2023 年春季学期

微积分B期中试题

注意事项：

1. 本次考试为闭卷考试，考试时间为 90 分钟，总分 30 分。

注意行为规范　遵守考场纪律

一、填空题：每小题 1 分，满分 4 分。

1. 椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 在点 (-1,-2,3) 处的切平面方程为__________

2. 设 $f(x,y)=x^2+xy+2y^2$, 则 f 在点 (0,1) 处的最大方向导数为__________.

3. 设 $z^2-x^2y+e^{z-x}=1$ 确定了函数 $z=(x,y)$, 则 $z(x,y)$ 在点 (1,1,1) 处的全微分为 $\mathrm{d}z=$____________________.

4. 设 $D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\}$, 则 $\iint\limits_D \cos^2(x+y^2)+\sin^2(x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$__________.

二、选择题：每题 1 分，满分 4 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列选项不是某二阶常系数线性微分方程的解的是　　　　（　　　）

A. $e^x+x, x-2e^{-2x}, e^{-2x}+x$　　　　B. $e^x+xe^{-x}, 2xe^x+xe^{-x}, xe^x+xe^{-x}$

C. $e^x-x+1, 2-x, e^x-x$　　　　D. $x(e^x+1), xe^x-2e^{-x}, xe^x+2x+2e^{-x}$

2. 设 $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, I_2=\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, I_3=\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $x=0, y=0, x+y=\dfrac{1}{2}, x+y=1$ 所围成，则下列选项正确的是　　　　（　　　）

A. $I_1>I_2>I_3$　　B. $I_1>I_3>I_2$　　C. $I_1<I_3<I_2$　　D. $I_1<I_2<I_3$

3. 设 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$, 其极值情况为　　　　（　　　）

A. 无极值　　　　B. 有极大值，无极小值

C. 有极小值，无极大值　　　　D. 有极大值和极小值

4. 将直角坐标系下的二重积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 化为极坐标系下的积分应为 （　　）

A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

三、(4 分)

求微分方程 $y'' + 2y' + 2y = xe^x$ 的通解.

四、(3 分)

设 $z = f(x - 2y^2, e^x \sin y)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

五、(3 分)

已知 $u = f(x, y, z), \phi(x^2, y, z) = 0, y = \sin x, \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

六、(3 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D |xy-1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

七、(3 分)

在圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成的圆锥中，求底面平行于 xOy 平面的最大长方体的体积.

八、**(3 分)**

设 $z=(x,y)$ 满足方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$, 作变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+3y\end{cases}$, 求变换后的函数 $z=(u,v)$ 满足的方程.

九、(3 分)

已知

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^{\alpha}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

求 α 的取值范围使得

(1) 函数在 (0,0) 处连续;

(2) 函数在 (0,0) 处可微;

(3) 函数在 (0,0) 处偏导数连续.