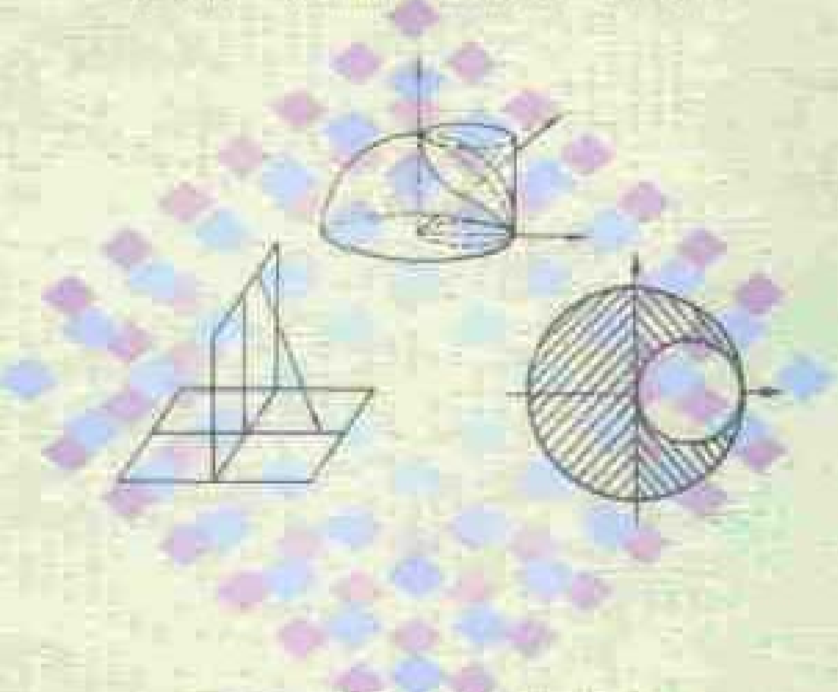
21世纪大学课程辅导丛书

高等数学典型题

(第2版)

解法·技巧·注释

龚冬保　武忠祥　毛怀遂　鄢叔亮



西安交通大学出版社

21 世纪大学课程辅导丛书

高等数学典型题

（第 2 版）

解法·技巧·注释

龚冬保　武忠祥
毛怀遂　郎双亮

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

作者根据多年的教学经验，收集了千余道高等数学的典型题。题型既有传统的证明题、解析题，又有近年考试中常见的选择题、填空题，即非客观题和客观题。所选的每道题力求有较新颖、独特的解法，并且从分析题意入手，引导出解题的技巧，旨在启发读者学会求解高等数学各类问题的方法和技巧，提高分析问题和解决问题的能力。为了突出一些典型的方法和揭示一些习题的背景，本书几乎对每道题作了注释。

本书可作为大学生学习高等数学的参考书，也可供报考硕士研究生的考生及参加高等数学竞赛的数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题解法·技巧·注释/ 龚冬保等编 . -2版
西安:西安交通大学出版社,2000.1
ISBN 7-5605-1220-8

Ⅰ.高… Ⅱ.龚… Ⅲ.高等数学-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第76677号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市咸宁西路28号 邮政编码 710049 电话:(029)2668316)
西安向阳印刷厂印装
各地新华书店经销
开本:787 mm×1 092 mm 1/16 印张:28.875 字数:709千字
2000年1月第2版 2000年1月第1次印刷
印数:0 001~10 000 定价:29.50元

前　言

为学好高等数学，要做一定数量的习题。在做数学练习题时，不少人采用“套公式”的方法，这样，只有通过大量的练习，才能获得一些数学知识，很难学会分析问题和解决问题的方法，所以，“套公式”的方法是不可取的。本书力图给读者展示另一种解题方法：从分析题目的条件与结论间的逻辑关系入手，理清解题思路，再一步一步地做下去；遇到需用的公式，自然地提取使用，这样能清楚地判断结论的正确性。我们认为坚持这样的解题方法，不但能对所学知识加深理解，还有利于培养数学的思维能力。这就是我们写这本书的目的。为此我们针对本课程的内容精选和编制了近千道典型题目，用上面所述方法作了解答，有些题目的解法独特、新颖，多数题目在书的旁边，对该题解题思路、技巧作了注释。因此，解答的正文步骤较简略，希望读者在阅读本书时能边看边推导，并能用我们介绍的一些方法和技巧，去解答更多的题。最好主动地去想一些更好的解题方法。

本书可作为高等数学的教学参考书，对报考硕士研究生以及准备参加数学竞赛的数学爱好者，本书更有参考价值。

本书的第 1 章、第 2 章、第 7 章由毛怀遂编写；第 3 章和第 8 章由邱双亮编写；第 4 章、第 5 章、第 6 章由武忠祥编写；第 9 章、第 10 章由龚冬保编写，最后由龚冬保统稿。写这样的书，对我们来说也是个尝试，希望对读者有所启发，但限于作者的水平，本书难免有疏漏与不足之处，恳请读者批评指正。

编者衷心感谢陆庆乐教授，他仔细地审校了全书，并提出了许多宝贵的意见，感谢西安交通大学出版社的支持，使本书得以出版问世。

编　者

第 2 版前言

本书第 1 版受到了读者的肯定和欢迎，我们表示衷心地感谢。应广大读者的要求，第 2 版在第 1 版的基础上，为各章增加了考试中常见的所谓“客观题”(即填空题和单项选择题)内容。挑选这些题的原则，一是要覆盖本章的基本内容；二是探讨解“客观题”的特殊方法与技巧。客观题已成为事实上的一类题型，这种题型与传统的“非客观题”对解题的要求不同，只问结果不管过程，由此产生了解客观题的特殊方法与技巧。当然解客观题仍然要依靠解非客观题的基本功。

基于客观题解题的要求，我们尽量做到将基本解法与特殊解法相对比的书写方法，减少答题的盲目性；有的题则在旁注中点出一些特殊技巧，以启发读者自己去思考和练习。这也算作是一种新的尝试吧。

编　者

1999.12

目　录

第1章 函数 极限 连续

1.1 客观题

1.1.1 填空题

1-1 已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)$的定义域为 $\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$.

