , 必有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

即 $$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

3^0 自变量趋于有限值时函数的极限

定义： 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $N(x_0)$ (点 x_0 可以除外) 内有定义，A 是一常数，若对任意给定的正数ε> 0，



总可找到一 $\delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

说明：（1） 为什么 x_0 可以除外？

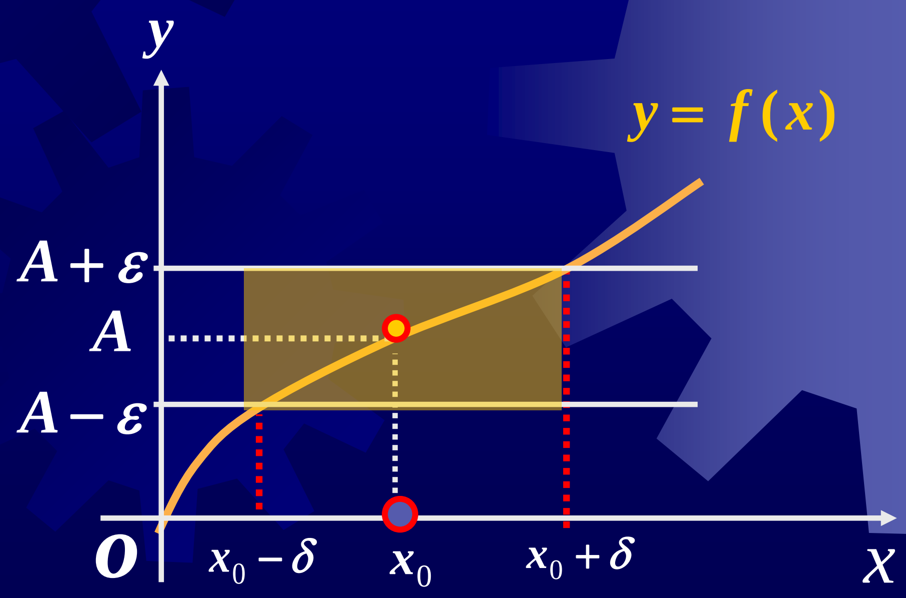
（2）ε为什么要任意给定而不是给定一个？

（3） 存在一 $\delta > 0$ 的意义是什么？是否唯一？

极限定义的几何解释：

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时，函数 $y = f(x)$ 图形完全在以直线 y =A 为中心线，宽为 2ε 的带区域

显然, 在找到一个δ后,比其小的数都可作为定义中的 δ



例　证明：$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-9}{2x-3}=6$

证明：因为当 $x\neq\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=\dfrac{4x^2-9}{2x-3}=2x+3$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-6|<\varepsilon$，即

$$|2x+3-6|=|2x-3|=2\left|x-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

只要取 $\delta<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 的正数，此时当 $0<\left|x-\dfrac{3}{2}\right|<\delta$ 时，

就有 $$\left|\frac{4x^2-9}{2x-3}-6\right|=2\left|x-\frac{3}{2}\right|<2\delta<\varepsilon$$

所以 $$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x-3}=6$$

例 证明：$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

证明 由于 $x \to 2$，故只需在 $x = 2$ 的邻近考虑问题

不妨设 $x \in (1,3)$ 任给 $\varepsilon > 0$, 由于

$$\left|x^2 - 4\right| = \left|x-2\right|\left|x+2\right| < 5\left|x-2\right|, \quad \forall x \in (1,3)$$

为使 $\left|f(x)-4\right| = \left|x^2-4\right| < \varepsilon$, 只需让 $5\left|x-2\right| < \varepsilon$ 即可,

因此可取 $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\}$, 则当 $0 < \left|x-2\right| < \delta$ 时,

就有 $\left|f(x)-4\right| = \left|x^2-4\right| < 5\left|x-2\right| < 5\delta \le 5\cdot\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$

