第十二章 无穷级数

习题十二

12.1

1. 写出下列级数的一般项u_n.

⑴ $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}\cdots$;

解 一般项为

$$u_n=\frac{n}{n^2+1},n=1,2,\cdots$$

⑵ $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{3^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$.

解 一般项为

$$u_n=\frac{3^{\frac{n}{2}}}{(2n)!!}=\frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^n n!},n=1,2,\cdots$$

2. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和$s_n=\frac{2n}{n+1},n=1,2,\cdots$.

⑴ 求此级数的一般项u_n;

解 一般项为

$$u_n=s_n-s_{n-1}=\frac{2n}{n+1}-\frac{2n}{(n-1)+1}=\frac{2n}{n(n+1)},n=1,2,\cdots$$

⑵ 判断此级数的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$收敛，且和为$2$，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2$.

3.根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的敛散性，对收敛级数求出其和.

⑴ $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$;

解　由 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ 得部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 收敛，且和为 $\frac{1}{2}$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$；

解　因为

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}1, & n=4k-3\\ 0, & n=4k-2\\ -1, & n=4k-1\\ 0, & n=4k\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots)$$

所以

$$S_{4k-1}=\sum_{k=1}^{4k-1}\sin\frac{n\pi}{2}=1,\ S_{4k}=\sum_{k=1}^{4k}\sin\frac{n\pi}{2}=0$$

故 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$ 发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$；

解　设

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$$

则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

两式相减得

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$$

所以$S_n=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$，而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$收敛，且和为$3$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=3$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

解 级数的部分和为

$S_n=\ln 2+\ln\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)$

而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$发散.

4. 用性质判定下列级数的敛散性.

(1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

解 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以级数

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散.

(2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$;

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}=1\neq 0$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$发散.

(3) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$都收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$收敛.

5. 已知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

解 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$$

6. 一类慢性病人需每天服用某种药物，按药理，一般患者体内药量需维持在 20～25mg 之间，设体内药物每天有 80%排泄掉，问病人每天服用的药量为多少？

解 设患者每天服药x mg，则体内长期维持药量为

$$x\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)=\frac{5}{4}x$$

要满足$20\le\frac{5}{4}x\le 25$，所以$16\le x\le 20$.

12.2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的敛散性.

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$;

解 因为

$$\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散.

(2) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$;

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\pi\ne 0$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，由比较审敛法的极限形式知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\sqrt{3}+\sin^n n\right]^n}{3^n}$；

解 因为

$$0<\frac{\left(\sqrt{3}+\sin^n n\right)^n}{3^n}<\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^n}{3^n}=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)^n$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)^n$收敛，由比较审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\sqrt{3}+\sin^n n\right]^n}{3^n}$收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\neq 0$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，由比较审敛法的极限形式知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$收敛.

2. 用比值审敛法判定下列级数的敛散性.

(1) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$；

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{3^n}{n\cdot 2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\frac{n}{n+1}=\frac{3}{2}>1$$

由比值审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1$$

由比值审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$$

由比值审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 收敛.

3. 用根值审敛法判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}<1$$

由根值审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n\to a\ (n\to\infty), a_n, b, a$ 均为正数.

解 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$

由根值审敛法知，当 $\frac{b}{a}<1$，即 $b<a$ 时，级数收敛；当 $\frac{b}{a}>1$，即 $b>a$ 时，级数发散．而当 $\frac{b}{a}=1$，即 $b=a$ 时，级数的敛散性不能确定，例如，$a_n=1,b=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散，$a_n=n^{\frac{2}{n}},b=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n=\frac{1}{n^2}$ 收敛.

4．判定下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots$；

解　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 不绝对收敛．又

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}},n=1,2,\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

由莱布尼茨审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 条件收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$；

解　对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n}{3^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}<1$$

由比值审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}\right|$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$ 绝对收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$（$\alpha$ 为任意实数）；

解 对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$，因为$\left|\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，由比较审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}\right|$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$绝对收敛，又级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$发散.

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$.

