2022 春季学期高等数学 B 期末试题答案

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. $2x-y-z-1=0$ 或 $2(x-1)-(y-0)-(z-1)=0$；　2. $\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\mathrm{d}y$ 或 $\Delta x+\frac{1}{3}\Delta y$；

3. 12；　4. $\frac{9}{4}$；　5. $\frac{2\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$.

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. B；　2. A；　3. B；　4. C；　5. D.

三、（7 分）设 $\begin{cases} u=f(x-2y,v+y) \\ v=g(u-x,vy) \end{cases}$，其中函数 f 和 g 具有连续的偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$.

解 （方法一）方程组关于 x 求偏导数得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)+g_2'\cdot y\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_1'-f_2'g_1'-yf_1'g_2'}{1-f_2'g_1'-yg_2'},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{f_1'g_1'-g_1'}{1-f_2'g_1'-yg_2'}$$

（方法二）设 $F(x,y,u,v)=f(x-2y,v+y)-u, G(x,y,u,v)=g(u-x,vy)-v$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ -g_1' & yg_2'-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & f_2' \\ g_1' & yg_2'-1 \end{vmatrix}}=\frac{f_1'-f_2'g_1'-yf_1'g_2'}{1-f_2'g_1'-yg_2'}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix} -1 & f_1' \\ g_1' & -g_1' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & f_2' \\ g_1' & yg_2'-1 \end{vmatrix}}=\frac{f_1'g_1'-g_1'}{1-f_2'g_1'-yg_2'}$$

（方法三）对方程组取全微分得

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = f_1' \cdot (\mathrm{d}x - 2\mathrm{d}y) + f_2' \cdot (\mathrm{d}v + \mathrm{d}y) \\ \mathrm{d}v = g_1' \cdot (\mathrm{d}u - \mathrm{d}x) + g_2' \cdot (y\mathrm{d}v + v\mathrm{d}y) \end{cases}$$

解得

$$\mathrm{d}u = \frac{f_1' - f_2'g_1' - yf_1'g_2'}{1 - f_2'g_1' - yg_2'}\mathrm{d}x + \frac{(f_2' - 2f_1')(1 - yg_2') + vf_2'g_2'}{1 - f_2'g_1' - yg_2'}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}v = \frac{f_1'g_1' - g_1'}{1 - f_2'g_1' - yg_2'}\mathrm{d}x + \frac{-2f_1'g_1' + f_2'g_1' + vg_2'}{1 - f_2'g_1' - yg'}\mathrm{d}y$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f_1' - f_2'g_1' - yf_1'g_2'}{1 - f_2'g_1' - yg_2'}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{f_1'g_1' - g_1'}{1 - f_2'g_1' - yg_2'}$$

四、（8 分）设函数 $f(u)$ 具有连续的二阶导数，且 $f(0)=1, f'(0)=-1$，若 $z = f(\mathrm{e}^x \cos y)$满足方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + 3\mathrm{e}^x \cos y)\mathrm{e}^{2x}$，求 $f(u)$的表达式.

解 令 $u = \mathrm{e}^x \cos y$，则 $z = f(u)$, 求偏导数得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \mathrm{e}^x \cos y, \ \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot (-\mathrm{e}^x \sin y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) \cdot (\mathrm{e}^x \cos y)^2 + f'(u) \cdot \mathrm{e}^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot (-\mathrm{e}^x \sin y)^2 + f'(u) \cdot (-\mathrm{e}^x \cos y)$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot (\mathrm{e}^x \cos y)^2 + f'(u) \cdot \mathrm{e}^x \cos y$$
$$+ f''(u) \cdot (-\mathrm{e}^x \sin y)^2 + f'(u) \cdot (-\mathrm{e}^x \cos y) = f''(u)\mathrm{e}^{2x}$$

代入已知方程得

$$f''(u)\mathrm{e}^{2x} = (4f(u) + 3u)\mathrm{e}^{2x}$$

简化得微分方程

$$f''(u) - 4f(u) = 3u$$

特征方程为$r^2 - 4 = 0$，特征根为$r_{1,2} = \pm 2$，得对应齐次通解

$$F(u)=C_1\mathrm{e}^{2u}+C_2\mathrm{e}^{-2u}$$

设非齐次特解为 $f^*(u)=Au+B$，代入微分方程得 $A=-\frac{3}{4},B=0$，所以

$$f^*(u)=-\frac{3}{4}u$$

故微分方程的通解为

$$f(u)=C_1\mathrm{e}^{2u}+C_2\mathrm{e}^{-2u}-\frac{3}{4}u$$

由已知条件 $f(0)=1,f'(0)=-1$ 得

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\2C_1-2C_2-\frac{3}{4}=-1\end{cases}$$

解得 $C_1=\frac{7}{16},C_2=\frac{9}{16}$，因此

$$f(u)=\frac{7}{16}\mathrm{e}^{2u}+\frac{9}{16}\mathrm{e}^{-2u}-\frac{3}{4}u$$

五、（7 分）已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数**.**

解　函数 $f(x,y)$ 的梯度为

$$\mathbf{grad}\,f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}=(x+1)\mathbf{i}+(y+1)\mathbf{j}$$

所以 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的最大方向导数为

$$|\mathbf{grad}\,f(x,y)|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$$

设拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=(x+1)^2+(y+1)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2(x+1)+\lambda(2x+y)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2(y+1)+\lambda(2y+x)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$$

前两个方程相减得$(x-y)(\lambda+2)=0$，解得$y=x,\lambda=-2$，当$y=x$时，得到方程组

$$\begin{cases}y=x\\ x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$$

解得$x=y=\pm1$，当$\lambda=-2$时，得到方程组

$$\begin{cases}x+y-1=0\\ x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$$

解得$x=2,y=-1$或$x=-1,y=2$，于是极值嫌疑点为$(1,1),(-1,-1),(2,-1),(-1,2)$，且

$$|\mathbf{grad}\,f(1,1)|=2\sqrt{2},|\mathbf{grad}\,f(-1,-1)|=0,|\mathbf{grad}\,f(2,-1)|=|\mathbf{grad}\,f(-1,2)|=3$$

故最大方向导数为$|\mathbf{grad}\,f(2,-1)|=|\mathbf{grad}\,f(-1,2)|=3$.