所以证得 $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

例 证明： $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

证明 任给 $\varepsilon > 0$， 注意到

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

及 $|\sin x| \le |x|$， $x \in \boldsymbol{R}$，

于是有 $|\cos x - \cos x_0| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x - x_0|$

所以可取 $\delta = \varepsilon$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有

$$|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$$

由此证得 $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

例 证明: $\lim_{x\to 0} a^x = 1, \quad (a>1)$

证明 任给 $\varepsilon \in (0,1)$, 由于

$$|a^x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon < a^x < 1+\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \log_a(1-\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon)$$

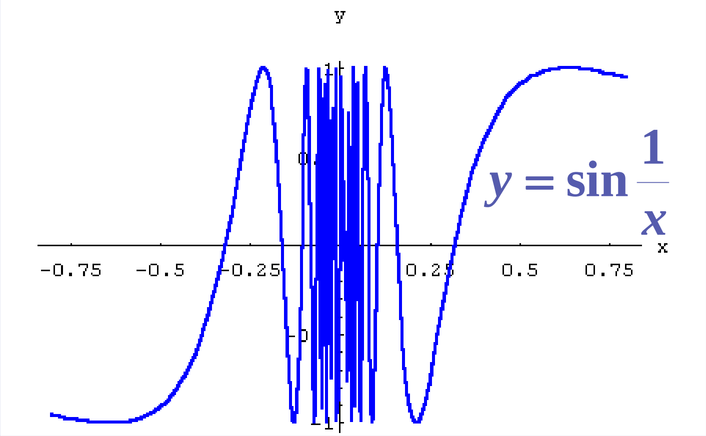
$$\Leftrightarrow -\log_a \frac{1}{1-\varepsilon} < x < \log_a(1+\varepsilon)$$

故取 $\delta = \min\{\log_a \frac{1}{1-\varepsilon}, \log_a(1+\varepsilon)\}$,

则当 $0<|x|<\delta$ 时, 就有 $|a^x - 1| < \varepsilon$,

所以证得 $\lim_{x\to 0} a^x = 1$

例 设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，讨论 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



证 我们证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

对任意的 $\delta>0$，$\hat{N}(0,\delta)$ 中总包含形式为

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\ ,\ y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi+\frac{\pi}{2}}$$

的点使 $f(x_n)=1$，$f(y_n)=-1$，可知在 $x=0$ 的邻近，

函数 $f(x)$ 在 -1 与 1 之间无限震荡，不趋向于任何常数，

所以极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻近无限震荡引起极限不存在

例 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，讨论 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

证 我们先证：对任取的 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $\hat{N}(0,\delta)$上无界

任给 $M>0$， 选取 $\mathbf{N}>\mathbf{0}$，使 $x_N=\dfrac{1}{N+M}\in\hat{N}(0,\delta)$，

$$\Rightarrow f(x_N)=N+M>M$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ 在 } \hat{N}(0,\delta) \text{ 上无界}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \text{不存在}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻近无界引起极限不存在

3^0 单侧极限

右极限： 如果保持 $x > x_0$,且 $x \to x_0$ (简记为

$x \to x_0^+$ 或 $x \to x_0 + 0$) 时,

$$f(x) \to A$$

则称 A 是 x 趋向于x_0 时，$f(x)$在 x_0 处的右极限,

记为 $f(x_0+0)$,即

$$f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

"$\varepsilon-\delta$"定义：

$$f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

使当$0 < x - x_0 < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

左极限: 如果保持 $x < x_0$，且 $x \to x_0$（简记为 $x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0 - 0$）时，

$$f(x) \to A$$

则称 A 是 x 趋向于x_0时，$f(x)$在 x_0 处的左极限，记为 $f(x_0 - 0)$，即

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

"$\varepsilon - \delta$"定义:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

使当$0 < x_0 - x < \delta$时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

关于左极限、右极限与极限有以下的结论:

定理(左、右极限与极限的关系)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限存在,而且 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

证明 "$\Leftarrow$" $\because\ f(x_0+0)=A$,则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,$