解 $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$

当$n\ge 3$时，$\sin\frac{1}{\ln n}>0$，所以

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}\right|=\sum_{n=3}^{\infty}\sin\frac{1}{\ln n}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}=+\infty$$

由比较审敛法的极限形式知，级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}\right|$发散，所以级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$不绝对收敛. 又

$$\sin\frac{1}{\ln n}>\sin\frac{1}{\ln(n+1)},n=3,4,\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\ln n}=0$$

由莱布尼茨审敛法知，级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$收敛，故级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$$

条件收敛.

6. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\beta^{n}$的敛散性，其中$\alpha$为任意实数，$\beta$为非负实数.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{\alpha}\beta^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\alpha}\beta=\beta$

由根值审敛法知，当$\beta<1$而α任意时，级数收敛；当$\beta>1$而α任意时，级数发散.

又当$\beta=1$时，若$\alpha<-1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}}$收敛；若$\alpha\geq-1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}}$发散.

综上，当$\beta<1$而α任意，或$\beta=1,\alpha<-1$时，级数收敛；当$\beta>1$而α任意，或$\beta=1,\alpha\geq-1$时，级数发散.

6. 证明：

⑴ 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛；

证 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0<1$，由极限保序性知，存在正整数$N$，当$n>N$时，$u_n<1$，所以$u_n^2\leq u_n$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，由比较审敛法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛.

⑵ 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$均收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{v_n}{n^p}}$ $(p>1)$均收敛.

证 由（1）的结论知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛，因为

$$0\leq u_nv_n\leq\frac{1}{2}\left(u_n^2+v_n^2\right)$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(u_n^2+v_n^2\right)$均收敛，由比较审敛法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛.

又因为

$$0\leq\sqrt{\frac{v_n}{n^p}}\leq\frac{1}{2}\left(v_n+\frac{1}{n^p}\right)$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(v_n+\frac{1}{n^p}\right)=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，由比较审敛法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{v_n}{n^p}}$收敛.

7. 利用收敛级数的性质证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}=0$.

证 以为 $\dfrac{n^n}{(2n)!}$ 通项构成级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}}{\dfrac{n^n}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{2(2n+1)}=0<1$$

由比值审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}=0$.

8. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 均收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(a_n+b_n)^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 均绝对收敛.

证 因为

$$|a_nb_n|\le\frac{1}{2}\left(a_n^2+b_n^2\right),\quad\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a_n+b_n)^2\right|\le 2a_n^2+2b_n^2,\quad\left|\frac{a_n}{n}\right|\le\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 均收敛，由比较审敛法知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|,\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a_n+b_n)^2\right|,\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$$

均收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(a_n+b_n)^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 均绝对收敛.

12.3

1. 求下列幂级数的收敛半径及收敛域.

(1) $1-x+\dfrac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n^2}+\cdots$;

解 收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^n}{n^2}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1$$

所以收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=\pm 1$时，级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\pm 1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mp 1)^n}{n^2}$，收敛，所以幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

(2) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{x^n}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$；

解 收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}}{\frac{1}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)(2n+2)}}\right|=\lim_{n\to\infty}(2n+2)=+\infty$$

所以幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$；

解 收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{3^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}}3^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=1$$

所以收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=\pm 1$时，级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$，收敛，所以幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\ (a>0,b>0)$；

解 当$0<a<b$时，收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}}{\dfrac{a^{n+1}}{n+1}+\dfrac{b^{n+1}}{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{n\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+1}{(n+1)\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}+1}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{b}$$

所以收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{b}\right)$.

当$x=\pm\dfrac{1}{b}$时，级数化为$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\pm\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n\frac{1}{n^2}$，收敛，所以当$0<a<b$时，幂级数的收敛域为$\left[-\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{b}\right]$.

当$0<b\le a$时，收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{1+\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

所以收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}\right)$.

当$x=\dfrac{1}{a}$时，级数化为$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n$，发散；当$x=-\dfrac{1}{a}$时，级数化为$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n$，收敛，所以当$0<b\le a$时，幂级数的收敛域为$\left[-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}\right)$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$；

解 收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}\right|=1$$

所以收敛区间为$(4,6)$.

当 $x=4$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，收敛；当 $x=6$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，发散，所以幂级数的收敛域为 $[4,6)$.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$；

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n$

其收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

所以收敛区间为 $(-1,0)$.