解 依题意得 $\sin\varphi(x)=1-x^2$,所以

$$\varphi(x) = \arcsin(1-x^2)$$
$$-1 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1$$

所以
$$-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$$

注意 $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

1-2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\underline{\frac{1}{2}}$

解1 因为

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} \leqslant \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} \leqslant \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} = \frac{1}{2}$$

所以,原式 $=\frac{1}{2}$

解2 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{K=1}^{n}\frac{K}{n^2+n+K}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{K=1}^{n}\frac{K}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{K=1}^{n}\left(\frac{K}{n^2+n+K}-\frac{K}{n^2}\right)$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{K=1}^{n}\frac{K}{n^2}=\frac{1}{2}$,及 $\left|\sum\limits_{K=1}^{n}\left(\frac{K}{n^2+n+K}-\frac{K}{n^2}\right)\right| \leqslant \sum\limits_{K=1}^{n}\frac{K(n+K)}{n^2(n^2+n+K)}$

$$\leqslant \sum_{K=1}^{n}\frac{2}{n^2}=\frac{2}{n}\to 0 \qquad \left(\frac{K(n+K)}{n^2+n+K}\leqslant 2\right)$$

解1是利用夹逼准则.

解2则是用无穷小分析法. $\frac{K}{n^2+n+K}$ 与 $\frac{K}{n^2}$ 是等价无穷小. 故想到用 $\frac{K}{n^2}$ 代替 $\frac{K}{n^2+n+K}$, 而证明它们差之和趋于0.

1-3 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\cdots+\frac{1}{9n^2-3n-2}\right)=\underline{\frac{1}{3}}$

本题利用的是分拆法. 其目的是求

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$

出前 n 项的和.

1-4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$ $\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

先求根号下的和,再将分子有理化.

1-5 $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ $\underline{e^6}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}$

$=e^6$

利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 注意解中的变形方法.

1-6 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^{\frac{x}{3}}=8$,则 $a=$ $\underline{3\ln2}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^a\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{a}{3}}$

$=e^a$

所以 $e^a=8$, $a=3\ln2$

此种变形法是求这类极限的有效手段之一.

1-7 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$ $\underline{2}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]-\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$=2$

利用等价无穷小代换:当 $x\to0$ 时, $\sin x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$.

1-8 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln\cos x}=$ $\underline{-3}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{e^{x^2}-1}{\ln[1+(\cos x-1)]}+\frac{1-\cos x}{\ln[1+(\cos x-1)]}\right]$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln[1+(\cos x-1)]}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln[1+(\cos x-1)]}$

当 $x\to0$ 时 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos x-1}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x-1}=-3$$

1-9 已知当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ $\underline{\frac{3}{2}}$.

本题利用了对数恒等式 $N=e^{\ln N}$. 当 $x\to0$ 时，$e^x-1\sim x$.

解 依题意得

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=1$$

而 $$\lim_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{3}\ln(1+ax^2)}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax^2)}{3(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2ax^2}{3x^2}=\frac{2}{3}a$$

所以 $a=\frac{3}{2}$

1-10 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\underline{e^{-\frac{1}{2}}}$.

函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{(\ln\cos x)/x^2}=\lim\limits_{x\to0}e^{(\cos x-1)/x^2}=e^{-\frac{1}{2}}$,

而 $f(0)=a$

所以 $a=e^{-\frac{1}{2}}$

1-11 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant0\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处间断，则常数 a 与 b 应满足的关系是 $\underline{a\neq b}$.

解 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(a+bx^2)=a$$
$$f(0)=a$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$$

所以 $a\neq b$

1.1.2 单项选择题

1-12 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们可以构成复合函数 $f[f(x)]$, $g[f(x)]$, $f[g(x)]$, $g[g(x)]$，则其中为奇函数的是( ).

利用奇偶函数的性质可得.

(A) $f[f(x)]$　　(B) $g[f(x)]$
(C) $f[g(x)]$　　(D) $g[g(x)]$

(A)　$f[f(-x)]$
$=f[-f(x)]$
$=-f[f(x)]$

1-13 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

则 $f(-x)$等于(　).

(A) $f(-x)=\begin{cases}-e^{-x}, & x\leqslant 0\\ -\cos x, & x>0\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}e^{x}, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}-\cos x, & x<0\\ e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ e^{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$

(D)　**本题主要检查对函数概念掌握的情况.从 $-x\leqslant 0$ 及 $-x>0$ 入手进行讨论.**

1-14 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$的定义域为(　).

(A) $x\in R$,但 $x\neq 0$　　(B) $x\in R$,但 $1+\dfrac{1}{x}\neq 0$

(C) $x\in R$,但 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$　　(D) $x\in R$,但 $x\neq 0,-1$

(C)

解　由　$x\neq 0$

$$1+\frac{1}{x}\neq 0$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\neq 0$$

得　$x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$

分母不能取零.

1-15 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$,

则 $f[g(x)]=($　$)$.

(A) $\begin{cases}x^2+2, & x<0\\ 1-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x^2+2, & x<0\\ 1+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(D)

解　由 $g(x)\leqslant 0$ 得 $x\geqslant 0$ 时,$g(x)=-x<0$.

复合函数的概念是学习导数和积分的一个重要环节,一定要熟练掌握.本题要从复合函数 $f[g(x)]$ 的内层 $g(x)$开始讨论.

所以　$x \geqslant 0$ 时　$f[g(x)]=1+x$

由　$g(x)>0$ 得　$x<0$ 时，$g(x)=x^2>0$

所以　$x<0$ 时　$f[g(x)]=x^2+2$

1-16　函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是(　). (B)

(A) $[-1,1]$　(B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(C) $[0,1]$　(D) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

解　因为　$1+x^2 \geqslant 2|x|$

所以　$-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$

故选(B)

此题可看作是求函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的值域，这样就把问题简化了.

1-17　设$[x]$表示不超过 x 的最大整数，则 $y=x-[x]$是(　). (B)

(A) 无界函数　(B) 周期为 1 的周期函数

(C) 单调函数　(D) 偶函数

解　如图 1.1 所示

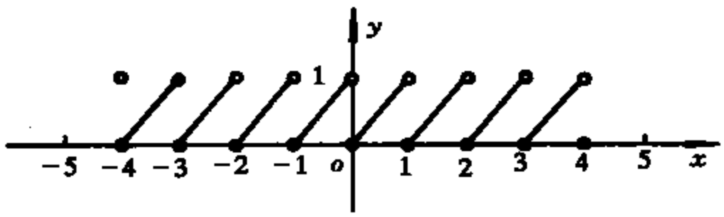


图 1.1

画草图是帮助解题的一种方法.

1-18　设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=0$，则下列断言正确的是(　). (D)

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小

(D) 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小，则 y_n 必为无穷小

解　$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{x_n}(x_n y_n)\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$

$=0$

本题的关键是利用极限的运算法则.

