第七章 微分方程

7.6

1. 验证 $y_1=\mathrm{e}^{x^2}$ 及 $y_2=x\mathrm{e}^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

解 将 $y_1=\mathrm{e}^{x^2}$ 和 $y_2=x\mathrm{e}^{x^2}$ 代入方程得

$$y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=(2+4x^2)\mathrm{e}^{x^2}-4x\cdot 2x\mathrm{e}^{x^2}+(4x^2-2)\mathrm{e}^{x^2}=0$$

$$y_2''-4xy_2'+(4x^2-2)y_2=(6x+4x^3)\mathrm{e}^{x^2}-4x(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}+(4x^2-2)x\mathrm{e}^{x^2}=0$$

所以 y_1 与 y_2 都是方程的解.

又因为 $\dfrac{y_2}{y_1}=x$ 不是常数，所以 y_1 与 y_2 线性无关，故方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x^2}$$

2. 验证 $y_1=3$， $y_2=3+x^2$， $y_3=3+x^2+\mathrm{e}^x$ 都是方程 $(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+(2x-2)y=6x-6$ 的解，并写出该方程的通解.

解 将 $y_1=3$， $y_2=3+x^2$， $y_3=3+x^2+\mathrm{e}^x$ 代入方程得

$$(x^2-2x)y_1''-(x^2-2)y_1'+(2x-2)y_1=(2x-2)\cdot 3=6x-6$$

$$(x^2-2x)y_2''-(x^2-2)y_2'+(2x-2)y_2=(x^2-2x)\cdot 2-(x^2-2)\cdot 2x+(2x-2)\cdot(3+x^2)=6x-6$$

$$(x^2-2x)y_3''-(x^2-2)y_3'+(2x-2)y_3$$

$$=(x^2-2x)\cdot(2+\mathrm{e}^x)-(x^2-2)\cdot(2x+\mathrm{e}^x)+(2x-2)\cdot(3+x^2+\mathrm{e}^x)=6x-6$$

所以 $y_1=3$， $y_2=3+x^2$， $y_3=3+x^2+\mathrm{e}^x$ 都是方程的解.

因此 $y_2-y_1=x^2, y_3-y_2=\mathrm{e}^x$ 是微分方程所对应的齐次微分方程的解，又 $\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_2}=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$ 不为常数，所以 x^2 与 e^x 线性无关，故方程的通解为

$$y=C_1x^2+C_2\mathrm{e}^x+3$$

3. 验证

⑴ $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}\left(C_1,C_2\text{是任意常数}\right)$ 是方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{5x}$ 的通解；

解　记 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=\mathrm{e}^{2x}, y^*=\dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}$，则

$$y_1''-3y_1'+2y_1=\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x=0$$

$$y_2''-3y_2'+2y_2=4\mathrm{e}^{2x}-6\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{2x}=0$$

且 $\dfrac{y_2}{y_1}=\mathrm{e}^x$ 不为常数，所以 y_1 与 y_2 是对应齐次微分方程 $y''-3y'+2y=0$ 的两个线性无关解，又因为

$$y^{*''}-3y^{*'}+2y^*=\frac{25}{12}\mathrm{e}^{5x}-\frac{15}{12}\mathrm{e}^{5x}+\frac{2}{12}\mathrm{e}^{5x}$$

所以 y^* 为 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{5x}$ 的特解，故 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}$ 是微分方程的通解.

⑵ $y=C_1x^5+\dfrac{C_2}{x}-\dfrac{x^2}{9}\ln x\left(C_1,C_2\text{是任意常数}\right)$ 是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的通解；

解　记 $y_1=x^5, y_2=\dfrac{1}{x}, y^*=-\dfrac{x^2}{9}\ln x$, 则

$$x^2y_1''-3xy_1'-5y_1=x^2-20x^3-3x\cdot 5x^4-5x^5=0$$

$$x^2y_2''-3xy_2'-5y_2=x^2\left(\frac{2}{x^3}\right)-3x\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{5}{x}=0$$

且 $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{1}{x^6}$ 不为常数，所以 y_1 与 y_2 是对应齐次微分方程 $x^2y''-3xy'-5y=0$ 的两个线性无关解，又因为

$$x^2y^{*''}-3xy^{*'}-5y^*=x^2\frac{2\ln x+3}{9}-3x\cdot\frac{2x\ln x+x}{9}-5\cdot\frac{x^2-\ln x}{9}=x^2\ln x$$

所以 y^* 是原方程的特解，故 $y=C_1x^5+\dfrac{C_2}{x}-\dfrac{x^2}{9}\ln x$ 是方程的通解.

