# 第十一章 曲线积分与曲面积分

## 习题十一

### 11.1

1. 设在 $xOy$ 平面内有一分布着质量的曲线弧 $L$，它在点 $(x,y)$ 处的线密度为 $\mu(x,y)$. 用对弧长的曲线积分分别表示：

⑴ 该曲线弧对 $x$ 轴、$y$ 轴的转动惯量 $I_x$，$I_y$；

解 $I_x=\int_L y^2\mu(x,y)\mathrm{d}s$, $I_y=\int_L x^2\mu(x,y)\mathrm{d}s$

⑵ 该曲线弧的质心坐标 $\overline{x},\overline{y}$.

解 $\overline{x}=\dfrac{\int_L x\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s}$，$\overline{y}=\dfrac{\int_L y\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s}$

2. 计算下列对弧长的曲线积分.

⑴ $\int_L x\,\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的弧段；

解

$$\begin{aligned}\int_L x\,\mathrm{d}s&=\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx\\&=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+4x^2)=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)\end{aligned}$$

⑵ $\int_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在第一象限内的弧；

解

$$\int_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^{\frac{4}{3}}\cos^4 t+a^{\frac{4}{3}}\sin^4 t\right)\sqrt{\left[3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)\right]^2+\left(3a\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=3a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 t+\cos^4 t\right)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=3a^{\frac{7}{3}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,\mathrm{d}\sin t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\,\mathrm{d}\cos t\right]=a^{\frac{7}{3}}$$

⑶ $\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=2x$；

解　$L$：$x=\dfrac{a}{2}(1+\cos t),\ y=\dfrac{a}{2}\sin t, 0\le t\le 2\pi$

$$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\oint_L\sqrt{ax}\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a\cdot\frac{a}{2}(1+\cos t)}\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t=2a^2$$

(4)　$\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 $x$ 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；

解　将 $L$ 分成 $L_1,L_2,L_3$ 三部分，其中

$$L_1: y=0, 0\le x\le a$$

$$L_2: x^2+y^2=a^2, \text{在}(0,0)\text{与}\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\text{之间}$$

$$L_3: y=x, 0\le x\le\frac{a}{\sqrt{2}}$$

又

$$\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^a\mathrm{e}^x\sqrt{1+0^2}\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1$$

$$\int_{L_2}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{L_2}\mathrm{e}^a\mathrm{d}s=\mathrm{e}^a\int_{L_2}\mathrm{d}s=\mathrm{e}^a\cdot\frac{\pi}{4}a=\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a$$

$$\int_{L_3}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x^2}}\sqrt{1+1^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\mathrm{d}\left(\sqrt{2}x\right)=\mathrm{e}^a-1$$

所以

$$\oint_L\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_2}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_3}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=2\left(\mathrm{e}^a-1\right)+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a$$

(5)　$\int_L\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$ 上相应于 $t$ 从 0 变到 2 的这段弧；

解

$$\int_L\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^2\frac{1}{\left(\mathrm{e}^t\cos t\right)^2+\left(\mathrm{e}^t\sin t\right)^2+\left(\mathrm{e}^t\right)^2}\sqrt{\left(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t\right)^2+\left(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t\right)^2+\left(\mathrm{e}^t\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)$$

(6) $\oint_L |xy|\,\mathrm{d}s$，其中 $L$ 是空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \dfrac{x}{2}+z=1 \end{cases}$.

解 将 $L$ 写成参数形式

$$L: x=2\cos t, y=2\sin t, z=1-\cos t, 0\le t\le 2\pi$$

则

$$\oint_L |xy|\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}|2\cos t\cdot 2\sin t|\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2+(\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{2\pi}|\sin t\cos t|\sqrt{4+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t\cos t|\sqrt{4+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{4+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4+\sin^2 t}\,\mathrm{d}\left(4+\sin^2 t\right)$$

$$=8\cdot\frac{2}{3}\left(4+\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right)$$

3. 求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 界于 $xOy$ 平面及柱面 $z=R+\dfrac{x^2}{R}$ 之间的一块柱面片的面积.

解 记 $L: x^2+y^2=R^2$，则柱面片的面积为

$$A=\oint_L\left(R+\frac{x^2}{R}\right)\mathrm{d}s$$

将 $L$ 写成参数形式

$$L: x=R\cos t, y=R\sin t, 0\le t\le 2\pi$$

则

$$A=\int_0^{2\pi}\left(R+R\cos^2 t\right)\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,\mathrm{d}t=R^2\int_0^{2\pi}\left(1+\cos^2 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\pi R^2+R^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=2\pi R^2+\pi R^2=3\pi R^2$$

4. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $L: x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$，其中 $0\le t\le 2\pi$，它的线密度 $\rho=x^2+y^2+z^2$，求：

(1) 它关于 $z$ 轴的转动惯量 $I_z$；

解

$$I_z=\int_L\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2\left(a^2+k^2t^2\right)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=a^2\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}\left(a^2+k^2t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}\left(3a^2+4\pi^2k^2\right)$$

⑵ 它的质心.

