试题答案

一、填空题（每小题 1 分，共 5 分）

1．-2； 2. $4\sqrt{2}$； 3. $-\dfrac{1}{2}dx-\dfrac{1}{2}dy$； 4. $x+y+z=2$； 5. $\dfrac{z}{y^2+z^2}$

二、选择题（每小题 1 分，共 5 分）

1. (C); 2. (D); 3. (B); 4. (A) ; 5. (B).

三、解. 特征方程 $r^2+2r-3=0$ 的根为 $r_1=1, r_2=-3$

对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-3x}$$

设非齐次方程的特解为

$$y^*=ax\mathrm{e}^{-3x}$$

代入原方程解得 $a=-\dfrac{1}{4}$，即

$$y^*=-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-3x}$$

所以原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-3x}$$

四、解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_u'\cdot 1+f_v'\cdot\mathrm{e}^x\cos y=f_u'+\mathrm{e}^x\cos yf_v'$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_u'\cdot 2+f_v'\cdot(-\mathrm{e}^x\sin y)=2f_u'-\mathrm{e}^x\sin yf_v'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_u'+\mathrm{e}^x\cos y f_v'\right)$$

$$=f_{uu}''\cdot 2+f_{uv}''\cdot(-\mathrm{e}^x\sin y)+(-\mathrm{e}^x\sin y)f_v'+\mathrm{e}^x\cos y\left[f_{vu}''\cdot 2+f_{vv}''\cdot(-\mathrm{e}^x\sin y)\right]$$

$$=2f_{uu}''+\mathrm{e}^x(2\cos y-\sin y)f_{uv}''-\mathrm{e}^{2x}\sin y\cos y f_{vv}''-\mathrm{e}^x\sin y f_v'$$

五、解. 由

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=2x+2=0 \\ f_y'(x,y)=-4y=0 \end{cases}$$

得 $x=-1, y=0$，驻点 $(-1,0)$ 在区域 D 内，且 $f(-1,0)=3$.

在 D 的边界 $x^2+4y^2=1$ 上, 有

$$f(x,y)=x^2-\left(2-\frac{x^2}{2}\right)+2x+4$$

$$=\frac{3}{2}x^2+2x+2=g(x), x\in[-2,2]$$

令 $g'(x)=3x+2=0$ 得 $x=-\frac{2}{3}$, 且

$$g(-2)=4, g(2)=12, g\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

故 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为12, 最小值为 $\frac{4}{3}$.

六、解. 用直线 $y=x$ 将 D 分成 D_1 和 D_2 两部分, 其中

$$D_1=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}, 0\le r\le 1\right\}$$

$$D_2=\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le r\le 1\right\}$$

故

$$\iint\limits_D(|x-y|+2)dxdy=\iint\limits_{D_1}(y-x)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x-y)dxdy+2\iint\limits_D dxdy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}d\theta\int_0^1(r\sin\theta-r\cos\theta)rdr+\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr+2\pi$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta\int_0^1 r^2dr+\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta\int_0^1 r^2dr+2\pi$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+2\pi=\frac{4}{3}\sqrt{2}+2\pi$$

七、证. $\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}dx\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}f(x-y)dy$

令 $t=x-y$，则

$$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}dx\int_{x+\frac{A}{2}}^{x-\frac{A}{2}}f(t)(-dt)=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}dx\int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}}f(t)dt$$

交换积分次序后得

$$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-A}^{0}dt\int_{-\frac{A}{2}}^{t+\frac{A}{2}}f(t)dx+\int_0^A dt\int_{t-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}f(t)dx$$

$$=\int_{-A}^{0}f(t)(t+A)dt+\int_0^A f(t)(A-t)dt=\int_{-A}^{A}f(t)(A-|t|)dt$$