(3) $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2\left(C_1,C_2,C_3,C_4\text{是任意常数}\right)$ 是 方 程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的通解.

解 记 $y_1=\mathrm{e}^x$，$y_2=\mathrm{e}^{-x}$, $y_3=\cos x$, $y_4=\sin x$, 则

$$y_i^{(4)}-y_i=0\left(i=1,2,3,4\right)$$

又 y_1，y_2, y_3, y_4 线性无关，所以 y_1，y_2, y_3, y_4 是对应齐次微分方程 $y_i^{(4)}-y_i=0$ 的线性无关解, 记 $y^*=-x^2$，则

$$y^{*(4)}-y^*=0-\left(-x^2\right)=x^2$$

所以 y^* 是方程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的特解, 故方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2$$

7.7

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y''-4y'=0$；

解 特征方程 $r^2-4r=0$，解得 $r_1=0$，$r_2=4$，所以方程的通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{4x}$$

(2) $y''+y=0$；

解 特征方程 $r^2+1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm i$，所以方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

(3) $y''-4y'+5y=0$；

解 特征方程 $r^2-4r+5=0$，解得 $r_{1,2}=2\pm i$，所以方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-20\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+25x=0$；

解 特征方程 $4r^2-20r+25=0$，解得 $r_1=r_2=\dfrac{5}{2}$，所以方程的通解为

$$x=\left(C_1+C_2t\right)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$$

(5) $y^{(4)}+2y''+y=0$.

解 特征方程 $r^4+2r^2+1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm i$（二重根），所以方程的通解为

$$y=\left(C_1+C_2x\right)\cos x+\left(C_3+C_4x\right)\sin x$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y''-4y'+3y=0,\ y\big|_{x=0}=6,\ y'\big|_{x=0}=10$；

解 特征方程 $r^2-4r+3=0$，解得 $r_1=1$，$r_2=3$，所以方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$$

求导得

$$y'=C_1\mathrm{e}^{x}+3C_2\mathrm{e}^{3x}$$

将 $y''-4y'+3y=0,\ y\big|_{x=0}=6,\ y'\big|_{x=0}=10$ 代入得

$$\begin{cases}C_1+C_2=6\\ C_1+3C_2=10\end{cases}$$

解得 $C_1=4$，$C_2=2$，故所求特解为

$$y=4\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{3x}$$

(2) $y''+4y'+29y=0,\ y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=15$；

解 特征方程 $r^2+4r+29=0$，解得 $r_{1,2}=-2\pm 5i$，所以方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-2x}\left(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x\right)$$

求导得

$$y'=\mathrm{e}^{-2x}\left[\left(5C_2-2C_1\right)\cos 5x+\left(-5C_1-2C_2\right)\sin 5x\right]$$

将 $y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=15$ 代入得

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ 5C_2 - 2C_1 = 15 \end{cases}$$

解得 $C_1 = 0$，$C_2 = 3$，故所求特解为

$$y = 3\mathrm{e}^{-2x} \sin 5x$$

7.8

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $2y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^x$；

解 特征方程 $2r^2 + r - 1 = 0$，解得 $r_1 = \dfrac{1}{2}$，$r_2 = -1$，所以对应的齐次微分方程的通解为

$$Y = C_1\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2\mathrm{e}^{-x}$$

设方程的特解为 $y^* = a\mathrm{e}^x$，代入方程得

$$2a\mathrm{e}^x + a\mathrm{e}^x - a\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$$

消去 e^x 解得 $a = 1$，即 $y^* = \mathrm{e}^x$，故方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$$

