2020春高等数学期末试题答案

一、填空题（每小题3分，共4小题，满分12分）

1. $\sqrt{2}$；　2. $-\frac{1}{5}\mathrm{d}x+\frac{2}{5}\mathrm{d}y$ 或 $-\frac{1}{5}\Delta x+\frac{2}{5}\Delta y$ 或 $-\frac{1}{5}(x-1)+\frac{2}{5}(y-1)$；

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$ $(-2<x<2)$；4. $\frac{\sqrt{3}}{6}$。

二、选择题（每小题3分，共4小题，满分12分）

1. (B)；　2. (A)；　3. (D)；　4. (B)。

三、(8分) 求微分方程 $y''+y'-2y=2\mathrm{e}^x$ 的通解。

解　特征方程为 $r^2+r-2=0$，解得 $r=-2,\ r=1$，则对应的齐次微分方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x$$

设方程的特解为

$$y^*=Ax\mathrm{e}^x$$

求导得

$$y^{*\prime}=A(x+1)\mathrm{e}^x,\quad y^{*\prime\prime}=A(x+2)\mathrm{e}^x$$

代入方程得

$$A(x+2)\mathrm{e}^x+A(x+1)\mathrm{e}^x-2Ax\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x$$

化简得 $3A\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x$，解得 $A=\frac{2}{3}$，所以

$$y^*=\frac{2}{3}x\mathrm{e}^x$$

故方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x+\frac{2}{3}x\mathrm{e}^x$$

四、(8 分) 设函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，$z=f(x-2y,\mathrm{e}^{xy})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 求偏导数得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\left(y\mathrm{e}^{xy}\right)=\frac{\partial f}{\partial u}+y\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-2)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\left(x\mathrm{e}^{xy}\right)=-2\frac{\partial f}{\partial u}+x\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$$

求二阶偏导数得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+y\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(x\mathrm{e}^{xy}\right)\right]+(1+xy)\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}+y\mathrm{e}^{xy}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(x\mathrm{e}^{xy}\right)\right]$$

$$=-2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x-2y)\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\mathrm{e}^{2xy}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+(1+xy)\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$$

五、（7 分）设 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$，计算积分 $\iint\limits_D\left|y^2-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解 记 $D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1,\ y\le x,\ y\ge 0\right\}$，由对等性知

$$\iint\limits_D\left|y^2-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\left|y^2-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta\right)\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

六、（7 分）设函数 $f(x,y)$ 满足 $f_x'(x,y)=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+2$， L 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,2)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I=\int_L f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y$。

解 积分得

$$f(x,y)=\int(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}\mathrm{d}x+\varphi(y)$$
$$=\frac{1}{2}\int(2x+1)\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x-y}+\varphi(y)=\frac{1}{2}\left[(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}-\int\mathrm{e}^{2x-y}\cdot 2\mathrm{d}x\right]+\varphi(y)$$
$$=\frac{1}{2}\left[(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}-\mathrm{e}^{2x-y}\right]+\varphi(y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+\varphi(y)$$

令 $x=0$ 得 $\varphi(y)=y+2$，所以

$$f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+y+2$$

于是

$$I=\int_L f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,2)}f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{(0,0)}^{(1,2)}\mathrm{d}f(x,y)=f(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,2)}=f(1,2)-f(0,0)=5-2=3$$

七、（7 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中曲面 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧。

解 简化得

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

补平面 Σ_1：$z=0$（$x^2+y^2\le 4$），上侧，记由 Σ 和 Σ_1 围成的区域为 Ω，由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma^-+\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^3\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(z^3+1\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=3\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 3\iiint_{\Omega}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\iiint_{\Omega}\rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho^4\mathrm{d}\rho = 3\cdot(2\pi)\cdot 1\cdot\frac{2^5}{5} = \frac{192}{5}\pi$$

又

$$\iint_{\Sigma_1} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma_1}(z^3 + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\le 4}(0^3 + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\pi$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{2}\iint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\oiint_{\Sigma^- + \Sigma_1} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_1} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{192}{5}\pi + 4\pi\right) = -\frac{86}{5}\pi$$