故选(D).

注:取 $x_n=n, y_n=\frac{1}{n^2}$,知(A)不正确.

取 $x_n=\frac{1-(-1)^n}{2}n, y_n=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}n$,知(B)不正确.

取 $x_n=\frac{1}{n^2}, y_n=n$,知(C)不正确.

1-19 设 $x\to 0$ 时,$e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为( ). (A)

(A) 5 (B) 4 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 2

解 因为 $e^{x\cos x^2}-e^x=e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1]$

而当 $x\to 0$ 时

$$e^{x(\cos x^2-1)}-1\sim x(\cos x^2-1)\sim x\left(-\frac{x^4}{2}\right)$$

所以 $n=5$.

此题主要是利用等价无穷小的代换.也可用洛必达法则解之,但工作量较大.

1-20 当 $x\to 0$ 时,下列 4 个无穷小量中比其它 3 个更高阶的无穷小量是( ). (C)

(A) $\ln(1+x)$ (B) e^x-1

(C) $\tan x-\sin x$ (D) $1-\cos x$

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

故选(C).

本题中给出的(A),(B),(D)三个无穷小量是最常见的无穷小量.一定要熟练掌握,灵活应用.

1-21 设 $x\to 0$ 时,$e^{x^2}-(ax^2+bx+c)$是比 x^2 高阶的无穷小,其中 a,b,c 是常数,则( ). (B)

(A) $a=1,b=2,c=0$ (B) $a=c=1,b=0$

(C) $a=c=2,b=0$ (D) $a=b=1,c=0$

解 由题意得

$$\lim_{x\to 0}[e^{x^2}-(ax^2+bx+c)]=0$$

所以 $c=1$

本题主要利用极限的四则运算定理.也可用洛必达法则解之.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-(ax^2+bx+c)}{x^2}=0$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}-a-\dfrac{b}{x}\right)=0$

所以 $b=0,a=1$

1-22 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 是常数,则( ). (C)

(A) $a=b=1$　　(B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$　　(D) $a=b=-1$

解 由题意得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax\right)=b$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-ax^2-ax}{x+1}$存在.所以

$$1-a=0 \text{ 得 } a=1$$

故
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax\right)\\ &=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)\\ &=-1 \end{aligned}$$

利用 b 是常数及极限运算法则确定出 a.然后代回原式再确定出 b.

1-23 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$均存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$( ). (C)

(A) 存在　　(B) 不存在

(C) 不一定存在　　(D) 存在但非零

请读者自己举例说明.

1-24 设 $f(x)$和 $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义.$f(x)$为连续函数,且 $f(x)\neq 0$,$g(x)$有间断点,则( ). (B)

(A) $g[f(x)]$必有间断点　　(B) $g(x)/f(x)$必有间断点

(C) $[g(x)]^2$ 必有间断点　　(D) $f[g(x)]$必有间断点

解 若 $F(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$为连续函数,则

$$g(x)=f(x)F(x)$$

必为连续函数,矛盾.故选(B).

本题主要利用连续函数的运算法则.

1-25 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$. 讨论函数 $f(x)$ 的间断点,其结论为( ). (B)

(A) 不存在间断点 (B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$ (D) 存在间断点 $x=-1$

解 因为 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$

$$=\begin{cases}1+x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ 0, & x\leqslant -1 \text{ 或 } x>1\end{cases}$$

故选(B).

先求出函数的表达式. 再考查分断点处的左右极限. 注意 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ $(|x|<1)$. $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$ $(|x|>1)$.

1-26 设 $f(x)=\frac{x^3-x}{\sin\pi x}$,则( ). (D)

(A) 有无穷多个第一类间断点 (B) 只有 1 个可去间断点

(C) 有 2 个跳跃间断点 (D) 有 3 个可去间断点

解 显然 $x=-1,0,1$ 是 $f(x)$ 的 3 个间断点. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x}{\pi x}=-\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim_{y\to 0}\frac{(y-1)(y-2)y}{-\sin\pi y}=-\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=-\frac{2}{\pi}$$

故选(D).

其余间断点都是第二类的.

作变量代换 $y=x+1$.

1.2 非客观题

1.2.1 函数及其性质

1-27 试求下列函数的定义域

1) $f(x)=\lg(1-\lg x)$; 2) $f(x)=\arccos\frac{x}{[x]}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解 1) 要使 $f(x)$ 有意义, x 应满足

$$x>0 \quad 且 \quad 1-\lg x>0$$

即

$$0<x<10$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $(0,10)$.

2) 要使 $f(x)$ 有意义, x 应满足

对应法则和定义域是函数的两个基本要素. 应当养成这样的习惯:遇到函数就要注意它的定义域.

$$-1\leqslant\frac{x}{[x]}\leqslant 1\quad 且\quad [x]\neq 0,$$

而 $$x-1<[x]\leqslant x$$

当 $x<0$ 时 $$0<\frac{x}{[x]}\leqslant 1$$

当 $0\leqslant x<1$ 时， $\frac{x}{[x]}$ 无意义

当 $x\geqslant 1$ 时， $$1\leqslant\frac{x}{[x]}$$

最后一个不等式的等号仅当 $x\in N$ 时成立，故 $f(x)$ 定义域为 $\{x\mid x<0$ 或 $x=1,2,3,\cdots\}$.

1-28 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 $(a>0)$.

解 由 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，得

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$$

故 $$a\leqslant x\leqslant 1-a$$

从而当 $a=1-a$ 即 $a=1/2$ 时，函数仅在 $x=1/2$ 一点有定义；当 $0<a<1/2$ 时，函数的定义域为 $[a,1-a]$；当 $a>1/2$ 时无解. 即定义域为空集.

这些不等式由构成复合函数的原则得到

1-29 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

解 为了求 $f(x-2)$，先求 $f(x)$，我们先给出求 $f(x)$ 的两种方法：

本题主要讨论对应法则，且以复合函数为主.

配方法

1） $f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$

所以 $$f(x)=2^{x^2-4}-x+2$$

变量代换法

2） 令 $x=t-2$，代入得

$$f(t)=2^{t^2-4}-t+2$$

所以 $$f(x)=2^{x^2-4}-x+2$$

$$f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2=2^{x^2-4x}-x+4$$

1-30 设

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0\\-e^x, & x<0\end{cases}\qquad \varphi(x)=\ln x$$

两个函数是否可以构成复合函数，要根据复合函

1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域；

2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗？

解 因为 $\varphi(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$，值域是 $(-\infty, +\infty)$，而 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 所以 $\varphi(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内，故 $f[\varphi(x)]$ 有意义，因而

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} -\varphi^2(x), & \varphi(x) \geqslant 0 \\ -e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 0 \end{cases}$$

即
$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} -\ln^2 x, & x \geqslant 1 \\ -x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

从上式可看出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $(0, +\infty)$.