(2) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$；

解 特征方程 $2r^2 + 5r = 0$，解得 $r_1 = 0$，$r_2 = -\dfrac{5}{2}$，所以对应的齐次微分方程的通解为

$$Y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}$$

设方程的特解为 $y^* = x\left(b_0x^2 + b_1x + b_2\right)$，代入方程得

$$15b_0x^2 + \left(12b_0 + 10b_1\right)x + 4b_1 + 5b_2 = 5x^2 - 2x - 1$$

比较系数得

$$\begin{cases} 15b_0 = 5 \\ 12b_0 + 10b_1 = -2 \\ 4b_1 + 5b_2 = -1 \end{cases}$$

解得 $b_0=\frac{1}{3}$，$b_1=-\frac{3}{5}$，$b_2=\frac{7}{25}$，所以 $y^*=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$，故方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$$

(3) $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x\sin 2x$；

解 特征方程 $r^2-2r+5=0$，解得 $r_{1,2}=1\pm 2i$，所以对应的齐次微分方程的通解为

$$Y=\mathrm{e}^x\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$$

设 $y^*=x\mathrm{e}^x\left(a\cos 2x+b\sin 2x\right)$，代入方程并消去 e^x 得

$$4b\cos 2x-4a\sin 2x=\sin 2x$$

比较系数得 $a=-\frac{1}{4}$，$b=0$，所以 $y^*=-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^x\cos 2x$，故方程的通解为

$$y=Y+y^*=\mathrm{e}^x\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^x\cos 2x$$

(4) $y''-6y'+9y=(x+1)\mathrm{e}^{3x}$；

解 特征方程 $r^2-6r+9=0$，解得 $r_1=r_2=3$，所以对应的齐次微分方程的通解为

$$Y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^{3x}$$

设 $y^*=x^2(ax+b)\mathrm{e}^{3x}$，代入方程并消去 e^{3x} 得

$$6ax+2b=x+1$$

比较系数得 $a=\frac{1}{6}$，$b=\frac{1}{2}$，所以 $y^*=\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{3x}$，故方程的通解为

$$y=Y+y^*=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^{3x}+\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{3x}$$

(5) $y''+y=\mathrm{e}^x+\cos x$；

解 特征方程 $r^2+1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm i$，所以对应的齐次微分方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

对于 $y''+y=\mathrm{e}^x$，设 $y_1^*=a\mathrm{e}^x$，代入方程得

$$a\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x$$

比较系数得 $a=\frac{1}{2}$，所以 $y_1^*=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

对于 $y''+y=\cos x$，设 $y_2^*=x(b_0\cos x+b_1\sin x)$，代入方程得

$$2b_1\cos x-2b_0\sin x=\cos x$$

比较系数得 $b_0=0$，$b_1=\frac{1}{2}$，所以 $y_2^*=\frac{1}{2}x\sin x$.

因此,方程的通解为

$$y=Y+y_1^*+y_2^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x\sin x$$

(6) $y'''-2y''-4y'+8y=16(\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{2x})$.

解 特征方程 $r^3-2r^2-4r+8=0$，解得 $r_1=r_2=2$，$r_3=-2$，所以对应的齐次微分方程的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}+C_3\mathrm{e}^{-2x}$$

对于 $y'''-2y''-4y'+8y=16\mathrm{e}^{-2x}$，设 $y_1^*=Ax\mathrm{e}^{-2x}$，代入方程解得 $A=1$，所以 $y_1^*=x\mathrm{e}^{-2x}$.

对于 $y'''-2y''-4y'+8y=16\mathrm{e}^{2x}$，设 $y_2^*=Bx^2\mathrm{e}^{2x}$，代入方程解得 $B=2$，所以 $y_2^*=2x^2\mathrm{e}^{2x}$.