使当 $0<x-x_0<\delta_1$ 时,有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

又因 $f(x_0-0)=A$,则 $\exists\delta_2>0$,使当 $0<x_0-x<\delta_2$ 时,

有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \ \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,就有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

由此证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

"$\Rightarrow$" 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$,

存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

于是当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,或 $0 < x_0 - x < \delta$ 时都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

所以有 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$

例　设 $f(x)=\begin{cases} x+1, x<0 \\ 0, \quad x=0 \\ x-1, x>0 \end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

解

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1$$

由于 $f(0-0)\neq f(0+0)$

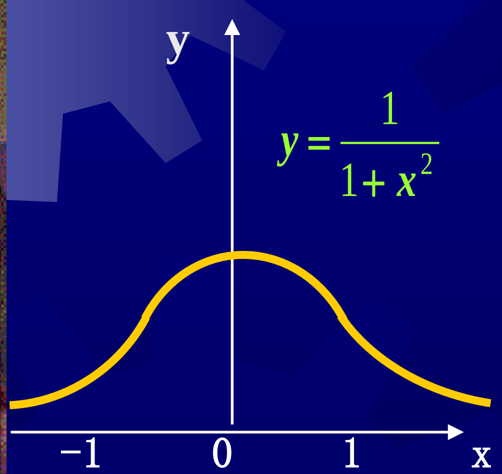
可知极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

4^0 自变量趋向无穷大时函数的极限

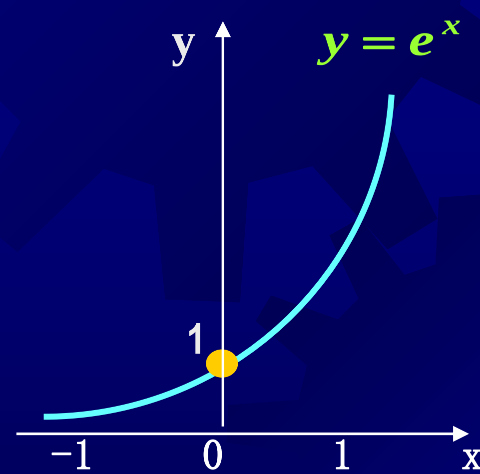
问题： 当自变量 x 趋向无穷远处时，研究函数 $y = f(x)$ 的变化趋势

自变量 x 趋向无穷远处可分为以下三种情况：

(1) $x \to \infty$ (即 $|x| \to +\infty$）；　⑵ $x \to +\infty$；　⑶ $x \to -\infty$

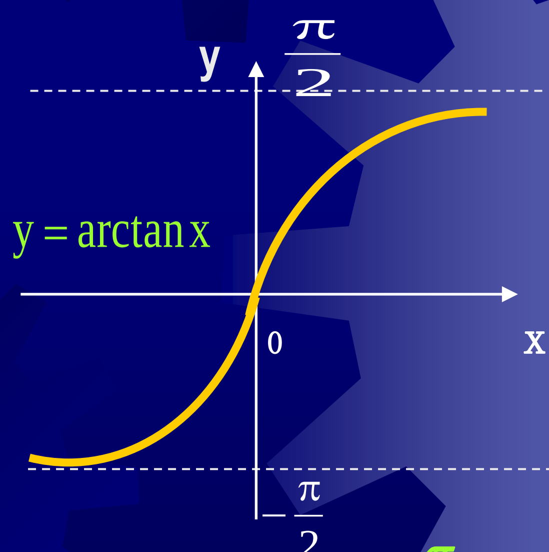


$x \to \infty, y \to 0$



$x \to +\infty, y \to +\infty$

$x \to -\infty, y \to 0$



$x \to +\infty, y \to \dfrac{\pi}{2}$

$x \to -\infty, y \to -\dfrac{\pi}{2}$

定义： (1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists M>0,$

当$|x|>M$时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists M>0,$当$x>M$时，

有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists M>0,$当$x<-M$时，

有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

说明： (1) 定义中的 M 不是唯一的，与 ε有关，

重要的在于存在性

(2) 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则称 $y=A$为曲线 $y=f(x)$

的水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$，则称$y=B$为曲线 $y=f(x)$

在 $x\to+\infty$方向的水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=C$，则称 $y=C$ 为曲线 $y=f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 方向的水平渐近线

