2022 春微积分试题

一、选择题

1.A；2. D；3. A；4.D；5.C

二、填空题

6. y **；7.** $\frac{3}{4}\pi$ **；8.** $\frac{\sin xy}{y}=1$；9. $3e^2-1$；10. 1

11.

（1）解：由 $F\left(\mathrm{e}^x+y, x^2+y^2+z^2\right)=z$

得 $\mathrm{e}^x F_1'+F_2'\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial z}{\partial x}$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{e}^x F_1'+2xF_2'}{1-2zF_2'}$

（2）解： $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+2024}}{\frac{1}{n+1+2024}}\right|=1$

当 $|x-2024|<1$，即 $2023<x<2025$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2024)^n}{n+2024}$ 绝对收敛.

当 $x=2025$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2024}$ 发散.

当 $x=2023$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+2024}$ 收敛，

因此，级数的收敛域为 $[2023, 2025)$.

12. 解：

（方法一） $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint\limits_{\Sigma_1}+\oiint\limits_{\Sigma_2}+\oiint\limits_{\Sigma_3}$ ，

其中 Σ_1 为锥面部分， $\Sigma_2: z=1, \Sigma_3: z=2$ ，他们的投影区域分别记为 D_1, D_2, D_3

$$I=\iint\limits_{D_1}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3}\frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{e^r}{r}rdr-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{e}{r}rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{e^2}{r}rdr$$

$$=2\pi e^2$$

（方法二） $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，

$$=\int_1^2 e^z dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{r}rdr$$

$=2\pi\int_{1}^{2} ze^{z}dz$

$=2\pi e^{2}$

13.解：对 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两端关于 t 求导

$xf_x{}'(tx,ty)+yf_y{}'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$，取 t=1

$xf_x{}'(x,y)+yf_y{}'(x,y)=-2f(x,y)$

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left[xf_x{}'(x,y)+yf_y{}'(x,y)+2f(x,y)\right]dxdy=0$$

14 解：设密度为 ρ，质心坐标为 $\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z}\right)$

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}\rho xdS}{\iint\limits_{\Sigma}\rho dS},\overline{y}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}\rho ydS}{\iint\limits_{\Sigma}\rho dS},\overline{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}\rho zdS}{\iint\limits_{\Sigma}\rho dS}$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\rho dS=\iint\limits_{\Sigma}\rho\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}\rho\iint\limits_{\Sigma}dxdy=\sqrt{2}\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}rdr=\sqrt{2}\pi\rho$$

$\iint\limits_{\Sigma}\rho xdS=\sqrt{2}\rho\iint\limits_{\Sigma}xdxdy=\sqrt{2}\pi\rho$，$\iint\limits_{\Sigma}\rho ydS=\sqrt{2}\rho\iint\limits_{\Sigma}ydxdy=0$

$$\iint\limits_{\Sigma}\rho zdS=\sqrt{2}\rho\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\frac{32\sqrt{2}}{9}\rho$$

质心坐标为 $\left(1,0,\frac{32}{9\pi}\right)$

15.证明：（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n}=1$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 收敛.

（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n+\frac{1}{n^2}}=1$，故某项之后 $\sqrt[n]{a_n+\frac{1}{n^2}}>\frac{1}{2}$.

$$\left(a_n\right)^{1-\frac{1}{n}}\le\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)^{1-\frac{1}{n}}=\frac{a_n+\frac{1}{n^2}}{\sqrt[n]{a_n+\frac{1}{n^2}}}\le2\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)$$

由比较法，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\right)^{1-\frac{1}{n}}$ 收敛.