2019 春季期末试题解答

一、填空题（每小题 2 分，共 5 小题，满分 10 分）

1. 设空间区域Ω由圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$围成，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(xy^2+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\underline{\qquad\qquad}。$$

解：要点 三重积分对称性，三重积分计算，极坐标。

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(xy^2+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(1-\left(x^2+y^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{4}。$$

2. 已知向量场$\mathbf{F}(x,y,z)=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$，则其在点$(1,2,3)$处的旋度

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}\big|_{(1,2,3)}=\underline{\qquad\qquad}。$$

解：要点 旋度公式。

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}\big|_{(1,2,3)}=\left|\begin{matrix}\vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & y^2 & z^2\end{matrix}\right|_{(1,2,3)}=\left(0,0,0\right)=\vec{0}。$$

3. 设有分布着质量的曲线弧$x=\cos t, y=\sin t, z=t\left(0\le t\le 2\pi\right)$，它的线密度$\rho(x,y,z)=\dfrac{z^2}{x^2+y^2}$，则该曲线弧对$z$轴的转动惯量$I_z=$ ______。

解：要点 转动惯量公式。

$$I_z=\int\limits_{c}\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$$

$$=\int\limits_{C}z^2\mathrm{d}s$$

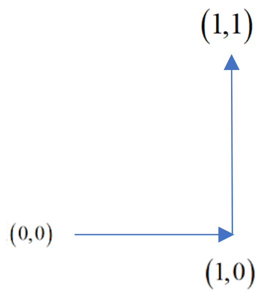
$$=\int_0^{2\pi}t^2\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}\ \mathrm{d}t$$

$$=\frac{8\sqrt{2}\pi^3}{3}。$$

4. 设质点在平面力场$\mathbf{F}(x,y)=-\mathrm{e}^y\mathbf{i}+(y+1-x\mathrm{e}^y)\mathbf{j}$的作用下沿抛物线$y=x^2$从点$(0,0)$运动到点$(1,1)$，则力场$\mathbf{F}(x,y)$所作的功$W=$ ______。

解：要点 对坐标的曲线积分的物理意义，积分与路径无关。

$$W=\int\limits_{L}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int\limits_{L}\vec{F}\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=\int\limits_{L}-\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+\left(y+1-x\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y$$



因$\frac{\partial}{\partial x}\left(y+1-x\mathrm{e}^y\right)=-\mathrm{e}^y=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\mathrm{e}^y\right)$，积分与路径无关。 故

$$W=\int\limits_{L}-\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+\left(y+1-x\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(-1)\ \mathrm{d}x+\int_0^1\left(y+1-\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{2}-\mathrm{e}。$$

5. 全微分方程$\left(\mathrm{e}^x+y\right)\mathrm{d}x+\left(x+\sin y\right)\mathrm{d}y=0$的通解为 ______。

解：要点 全微分求积

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(\mathrm{e}^x+y\right)\mathrm{d}x+\left(x+\sin y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^y\left(x+\sin y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{e}^x-1+xy-\cos y+1$$

$$=\mathrm{e}^x+xy-\cos y\text{。}$$

通解为 $\mathrm{e}^x+xy-\cos y=C$。

二、选择题（每小题 2 分，共 5 小题，满分 10 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. 设 $a_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数（　　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 均收敛；　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 均发散；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散；　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。

解：要点 莱布尼茨定理，正项级数判断法

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的交错级数。$\because \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>0,\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\downarrow\ \to 0$。

$a_n{}^2=\left[\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^2\sim\frac{1}{n}$，　$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 发散。

(C) 对。

2. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛，则 $x=\sqrt{5}$ 与 $x=5$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a_n(x-2)^n$ 的（　　　）。

(A) 收敛点，收敛点；　　　(B) 收敛点，发散点；

(C) 发散点，收敛点；　　　(D) 发散点，发散点。

解：要点 阿贝尔定理 幂级数的性质

幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$x=1$处条件收敛$\Rightarrow R=1$。（阿贝尔定理）

$\therefore$ 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间是$(-1,1)$。

又幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a_nx^n=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x$，它和幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间相同。从而它的收敛区间也是$(-1,1)$。现在

$$0<\sqrt{5}-2<1,\ 5-2=3\notin(-1,1)。$$

故，(B)对。

3. 设函数$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1,\end{cases}$的傅里叶级数的和函数为

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x\ \ (-\infty<x<+\infty),$$

其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$，则$S(-\frac{5}{2})=($　　　$)$。

(A) $\frac{1}{2}$；　　(B) $-\frac{1}{2}$；　　(C) $\frac{3}{4}$；　　(D) $-\frac{3}{4}$。

解：要点 ① 周期为$2l$的周期函数$f(x)$的傅里叶展开式为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\qquad(n=0,1,2,\cdots)。$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\qquad(n=0,1,2,\cdots)。$$

② 偶延拓。

和函数$S(x)$是以2为周期的偶函数，故

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}^{+}\right)+f\left(\frac{1}{2}^{-}\right)}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}\text{。}$$

(C) 对。

4. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$的上半部分$z\geq 0$，取上侧，则下列结论中，不正确的是（　　）。

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$；　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$；