当 $x=-1$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，收敛；当 $x=0$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散，所以幂级数的收敛域为 $[-1,0)$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$；

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}}{(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}x^2=x^2$$

由比值审敛法知，当 $x^2<1$，即 $|x|<1$ 时，幂级数绝对收敛，当 $x^2>1$，即 $|x|>1$ 时，幂级数发散，所以收敛半径为 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=\pm1$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\pm1)^{2n+1}}{2n+1}=\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，收敛，所以幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}}{\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{2n+1}{2n-1}x^2=\frac{x^2}{2}$$

由比值审敛法知，当 $\frac{x^2}{2}<1$，即 $|x|<\sqrt{2}$ 时，幂级数绝对收敛，当 $\frac{x^2}{2}>1$，即 $|x|>\sqrt{2}$ 时，幂级数发散，所以收敛半径为 $R=\sqrt{2}$，收敛区间为 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\pm\sqrt{2}\right)^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$，发散，所以幂级数的收敛域为 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

(9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{(n+1)^2}}{2^{n+1}}}{\frac{x^{n^2}}{2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}|x|^{2n+1}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \frac{1}{2}, & |x|=1\\ +\infty, & |x|>1\end{cases}$$

由比值审敛法值，当 $|x|\le 1$ 时，幂级数绝对收敛，当 $|x|>1$ 时，幂级数发散，所以收敛半径为 $R=1$，幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛，试确定此幂级数的收敛半径，并阐明理由.

解 令 $t=x+1$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$，已知当 $x=3$，即 $t=4$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n4^n$ 条件收敛，由阿贝尔定理，当 $|t|<|4|=4$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 绝对收敛，由此知该幂级

数的收敛半径 $R \geq 4$，假如 $R > 4$，由阿贝尔定理知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 4^n$ 绝对收敛，

这与它条件收敛矛盾，于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径为 $R = 4$.

3. 求下列幂级数的收敛域及和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$；

解 收敛半径为

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$，又当 $x = \pm 1$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} n(\pm 1)^{n-1}$，发散，所以幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, x \in (-1,1)$，则和函数为

$$S(x) == \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \in (-1,1)$$

(2) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$；

解 收敛半径

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}} \right| = 1$$

所以区间为 $(-1, 1)$，又当 $x = \pm 1$ 时，级数化为 $\pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$，发散，所以幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, x \in (-1,1)$，则

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'==\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$$

从0到x积分得

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x\in(-1,1)$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n-2}$；

解 幂级数的收敛域为$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n-2},x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，则

$$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^{n+1}}x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n}}{2^{n+1}}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^{n+1}}\right)'=\left(\frac{\frac{x^2}{4}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'=\frac{2x}{\left(2-x^2\right)^2},x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

当$x\neq 0$时，解得$S(x)=\frac{2}{\left(2-x^2\right)^2}$，又$S(0)=\frac{1}{2}$，所以和函数为

$$S(x)=\frac{2}{\left(2-x^2\right)^2},\ x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$;

解 幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)},x\in[-1,1]$，则

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}\right]'=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$S''(x)=\left(2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right]'=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{2}{1+x^2}$$

从0到x积分得

$$S'(x)=S'(x)-S'(0)=\int_0^x S''(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\arctan x$$

再从0到x积分得

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x 2\arctan t\,\mathrm{d}t=2x\arctan x-\ln\left(1+x^2\right),x\in[-1,1]$$

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$.

解 幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n,x\in(-1,1)$，则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

令$S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，则

$$xS_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

求导得

$$[xS_1(x)]'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

从0到x积分得

$$xS_1(x)=\int_0^x[tS_1(t)]'\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$$

当$x\neq0$时，解得$S_1(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$，又$S(0)=1$，所以和函数为

$$S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-4\cdot\frac{1}{1-x}+S_1(x)=\begin{cases}\frac{4x-3}{(1-x)^2}-\frac{4}{x}\ln(1-x),x\in(-1,0)\cup(0,1)\\1,x=0\end{cases}$$

4. 求常数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n^2-n+1\right)}{2^n}$的和.

解 考虑幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$，其收敛域为$(-1,1)$.

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n, x\in(-1,1)$，则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=x^2\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)''+\frac{1}{1-x}$$

$$=x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)''+\frac{1}{1-x}=x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)''+\frac{1}{1-x}=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{1}{1-x}=\frac{3x^2-2x+1}{(1-x)^3}, x\in(-1,1)$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{22}{27}$$

5. 设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$3$，和函数为$S(x)$，求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间及和函数.