2) 由于 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, 0]$，$\varphi(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$，它们无公共的部分，所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

数的法则分别考查这两个函数的定义域及值域.

复合函数中内层函数的值域与外层函数的定义域之交集必须是非空集.

1-31 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leqslant 1 \\ 2, & |x| > 1 \end{cases}$$

求 1) $\varphi[\varphi(x)]$； 2) $\varphi[\psi(x)]$.

解 1) 因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时，$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$

$$\varphi[\varphi(x)] \equiv 1, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

2) 因为 $$\varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 1, & |\psi(x)| \leqslant 1 \\ 0, & |\psi(x)| > 1 \end{cases}$$

而仅当 $|x| = 1$ 时， $\psi(x) = 1$

$|x| \neq 1$ 时， $1 < \psi(x) \leqslant 2$

故
$$\varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 1, & |x| = 1 \\ 0, & |x| \neq 1 \end{cases}$$

易知 $\varphi[\psi(x)]$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

复合函数类似"代入". 但要注意定义域的变化. 复合后最好写下复合函数的定义域.

1-32 试说明 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$ 是一个初等函数.

解 因为
$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - |x - 1| \\ &= 1 - \sqrt{(x-1)^2}, \quad x \in [0,2] \end{aligned}$$

所以由初等函数的定义知 $f(x)$ 是一个初等函数.

本题说明分段函数也有可能是初等函数.

1-33 求 c 的一个值，使

$$(b + c)\sin(b + c) - (a + c)\sin(a + c) = 0,$$

这里 $b > a$，均为常数.

解 令 $f(x) = x\sin x$

此解法巧妙地运用了函数的奇偶性，使问题得以解

则 $f(x)$ 是一个偶函数，依题意即求 c 使

$$f(b+c)=f(a+c)$$

成立.$(a \neq b)$

所以
$$a+c=-(b+c)$$
$$c=-\frac{1}{2}(a+b)$$

决.若是用解方程的方法那将是困难的.读者不妨一试.

1-34 求下列函数的反函数

1)
$$y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$$

2)
$$y=\begin{cases}x, & x<1\\ x^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2\\ 3^x, & x>2\end{cases}$$

解 1) 所给函数的定义域及值域分别是 $[-\sqrt{2}/2,1]$，$[0,\sqrt{3\pi}]$. 由 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 解得

$$x=\sin\frac{1}{4}(y^2-\pi)$$

故 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 的反函数为

$$y=\sin\frac{1}{4}(x^2-\pi), \qquad x \in [0,\sqrt{3\pi}]$$

2) 当 $x<1$ 时，$y=x$，

故反函数为

$$y=x, \quad x \in (-\infty,1)$$

当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，$y=x^3$，

故反函数为

$$y=\sqrt[3]{x}, \qquad x \in [1,8]$$

当 $x>2$ 时，$y=3^x$，

故反函数为

$$y=\log_3 x, \qquad x \in (9,+\infty)$$

综上所述，所求的反函数为

$$y=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt[3]{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 8\\ \log_3 x, & x>9\end{cases}$$

注意反函数存在的条件.

注意定义域的范围.

利用几何图形看反函数及其定义域更为清楚，建议读者作出 $y=f(x)$ 的图形.

1-35 设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

解 设
$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$$

则
$$f(0)=a_0=1$$

把系数及一部分系数和视为函数在特殊点的值，比用二项式系数法好.

$$f(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_8 = 1$$

比较原等式两边 x^8 的系数得 $a_8 = 2^8$.

故 $$a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 1 - a_0 - a_8$$
$$= -256$$

1-36 设 $f(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, $f_1(x) = f[f(x)]$, $f_2(x) = f[f_1(x)]$, $f_{n+1}(x) = f[f_n(x)]$ $(n = 1,2,\cdots)$. 试求 $f_n(x)$ 的解析表达式.

先一步一步复合,从特殊中归纳出一般规律,再用数学归纳法证明.

解 $$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f_1(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_2(x) = f[f_1(x)]$$
$$= \frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

一般地,可用数学归纳法证明

$$f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}} \qquad (n = 2,3,4,\cdots)$$

1-37 设对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$,存在常数 $c \neq 0$,使 $f(x+c) = -f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证 因为对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$f(x+c) = -f(x)$$

证明函数是周期函数的关键是要找到不为零的常数 T. 这里 $T = 2c$.

所以对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$f(x+2c) = f[(x+c)+c]$$
$$= -f(x+c)$$
$$= f(x)$$

故 $f(x)$ 是周期函数.

1-38 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增函数,且 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. 证明 $f[f(x)] \leqslant g[g(x)] \leqslant h[h(x)]$.

证 因为 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加,所以对任何 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $x_2 > x_1$,有

注意复合函数的单调性.

$$f(x_1) \leqslant f(x_2), \qquad g(x_1) \leqslant g(x_2)$$

$$h(x_1) \leqslant h(x_2)$$

又对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

所以 $f[f(x)] \leqslant f[g(x)] \leqslant g[g(x)]$

$g[g(x)] \leqslant g[h(x)] \leqslant h[h(x)]$

即 $f[f(x)] \leqslant g[g(x)] \leqslant h[h(x)]$

1-39 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，且对任意 $x、y \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

证明 $F(x) = f(x) + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

证 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，且 $x_2 > x_1$，那么由题给条件有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$$

而 $f(x_1) - f(x_2) \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| < x_2 - x_1$

所以 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$

从而 $F(x_1) < F(x_2)$，故 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

这类题一般要从定义出发去解. $\pm[f(x_1) - f(x_2)] \leqslant |f(x_2) - f(x_1)|$. 我们取其对证明结论有用的一个.

1.2.2 数列的极限

1-40 直接用极限定义证明

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - 6n}{3 + 2n} = -3$$

证 $\left|\frac{1 - 6n}{3 + 2n} + 3\right| = \frac{10}{3 + 2n} < \frac{5}{n}$

所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$，取 $N = [5/\varepsilon]$，当 $n > N$ 时，必有

$$\left|\frac{1 - 6n}{3 + 2n} + 3\right| < \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - 6n}{3 + 2n} = -3$

用极限定义证明 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = a$（有限）主要是适当放大 $|f(n) - a|$，以求得到关于 n 的较为简单的表达式，这是解题的关键所在.