因此,微分方程的通解为

$$y=Y+y_1^*+y_2^*=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}+C_3\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{-2x}+2x^2\mathrm{e}^{2x}$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y''-3y'+2y=5, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$；

解 特征方程 $r^2-3r+2=0$，解得 $r_1=1$，$r_2=2$，所以

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$$

设 $y^*=A$，代入方程得 $A=\frac{5}{2}$，所以 $y^*=\frac{5}{2}$，故方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{5}{2}$$

求导得

$$y'=C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x}$$

将 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 代入得

$$\begin{cases} C_1+C_2+\dfrac{5}{2}=1 \\ C_1+2C_2=2 \end{cases}$$

解得 $C_1=-5, C_2=\dfrac{7}{2}$，故所求特解为

$$y=-5\mathrm{e}^x+\frac{7}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{5}{2}$$

⑵ $y''+y+\sin 2x=0$, $y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=1$；

解 特征方程 $r^2+1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm i$，所以

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

设 $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$，代入方程得

$$-3A\cos 2x-3B\sin 2x=-\sin 2x$$

比较系数得 $A=0$，$B=\dfrac{1}{3}$，所以 $y^*=\dfrac{1}{3}\sin 2x$，故方程通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$$

求导得

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{2}{3}\cos 2x$$

将 $y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=1$ 代入得

$$\begin{cases} -C_1=1 \\ -C_2+\dfrac{2}{3}=1 \end{cases}$$

解得 $C_1=-1, C_2=-\dfrac{1}{3}$，故所求特解为

$$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$$

⑶ $y''-y=4x\mathrm{e}^x$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$.

解 特征方程 $r^2-1=0$，解得 $r_1=1$，$r_2=-1$，所以

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

设 $y^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^x$，代入方程并消去 e^x 得

$$4Ax+2A+2B=4x$$

比较系数得 $A=1$，$B=-1$，所以 $y^*=\left(x^2-x\right)\mathrm{e}^x$，故方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+\left(x^2-x\right)\mathrm{e}^x$$

求导得

$$y'=C_1\mathrm{e}^x-C_2\mathrm{e}^{-x}+\left(x^2+x-1\right)\mathrm{e}^x$$

将 $y\big|_{x=0}=0$, $y'\big|_{x=0}=1$ 代入得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1-C_2-1=-1\end{cases}$$

解得 $C_1=1, C_2=-1$，故所求特解为

$$y=\left(x^2-x+1\right)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$$

3.一链条悬挂在一钉子上，起动时一端离开钉子 8m，另一端离开钉子 12m，分别在以下两种情况下求链条滑下来所需的时间：

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力；

解 设在时刻 t 链条的一端离钉子的距离 $x=x(t)$，则另一端离钉子距离 $20-x$，当 $t=0$ 时，$x=12$，即 $x\big|_{t=0}=12$，由牛顿第二定律，有

$$20\rho x''=\left[x-(20-x)\right]\rho g$$

即

$$x''-\frac{g}{10}x=-g$$

且 $x\big|_{t=0}=12$，$x'\big|_{t=0}=0$.

由特征方程 $r^2-\dfrac{g}{10}=0$ 得 $r_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{g}{10}}$，设 $x^*=A$，代入方程得 $A=10$，所以 $x^*=10$，故方程的通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10$$

将 $x\big|_{t=0}=12$，$x'\big|_{t=0}=0$ 代入得 $C_1=C_2=1$，所以

$$x=\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10$$

令 $x=20$ 得 $t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left(5+2\sqrt{6}\right)(s)$.

⑵ 若摩擦力的大小等于 1m 长的链条所受重力的大小.

解 由牛顿第二定律，有

$$20\rho x''=\left[x-(20-x)\right]\rho g-\rho g$$

即

$$x''-\frac{g}{10}x=-\frac{21}{10}g$$

且 $x\big|_{t=0}=12$，$x'\big|_{t=0}=0$.

设 $x^*=B$，代入方程得 $B=\frac{21}{2}$，所以 $x^*=\frac{21}{2}$，故方程的通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+\frac{21}{2}$$

将 $x\big|_{t=0}=12$，$x'\big|_{t=0}=0$ 代入得 $C_1=\frac{3}{4},C_2=-\frac{3}{4}$，所以

$$x=\frac{3}{4}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}-\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}\right)+\frac{21}{2}$$

令 $x=20$ 得 $t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left(\frac{19}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{22}\right)(s)$.

7.9

1.求下列欧拉方程的通解.

