2021 春季学期高等数学 B 期末试题答案

一、填空题（每小题 2 分，共 4 小题，满分 8 分）

1. -1；　2. $\left[0,\dfrac{2}{3}\right)$或$0\le x<\dfrac{2}{3}$；　3. $y-y^2\sin x+x^2y^3=C$；　4. $3\mathrm{e}-1$.

二、选择题（每小题 2 分，共 4 小题，满分 8 分）

1. (C)；　2. (C)；　3. (B)；　4. (D).

三、(4 分) 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{z}{\sqrt{9+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是曲面$z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$介于$z=0$及$z=2$之间的部分。

解 Σ在xOy面上的投影域为$D:x^2+y^2\le 6$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\sqrt{9+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\frac{\frac{x^2+y^2}{3}}{\sqrt{9+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2+\left(\frac{2y}{3}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{9}\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{9}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{6}}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{9}\cdot 2\pi\cdot\frac{\left(\sqrt{6}\right)^4}{4}=2\pi$$

四、 (5 分) 将函数$f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x$展开成$x$的幂级数，并指出它的收敛域。

解 （解法一）因为

$$f'(x)=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x^4}$$

所以

$$f'(x)=\frac{1}{1-x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^4\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n},x\in\left(-1,1\right)$$

从 0 到x积分得

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{4n}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{4n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},x\in\left(-1,1\right)$$

（解法二）因为

$$\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, -1 < x < 1$$

从0到x积分得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \le x \le 1$$

又

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, -1 < x \le 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, -1 \le x < 1$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{1}{4}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\arctan x \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{4}\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}, -1 < x < 1 \end{aligned}$$

五、（5 分）计算曲线积分$\int_L \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中曲线段$L$是由点$A(1,1)$到点$B(-1,0)$的直线段，再沿曲线$y = x^2 - 1$从点$B(-1,0)$到点$C(1,0)$而成的路线。

解 令$P = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2}$，则当$(x,y) \ne (0,0)$时，有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

（解法一） 设Γ^-是圆$x^2+y^2=\delta^2\left(\delta < \frac{1}{2}\right)$，顺时针方向，则由格林公式得

$$\oint_{L+CA+\Gamma^-} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

其中$D = \left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2 \le \delta^2\right\}$，所以

$$\int_L \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_{\Gamma^+} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - \int_{CA} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

其中

$$\oint_{\Gamma^+}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{\delta^2}\oint_{\Gamma^+}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\delta^2}\iint_D 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$$

$$\int_{CA}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\pi}{4}$$

因此

$$\int_L\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$

（解法二）在不包含原点的单连通区域曲线积分与路径无关，所以

$$\int_L\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{(1,1)}^{(-1,1)}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{(-1,1)}^{(-1,-1)}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$+\int_{(-1,-1)}^{(1,-1)}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{(1,-1)}^{(1,0)}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_1^{-1}\frac{-\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_1^{-1}\frac{-\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$

六、（5 分）计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma x\left(1+x^2z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\left(1-x^2z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\left(1-x^2z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$ 的下侧。

解 补一平面 $\Sigma_1: z=1, x^2+y^2\le 1,$ 上侧，记 Σ 与 Σ_1 围成的区域为 Ω，由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} x\left(1+x^2z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\left(1-x^2z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\left(1-x^2z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(1+x^2z\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[y\left(1-x^2z\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[z\left(1-x^2z\right)\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_\Omega\left(1+3x^2z+1-x^2z+1-2x^2z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1\mathrm{d}z=3\cdot 2\pi\int_0^1 r\left(1-r\right)\mathrm{d}r=6\pi\cdot\frac{1}{6}=\pi$$

又

$$\iint_{\Sigma_1} x(1+x^2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y(1-x^2z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(1-x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma_1} z(1-x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2\cos^2\theta)r\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{3}{4}\pi$$

所以

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} x(1+x^2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y(1-x^2z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(1-x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{\Sigma_1} x(1+x^2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y(1-x^2z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(1-x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

七、（5 分）计算曲线积分 $\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是抛物面 $z = x^2+y^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线，从 x 轴正向往负向看，曲线 L 是逆时针方向的。

解 （解法一）由 $z=x^2+y^2$ 与 $x^2+y^2=2x$ 得 $z=2x$，取 Σ 为平面

$$\Sigma : z = 2x, x^2+y^2 \le 2x, \text{下侧}$$

由斯托克斯公式得

$$\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\iint_\Sigma (y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

-

$$= 2\iint_{x^2+y^2\le 2x}[-(y+2x)\cdot 2 - (2x+x)\cdot 0 + (x+y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{x^2+y^2\le 2x}(-y-3x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -6\iint_{x^2+y^2\le 2x} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\mathrm{d}r = -6\pi$$