1-41 求下列极限

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{a^n}$ $(a > 1)$； 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n}$ $(a > 1, k \in N)$.

解 1) 令 $x_n = \frac{n}{a^n}$，则

$$x_{n+1} = \frac{n + 1}{n} \cdot \frac{1}{a} x_n$$

由于 $a > 1$，$(n + 1)/n \to 1 (n \to \infty)$. 所以 n 充分大后 $(n + 1)/na < 1$. 即 $\{x_n\}$ 从某项后单减但 $x_n > 0 (n = 1, 2, 3 \cdots)$，故 $\{x_n\}$ 有下界，从而 $\{x_n\}$ 收敛. 由极限运算法则得

利用数列的递推关系及单调有界必有极限这一准则往往可以解决有阶乘或乘方形式的数列极限问题.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$$
$$= \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} x_n$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n} = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

2） 用与上题相同的做法，我们可以求得此题的极限为零. 现在我们换一种做法.

$$a > 1, \qquad \sqrt[k]{a} > 1$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right]^k = \left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right]^k = 0$$

由此可见：熟练地运用极限的运算法则及多知道一些极限的值可简化求另一些极限的步骤.

1-42 证明

1） $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$； 2） $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$.

证 1） 因为当 $a > 1$ 时，$\lim_{n\to\infty} n/a^n = 0$，所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0$，因而存在 N，当 $n > N$，必有 $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1$，

即 $$\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$$

而 $$\sqrt[n]{n} \geqslant 1 \qquad (n,1,2,\cdots)$$

所以当 $n > N$ 时，必有

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

2） 若 $a = 1$，则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

若 $a > 1$，则

$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \qquad (n > [a] + 1)$$

由夹逼定理及 1）的结果知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$$

若 $0 < a < 1$，则 $b = 1/a > 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1$$

参见 1-41 题，这里我们一环扣一环地证明问题. 使各问题密切联系，因而求解过程更简捷.

1-43 设 $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

解 $$x_n = \frac{2-1}{2} \times \frac{3-1}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

连乘式首先要变形，约去公因子，化简后再求极限.

1-44 计算$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

> 有理化分子也是求极限的好方法.

解 $$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1}=\frac{1}{2}$$

1-45 设 $x_n=\dfrac{2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

> 分子、分母均是等比数列的部分和.先利用求和公式求出各自的和,然后再求极限.

解 $$x_n=\frac{2+\frac{1}{3}\times\frac{1-1/3^n}{1-1/3}}{\frac{1}{5}\times\frac{1-1/5^n}{1-1/5}}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3}\times\frac{1-1/3^n}{1-1/3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\times\frac{1-1/5^n}{1-1/5}\right)}$$
$$=\frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=10$$

1-46 设 $x_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

> 这种分解法非常有用,它有利于求出有限和式的简单表达式.

解 $$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$x_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

故 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$$

1-47 设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

> 注意和式中每项的分母是等差数列的部分和.先由求和公式得结果,然后再进行分解,达到化简目的.

解 $$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

而 $$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

所以 $$x_n=1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$$

$$= 1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{n+1}$$

即 $$\lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

有界.

求出和的一般形式.

注意极限运算法则的正确应用.

1-48 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\arctan(n\,!) \times (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\right)\frac{3n^2+1}{n^2-1}\right]$

解 $|\arctan(n!)| \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\arctan(n\,!)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = 0$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2-1} + 3$$

故 原式 $$= \lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2\arctan(n\,!)] - \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2-1}$$

$$= -3$$

化成 n 个等差数列的和.

也可这样求和:

$(2n-1) + 2(2n-3) + \cdots + n$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot(2n-2k+1)$

$= (2n+1)\sum\limits_{k=1}^{n} k - 2\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = (2n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1-49 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[(2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + \cdots + n]$

解 1 $\frac{1}{n^3}[(2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + \cdots + n]$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{n^3}[(2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + \cdots + 1 \\ + (2n-3) + (2n-5) + \cdots + 1 \\ + (2n-5) + \cdots + 1] \\ \cdots \\ + 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\frac{(2n-1)+1}{2}n + \frac{(2n-3)+1}{2}(n-1) + \cdots + 1\right]$$

$$= \frac{1}{n^3}[n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1]$$

$$= \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \dfrac{1}{3}$

解 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[(2n-1)+2(2n-3)+\cdots+n]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[n^2+(n-1)^2+\cdots+1]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

化成积分和的极限形式，再根据定积分的定义化为定积分，从而求出极限．

1-50 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$

解 $\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^6+kn}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}}\quad(n=1,2,\cdots,n)$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}}=\dfrac{1}{3}$

故 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}}=\dfrac{1}{3}$

对于这种和式的极限，我们不易求出它的有限项和式的一般形式．这时可考虑用夹逼定理来做．

1-51 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$．

解 $1\leqslant\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1$$

1-52 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$（这里 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 都是大于零的常数，k 是自然数）．

解 记 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，

所以 $\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{ka^n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$

1-53　设 $x_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}$,求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

注意利用等比数列求和公式.

参见1-59之1).

解　对每一个 $k:0\leqslant k\leqslant n-1$,有

$$\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n+1}\leqslant\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}\leqslant\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n}$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{1+k}{n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{1+k}{n}}$$

即
$$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\leqslant x_n\leqslant\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

但
$$\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1,\lim_{n\to\infty}(n+1)(1-e^{\frac{1}{n}})=-1$$

$$\lim_{n\to\infty}n(1-e^{\frac{1}{n}})=-1$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}x_n=e-1$$

1-54　设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$,证明$\{x_n\}$收敛.

用单调有界数列必收敛证明$\{x_n\}$收敛.

遇到和式用考察相邻两项之差的方法证单调.

证1
$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\&=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}\\&>0\qquad(n=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

所以$\{x_n\}$单调增加.

又
$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1,\qquad(n=1,2,\cdots)$$

所以$\{x_n\}$有上界,$\{x_n\}$收敛.

证2　对任何自然数 n

用柯西收敛原理证$\{x_n\}$收敛.

加一项,再减一项并利用三角不等式进行放大是数学中常用的手法.