解 设质心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s}{\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s},\bar{y}=\frac{\int_L y\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s}{\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s},\bar{z}=\frac{\int_L z\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s}{\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s}$$

其中

$$\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2\left(a^2+k^2t^2\right)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(a^2+k^2t^2\right)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}\left(3a^2+4\pi^2k^2\right)$$

$$\int_L x\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a\cos t\left(a^2+k^2t^2\right)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=a\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}\left(a^2+k^2t^2\right)\cos t\,\mathrm{d}t=a\sqrt{a^2+k^2}\cdot 4\pi k^2$$

$$\int_L y\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a\sin t\left(a^2+k^2t^2\right)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=a\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}\left(a^2+k^2t^2\right)\sin t\mathrm{d}t=a\sqrt{a^2+k^2}\cdot\left(-4\pi^2k^2\right)$$

$$\int_L z\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s=k\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}t\left(a^2+k^2t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$=k\sqrt{a^2+k^2}\left(2a^2\pi^2+4k^2\right)\pi^4$$

所以

$$\bar{x}=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot 4\pi k^2}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}\left(3a^2+4\pi^2k^2\right)}=\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}$$

$$\bar{y}=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot\left(-4\pi^2k^2\right)}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}\left(3a^2+4\pi^2k^2\right)}=\frac{-6a\pi k^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

$$\bar{z}=\frac{k\sqrt{a^2+k^2}\left(2a^2\pi^2+4k^2\right)\pi^4}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}\left(3a^2+4\pi^2k^2\right)}=\frac{3\pi k\left(a^2+2\pi^2k^2\right)}{3a^2+4\pi^2k^2}$$

故质心坐标为$\left(\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\frac{-6a\pi k^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\frac{3\pi k\left(a^2+2\pi^2k^2\right)}{3a^2+4\pi^2k^2}\right)$.

## 11.2

1. 计算下列对坐标的曲线积分.

(1) $\int_L y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为圆周 $x = R\cos t, y = R\sin t$ 上对应 $t$ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧；

解

$$\int_L y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(R\sin t)(-R\sin t) + (R\cos t)(R\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$= R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,\mathrm{d}t = R^2\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

(2) $\int_L (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为抛物线 $y = x^2$ 上对应 $x$ 从 $-1$ 到 $1$ 的一段弧；

解

$$\int_L (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left[(x^2 - 2x\cdot x^2) + \left((x^2)^2 - 2x\cdot x^2\right)\cdot 2x\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1}(2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2)\mathrm{d}x = 2\int_0^1(-4x^4 + x^2)\mathrm{d}x = -\frac{14}{15}$$

(3) $\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 $L$ 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$（按逆时针方向绕行）；

解 将 $L$ 写成参数形式

$$L: x = a\cos t, y = a\sin t, t\text{从}0\text{到}2\pi$$

则

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi}\frac{(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t - a\sin t)(a\cos t)}{a^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos 2t - \sin 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sin 2t - \cos 2t)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

(4) $\int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 $L$ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线；

解 将 $L$ 写成参数形式

$$L: x = 1+t, y = 1+2t, z = 1+3t, t\text{从}0\text{到}1$$

则

$$\int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (x+y-1)\mathrm{d}z = \int_0^1[(1+t) + (1+2t)\cdot 2 + (1+t+1+2t-1)\cdot 3]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1(6+14t)\mathrm{d}t = 13$$

(5) $\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 $L$ 是 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4x\,(z\ge 0) \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$，从 $z$ 轴正向看 $L$ 取逆时针方向.

解 将 $L$ 写成参数形式

$$L: x=1+\cos t, y=\sin t, z=2\cos\frac{t}{2}, t\text{从}-\pi\text{到}\pi$$

因为

$$\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^2 t+4\cos^2\frac{t}{2}\right)(-\sin t)\mathrm{d}t=0$$

$$\oint_L (z^2+x^2)\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\pi}\left[4\cos^2\frac{t}{2}+(1+\cos t)^2\right]\cos t\mathrm{d}t=4\pi$$

$$\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}z=\int_{-\pi}^{\pi}\left[(1+\cos t)^2+\sin^2 t\right]\left(-\sin\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=0$$

所以

$$\begin{aligned}&\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z\\&=\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+\oint_L (z^2+x^2)\mathrm{d}y+\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}z=0+4\pi+0=4\pi\end{aligned}$$

2. 设在 $xOy$ 平面内有一力场 $\mathbf{F}$，它的方向指向原点，大小等于点 $(x,y)$ 到原点的距离.

(1) 质点从点 $A(a,0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 逆时针方向移动到点 $B(0,b)$，求力场所做的功；

解 由题设知

$$\left|\vec{F}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$\vec{F}$ 的方向为

$$\vec{F}^o=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-x\vec{i}-y\vec{j}\right)$$

所以力场为

$$\vec{F}=\left|\vec{F}\right|\vec{F}^o=-x\vec{i}-y\vec{j}$$

力场 $\vec{F}$ 沿路径 $L$ 所做的功为

$$W=\int_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_L -x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y$$

将 $L$ 写成参数形式

$$L: x = a\cos t, y = b\sin t, t\text{从}0\text{到}\frac{\pi}{2}$$

则所做的功为

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-a\cos t(-a\sin t) - b\sin t(b\cos t)]\mathrm{d}t = (a^2 - b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\mathrm{d}t = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

⑵ 质点按逆时针方向沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 运动一周，求力场所做的功.

解 此时 $L$ 的参数形式为

$$L: x = a\cos t, y = b\sin t, t\text{从}0\text{到}2\pi$$

所做的功为

$$W = \oint_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \oint_L -x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}(a^2 - b^2)\sin t\cos t\mathrm{d}t = 0$$

3. 将对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化作对弧长的曲线积分，其中 $L$ 为：

⑴ 在 $xOy$ 平面内沿直线从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$；

解 $L$ 为从 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的有向直线段，则其上的任一点处的切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_L [P(x,y) + Q(x,y)]\mathrm{d}s$$

⑵ 沿抛物线 $y = x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$；

解 $L: y = x^2, x\text{从}0\text{到}1$，则 $L$ 的切向量为

$$\vec{T} = \{1, y'\} = \{1, 2x\}$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\ \cos\beta = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$$

于是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s=\int_L\frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}s$$

(3) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$.