解 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，已知其收敛半径$3$，所以幂级数$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$的收敛半径为$3$，从而幂级数$S'(x-1)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$的收敛半径也为$3$，因此幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}=(x-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^{n-1}=(x-1)^2S'(x-1)$$

的收敛半径为3，收敛区间为$(-2,4)$.

12.4

1. 若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，试证：

(1) 当$f(x)$为奇函数时，必有$a_{2k}=0, k=0,1,2,\cdots$；

证 当$f(x)$为奇函数时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)=-f(-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}a_nx^n$$

比较两边幂级数的系数得$a_n=(-1)^{n+1}a_n$，当$n=2k, k=0,1,2,\cdots$时，有

$$a_{2k}=(-1)^{2k+1}a_{2k}=-a_{2k}$$

故

$$a_{2k}=0,k=0,1,2,\cdots$$

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时，必有 $a_{2k+1}=0,k=0,1,2,\cdots$；

证 当 $f(x)$ 为偶函数时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)=f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_nx^n$$

比较两边幂级数的系数得 $a_n=(-1)^na_n$，当 $n=2k+1,k=0,1,2,\cdots$ 时，有

$$a_{2k+1}=(-1)^{2k+1}a_{2k+1}=-a_{2k+1}$$

故

$$a_{2k+1}=0,k=0,1,2,\cdots$$

2．将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间.

(1) e^{x^2}；

解 因为 $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$，所以

$$\mathrm{e}^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$$

(2) $\sin^2 x$；

解 因为 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)$，所以

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$$

(3) $\ln(1+x-2x^2)$；

解 因为 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},x\in(-1,1]$，所以

$$\ln\left(1+x-2x^2\right)=\ln(1-x)+\ln(1+2x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n-1}{n}x^n,x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

(4) $\dfrac{x}{2+x-x^2}$；

解　因为 $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,x\in(-1,1)$，所以

$$\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}$$
$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{x}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{1}{2^n}\right]x^n,x\in(-1,1)$$

(5) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$；

解　因为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}x^n,x\in(-1,1]$，所以

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}x^{2n}\right)$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}x^{2n+1},x\in[-1,1]$$

(6) $\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$；

解　因为

$$\left(\arctan\frac{1-2x}{1+2x}\right)'=-\frac{2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(4x^2\right)^n=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

所以从 0 到 x 积分得

$$\arctan\frac{1-2x}{1+2x}-\frac{\pi}{4}=\int_0^x\left(\arctan\frac{1-2x}{1+2x}\right)'\mathrm{d}t=\int_0^x\left[-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n t^{2n}\right]\mathrm{d}t$$
$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n 4^n t^{2n}\mathrm{d}t=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

故

$$\arctan\frac{1-2x}{1+2x}=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

(7) $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)$，所以

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)$$

3．将下列函数展开成$(x-x_0)$的幂级数，并求展开式成立的区间.

(1) $\sqrt{x^3},x_0=1$；

解 因为$(1+x)^{\frac{3}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}x^n,x\in[-1,1]$，所以

$$\sqrt{x^3}=[1+(x-1)]^{\frac{3}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(x-1)^n$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3}{8}(x-1)^2+3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-5)!!}{2^n n!}(x-1)^n,x\in[0,2]$$

(2) $\cos x,x_0=-\frac{\pi}{3}$；

解 令$t=x+\frac{\pi}{3}$，则

$$\cos x=\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\sqrt{3}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}+\sqrt{3}\frac{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right],x\in(-\infty,+\infty)$$

(3) $\frac{1}{x^2+3x+2},x_0=-4$.