⑴ $x^2y''+3xy'+y=0$；

解 令 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$，则

$$xy'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad x^2y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0$$

其特征方程为 $r^2+2r+1=0$，解得 $r_1=r_2=1$，所以线性微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}$$

故欧拉方程的通解为

$$y=\frac{C_1+C_2\ln x}{x}$$

⑵ $x^2y''-xy'+y=2x$；

解　令 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$，则

$$xy'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad x^2y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=2\mathrm{e}^t$$

其特征方程为 $r^2-2r+1=0$，解得 $r_1=r_2=1$，所以对应的齐次线性微分方程的通解为

$$Y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t$$

设 $y^*=At^2\mathrm{e}^t$，代入方程中得 $A=1$，所以 $y^*=t^2\mathrm{e}^t$，故线性微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t+t^2\mathrm{e}^t$$

于是欧拉方程的通解为

$$y=(C_1+C_2\ln x)x+x\ln^2 x$$

2. 求欧拉方程 $x^2y''+xy'-y=2\ln x$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1}=1,\ y'\big|_{x=1}=2$ 的特解.

解　令 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$，则

$$xy'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad x^2y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y=2t$$

其特征方程为$r^2-1=0$，解得$r_1=1$，$r_2=-1$，所以对应的齐次线性微分方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}$$

设$y^*=at+b$，代入方程得$a=-2,b=0$，所以$y^*=-2t$，故线性微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}-2t$$

欧拉方程的通解为

$$y=C_1x+\frac{C_2}{x}-2\ln x$$

求导得

$$y'=C_1+\frac{C_2}{x^2}-\frac{2}{x}$$

将$y\big|_{x=1}=1, y'\big|_{x=1}=2$代入得

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\C_1-C_2-2=2\end{cases}$$

解得$C_1=\frac{5}{2},C_2=-\frac{3}{2}$，故所求欧拉方程的特解为

$$y=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\frac{1}{x}-2\ln x$$

总习题七

1. 已知$y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}, y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}, y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$是某二阶非齐次常系数线性微分方程的三个解，求此方程.

解 因$y_1-y_3=\mathrm{e}^{-x}, y_2-y_1=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{2x}$是对应齐次微分方程的解，所以特征根$r_1=-1$，$r_2=2$，故特征方程为

$$(r+1)(r-2)=r^2-r-2=0$$

从而所求的微分方程具有如下形式

$$y''-y'-2y=f(x)$$

又$y^*=x\mathrm{e}^x$是方程的特解，代入方程得

$$f(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-(x+1)\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x=(1-2x)\mathrm{e}^x$$

于是所求的微分方程为

$$y''-y'-2y=(1-2x)\mathrm{e}^x$$

2. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma\mathrm{e}^x$ 的一个特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$，试确定常数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，并求出该方程的通解.

解 求导得

$$y'=2\mathrm{e}^{2x}+(x+2)\mathrm{e}^x,\ y''=4\mathrm{e}^{2x}+(x+3)\mathrm{e}^x$$

代入方程得

$$y''+\alpha y'+\beta y=(4+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^{2x}+[(x+3)+\alpha(x+2)+\beta(x+1)]\mathrm{e}^x=\gamma\mathrm{e}^x$$

比较同类项系数得

$$\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}$$

解得$\alpha=-3$，$\beta=2$，$\gamma=-1$，故所求方程为

$$y''-3y'+2y=-\mathrm{e}^x$$

其特征方程$r^2-3r+2=0$，解得$r_1=1$，$r_2=2$，又 $y^*=x\mathrm{e}^x$是方程的解，所以微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$$

3. 求方程$x^2y'-\cos 2y=1$满足$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\dfrac{9\pi}{4}$的解.

解 方程化为$x^2y'=2\cos^2 y$, 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 y}=\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x$$

积分得$\tan y=-\dfrac{2}{x}+C$, 由条件$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\dfrac{9\pi}{4}$得$\tan\dfrac{9\pi}{4}=C$，即$C=1$，故所求特解为

$$\tan y=-\frac{2}{x}+1$$

4. 从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉速度 y，（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系，设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用，设仪器的质量为 m，体积为 B，海水密度为 ρ，仪器所受阻力与下沉速度成正比，比例系数为 k（$k>0$），试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系 $y=y(v)$.