则 $L$ 的切向量为

$$\vec{T}=\{1,y'\}=\left\{1,\frac{1-x}{y}\right\}$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha=y,\ \cos\beta=1-x$$

于是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s=\int_L[yP(x,y)+(1-x)Q(x,y)]\mathrm{d}s$$

## 11.3

1. 利用曲线积分，求星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 所围成图形的面积.

解 $L: x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t,\ t$从$0$到$2\pi$

围成图形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3 t\cdot(3a\sin^2 t\cos t)-a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{8}\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2$$

2. 利用格林公式，计算下列对坐标的曲线积分.

(1) $\oint_L(2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 是三个顶点分别为 $(0,0),(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界；

解 令 $P=2x-y+4, Q=5y+3x-6$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\frac{\partial Q}{\partial x}=3$$

记 $L$ 所围成的三角形闭区域为 $D$，由格林公式得

$$\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D[3-(-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\times3=12$$

(2) $\oint_L \left(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x+\left(x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\,(a>0)$；

解　令 $P=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x, Q=x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2\cos x+2x\sin x-2y\mathrm{e}^x=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

记 $L$ 所围成的区域为 $D$，由格林公式

$$\oint_L \left(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x+\left(x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

(3) $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\left[x+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y$，其中 $L$ 是从点 $(2,1)$ 沿上半圆周 $y=1+\sqrt{1-(x-1)^2}$ 到点 $(0,1)$ 的弧段；

解　令 $P=\sqrt{x^2+y^2}, Q=x+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial Q}{\partial x}=1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)$$

补直线段

$$L_1: y=1, x\text{从}0\text{到}2$$

记 $L$ 和 $L_1$ 围成的区域为 $D$，由格林公式

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\left[x+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y=\oint_{L+L_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\left[x+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y$$
$$-\int_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\left[x+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$$
$$=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\sqrt{5}-\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

(4) $\int_L (3xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 是从点 $(0,0)$ 到点 $(4,8)$ 的抛物线段 $y=x^2-2x$；

解　令 $P=3xy+\sin x, Q=x^2-y\mathrm{e}^y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x, \frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

补折线段 $\overline{AB}+\overline{BO}$，其中

$$\overline{AB}: y=8, x\text{从}4\text{到}0$$

$$\overline{BO}: x=0, y\text{从}8\text{到}0$$

记由 $L,\overline{AB},\overline{BO}$ 围成的区域为 $D$，由格林公式得

$$\begin{aligned}
&\int_L (3xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=\oint_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}(3xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y\\
&-\int_{\overline{AB}}(3xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y-\int_{\overline{BO}}(3xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_4^0(24x+\sin x)\mathrm{d}x-\int_8^0-y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\\
&=\iint_D -x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_4^0(24x+\sin x)\mathrm{d}x+\int_8^0 y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\frac{448}{3}-\cos 4-7\mathrm{e}^8
\end{aligned}$$

(5) $\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 $L$ 是逆时针方向的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

解　令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}, (x,y)\neq(0,0)$$

补一小圆周 $L_1: x^2+y^2=\varepsilon^2$ ($\varepsilon$充分小)，逆时针方向，记 $L$ 和 $L_1^-$ 围成的区域为 $D$，由格林公式

$$\oint_{L+L_1^-}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

所以

$$\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{(-\varepsilon\sin t)(-\varepsilon\sin t)+(\varepsilon\cos t)(\varepsilon\cos t)}{\varepsilon^2}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi$$

其中 $L_1: x=\varepsilon\cos t, y=\varepsilon\sin t, t$从0到$2\pi$.

3. 确定闭曲线$C$，使曲线积分$\oint_C\left(x+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\left(y+x-\frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$达到最大值.

解 记$D$为$C$所围成的闭区域，由格林公式得

$$\oint_C\left(x+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\left(y+x-\frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y+x-\frac{2}{3}x^3\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x+\frac{y^3}{3}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D\left(1-2x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

要使上式中的二重积分达到最大值 ，$C$应取逆时针方向的椭圆$2x^2+y^2=1$.

4. 证明：曲线积分$\int_L \mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x+\sin y\mathrm{d}y)$在整个在$xOy$平面内与路径无关，并求$\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x+\sin y\mathrm{d}y)$.

解 令$P=\mathrm{e}^x\cos y, Q=-\mathrm{e}^x\sin y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以曲线积分$\int_L \mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x+\sin y\mathrm{d}y)$在整个$xOy$平面内与路径无关，于是

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x+\sin y\mathrm{d}y)=\int_0^a\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^b\mathrm{e}^x(-\sin y)\mathrm{d}y$$
$$=\mathrm{e}^a-1+\mathrm{e}^a(\cos b-1)=\mathrm{e}^a\cos b-1$$

5. 计算曲线积分$\int_L\frac{1}{x}\sin\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\sin\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}y$，其中$L$是由点$(1, \pi)$到点$\left(\frac{\pi}{2},2\right)$的直线段.