八、（8 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$的收敛域及和函数。

解 收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{n(n+1)}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n} = \frac{1}{2}$$

所以收敛区间为$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。当$x = \pm\frac{1}{2}$时，级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n}{n(n+1)}$，收敛，所以幂级数的收敛域为$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$。

设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$的和函数为$S(x)$，即

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n,\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

（方法一）当 $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)2^n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n}-\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}$$

$$=-\ln(1-2x)-\frac{1}{2x}\left[-\ln(1-2x)-2x\right]$$

$$=\frac{1-2x}{2x}\ln(1-2x)+1$$

又

$$S(0)=0$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\left[\frac{1-2x}{2x}\ln(1-2x)+1\right]=1$$

所以

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2x}{2x}\ln(1-2x)+1, & x\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\\ 0, & x=0\\ 1, & x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

（方法二）

$$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^{n+1},\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

求导得

$$\left(xS(x)\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$$

$$\left(xS(x)\right)''=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{n-1}=\frac{2}{1-2x}$$

从 0 到 x 积分得

$$\left(xS(x)\right)'=\int_0^x\left(tS(t)\right)''\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{2}{1-2t}\mathrm{d}t=-\ln(1-2x),\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

再从0到x积分得

$$xS(x)=\int_0^x\left(tS(t)\right)'\mathrm{d}t=\int_0^x-\ln(1-2t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1-2x}{x}\ln(1-2x)+x,\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

当$x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，有

$$S(x)=\frac{1-2x}{2x}\ln(1-2x)+1$$

余同。

九、（7 分）在第一卦限内作曲面$\Sigma:z=4-\frac{x^2}{4}-y^2$的切平面，使得切平面与三个坐标面及曲面$\Sigma$所围成的立体的体积最小，求切点的坐标，并求最小体积。

解 设切点坐标为(x_0,y_0,z_0)，则该点的法向量为

$$\bar{n}=\left\{-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right\}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left\{\frac{x_0}{2},2y_0,1\right\}$$

所以切平面方程为

$$\frac{x_0}{2}(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+1\cdot(z-z_0)=0$$

即

$$\frac{x_0}{2}x+2y_0y+z=8-z_0$$

切平面在三个坐标轴上的截距依次为$\frac{2(8-z_0)}{x_0},\frac{8-z_0}{2y_0},8-z_0$，故切平面与三个坐标面所围成的立体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\frac{2(8-z_0)}{x_0}\cdot\frac{8-z_0}{2y_0}\cdot(8-z_0)=\frac{(8-z_0)^3}{6x_0y_0}$$

设拉格朗日函数

$$F(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\frac{(8-z_0)^3}{6x_0y_0}+\lambda\left(\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+z_0-4\right)$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_0} = -\dfrac{(8 - z_0)^3}{6x_0^2 y_0} + \dfrac{\lambda x_0}{2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_0} = -\dfrac{(8 - z_0)^3}{6x_0 y_0^2} + 2\lambda y_0 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z_0} = -\dfrac{(8 - z_0)^2}{6x_0 y_0} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \dfrac{x_0^2}{4} + y_0^2 + z_0 - 4 = 0 \end{cases}$$

解得$(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 2)$，由问题的实际意义，该点即为所求切点。

又曲面Σ与三个坐标面所围成的立体Ω的体积为

$$V_1 = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{4}\left(\pi \cdot 2\sqrt{4 - z} \cdot \sqrt{4 - z}\right)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\int_0^4 (4 - z)\mathrm{d}z = 4\pi$$

所以所求最小体积为

$$V\Big|_{(2,1,2)} - V_1 = 18 - 4\pi$$

十、讨论级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$的敛散性（常数$p > 0$），若收敛，指出是条件收敛还是绝对收敛。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)\right|}{\dfrac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right|}{\dfrac{1}{n^p}} = 1$$

所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)\right|$与$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$敛散性相同，故当$p > 1$时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$绝对收敛，当$0 < p \le 1$时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$不绝对收敛。

因为

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

而当$\frac{1}{2} < p \le 1$时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right]$绝对收敛，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$条件收敛；当$0 < p \le \frac{1}{2}$时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right]$发散，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$发散。