解 由牛顿第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=mg-B\rho-kv$$

又

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

所以 y 与 v 所满足的微分方程为

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=mg-B\rho-kv$$

且 $v\big|_{y=0}=0$.

分离变量得

$$\frac{mv\mathrm{d}v}{mg-B\rho-kv}=\mathrm{d}y$$

积分得

$$-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)=y+C$$

由 $v\big|_{y=0}=0$ 得

$$C=-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho)$$

故所求函数关系是

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}$$

5. 设 $y=f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有连续的导数，若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1,\ x=t\,(t>1)$ 及 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

$V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left[t^2 f(t)-f(1)\right]$，试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$ 的解.

解 由题设知

$$V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\left[t^2 f(t)-f(1)\right],$$

求导得

$$\pi f^2(t)=\frac{\pi}{3}\left[2tf(t)+t^2+f'(t)\right]$$

化简得

$$t^2 f'(t)+2tf(t)=3f^2(t)$$

所以 $y=f(x)$ 满足方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=3y^2$$

将方程写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入上式得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u^2-2u$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=\frac{3}{x}\mathrm{d}x$$

积分得

$$\ln|u-1|-\ln|u|=3\ln|x|+\ln|C|$$

即 $\dfrac{u-1}{u}=Cx^3$，将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入得 $y-x=Cx^3y$，由 $y|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$ 得，$C=-1$，于是 $y=\dfrac{x}{1+x^3}$ 为所求的特解.

6. 设 $f(x)$ 连续，且满足积分方程 $f(x)=\sin x-\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

解 令 $u=t-x$，则

$$\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t=\int_{-x}^0(x+u)f(u)\mathrm{d}u=x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u+\int_{-x}^0 uf(u)\mathrm{d}u$$

代入方程得

$$f(x)=\sin x-x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u-\int_{-x}^0 uf(u)\mathrm{d}u$$

求导得

$$f'(x)=\cos x-\int_{-x}^{0}f(u)\mathrm{d}u-xf(-x)+xf(-x)$$

即

$$f'(x)=\cos x-\int_{-x}^{0}f(u)\mathrm{d}u$$

对其求导得

$$f''(x)=-\sin x-f(-x)$$

将其中$-x$换成x得

$$f''(-x)=\sin x-f(x)$$

对$f''(x)=-\sin x-f(-x)$求二阶导得

$$f^{(4)}(x)=\sin x-f''(-x)$$

将$f''(-x)=\sin x-f(x)$代入得

$$f^{(4)}(x)=\sin x-(\sin x-f(x))$$

即

$$f^{(4)}(x)-f(x)=0$$

其特征方程为$r^4-1=0$，解得$r_{1,2}=\pm 1$，$r_{1,2}=\pm i$，所以

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

又可知$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=0$，对$f(x)$求导得

$$f'(x)=-C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}-C_3\sin x+C_4\cos x$$

$$f''(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}-C_3\cos x-C_4\sin x$$

$$f'''(x)=-C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}+C_3\sin x-C_4\cos x$$

代入初值得

$$\begin{cases}C_1+C_2+C_3=0\\-C_1+C_2+C_4=1\\C_1+C_2-C_3=0\\-C_1+C_2-C_4=0\end{cases}$$

解得$C_1=-\frac{1}{4},C_2=\frac{1}{4},C_3=0,C_4=\frac{1}{2}$，故所求函数为

$$f(x)=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{2}\cos x$$

7. 利用变换将方程$\cos^4 x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\tan x$化简，并求此方程的通解.

解 求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos^4 x}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

代入方程得

$$\cos^4 x\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos^4 x}\frac{d^2 y}{dt^2}\right)+2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t$$

其特征方程$r^2+2r+1=0$，解得$r_1=r_2=-1$，所以

$$Y=(C_1+C_2 t)\mathrm{e}^{-t}$$

设$y^*=at+b$, 代入方程得$a=1,b=-2$，所以$y^*=t-2$, 故

$$y=Y+y^*=(C_1+C_2 t)\mathrm{e}^{-t}+t-2$$

于是原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2\tan x)\mathrm{e}^{-\tan x}+\tan x-2$$