解 令$P=\frac{1}{x}\sin\left(xy-\frac{\pi}{4}\right), Q=\frac{1}{y}\sin\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)$，则当$x>0, y>0$时恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以在第一象限上曲线积分与路径无关，取积分路径为

$$L_1: y=\frac{\pi}{x}, x从1到\frac{\pi}{2}$$

则

$$\int_L \frac{1}{x}\sin\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\sin\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}y=\int_{L_1}\frac{1}{x}\sin\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\sin\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{x}\sin\frac{3\pi}{4}+\frac{x}{\pi}\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_1^{\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}x=0$$

6. 计算曲线积分 $\int_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 $L$ 是摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)-a\pi\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 上由点 $(-\pi a,0)$ 到点 $(\pi a,0)$ 的的弧段.

解 令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，则当 $(x,y)\neq(0,0)$时，恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以曲线积分在不包含原点的单连通区域上与路径无关，取积分路径为从点 $(-\pi a,0)$ 到点 $(\pi a,0)$ 的上半圆周

$$L_1: x=\pi a\cos t, y=\pi a\sin t, t从\pi 到0$$

则

$$\int_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{L_1}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$
$$=\int_\pi^0\frac{-\pi a\sin t(-\pi a\sin t)+\pi a\cos t(\pi a\cos t)}{(\pi a)^2}\mathrm{d}t=\int_\pi^0 \mathrm{d}t=-\pi$$

7. 设 $f(-1)=1$，试求可微函数 $f(x)$，使曲线积分 $\int_L \frac{y}{x}[\sin x-f(x)]\mathrm{d}x+\left[f(x)-x^2\right]\mathrm{d}y$ 在半平面 $D=\{(x,y)|\ x<0\}$内与路径无关，并计算从点 $\left(-\frac{3\pi}{2}，\pi\right)$ 到点 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 的这个积分.

解 令 $P=\frac{y}{x}[\sin x-f(x)], Q=f(x)-x^2$，因曲线积分在 $D$ 上与路径无关，所以在 $D$ 上恒有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即

$$\frac{1}{x}(\sin x - f(x)) = f'(x) - 2x$$

$$f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = 2x + \frac{\sin x}{x}$$

其通解为 $f(x) = \frac{1}{x}\left[C + \frac{2}{3}x^3 - \cos x\right]$，由 $f(-1) = 1$ 得 $C = -\frac{1}{3} + \cos 1$，所以

$$f(x) = \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^3 - \cos x + \cos 1\right]$$

故

$$\int_{\left(-\frac{3\pi}{2},\ \pi\right)}^{\left(-\frac{\pi}{2},0\right)} \frac{y}{x}[\sin x - f(x)]\mathrm{d}x + \left[f(x) - x^2\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\pi}^{0}\left[f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\frac{3\pi}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}y + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} 0\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{9} + \frac{2}{3}\cos 1 + \frac{3}{4}\pi^3$$

8．设质点 $A$ 对质点 $M$ 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ （$k$ 为常数），$r$ 为点 $A$ 与点 $M$ 之间的距离，将质点 $A$ 固定于点 $(0,1)$ 处，质点 $M$ 沿上半圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 从点 $(0,0)$ 处移动到点 $(2,0)$ 处，求此运动过程中质点 $A$ 对质点 $M$ 的引力所做的功.

9．解 $|\vec{F}| = \frac{k}{r^2} = \frac{k}{x^2 + (y-1)^2}$，$\vec{F}$ 的单位向量为

$$\vec{F}^o = \frac{-x\vec{i} + (1-y)\vec{j}}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$$

所以引力为

$$\vec{F} = |\vec{F}|\vec{F}^o = \frac{k}{\left[x^2 + (y-1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-x\vec{i} + (1-y)\vec{j}\right)$$

故所作的功为

$$W = \int_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = k\int_L \frac{-x\mathrm{d}x + (1-y)\mathrm{d}y}{\left[x^2 + (y-1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

令 $P = \frac{-x}{\left[x^2 + (y-1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, Q = \frac{1-y}{\left[x^2 + (y-1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$，则当 $(x, y) \neq (0,0)$ 时，恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3x(y-1)}{\left[x^2 + (y-1)^2\right]^{\frac{5}{2}}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以在不包含点 $(0,1)$ 的单连通区域上，曲线积分与路径无关，于是

$$W=k\int_{(0,0)}^{(0,2)}\frac{-x\mathrm{d}x+(1-y)\mathrm{d}y}{\left[x^2+(y-1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=k\int_0^2\frac{-x\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=k\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-1\right)$$

9. 验证表达式 $\left(2x\cos y+y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(2y\sin x-x^2\sin y\right)\mathrm{d}y$ 在整个 $xOy$ 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出一个这样的 $u(x,y)$.

解　令 $P=2x\cos y+y^2\cos x,Q=2y\sin x-x^2\sin y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y+2y\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以在 $xOy$ 平面内所给表达式是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，且有

$$\begin{aligned}&u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(2x\cos y+y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(2y\sin x-x^2\sin y\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y\left(2y\sin x-x^2\sin y\right)\mathrm{d}y=x^2+y^2\sin x+x^2\cos y-x^2\\&=y^2\sin x+x^2\cos y\end{aligned}$$

10. 验证方程 $\left(3x^2+6xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(6x^2y+4y^2\right)\mathrm{d}y=0$ 是全微分方程，并求其通解.

