主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（一校三区）2024 年春季学期

微积分 试题

注意事项：

1. 本卷满分 50 分；
2. 请在答题卡上用黑笔答题，用 2B 铅笔涂学号，本卷答题无效；
3. 本卷共三大页，请勿缺损，否则按作弊处理；
4. 本卷除装订线外任何地方均可做演算用，考试结束后与答题卡一起上交.

授课教师________ 姓名________ 学号________ 院系________

密 封 线

一、单选题（5 道小题，每小题 2 分，共计 10 分）

1. 设 $z=4x-4y-x^2-y^2$，则点 $(2,-2)$ 是该函数的（　　）.

(A) 驻点，且是极大值点；　　(B) 驻点，且是极小值点；

(C) 驻点，但不是极值点；　　(D) 驻点，偏导数不存在的点.

2. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4, y\ge 0, z\le 0\}$，$\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\le 0\}$，则（　　）.

(A) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=4$ 倍 Ω 的体积；　　(B) $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega_1}xy\mathrm{d}V$

(C) $\iiint\limits_{\Omega}xz\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega_1}xz\mathrm{d}V$；　　(D) $\iiint\limits_{\Omega}yz\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega_1}yz\mathrm{d}V$

3. 设 $f'(x)$ 连续，且 $f(0)=1$，曲线积分 $\int_L yf(x)\mathrm{d}x+(f(x)-x^2)\mathrm{d}y$ 与路径无关，则（　　）.

(A) $f(x)=3e^{x}-2-2x$；　　(B) $f(x)=3e^{x}-2+2x$；

(C) $f(x)=3e^{-x}-2+2x$；　　(D) $f(x)=3e^{-x}-2-2x$.

4. Σ 是空间光滑的有向曲面片，Γ 是 Σ 的有向边界曲线，Γ 方向与 Σ 方向符合右手螺旋法则，则由斯托克斯公式 $\oint\limits_{\Gamma}(2xz+y)\mathrm{d}x+(xy+z^2)\mathrm{d}y+(z+x^2)\mathrm{d}z$ 等于（　　）.

(A) $\iint\limits_{\Sigma}2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　(B) $\iint\limits_{\Sigma}(2xz+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(xy+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(C) $\iint\limits_{\Sigma}(2z+x+1)\mathrm{d}S$；　　(D) $\iint\limits_{\Sigma}-2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

草　纸

（草纸内不得答题）

授课教师______ 姓名______ 学号______ 院系______

密 封 线

5. Σ 是抛物面 $z=2-x^2-y^2$；$z\ge 0$ 的上侧，则由两类曲面积分的联系，

$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$ 等于（　　）.

(A) $\iint\limits_{\Sigma}(P\cdot 2x+Q\cdot 2y+R)\mathrm{d}S$；

(B) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{-P\cdot 2x-Q\cdot 2y+R}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\mathrm{d}S$；.

(C) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{P\cdot 2x+Q\cdot 2y+R}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\mathrm{d}S$；

(D) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{P\cdot 2x+Q\cdot 2y+R\cdot z}{\sqrt{z^2+4(x^2+y^2)}}\mathrm{d}S$.

一、填空题（5 道小题，每小题 2 分，共计 10 分）

6. 已知向量场 $\vec{A}=\left\{xy,zx,x^2y\right\}$，则 $\mathrm{div}\vec{A}=$ ______________________.

7. 设 C：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，计算积分 $\oint\limits_C\dfrac{\sqrt[3]{|xy|}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}s=$ ______________________.

8. 已知方程 $\left(\dfrac{\sin xy}{y^2}-\dfrac{x\cos xy}{y}\right)y'=\cos xy$ 满足初值条件 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，则该微分方程特解为______________________.

9. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)2^n}{n!}=$ ______________________.

10. 设函数 $f(x)$ 以周期为 2 的周期函数，它在 $\left(-1,1\right]$ 的定义为 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$，则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数

在点 $x=2024$ 处收敛于______________________.

三、简答题（共 30 分）

11. （每题 5 分，共 10 分）

(1) 设 $F\left(\mathrm{e}^x+y,x^2+y^2+z^2\right)=z$ 确定函数 $z=z\left(x,y\right)$，其中 F 具有一阶连续的偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

(2) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(x-2024\right)^n}{n+2024}$ 的收敛域.

草　　纸

（草纸内不得答题）

院系________ 学号________ 姓名________ 授课教师________

密 封 设 线

12.（5 分）计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{e^{z}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}\,dxdy$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ 与平面 $z=1,z=2$ 所围立体的边界曲面，取外侧.

13.（5 分）设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$，都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$.

证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_{L} yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

14.（5 分）求密度均匀的曲面 $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ 被曲面 $x^{2}+y^{2}=2x$ 所割下部分的质心坐标.

15.（5 分）设 $a_n>0$，已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}$ 收敛；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^{1-\frac{1}{n}}$ 收敛.

草 纸

（草纸内不得答题）