（解法二）L 的参数形式为

$$L : x = 1+\cos t, y = \sin t, z = 2+2\cos t, t \text{ 从 } \pi \text{ 到} -\pi$$

则

$$\oint_L \left(y^2 - z^2\right)\mathrm{d}x + \left(z^2 - x^2\right)\mathrm{d}y + \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\pi}^{-\pi} \left\{ \left[\sin^2 t - (2 + 2\cos t)^2\right](-\sin t) + \left[(2 + 2\cos t)^2 - (1 + \cos t)^2\right](\cos t) + \left[(1 + \cos t)^2 - \sin^2 t\right](-2\sin t) \right\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\pi}^{-\pi} \left[(2 + 2\cos t)^2 - (1 + \cos t)^2\right](\cos t)\mathrm{d}t = 3\int_{\pi}^{-\pi} \left(\cos t + 2\cos^2 t + \cos^3 t\right)\mathrm{d}t = -6\pi$$

八、（5 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(2n+1)} + \frac{n}{2^n}\right]x^{2n}$的收敛域及和函数。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left[\frac{1}{(n+1)(2n+3)} + \frac{n+1}{2^{n+1}}\right]x^{2n+2}\right|}{\left|\left[\frac{1}{n(2n+1)} + \frac{n}{2^n}\right]x^{2n}\right|} = x^2$$

所以当$x^2 < 1$即$|x| < 1$时幂级数绝对收敛，当$x^2 > 1$即$|x| > 1$时幂级数发散，又当$|x| = 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(2n+1)} + \frac{n}{2^n}\right]$收敛，所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(2n+1)} + \frac{n}{2^n}\right]x^{2n}$的收敛域为$[-1,1]$。

设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(2n+1)} + \frac{n}{2^n}\right]x^{2n}$的和函数为$S(x)$，则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n} = S_1(x) - 2S_2(x) + S_3(x)$$

其中

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n} = -\ln(1 - x^2), x \in (-1,1)$$

$$S_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^n}x^{2n-1}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n}}{2^n}\right)'=\frac{x}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n}\right)'$$

$$=\frac{x}{2}\left(\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'=\frac{x}{2}\cdot\frac{4x}{\left(2-x^2\right)^2}=\frac{2x^2}{\left(2-x^2\right)^2},x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

对于 $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$，有

$$\left[xS_2(x)\right]'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},x\in\left(-1,1\right)$$

从 0 到 x 积分得

$$xS_2(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(-1+\frac{1}{1-t^2}\right)\mathrm{d}t=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

解得

$$S_2(x)=-1+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)$$

于是

$$\begin{aligned}S(x)&=S_1(x)-2S_2(x)+S_3(x)\\&=-\ln\left(1-x^2\right)-2\left(-1+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{2x^2}{\left(2-x^2\right)^2}\\&=\frac{2x^2}{\left(2-x^2\right)^2}-\ln\left(1-x^2\right)-\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}+2,x\in\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)\end{aligned}$$

又

$$S(0)=0$$

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{2x^2}{\left(2-x^2\right)^2}-\ln(1-x^2)-\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}+2\right]=4-2\ln2$$

$$S(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}S(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\left[\frac{2x^2}{\left(2-x^2\right)^2}-\ln(1-x^2)-\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}+2\right]=4-2\ln2$$

所以

$$S(x)=\begin{cases}\frac{2x^2}{\left(2-x^2\right)^2}-\ln(1-x^2)-\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}+2,x\in\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)\\0,x=0\\4-2\ln2,x=\pm1\end{cases}$$

九、（5 分）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且在区间 $(-\pi,\pi]$ 上

$$f(x)=\begin{cases}2x+1,-\pi<x\le 0\\ -2,0<x\le\pi\end{cases}$$

（1） 将函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并写出其和函数 $S(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式；

（2） 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

解 （1）傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(2x+1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}-2\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\pi}\left[\left(x^2+x\right)\Big|_{-\pi}^{0}-2\pi\right]=-\pi-1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(2x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}-2\cos nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[(2x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}2\sin nx\,\mathrm{d}x\right]-\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{2}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi},\ n=2k-1\\ 0,\ n=2k\end{cases},k=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(2x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}-2\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[-(2x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\int_{-\pi}^{0}2s\cos nx\,\mathrm{d}x\right]+\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[(-2\pi+1)(-1)^n-1\right]+\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\frac{2}{n\pi}\left[(3-2\pi)(-1)^n-3\right],n=1,2,\cdots$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$-\frac{\pi+1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(3-2\pi)(-1)^n-3}{n\pi}\sin nx\right]$$

其在区间 $[-\pi,\pi]$ 上和函数为

$$S(x)=\begin{cases}2x+1, -\pi<x<0\\ -2, 0<x<\pi\\ -\dfrac{2\pi+1}{2}, x=\pm\pi\\ -\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

（2）令 $x=0$，得

$$S(0)=-\frac{1}{2}=-\frac{\pi+1}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$