解 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

令$t=x+4$，则

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{t}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{t}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{t}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n, x\in(-6,-2)$$

4．求下列幂级数的收敛域及和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n n!}$；

解 幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n n!}, x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2-n+n)x^n}{2^n n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)x^n}{2^n n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^n n!}$$

$$=\frac{x^2}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{2^{n-2}(n-2)!}+\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}=\frac{x^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}+\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}$$

$$=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, x\in(-\infty,+\infty)$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!}x^{2n+1}$；

解 幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!}x^{2n+1}, x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$S(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!}x^{2n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}\right]'=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}\right)'$$

$$=x\left(x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)'=x(x\cos x)'=x(\cos x-x\sin x),\ x\in(-\infty,+\infty)$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

解 幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},\quad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$$

所以

$$S(x)+S'(x)+S''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=\mathrm{e}^{x}$$

方程 $S(x)+S'(x)+S''(x)=\mathrm{e}^{x}$ 的通解为

$$S(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x}$$

又 $S(0)=1$，$S'(0)=0$，所以 $C_1=\frac{2}{3},C_2=0$，故幂级数的和函数为

$$S(x)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x},x\in(-\infty,+\infty)$$

12.7

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为：

(1) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$；

解 傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{4n}\sin nx-\frac{1}{2n\pi}x\sin nx-\frac{1}{2n^2\pi}\cos nx\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{1}{4n}\cos n\pi-\frac{1}{2n\pi}\left(x\cos nx-\frac{1}{n}\sin nx\right)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^n}{n},n=1,2,\cdots$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$$

由狄利克雷定理知

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx=\begin{cases}\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},-\pi<x<\pi\\ \frac{\pi}{4},x=\pm\pi\end{cases}$$

(2) $f(x)=3x^2+1$；

解 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0$，$n=1,2,\cdots$，又

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2+1)\mathrm{d}x=2(\pi^2+1)$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{3}{n}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}+\frac{6}{n\pi}\int_0^{\pi}2x\sin nx\,\mathrm{d}x-\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{12}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\\&=\frac{12}{n^2\pi}\left(x\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{12(-1)^n}{n^2},n=1,2,\cdots\end{aligned}$$

所以傅里叶级数为

$$\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

由狄利克雷定理知

$$\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=3x^2+1,-\pi\le x\le\pi$$

(3) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}$；

解 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $a_n=0$，$n=0,1,2,\cdots$，又

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n-\frac{1}{3}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{3}\right)x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{3}\right)x}{n-\frac{1}{3}}-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{3}\right)x}{n+\frac{1}{3}}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}n}{9n^2-1},n=1,2,\cdots$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{9n^2-1}\sin nx$$

由狄利克雷定理知

$$\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{9n^2-1}\sin nx=\begin{cases}2\sin\frac{x}{3},-\pi<x<\pi\\0,x=\pm\pi\end{cases}$$

(4) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x,-\pi\le x<0\\1,0\le x<\pi\end{cases}$.

解 傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(1-\mathrm{e}^x\right)+1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{e}^x\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi\left(1+n^2\right)}\mathrm{e}^x\left(\cos nx+n\sin nx\right)\Big|_{-\pi}^{0}+0=\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi\left(1+n^2\right)},n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{e}^x\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi\left(1+n^2\right)}\mathrm{e}^x\left(\sin nx-n\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{\left[(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}-1\right]n}{\pi\left(1+n^2\right)}+\frac{1-(-1)^n}{\pi n},n=1,2,\cdots$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{1}{2}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\left[\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}-n}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx\right\}$$

由狄利克雷定理知

$$\frac{1}{2}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\left[\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}-n}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx\right\}$$

$$=\begin{cases}f(x),-\pi<x<\pi\\\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2},x=\pm\pi\end{cases}$$

2. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}\left(0\le x\le\pi\right)$展开成余弦级数.

解 傅里叶系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{n+\frac{1}{2}}+\frac{\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{n-\frac{1}{2}}\right]=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1},n=1,2,\cdots$$

$b_n=0$，$n=1,2,\cdots$

所以余弦级数为

$$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nx$$

由狄利克雷定理知

$$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nx=\cos\frac{x}{2},0\le x\le\pi$$

3. 将区间$[0,\pi]$上的函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\pi},0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1-\dfrac{x}{\pi},\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$ 展开成正弦级数.

解　傅里叶系数为

$a_n=0$，$n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi^2 n}\left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}\cos nx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\,\mathrm{d}\cos nx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi^2 n}\left[-x\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,\mathrm{d}x+(x-\pi)\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2},n=1,2,\cdots$$

所以正弦级数为

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\sin nx=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

由狄利克雷定理知

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\begin{cases}\dfrac{x}{\pi},0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1-\dfrac{x}{\pi},\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$$

4. 设 函 数 $f(x)=\pi x+x^2\left(-\pi\le x\le\pi\right)$ 的 傅 里 叶 级 数 为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$，求系数$b_3$，并说明常数$\frac{a_0}{2}$的意义.