与单侧极限类似有以下定理

定理 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

说明：

$y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线的充要条件是 $y=A$ 既是 $x\to+\infty$ 方向的又是 $x\to-\infty$ 方向的水平渐近线

例 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-x}=-1$

解 对任给的 $\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{x}{1-x}-(-1)\right|=\left|\frac{x}{1-x}+1\right|=\left|\frac{1}{1-x}\right|<\varepsilon,$$ 只需 $|1-x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$

又 $|1-x|>|x|-1$，于是让 $|x|-1>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $|x|>1+\dfrac{1}{\varepsilon}$

取 $M=1+\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当 $|x|>M$ 时，就有

$$\left|\frac{x}{1-x}-(-1)\right|=\left|\frac{1}{1-x}\right|\le\frac{1}{|x|-1}\le\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}<\varepsilon,$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}=-1$$

5^0 极限的性质

定理（唯一性定理） 如果极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则此极限值是唯一的

证明 用反证法

设 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个不同的极限，

即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$，$A \neq B$

不妨设 $A < B$ （$A > B$ 的情形类似证明)

对于 $\varepsilon = \dfrac{B-A}{2} > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，

$$|f(x) - A| < \frac{B-A}{2},$$

同样地, 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$|f(x) - B| < \frac{B - A}{2}$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

同时有不等式

$$|f(x) - A| < \frac{B - A}{2}, \quad |f(x) - B| < \frac{B - A}{2}$$ 成立

于是得 $$B - \frac{B - A}{2} < f(x) < A + \frac{B - A}{2},$$

即 $$\frac{A + B}{2} < f(x) < \frac{A + B}{2},$$

矛盾, 假设不成立, 证毕

定理（局部有界性定理）

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $f(x)$在 x_0 的某去心邻域内有界，即存在常数 $M>0$ 及 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)|\le M$$

证明 由 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，根据极限的定义，

对于 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=1$$

于是

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|\le 1+|A|$$

结论成立

定理 (局部保序性定理)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 且 $A>B$,

则存在$\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时,有

$$f(x)>g(x)$$

证明 由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 故对 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$,

存在 $\delta_1>0$, 使当$0<|x-x_0|<\delta_1$时， 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{A-B}{2}$$

可得 $f(x)>A-\varepsilon=A-\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{A+B}{2}$

又由 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$， 存在 $\delta_2 > 0$,

使当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，有

$$|g(x) - B| < \varepsilon = \frac{A-B}{2}$$

即有 $g(x) < B + \varepsilon = B + \dfrac{A-B}{2} = \dfrac{A+B}{2}$

现取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

有 $g(x) < \dfrac{A+B}{2} < f(x)$

定理证毕

若定理中的 $g(x)=0$, 则有以下的推论

推论 (局部保号性定理) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,

且 $A>0$ (或 $A<0$), 则存在 x_0 的某去心邻域使得

$f(x)$在此邻域内与 A 保持同号, 即存在 $\delta>0$,

使当$0<|x-x_0|<\delta$时,有

$$f(x)>0 \ (\text{或 } f(x)<0)$$

注意: 局部保号性的逆定理未必成立

反例 $f(x)=x^2>0$, $x\neq 0$

但是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

尽管如此, 仍有以下结论

推论　如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 且在 x_0 的某去心邻域内

恒有 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$)　, 则有

$$A \geq 0 \ (\text{或 } A \leq 0)$$

证明　利用反证法及局部保号性定理即可证得

说明:

以上三个定理及推论对 x 的其他趋限过程:

$$x \to x_0^-, \ x \to x_0^+, \ x \to \infty, \ x \to +\infty, \ x \to -\infty$$

及数列极限继续成立