解　令 $P=3x^2+6xy^2,Q=6x^2y+4y^2$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以所给方程是全微分方程，又

$$\begin{aligned}&u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(3x^2+6xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(6x^2y+4y^2\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y\left(6x^2y+4y^2\right)+y=x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3\end{aligned}$$

所以微分方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C$$

11. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $f(0)=0$，$f'(0)=1$，且方程 $\left[xy(x+y)-f(x)y\right]\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x^2y\right]\mathrm{d}y=0$ 是全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

解　令 $P=xy(x+y)-f(x)y,Q=f'(x)+x^2y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2+2xy-f(x),\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=f''(x)+2xy$$

由于是全微分方程，所以$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即

$$x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$$

化简得

$$f''(x)+f'(x)=x^2$$

其通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$$

由 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ 得 $C_1=2$，$C_2=1$，所以

$$f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$$

微分表达式的一个原函数

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y\left(f'(x)+x^2y\right)\mathrm{d}y=f'(x)y+\frac{1}{2}x^2y^2=y(\cos x-2\sin x)+2xy+\frac{1}{2}x^2y^2$$

所以方程的通解为

$$y(\cos x-2\sin x)+2xy+\frac{1}{2}x^2y^2=C$$

## 11.4

1. 设有一分布着质量的曲面$\Sigma$，在点$(x,y,z)$处它的面密度为$\rho(x,y,z)$，用对面积的曲面积分表示该曲面的质量.

解 曲面的质量为

$$m=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$

2. 计算下列对面积的曲面积分.

(1) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1+x\sin\left(zy^3\right)}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是下半球面$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$；

解

$$\iint_{\Sigma}\frac{1+x\sin\left(zy^3\right)}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}\frac{x\sin\left(zy^3\right)}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{1}{R^2}\mathrm{d}S+0=\frac{1}{R^2}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\pi R^2=2\pi$$

⑵ $\iint_{\Sigma}\left(2xy-2x^2-x+z\right)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为平面$2x+2y+z=6$在第一卦限中的部分；

解 将$\Sigma$写成$x,y$的函数

$$\Sigma: z=6-2x-2y,(x,y)\in D$$

其中

$$D=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le x\le 3, 0\le y\le 3-x\right\}$$

则

$$\iint_{\Sigma}\left(2xy-2x^2-x+z\right)\mathrm{d}S=\iint_{D}\left[2xy-2x^2-x+(6-2x-2y)\right]\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}\left(6-3x-2x^2+2xy-2y\right)\mathrm{d}y=3\int_0^3\left[\left(6-3x-2x^2\right)(3-x)+x(3-x)^2-(3-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=3\int_0^3\left(3x^3-10^2+9\right)\mathrm{d}x=-\frac{27}{4}$$

⑶ $\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截得的有限部分.

解 由对称性知

$$\iint_{\Sigma}xy\mathrm{d}S=0,\quad \iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}S=0$$

所以

$$\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}zx\mathrm{d}S=\iint_{D}x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint_{D}x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$

其中

$$D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le 2ax\right\}$$

2. 求面密度为$\mu_0$的均匀半球壳$x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$对于$z$轴的转动惯量.

解 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},(x,y)\in D$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le a^2\right\}$，则转动惯量为

$$I_z=\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)\mu_0\mathrm{d}S=\mu_0\iint_{D}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\mu_0 a\iint_{D}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu_0 a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$\overset{r=a\sin t}{=}2\pi\mu_0 a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3\sin^3 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t=2\pi\mu_0 a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t=2\pi\mu_0 a^4\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi\mu_0 a^4$$

## 11.5

1. 计算下列对坐标的曲面积分.

(1) $\iint_{\Sigma}x^2y^2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的下半部分的下侧；

解 $\Sigma: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},(x,y)\in D$，下侧，其中$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le R^2\right\}$，所以

$$\iint_{\Sigma}x^2y^2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D}x^2y^2\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r=\frac{2}{105}\pi R^7$$

(2) $\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是抛物面$z=x^2+y^2$在平面$z=1$下方的部分的上侧；

解 $\Sigma: z=x^2+y^2,(x,y)\in D$，上侧，其中$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$，所以

$$\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}\left[-x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}+\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\left[-x\cdot(2x)-y\cdot(2y)+\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}$$

(3) $\oiint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$是由圆柱面$x^2+y^2=R^2$及两平面$z=R$，$z=-R$所围成的立体表面的外侧.

解 将$\Sigma$分成$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$三部分，其中

$$\Sigma_1: z=R,(x,y)\in D_{xy},\text{上侧}$$
$$\Sigma_2: z=-R,(x,y)\in D_{xy},\text{下侧}$$
$$\Sigma_3: x=\sqrt{R^2-y^2},(y,z)\in D_{yz},\text{前侧}$$
$$\Sigma_4: x=-\sqrt{R^2-y^2},(y,z)\in D_{yz},\text{后侧}$$

这里

$$D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le R^2\right\}$$

$$D_{yz}=\left\{(y,z)\,\middle|\,-R\le y\le R,-R\le z\le R\right\}$$

则

$$I_1=\iint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_1}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$
$$=0+\iint_{D_{xy}}\frac{R^2}{x^2+y^2+R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\frac{R^2}{x^2+y^2+R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_2=\iint_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_2}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$
$$=0-\iint_{D_{xy}}\frac{R^2}{x^2+y^2+R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\frac{R^2}{x^2+y^2+R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_3=\iint_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_3}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$
$$=\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+0=\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$I_4=\iint_{\Sigma_4}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma_4}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_4}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$
$$=-\iint_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+0=\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

于是

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=I_1+I_2+I_3+I_4$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R^2}{x^2+y^2+R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left(-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R^2}{x^2+y^2+R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)+\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{2}R$$

2．将对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成对面积的曲面积分，其中$\Sigma$是：

⑴ 平面$3x+2y+2\sqrt{3}z=6$在第一卦限的部分的上侧；

解 $\Sigma$在任一点处的单位法向量为

$$\vec{n}^o=\frac{3\vec{i}+2\vec{j}+2\sqrt{3}\vec{k}}{\sqrt{3^2+2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{2}{5}\vec{j}+\frac{2\sqrt{3}}{5}\vec{k}$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\cos\beta=\frac{2}{5},\cos\gamma=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}\left[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P(x,y,z)+\frac{2}{5}Q(x,y,z)+\frac{2\sqrt{3}}{5}R(x,y,z)\right)\mathrm{d}S$$

⑵ 抛物面$z=8-\left(x^2+y^2\right)$在$xOy$平面上方的部分的上侧.