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}<\frac{1}{4n(n+1)}$$

所以对于每个固定的 n,有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=|(x_{n+1}-x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})+\cdots+(x_{n+p}-x_{n+p-1})|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{p}|x_{n+k}-x_{n+k-1}|\\&<\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{4(n+k)(n+k-1)}\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right)\end{aligned}$$

$$< \frac{1}{4n} \qquad (p = 1,2,\cdots)$$

故对任意给定的 $\varepsilon < 0$,取 $N = [1/4\varepsilon]$,当 $n > N$ 时,有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \qquad (p = 1,2,\cdots)$$

所以$\{x_n\}$收敛.

证 3 因为对任何自然数 n 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

所以 $\ln(n+2) - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$

$$\ln(n+3) - \ln(n+2) < \frac{1}{n+2} < \ln(n+2) - \ln(n+1)$$

$\cdots$

$$\ln(2n+1) - \ln 2n < \frac{1}{n+n} < \ln 2n - \ln(2n-1)$$

$$\ln\frac{2n+1}{n+1} < x_n < \ln 2$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+1} = \ln 2$$
$$\lim_{n\to\infty}x_n = \ln 2$$

用夹逼准则证明$\{x_n\}$收敛.同时得到极限值.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增,$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调减均以 e 为极限,故不等式(1)成立.

证 4
$$\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$$

用定积分定义证之.同时求出极限.

1-55 设 $x_n \leqslant a \leqslant y_n (n = 1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}y_n = a$.

证 $x_n \leqslant a \leqslant y_n$

所以 $0 \leqslant y_n - a \leqslant y_n - x_n$

$0 \leqslant a - x_n \leqslant y_n - x_n$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}y_n = a$

夹逼准则之作用.

1-56 设$\{x_n\}$单调增，$\{y_n\}$单调减，且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$. 证明$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

证 若$\{x_n\}$发散，则必有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

这时由$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$知$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = +\infty$

这与$\{y_n\}$单调减矛盾，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$存在

所以
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}[(y_n - x_n) + x_n] = \lim_{n\to\infty}x_n$$

请比较本题与上题的区别.

注意单调数列的性质.

1-57 证明$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$收敛.

证 设$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n$

则
$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

又
$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$
$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

所以$\{x_n\}$单减，$\{y_n\}$单增. 由上题知$\{x_n\}$收敛.

注：记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$ （C称为欧拉常数），

由
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n \quad (\varepsilon_n \to 0, n \to \infty)$$

而
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2n + C + \varepsilon_{2n}$$

所以
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n$$

在上式中令$n \to \infty$得
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2$$

这样我们得到了1-54的证5.

1-58 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}\right)^n$.

解 当$n > 1$时，
$$1 + \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} < 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n(n-1)} = 1 + \frac{2}{n-1},$$
$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^n$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2.$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^n = e^2$$

利用夹逼准则时，重要的是要找到两个特殊的数列. 这就要求我们多熟悉一些常用的数列及其极限.

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^n = e^2$$

1-59 求下列极限

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)\quad(a>0)$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{2}\right)^n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(3^{\frac{1}{n}}-3^{\frac{1}{n+1}})$

解 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)=\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}\ln a}-1)$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\ln a\right)$$

$$=\ln a$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{2}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}-2}{2}+1\right)\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}-2}{2}+1\right)\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty} n\,\frac{(\sqrt[n]{5}-1)+(\sqrt[n]{7}-1)}{2}\right]$$

$$=\exp\left(\frac{\ln 5+\ln 7}{2}\right)$$

$$=\sqrt{35}$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(3^{\frac{1}{n}}-3^{\frac{1}{n+1}})$

$$=\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n+1}} n^2(3^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2(e^{\frac{\ln 3}{n(n+1)}}-1)\quad(\text{用到}\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n+1}}=1)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\frac{\ln 3}{n(n+1)}$$

$$=\ln 3$$

先换底：$a^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln a}$，再利用等价无穷小量的代换，当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$.

还是先换底换成 e 为底的形式，再利用等价无穷小量的代换.
当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$.

注意解法中的变形技巧，最后还是换底，等价代换.希望读者能掌握这一技巧.

1-60 设 $a_1=1, a_2=2, 3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 对任何自然数 n 有

$$3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$$

所以 $$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{3}$$

令 $b_n=a_{n+1}-a_n\,(n=1,2,\cdots)$，则 $\{b_n\}$ 是公比为 1/3 的等比数列.故当 $n\geqslant 2$ 时，

注意 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}$ 是经常被用到的方法.

$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}}$$
$$= 1 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{2}$$

1-61 设 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ $(n = 1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

先利用递推关系式算出一般项的表达式，再求极限.

解 $x_{n+1} = 2^{\frac{1}{2}} x_n^{\frac{1}{2}}$
$$= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}\, x_{n-1}^{\frac{1}{4}}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot \cdots \cdot 2^{\frac{1}{2^n}}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2$$

1-62 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$.

解 1 令 $x_n = 2^n n!/n^n$

请参看题 1.14 的旁注.

因为 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \leqslant 1$

所以 $\{x_n\}$ 单调下降，又 $x_n > 0$，所以 $\{x_n\}$ 有下界，故 $\{x_n\}$ 收敛.
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e}\lim_{n\to\infty} x_n$$
所以 $$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

解 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2}{e} < 1$

利用级数收敛的必要条件来求某些极限也是一种方法.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n} = 0$$

1-63 试证数列 $x_n = \dfrac{11 \times 12 \times 13 \times \cdots \times (n+10)}{2 \times 5 \times 8 \times \cdots \times (3n-1)}$, $(n = 1,2,\cdots)$ 收敛，并求极限.

证　$x_{n+1}=\dfrac{n+11}{3n+2}x_n$

所以当 $n>20$ 时，

$$0<x_{n+1}<\frac{1}{2}x_n<x_n$$

故 $\{x_n\}$ 收敛

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+11}{3n+2}\lim_{n\to\infty}x_n$$

即　$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

从某项起数列单调有界则必收敛.

1-64　设 $x_0=0$，$x_n=1+\sin(x_{n-1}-1)$　$(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　设 $y_n=x_n-1$，则

$$y_n=\sin y_{n-1}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$-1\leqslant\sin x\leqslant 1,\quad y_0=-1$$

所以

$$-1\leqslant y_n=\sin y_{n-1}<0,$$

$$y_{n-1}\leqslant\sin y_{n-1}=y_n\qquad(n=1,2,\cdots)$$

故 $\{y_n\}$ 单调增加且有上界，所以收敛.