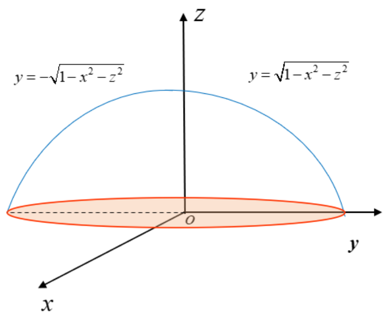
(C) $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$；　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$。

解：要点 第二类曲面积分的计算

$$\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2-z^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[-\iint\limits_{D_{zx}}\left(-\sqrt{1-x^2-z^2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\right]$$

$\neq 0$。



(D) 对。

5. 设L是空间曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x-y+z=2,\end{cases}$从$z$轴正向看去$L$是逆时针方向，则曲线积分

$$\oint\limits_{L}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=(\quad)\text{。}$$

(A) 2π；　　(B) π；　　(C) $-\pi$；　　(D) -2π。

解：要点 斯托克斯公式。

记Σ为平面$x-y+z=2$被L所围成的部分的上侧，L的正向与Σ的侧符

合右手规则。

$$\oint_L (z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma (-1-(-1))\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-[1-1]\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-(-1))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_\Sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi \text{。}$$

(A) 对。

三、(7 分) 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成空间区域的整个边界曲面.

解： 要点 第一类曲面积分的计算

将 Σ 分成 $\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\in D$ 和 $\Sigma_2: z=1,(x,y)\in D$ 两部分，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，则

$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+0^2+0^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(\sqrt{2}+1\right)\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(\sqrt{2}+1\right)\iint_D r^2 r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\left(\sqrt{2}+1\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$$

$$=\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi。$$

四、（7 分） 将函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$ 展开成 $(x+1)$ 的幂级数，并写出收敛域。

解： 要点 函数展成幂级数

$$\frac{x-1}{x^2-x-6}=\frac{3}{5}\frac{1}{x+2}+\frac{2}{5}\frac{1}{x-3}$$

$$=\frac{3}{5}\frac{1}{1+\left(x+1\right)}+\frac{2}{5}\frac{1}{-4+\left(x+1\right)}$$

$$=\frac{3}{5}\frac{1}{1+\left(x+1\right)}-\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{x+1}{4}}$$

$$=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{4}\right)^n \qquad |x+1|<1 \text{ 且 } \left|\frac{x+1}{4}\right|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{5}(-1)^n-\frac{1}{10}\frac{1}{4^n}\right](x+1)^n,\quad x\in(-2,0)。$$

五、（7 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n}x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$。

解： 要点 幂级数的收敛域及和函数

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^2+1}{n+1}x^{2n+2}}{\frac{n^2+1}{n}x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}x^2=x^2$$

由比值审敛法，当 $|x|<1$ 时，幂级数绝对收敛，当 $|x|>1$ 时，幂级数发散，

所以收敛半径$R=1$。又当$x=\pm1$时幂级数发散，故收敛域为$(-1,1)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$， 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{2n}\right)'=\frac{x}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\right)'$$

$$=\frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\text{。}$$

设$Q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$， 则

$$Q'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^{2n}\right)'=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{2x}{1-x^2}\text{。}$$

从0到x积分得

$$Q(x)=Q(x)-Q(0)=\int_0^x Q'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t=-\ln\left(1-x^2\right)\text{。}$$

故

$$S(x)=\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}+Q(x)=\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}-\ln\left(1-x^2\right),\qquad x\in(-1,1)\text{。}$$

$$*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\quad(-1\le x<1)$$

六、（5 分）计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$为上半椭球面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{2}=1$（$z\ge0$）的上侧.

解： 要点 高斯公式。

令

$$P=\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad Q=\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad R=\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}。$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}。$$

所以当$(x,y,z)\neq(0,0,0)$时，恒有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}=0。$$

补半球面$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=1(z\geq 0)$上侧，记$\Sigma$和$\Sigma_1$所围成的区域为$\Omega$，由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1^-}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega}0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0。$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

再补平面$\Sigma_2: z=0\left(x^2+y^2\leq 1\right)$上侧，记$\Sigma_1$和$\Sigma_2$所围成的区域为$\Omega_1$，又由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma_1+\Sigma_2^-} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega} 3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}1^3 = 2\pi\text{ 。}$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi + \iint_{\Sigma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi + \iint_{\Sigma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi + \iint_{x^2+y^2\le 1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi + 0 = 2\pi\text{ 。}$$

另解：同上，当 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 时，恒有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}=0\text{ 。}$$

补半球面 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=1(z\geq 0)$ 上侧，则有

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \iint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

11.5“三合一” 公式

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left[-x\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)-y\left(-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)+\sqrt{1-x^2-y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}r\,\mathrm{d}r = 2\pi\text{ 。}$$

七、(4 分) 已知平面区域$D=\{(x,y)|0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，证明：

(1) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint\limits_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(2) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x\ge 2\pi^2$。

证：要点 格林公式及区域对称。

(1) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{\sin y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-ye^{-\sin x}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\oint\limits_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{-\sin y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-ye^{\sin x}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

因为区域D关于直线$y=x$对称，所以

$$\iint\limits_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(e^{\sin x}+e^{-\sin y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

故

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint\limits_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x。$$

(2) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint\limits_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D\left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin y}+e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\ge\frac{1}{2}\iint\limits_D(2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi^2。$$