解 系数b_3为

$$\begin{aligned}b_3&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\pi x+x^2\right)\sin 3x\,\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\pi}x\sin 3xdx+0=\frac{2}{3}\left(x\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

因为$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$，所以$\frac{a_0}{2}$等于函数$f(x)$在一个周期内的平均值.

12.8

1. 将下列周期函数展开成傅里叶级数（下面给出函数在一个周期内的表达式）.

(1) $f(x)=1-x^2\left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right)$；

解 因为$f(x)$是偶函数，所以$b_n=0$，$n=1,2,\cdots$，又

$$a_0=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{6}$$

$$a_n=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)\cos(2n\pi x)\mathrm{d}x$$

$$=4\left[\frac{1-x^2}{2n\pi}\sin(2n\pi x)-\frac{2x}{4n^2\pi^2}\cos(2n\pi x)+\frac{2}{8n^3\pi^3}\cos(2n\pi x)\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2},n=1,2,\cdots$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(2n\pi x)$$

由狄利克雷定理知

$$\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(2n\pi x)=1-x^2,-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$$

(2) $f(x)=\begin{cases}2x+1,-3\le x<0\\ 1,0\le x<3\end{cases}$.

解 傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\mathrm{d}x\right]=-1$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right],n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1},n=1,2,\cdots$$

所以傅里叶级数为

$$-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\}$$

由狄利克雷定理知

$$-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\}=\begin{cases}f(x),-3<x<3\\ -2,x=\pm 3\end{cases}$$

2. 将函数 $f(x)=x^2\,(0\le x\le 2)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 展开成正弦级数，傅里叶系数为

$$a_n=0,n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_{0}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{16}{(n\pi)^3}\left[(-1)^n-1\right],n=1,2,\cdots$$

所以正弦级数为

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^3\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

由狄利克雷定理知

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^3\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin\frac{n\pi x}{2}=\begin{cases}x^2,0\le x<2\\ 0,x=2\end{cases}$$

展开成余弦级数，傅里叶系数为

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{16}{n^2\pi^2},n=1,2,\cdots$$

$$b_n=0,n=1,2,\cdots$$

所以余弦级数为

$$\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

由狄利克雷定理知

$$\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}=x^2,0\le x\le 2$$

总习题十二

1．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，又设 $v_n=\dfrac{u_n+|u_n|}{2},w_n=\dfrac{u_n-|u_n|}{2}$，则级数（ ）.

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 都收敛

（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 都发散

（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 发散

（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 收敛

解 选（B）

2．设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t$，$g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{n^n+2}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）.

（A）等价无穷小
（B）同阶，但不等价无穷小
（C）低阶无穷小
（D）高阶无穷小
解 选（A）

3. 设正项数列$\{a_n\}$单调递减，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛？并说明理由.

解　因为正项数列$\{a_n\}$单调减少，所以存在$a\geq 0$使得$\lim_{n\to\infty}a_n=a$，又$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，所以$a\neq 0$，即$a>0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n+1}<1$$

由极值审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛.

4. 利用$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)$的幂级数展开式，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$的和.

解　设$S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)$，则$S(x)=\frac{1-\cos x-x\sin x}{x^2}$，因为

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

所以

$$S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}-1}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)}{(2n)!}x^{2n-2},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

令$x=\frac{\pi}{2}$得

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2}=\frac{1-0-\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}=1-\frac{\pi}{2}$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$，将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解 因为

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, x\in(-1,1)$$

从 0 到 x 积分得

$$\arctan x=\int_0^x(\arctan t)'\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\in[-1,1],$$

所以，当 $x\neq 0$ 时，有

$$f(x)=\frac{1+x^2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\left(1+x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}$$

当 $x=0$ 时，上式也成立，故

$$f(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},\ x\in[-1,1]$$

令 $x=1$，得

$$f(1)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$$

解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{f(1)-1}{2}=\frac{2\arctan 1-1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$