解 $\Sigma$在其上一点$(x,y,z)$处的法向量为

$$\vec{n}=-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}+\vec{k}=2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}$$

其单位法向量为

$$\vec{n}^o=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{\Sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S\\
&=\iint_{\Sigma}\frac{2xP(x,y,z)+2yQ(x,y,z)+R(x,y,z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

## 11.6

1. 利用高斯公式计算下列曲面积分.

(1) $\oiint_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是平面$x=0,y=0,z=0,x=1,y=1,z=1$所围成的立方体的全表面的外侧；

解 令$P=4xz,Q=-y^2,R=yz$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=4z,\frac{\partial Q}{\partial y}=-2y,\frac{\partial R}{\partial z}=y$$

记$\Sigma$围成的区域为$\Omega$，由高斯公式得

$$\begin{aligned}
&\oiint_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iiint_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(4z-y)\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(2-y)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(2) $\oiint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧；

解 令$P=x^3,Q=y^3,R=z^3$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\frac{\partial Q}{\partial y}=3y^2,\frac{\partial R}{\partial z}=3z^2$$

记$\Sigma$围成的区域为$\Omega$，由高斯公式

$$\begin{aligned}
&\oiint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{12}{5}\pi a^5
\end{aligned}$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧；

解 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

补一平面 $\Sigma_1: z=0,(x,y)\in D$，上侧，其中$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le a^2\right\}$，记$\Sigma$与$\Sigma_1$围成的区域为$\Omega$，由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma^-+\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}[a+2(z+a)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2z+3a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a(2\rho\cos\varphi+3a)\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\rho=\frac{3\pi}{2}a^4$$

又

$$\iint\limits_{\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_1}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=0+\iint\limits_{D}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2\cdot\pi a^2=\pi a^4$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\oiint\limits_{\Sigma^-+\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi a^4-\frac{3}{2}\pi a^4=-\frac{\pi}{2}a^4$$

故

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{a}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}a^4\right)=-\frac{\pi}{2}a^3$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是由曲线$\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\x=0\end{cases}(1\le y\le 3)$绕$y$轴旋转一周所生成的曲面，它的法向量与$y$轴正向的夹角恒大于$\frac{\pi}{2}$.

解 曲面$\Sigma$为

$$\Sigma: x^2+z^2=y-1,(z,x)\in D\text{，左侧，其中 }D=\left\{(z,x)\,\middle|\,x^2+z^2\le 2\right\}$$

补一平面

$$\Sigma_1: y=3,(z,x)\in D\text{，右侧，其中 }D=\left\{(z,x)\,\middle|\,x^2+z^2\le 2\right\}$$

记$\Sigma$与$\Sigma_1$围成的区域为$\Omega$，由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega[(8y+1)-4(1-y)-4y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_\Omega(8y-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{1+r^2}^3(8y-3)r\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(26-5r^2-4r^4\right)r\mathrm{d}r=\frac{47}{3}$$

又

$$\iint_{\Sigma_1}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_1}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_1}2(1-y)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{\Sigma_1}-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+\iint_D 2(1-3)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+0=8\cdot\pi\left(\sqrt{2}\right)^2=16\pi$$

所以

$$\iint_\Sigma(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{47}{3}-16\pi$$

2. 求向量 $\mathbf{A}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ 穿过圆柱体 $x^2+y^2\le a^2, 0\le z\le h$ 的全表面向外的通量.

解 记圆柱体为$\Omega$，记$\Omega$的全表面外侧为$\Sigma$，则所求通量为

$$\Phi=\oiint_\Sigma\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_\Sigma yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(yz)+\frac{\partial}{\partial y}(xz)+\frac{\partial}{\partial z}(xy)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

3. 求下列向量场 $\mathbf{A}$ 的散度.

⑴ 设 $\mathbf{A}=e^{xy}\mathbf{i}+\cos(xy)\mathbf{j}+\cos\left(xz^2\right)\mathbf{k}$，求 $\mathbf{A}$ 的散度；

解 令 $P=\mathrm{e}^{xy}, Q=\cos(xy), R=\cos\left(xz^2\right)$，则

$$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=y\mathrm{e}^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin\left(xz^2\right)$$

⑵ 设 $\mathbf{A}=xyz(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$，求 $\mathbf{A}$ 在点 $(1,2,3)$ 处的散度.

解 令 $P=x^2yz, Q=xy^2z, R=xyz^2$，则

$$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2xyz+2xyz+2xyz=6xyz$$

所以

$$\mathrm{div}\vec{A}\Big|_{(1,2,3)}=6xyz\Big|_{(1,2,3)}=36$$

## 11.7

1. 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分.

⑴ $\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 $L$ 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 $z$ 轴正向看去 $L$ 是逆时针方向；

解 取 $\Sigma: x+y+z=2,(x,y)\in D$，上侧，其中 $D=\left\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 1\right\}$.