因而　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin y_{n-1}=\sin(\lim\limits_{n\to\infty}y_{n-1})$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(y_n+1)=1$$

构造一个新的便于研究的数列，把它作为桥梁来研究原数列，这也是数学上常用的方法之一. 本题用到 $\sin x$ 的两个性质，当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 时 $\sin x<0$；及 $x<0$ 时，$x<\sin x$. 这里用到 $x_{n-1}<1$，所以，$\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+2)<\dfrac{\pi}{2}$ 故 $0<x_n<1$.

1-65　设 $x_0=$，$x_n=\sin\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+2)$　$(n=1,2,\cdots)$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证 1　$x_{n+1}-x_n=2\cos\left(\dfrac{x_n+x_{n-1}}{4}+1\right)\sin\dfrac{x_n-x_{n-1}}{4}$

而　$0<x_n=\sin\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+2)\leqslant 1\qquad(n=1,2,\cdots)$

所以

$$0<\frac{x_n+x_{n-1}}{4}\leqslant\frac{1}{2}$$

利用条件 $x_0=0$ 递推.

因而 $$\cos\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{4} + 1\right) > 0$$

又易验证 $$0 < x_1 - x_0 < 1$$

所以 $$\sin\frac{x_1 - x_0}{4} > 0,$$

$$x_2 - x_1 > 0,$$

从而 $$x_{n+1} - x_n > 0, \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

即 $\{x_n\}$ 单增且有上界，所以 $\{x_n\}$ 收敛.

再用 $x_{n+1} - x_n \leqslant 1$ 推出.

证 2 $$|x_{n+1} - x_n| = 2\left|\cos\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{4} + 1\right)\right|\left|\sin\frac{x_n - x_{n-1}}{4}\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$$
$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|$$

依次循环递推不等式.

故当 p 取自然数时,
$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}|$$
$$\leqslant \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0| + \frac{1}{2^{n+1}}|x_1 - x_0| + \cdots + \frac{1}{2^{n+p-1}}|x_1 - x_0|$$
$$\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - x_0|$$

参见 1-54 旁注. 等比数列求和后再放大不等式.

从而对任意给定的 $\varepsilon > 0$，取 $N = \left[\ln\frac{|x_1 - x_0|}{\varepsilon}/\ln 2\right] + 1$，当 $n > N$ 时，就有
$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \quad (p = 1,2,\cdots)$$
即 $\{x_n\}$ 收敛.

证 3 因为 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$，故只要证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k-1})$ 收敛. 由上面知 $\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}\right| = \frac{1}{2}$，由达郎伯判别法知此级数绝对收敛.

利用数列与级数的关系是个好技巧.

1-66 设 $x_0 = \sqrt{2}, x_n = \sqrt{2} + \frac{x_{n-1} - 1}{\sqrt{2} + x_{n-1}}, \quad (n = 1,2,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

证 $x_0 = \sqrt{2}, \quad x_1 > \sqrt{2}$

故由 x_n 的递推关系可得
$$x_n > \sqrt{2}, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

注意此类问题是要在先得到 $\{x_n\}$ 的极限存在后，才可在递推公式两边取极限.

所以$|x_{n+1}-x_n|=\dfrac{(1+\sqrt{2})|x_n-x_{n-1}|}{(\sqrt{2}+x_n)(\sqrt{2}+x_{n-1})}$

$$< \frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}| < \frac{1}{2^{n-1}}|x_1-x_0|$$

$$< \frac{1}{2^n}$$

所以 $|x_{n+p}-x_n| \leqslant \sum_{k=1}^{p}|x_{n+k}-x_{n+k-1}|$

$$< \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{n+k}}$$

$$< \frac{1}{2^n}, \qquad (p=1,2,\cdots)$$

所以对任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $N=[-\ln\varepsilon/\ln 2]+1$,当 $n>N$ 时,就有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon, \qquad (p=1,2,\cdots)$$

即$\{x_n\}$收敛.设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,可得

$$A=\sqrt{2}+\frac{A-1}{\sqrt{2}+A}$$

解之得 $A=(1+\sqrt{5})/2$,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

估计出$|x_{n+1}-x_n|$是用柯西审敛原理的重要途径.得到$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$也可同上题用级数证明$\{x_n\}$收敛.于递推公式两边取极限.并注意到 $A>0$.

1-67 设 $x_0>0$, $x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$ $(n=0,1,2,\cdots)$.证明$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 $x_0>0$, $x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{2+x_n}>1$, $(n=0,1,2,\cdots)$

又 $x_{n+1}=2-\dfrac{2}{2+x_n}<2$, $(n=0,1,2,\cdots)$

而 $x_{n+1}-x_n=2\left(\dfrac{1}{2+x_{n-1}}-\dfrac{1}{2+x_n}\right)=\dfrac{2(x_n-x_{n-1})}{(2-x_{n-1})(2+x_n)}$,

因此,$x_{n+1}-x_n$与x_n-x_{n-1}同号$(n=1,2,\cdots)$,故当$x_1\geqslant x_0$时,$\{x_n\}$单调增;当$x_1\leqslant x_0$时,$\{x_n\}$单调减,而$1<x_n<2$,即$\{x_n\}$有界,故不论x_0取何正值,$\{x_n\}$必收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则有

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+2x_n}{2+x_n}$$

即
$$A=\frac{2+2A}{2+A}$$

解之得
$$A=\sqrt{2},$$

如果从数列的递推关系能得到$x_{n+1}-x_n=A(x_n-x_{n-1})$,则当$A>0$时必有$\{x_n\}$单调.如$A<0$,往往有$\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n-1}\}$单调,且如一个单调增,另一个便单调减.

舍去 $A=-\sqrt{2}$

所以
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$$

注： 若由 $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2(x_n - x_{n-1})}{(2 + x_{n-1})(2 + x_n)}$ 得

$|x_{n+1} - x_n| < \dfrac{2}{9} |x_n - x_{n-1}|$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ 绝对收敛，而得 $\{x_n\}$ 收敛.

1-68 设 $x_0 = 1$，$x_n = 1 + \dfrac{1}{x_{n-1}}$，$(n = 1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证 已知 $x_n > 1 (n = 1,2,\cdots)$，且当 $n = 2$ 时

有
$$x_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{n-2}}} = 1 + \frac{x_{n-2}}{1 + x_{n-2}} = 2 - \frac{1}{1 + x_{n-2}} < 2$$

$$x_n - x_{n-2} = \frac{x_{n-2} - x_{n-4}}{(1 + x_{n-2})(1 + x_{n-4})}, \quad n = 4,5,\cdots$$

故数列 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$ 均单调. 而

$$x_1 = 2,\ x_3 = 2 - \frac{1}{3} < x_1$$

$x_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} > x_0$，故 $\{x_{2n-1}\}$ 单调减；而 $\{x_{2n}\}$ 单调增.