六、（7 分）计算二重积分$\iint\limits_D(1-x)|x^2+y^2-4|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le16\}$.

解 $\iint\limits_D(1-x)|x^2+y^2-4|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4(1-r\cos\theta)|r^2-4|r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4|r^2-4|r\mathrm{d}r-\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^4|r^2-4|r^2\mathrm{d}r=2\pi\int_0^4|r^2-4|r\mathrm{d}r-0$$

$$=2\pi\left[\int_0^2(4-r^2)r\mathrm{d}r+\int_2^4(r^2-4)r\mathrm{d}r\right]$$

$$=2\pi\left[2\cdot4-\frac{1}{4}\cdot16+\frac{1}{4}(4^4-2^4)-2(4^2-2^2)\right]=80\pi$$

七、（8 分）计算曲线积分$\oint\limits_L\dfrac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，其中$L$是

（1）逆时针方向圆周$(x-1)^2+(y-1)^2=1$；

（2）逆时针方向闭曲线$|x|+|y|=1$.

解 （1）令 $P=\dfrac{x-y}{x^2+4y^2},Q=\dfrac{x+4y}{x^2+4y^2}$，则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x^2-8xy+4y^2}{\left(x^2+4y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

记 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\le 1\right\}$，由格林公式得

$$\oint_L\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

（2）设 C 为逆时针方向椭圆周 $x^2+4y^2=r^2\left(0<r<\dfrac{1}{2}\right)$，记

$D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+4y^2\ge r^2,|x|+|y|\le 1\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\middle|x^2+4y^2\le r^2\right\}$，由格林公式得

$$\oint_{L+C^-}\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

所以

$$\oint_L\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\oint_C\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\oint_C(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y=\frac{1}{r^2}\iint_{D_2}(1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{r^2}\cdot 2\cdot\left(\pi\cdot r\cdot\frac{r}{2}\right)=\pi$$

八、(8 分) 计算曲面积分 $\iint_\Sigma\left(xz+\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2z\left(x^2y+\sin z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 $z\ge 0$ 部分的上侧.

解 （方法一）补一平面 $\Sigma_1: z=0\left(x^2+y^2\le 1\right)$,下侧，记 Σ 与 Σ_1 围成的区域为 Ω，由高斯公式得

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}\left(xz+\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2z\left(x^2y+\sin z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(xz+\mathrm{e}^y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[2z\left(x^2y+\sin z\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[-x^2\left(y^2+z^2\right)\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_\Omega\left(z+2zx^2-2zx^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 z\cdot\pi\left(\sqrt{1-z}\right)^2\mathrm{d}z=\pi\int_0^1 z(1-z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{6}$$

又

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(xz+\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2z\left(x^2y+\sin z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_1}\left(xz+\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_1}2z\left(x^2y+\sin z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma_1}-x^2\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+0-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}-x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\mathrm{d}r$$

$$=\left(\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{24}$$

故

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(xz+\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2z\left(x^2y+\sin z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(xz+\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2z\left(x^2y+\sin z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(xz+\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2z\left(x^2y+\sin z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{8}$$

（方法二）

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(xz+\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2z\left(x^2y+\sin z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left\{-\left[x\left(1-x^2-y^2\right)+\mathrm{e}^y\right]\left(-2x\right)-2\left(1-x^2-y^2\right)\left[x^2y+\sin\left(1-x^2-y^2\right)\right]\left(-2y\right)-x^2\left[y^2+\left(1-x^2-y^2\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[2x^2\left(1-x^2-y^2\right)+4x^2y^2\left(1-x^2-y^2\right)-x^2y^2-x^2\left(1-x^2-y^2\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left[2r^2\sin^2\theta\left(1-r^2\right)+4r^2\sin^2\theta\cdot r^2\cos^2\theta\left(1-r^2\right)-r^2\sin^2\theta\cdot r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta\left(1-r^2\right)^2\right]\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8}$$

九、(5 分) 设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ （其中 $a_n>0$ ）， $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 是它的部分和，

（1）证明：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛；

（2）判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\left(-1\right)^{n-1}\frac{a_n}{S_n^2}\right]$ 是条件收敛还是绝对收敛，并给出证明.

证 （1）由题设条件知数列$\{S_n\}$单调增加，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$是正项级数，其部分和

$$T_n=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}<\frac{1}{S_1},\ n=2,3,\cdots$$

有界，由正项级数收敛的充要条件知级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$收敛.

（2）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{S_n^2}\right]$绝对收敛，证明如下：

因为

$$0<\frac{a_n}{S_n^2}<\frac{a_n}{S_{n-1}S_n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$$

而级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$收敛，由比较审敛法知级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$收敛，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\ln\left[1+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{S_n^2}\right]\right|}{\frac{a_n}{S_n^2}}=1$$

由比较审敛法的极限形式知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\ln\left[1+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{S_n^2}\right]\right|$收敛，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{S_n^2}\right]$绝对收敛.