$\Sigma$ 的法向量为 $\vec{n}=\{1,1,1\}$，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

令 $P=y^2-z^2,Q=2z^2-x^2,R=3x^2-y^2$，由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}
&\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z\\
&=\iint_\Sigma\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S\\
&=\iint_\Sigma\left[(-2y-4z)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2z-6x)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2x-2y)\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\mathrm{d}S\\
&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(4x+2y+3z)\mathrm{d}S=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_D(x-y+6)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-2\iint_D(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-12\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24
\end{aligned}$$

⑵ $\oint_L y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，其中 $L$ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$ 与柱面 $x^2+y^2=ax$ 的交线，从 $x$ 轴正向看去 $L$ 是逆时针方向.

解 取 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},(x,y)\in D$，上侧，其中 $D=\left\{(x,y)\,\big|\,x^2+y^2\le ax\right\}$.

令 $P=y^2,Q=z^2,R=x^2$，由斯托克斯公式

$$\oint_L y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$$

$$= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\Sigma -2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2x\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D \left[-2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\frac{\partial z}{\partial x} - 2x\frac{\partial z}{\partial y} + 2y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left[2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right) + 2x\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right) - 2y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -2\iint_D \left(x + \frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{4}a^4$$

2. 设 $\Sigma$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 的上半部分的上侧，$L$ 为 $\Sigma$ 的边界线，$\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$，试用下面指定的方法计算曲面积分 $\iint_\Sigma \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.

(1)用对面积的曲面积分计算；

解 $\mathrm{rot}\vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(-z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(3x)\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(2y) - \frac{\partial}{\partial x}(-z^2)\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(3x) - \frac{\partial}{\partial y}(2y)\right]\vec{k} = \vec{k}$

$\Sigma$的单位法向量为

$$\vec{n}^o = \frac{1}{3}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

所以

$$\iint_\Sigma \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_\Sigma \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}^o\mathrm{d}S = \iint_\Sigma \frac{z}{3}\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{x^2+y^2\le 9}\left[\sqrt{9 - x^2 - y^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right)^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}\iint_D 3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\pi 3^2 = 9\pi$$

(2) 用对坐标的曲面积分计算；

解 $\iint_\Sigma \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_\Sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\le 9}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi 3^2 = 9\pi$

(3) 用高斯公式计算；

解 补一平面$\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\le 9$，下侧，记$\Sigma$与$\Sigma_1$围成的区域为$\Omega$，由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} \mathrm{rot}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

所以

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\iint_{\Sigma_1} \mathrm{rot}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\iint_{\Sigma_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\le 9} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi 3^2 = 9\pi$$

(4) 用斯托克斯公式计算.

解

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_L 2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z$$
$$= \oint_L 2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y \ \left(L\text{在}xOy\text{平面上,所以}\mathrm{d}z=0\right)$$
$$= \iint_{x^2+y^2\le 9} \left[\frac{\partial}{\partial x}(3x) - \frac{\partial}{\partial y}(2y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\le 9} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\pi$$

3. 求下列向量场 $\mathbf{A}$ 的旋度

(1) 设 $\mathbf{A} = x^2\sin y\mathbf{i} + y^2\sin(xz)\mathbf{j} + xy\sin(\cos z)\mathbf{k}$，求 $\mathbf{A}$ 的旋度；

解 令 $P = x^2\sin y, Q = y^2\sin(xz), R = xy\sin(\cos z)$，则

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\vec{k}$$
$$= \left(x\sin(\cos z) - xy^2\cos(xz)\right)\vec{i} - y\sin(\cos z)\vec{j} + \left(y^2z\cos(xz) - x^2\cos y\right)\vec{k}$$

(2) 设 $\mathbf{A} = (y^2+z^2)\mathbf{i} + (z^2+x^2)\mathbf{j} + (x^2+y^2)\mathbf{k}$，求 $\mathbf{A}$ 在点 $(1,2,3)$ 处的旋度.

解 令 $P = y^2+z^2, Q = z^2+x^2, R = x^2+y^2$，则

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = (2y-2z)\vec{i} + (2z-2x)\vec{j} + (2x-2y)\vec{k}$$

所以

$$\mathrm{rot}\vec{A}\Big|_{(1,2,3)} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

3. 设 $L$ 为圆周 $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}, z=0$（从 $z$ 轴正向看去 $L$ 是逆时针方向），求向量场 $\mathbf{A} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3+yz)\mathbf{j} + 3xy^2\mathbf{k}$ 沿闭曲线 $L$ 的环流量.

解 将 $L$ 写成参数形式

$$L: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 0,\ t\text{从}0\text{到}2\pi$$

所求的环流量为

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{r}=\oint_L (x-z)dx+\left(x^3+yz\right)dy-3xy^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(2\cos t-0)(-2\sin t)+\left((2\cos t)^3+2\sin t\cdot 0\right)(2\cos t)\right]dt$$

$$=-4\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt+16\int_0^{2\pi}\cos^4 t\,dt=0+64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=64\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=12\pi$$

5. 设函数 $Q(x,y,z)$ 具有连续的一阶偏导数，且 $Q(0,y,0)=0$，表达式 $axzdx+Q(x,y,z)dy+\left(x^2+2y^2z-1\right)dz$ 是某函数 $u(x,y,z)$ 的全微分，求常数 $a$，函数 $Q(x,y,z)$ 及 $u(x,y,z)$.

