主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2023 年春季学期

微积分 B（期末）试题

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得　分											
阅卷人											

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 50 分。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

一、本题得分______

填空题（每小题 2 分，共 5 小题，满分 10 分）

1. 已知曲线 $L: x=\cos t+t\sin t, y=\sin t-t\cos t, 0\le t\le 1$，则 $\int_L \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s=$____.

2. 已知锥面壳 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$ 上点 (x,y,z) 处的面密度 $\mu(x,y,z)=z$，则其关于 z 轴的转动惯量 $I_z=$__________.

3. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-3)^n$ 的收敛区间为__________.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$__________.

5. 微分方程 $\left(2x\sin y+3x^2y\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+x^2\cos y+y^2\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解是__________.

二、本题得分______

选择题（每小题 2 分，共 5 小题，满分 10 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. 下列四个交错级数中绝对收敛的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+1}$；　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^3}$；

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)$；　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

2. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2\ (R>0)$的外侧，则下列同一组的两个积分均为零的是(　　)

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}S,\ \iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S,\ \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

(C) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S,\ \iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}S,\ \iint\limits_{\Sigma} xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

3. 将球坐标系下的三次积分$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$化成柱坐标系下的三次积分时，下列正确的是(　　)

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}z$；

(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}z$；

(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}z$；

(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}z$.

4. 设L为不经过点$O(0,0)$的任意分段光滑简单闭曲线，逆时针方向，则曲线积分

$\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$(　　)

(A) 恒为零;

(B) L环绕$O(0,0)$时值为零，不环绕$O(0,0)$时值为π；

(C) L环绕$O(0,0)$时值为π，不环绕$O(0,0)$时值为零;

(D) 以上结论均不对.

5. 设 $S(x)$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ x-2, & 1<x<2\end{cases}$ 的余弦级数的和函数，且

$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{2},-\infty<x<+\infty$，则$\pi^2\times a_2+S(7)+S\left(-\dfrac{7}{2}\right)=$(　　)

(A) 1；　　（B）-1；　　(C) $\dfrac{1}{2}$；　　(D) $-\dfrac{1}{2}$.

姓名________ 学号________ 班号________ 学院________

密 封

三、 本题得分______

（5 分）计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(4x^2+5y^2+6z^2-10xy^2z^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$.

四、本题得分______

（5 分）将函数 $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-x-6}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数，并指出收敛域.

五、 本题得分______

（5 分）计算曲线积分 $\int_L \left(xe^{2y}+y\right)dx+\left(x^2e^{2y}-y\right)dy$，其中 L 为自原点 $O(0,0)$ 至点 $A(2,2)$ 的圆弧 $y=\sqrt{4x-x^2}$．

六、本题得分______

（5 分）设 L 是曲面 $\Sigma: 4x^2+y^2+z^2=1\left(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\right)$ 的边界线，曲面方向朝上，已知曲线 L 的方向与曲面 Σ 的方向满足右手螺旋法则，计算曲线积分 $\oint_L \left(yz^2-\cos z\right)dx+2xz^2dy+\left(2xyz+x\sin z\right)dz$．

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

……密……封……

七、本题得分______

（5 分）设浴缸的排水孔是 xOy 平面上半径为$1\mathrm{cm}$、圆心在原点的圆孔，浴缸排水时在排水孔附近水流的流速场由下式给出：

$$\vec{V}=\frac{y+xz}{\left(z^2+1\right)^2}\vec{i}+\frac{yz-x}{\left(z^2+1\right)^2}\vec{j}+\left(\frac{1}{z^2+1}+x^2\right)\vec{k}$$

（1）证明：$\mathbf{div}\vec{V}=0$；

（2）设 Σ 为球心在原点、半径为$1\mathrm{cm}$ 的位于 xOy 平面下方的半球面，其法向量指向下侧，求该流速场通过曲面 Σ 的流量.

八、本题得分______

(5 分) 设 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(na_n + a_{n-1}\right), n = 1,2,\cdots$， $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数，

（1）证明：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1；

（2）证明：$\left(1-x\right)S'(x) - xS(x) = 0 \left(x \in (-1,1)\right)$，并求 $S(x)$ 的表达式.

学院________ 班号________ 学号________ 姓名________

……封……密……

学院________ 班号________ 学号________ 姓名________

密 封