主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2020/2021 学年春季学期

高等数学 B 试题（期末）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名　学号　班号　学院

密　封

一、填空题（每小题 2 分，共 4 小题，满分 8 分）

1. 设 $\vec{A}(x,y,z)=(2x-2)\vec{i}+x^2y\vec{j}-xz^2\vec{k}$，则 $\vec{A}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的散度 $\mathbf{div}\,\vec{A}\big|_{(1,-1,2)}=$__________.

2. 设 $a_n>0\ (n=0,1,2,\cdots)$ 且幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(3x-1)^n$ 的收敛域为__________.

3. 微分方程 $(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解为____________.

4. 若常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!}$ 的和记为 S，则 $S=$____________.

二、选择题（每小题 2 分，共 4 小题，满分 8 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. 下列四个级数中绝对收敛的是（　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n+1}$；　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}$；　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}$；　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$。

2. 设 Ω 是由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的空间立体，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$（　　）

(A) $\dfrac{\pi}{3}$；　(B) $\dfrac{\pi}{4}$；　(C) $\dfrac{\pi}{8}$；　(D) $\dfrac{\pi}{16}$。

3. 已知曲线段$L: x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, 0\le t\le 2\pi$，则曲线积分$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$ (　　)

(A) $\sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{4\pi}-1\right)$；　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{4\pi}-1\right)$；　(C) $\sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{2\pi}-1\right)$；　(D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{2\pi}-1\right)$。

4. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为常数项级数，则下面说法中错误的是(　　)

(A) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|+u_n}{2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|-u_n}{2}$都收敛；

(B) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|+u_n}{2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|-u_n}{2}$都发散；

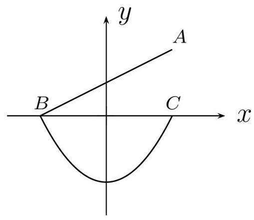
(C) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|+u_n}{2}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|-u_n}{2}$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$都发散；

(D) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|+u_n}{2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|-u_n}{2}$都发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$都发散。

三、(4 分) 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{z}{\sqrt{9+4x^2+4y^2}}\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是曲面$z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$介于$z=0$及$z=2$之间的部分。

四、(5 分) 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x$ 展开成 x 的幂级数，并指出它的收敛域。

五、（5 分）计算曲线积分 $\int_L \frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中曲线段 L 是由点 $A(1,1)$ 到点 $B(-1,0)$ 的直线段，再沿曲线 $y=x^2-1$ 从点 $B(-1,0)$ 到点 $C(1,0)$ 而成的路线（如右下图所示）。



学院______ 班号______ 学号______ 姓名______

……密……封……

六、（5 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x\left(1+x^2z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\left(1-x^2z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\left(1-x^2z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\left(0\le z\le 1\right)$ 的下侧。

七、（5 分）计算曲线积分 $\oint\limits_{L}\left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z$，其中 L 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线，从 x 轴正向往负向看，曲线 L 是逆时针方向的。

八、（5 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(2n+1)}+\frac{n}{2^n}\right]x^{2n}$的收敛域及和函数。

姓名

学号

密

班号

封

学院

九、（5 分）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且在区间 $\left(-\pi,\pi\right]$ 上 $f(x)=\begin{cases}2x+1, -\pi<x\le 0\\ -2, 0<x\le\pi\end{cases}$，

（1） 将函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并写出其和函数 $S(x)$ 在区间 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上的表达式；

（2） 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}$ 的和。