解 因为 $axzdx+Q(x,y,z)dy+\left(x^2+2y^2z-1\right)dz$ 是某函数 $u(x,y,z)$ 的全微分，所以有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+2y^2z-1\right)=\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}(axz)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+2y^2z-1\right),\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(axz)$$

即

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=4yz,ax=2x,\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

由 $ax=2x$ 得 $a=2$，由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ 得

$$Q(x,y,z)-Q(0,y,0)=\int_0^x\frac{\partial Q}{\partial x}dx=\int_0^x 0\,dx=0$$

所以 $Q(x,y,z)=Q(0,y,0)=0$，由 $\frac{\partial Q}{\partial z}=4yz$ 得

$$Q(x,y,z)-Q(x,y,0)=\int_0^z\frac{\partial Q}{\partial z}dz=\int_0^z 4yz\,dz=2yz^2$$

所以 $Q(x,y,z)=2yz^2$，故

$$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}2xzdx+2yz^2dy+\left(x^2+2y^2z-1\right)dz+C=x^2z+y^2z^2-z+C$$

## 总习题十一

1. 设曲面 $\Sigma$ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\,(z\ge 0)$，曲面 $\Sigma_1$ 是曲面 $\Sigma$ 在第一卦限中的部分，则有（　）

（A）$\iint\limits_{\Sigma}xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS$　　（B）$\iint\limits_{\Sigma}ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1}ydS$

（C）$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S$　　（D）$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$

解　选（C）.

2. 求八分之一的球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的边界线的形心坐标.

解　记八分之一球面的边界线为 $L$，将 $L$ 写成 $L=L_1+L_2+L_3$，其中

$$L_1: x=R\cos\theta, y=R\sin\theta, z=0, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$L_2: x=0, y=R\cos\theta, z=R\sin\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$L_3: x=R\sin\theta, y=0, z=R\cos\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

设 $L$ 的形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对等性知 $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$，又

$$\bar{x}=\frac{\oint_L x\mathrm{d}s}{\oint_L \mathrm{d}s}$$

其中

$$\oint_L \mathrm{d}s = 3\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\pi R=\frac{3}{2}\pi R$$

$$\oint_L x\mathrm{d}s=\int\limits_{L_1} x\mathrm{d}s+\int\limits_{L_2} x\mathrm{d}s+\int\limits_{L_3} x\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2+0^2}\,\mathrm{d}\theta+0$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\theta\sqrt{(R\cos\theta)^2+0^2+(-R\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2R^2$$

所以 $\bar{x}=\dfrac{2R^2}{3\pi R}=\dfrac{4R}{3\pi}$，故形心坐标为 $\left(\dfrac{4R}{3\pi},\dfrac{4R}{3\pi},\dfrac{4R}{3\pi}\right)$.

4. 计算曲线积分 $\oint_C \dfrac{yx^2\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$，其中 $C$ 是由下半圆周 $C_1: y=-\sqrt{1-x^2}$ 及直线段 $C_2: y=0\,(-1\le x\le 1)$ 构成的顺时针闭曲线.

解

$$\oint_C \frac{yx^2\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}=\int\limits_{C_1}\frac{yx^2\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}+\int\limits_{C_2}\frac{yx^2\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{C_1} yx^2\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y+0=\frac{1}{2}\oint_C yx^2\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int\limits_{C_2} yx^2\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-xy^2\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}$$

其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1, y\le 0\right\}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，$L$ 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 $(a,b)$，终点为 $(c,d)$. 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y.$$

⑴证明：曲线积分 $I$ 与路径无关；
⑵当 $ab=cd$ 时，求 $I$ 的值.
解 ⑴ 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\right\}$$

在上半平面内处处成立，所以在上半平面内曲线积分与路径无关.

⑵ 取积分路径为由点 $(a,b)$ 到点 $(c,b)$ 再到点 $(c,d)$ 的有向折线，则

$$I=\int_a^c\frac{1}{b}\left[1+b^2f(bx)\right]\mathrm{d}x+\int_b^d\frac{c}{y^2}\left[y^2+f(cy)-1\right]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$
$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd}f(t)\mathrm{d}t=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)dt=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

5. 在半平面 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y>0\right\}$ 上，表达式 $\dfrac{\left(x^2+2xy+5y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-2xy+y^2\right)\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$ 是否为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分？若是，求出 $u(x,y)$.

解 令 $P=\dfrac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^3}, Q=\dfrac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^3}$，则在 $D$ 上恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x-y)(5y-x)}{(x+y)^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以表达式在 $D$ 上是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，且

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x^2+2xy+5y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy+y^2)\mathrm{d}y}{(x+y)^3}+C=\int_1^x\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^3}\mathrm{d}y+C$$

$$=\ln|x|+\int_0^y\frac{1}{x+y}\mathrm{d}y-4x\int_0^y\frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}y+4x^2\int_0^y\frac{1}{(x+y)^3}\mathrm{d}y+C=\ln|x+y|-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+C$$

6. 对于半空间$\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0\}$内任意光滑有向封闭曲面$\Sigma$，都有$\oiint\limits_{\Sigma}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内具有一阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，求$f(x)$.

解　令$P=xf(x),Q=-xyf(x),R=-\mathrm{e}^{2x}z$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=f(x)+xf'(x),\frac{\partial Q}{\partial y}=-xf(x),\frac{\partial R}{\partial z}=-\mathrm{e}^{2x}$$

由题设知，当$x>0$时恒有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

即

$$f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0\quad(x>0)$$

整理得

$$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}$$

其通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x+C)$$

由$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$得$C=-1$，于是

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x-1)$$