又 $1 \leqslant x_n \leqslant 2$，有界，故两奇、偶数项的数列都收敛，而它们满足同一递推式，故只要求 $\{x_{2n-1}\}$ 的极限值，设

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = A$，则得方程

$$A^2 - A - 1 = 0$$

$$A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

无论 n 为偶数或奇数，x_n 都收敛于同一个极限，故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$x_n - x_{n-1} = -\dfrac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_{n-1}x_{n-2}}$

这就是上题中所说 $x_n - x_{n-1} = -4(x_{n-1} - x_{n-2})$ 的例子.

本题实际上是连分式

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 +}}}$$

1-69 设 $\{x_n\}$ 满足：$-1 < x_0 < 0$，$x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n (n = 0,1,2,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 $x_1 = x_0^2 + 2x_0 = (x_0 + 1)^2 - 1$

$$-1 < x_0 < 0$$
$$-1 < x_1 < 0$$

设 $-1 < x_k < 0$，则由 $x_{k+1} = (x_k + 1)^2 - 1$ 得

$$-1 < x_{k+1} < 0$$

由数学归纳法得知，对一切自然数 n 有

$$-1 < x_n < 0$$

又 $$x_{n+1}=x_n^2+2x_n$$

所以 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=x_n+2>1$，从而 $x_{n+1}<x_n$，故 $\{x_n\}$ 单调减少且有界，所以 $\{x_n\}$ 收敛. 这时有

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=(\lim_{n\to\infty}x_n)^2+2\lim_{n\to\infty}x_n$$

结合题给条件可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-1$$

注意 x_n 是小于零的.

注意 x_n 是单减的，不可能以上界为极限.

1-70 设 $x_1=a$， $x_2=b, x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}$， $(n=1,2,\cdots)$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 $$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$$

$$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n),\qquad (n=1,2,\cdots)$$

这种形式的递推关系便于计算

所以当 $n\geqslant 3$ 时，

$$x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2-x_1)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a)$$

这里用了较为简单的表示和的方法，请比较 1.28 中和的表示法.

故 $$x_n=x_1+\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})$$
$$=x_1+(b-a)\sum_{k=0}^{n-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$
$$=a+\frac{2}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}(2b+a)$$

1-71 设 $x_1=a>0$， $x_2=b>0$， $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 令 $\alpha=\ln x_1=\ln a, \beta=\ln x_2=\ln b$

取对数构造新数列，再利用题 1-70 的结果.

由于 $$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$$

所以 $$\ln x_{n+2}=\frac{1}{2}(\ln x_{n+1}+\ln x_n),\quad (n=1,2,\cdots)$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\frac{1}{3}(2\beta+\alpha)$$
$$=\ln\sqrt[3]{ab^2}$$
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{ab^2}$$

1-72 若存在 $M>0$,使$\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$满足

$$\sum_{k=2}^{n}|x_k-x_{k-1}|<M$$

证明$\{x_n\}$收敛.

证 令 $y_n=\sum_{k=2}^{n}|x_k-x_{k-1}|$,

由条件易知$\{y_n\}$单增且有界,所以$\{y_n\}$收敛.

从而对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,有

$$|y_{n+p}-y_n|=\sum_{k=n+1}^{n+p}|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon,\quad (p=1,2,\cdots)$$

那么 $$|x_{n+p}-x_n|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon,\quad (p=1,2,\cdots)$$

由柯西收敛原理知$\{x_n\}$收敛.

具有性质 $\sum_{k=2}^{n}|x_n-x_{k-1}|<M$ 的数列$\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$称为有界变差数列.

本段是做等价的数学语言翻译,为下段做准备.

利用上段结果本例说明:有界变差数列有极限.

注:其实本题是利用证明级数$\sum_{k=2}^{\infty}(x_k-x_{k-1})$绝对收敛,从而导出数列$\{x_n\}$收敛的一种证明方法.

1-73 用极限定义证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A.$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,

所以对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N_1>0$,当 $n>N_1$ 时,有

$$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而当 $n>N_1$ 时,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-A\right|\\&\leqslant\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}-N_1A}{n}\right|+\\&\quad\left|\frac{(x_{N_1+1}-A)+\cdots+(x_n-A)}{n}\right|\\&<\frac{M}{n}+\frac{n-N_1}{2n}\varepsilon,\quad (M=|x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}-N_1A|)\\&<\frac{M}{n}+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

取 $N=\max\left\{N_1,\left[\frac{2M}{\varepsilon}\right]\right\}$,当 $n>N$ 时,

$$\frac{M}{n}<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

这是数学上常采用的截段法,分别估计各段的值.

注意必须找到公共的 N,才能使下面的两个不等式同时成立.

由当 $n > N$ 时，必有

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-A\right|<\varepsilon$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A$$

1-74 设 $x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

则 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=A$$

解 $x_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

所以 $A\geqslant 0$

极限的性质

(1) 若 $A>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln A$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}\right)\\&=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}\right)\\&=\exp(\ln A)=A\end{aligned}$$

参见题 1-73.

(2) 若 $A=0$，

因为 $$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant 0,$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A=0$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=0$$

综上所述，总有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=A$$

1-75 设数列 $\{x_n\}$，满足递推关系式 $x_{n+1}=f(x_n)$，其中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足：

(1) $a\leqslant f(x)\leqslant b$，对 $\forall x\in[a,b]$

(2) $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\alpha|x_2-x_1|$ $(0<\alpha<1)$，其中 x_1,x_2 是 $[a,b]$ 中任意两点，则对 $\forall x_1\in[a,b]$，有 $\{x_n\}$ 收敛于方程 $x=f(x)$ 在 $[a,b]$ 中唯一的解.

这是著名的压缩映象原理，本题是 1-65，1-66，1-67 和 1-68 诸题的一个总结.

解 由(2)知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|=|f(x_{n+1})-f(x_n)|\leqslant\alpha|x_{n+1}-x_n|$$

故由达朗伯判别法则，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛，因此数列 $\{x_n\}$ 收敛，从而

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

即极限值是方程 $x = f(x)$ 的根，下面证明唯一性：若还有 $y\in[a,b]$，使 $y = f(y)$，

则 $$|x-y| = |f(x)-f(y)| \leqslant \alpha |x-y|$$

即 $$(1-\alpha)|x-y| \leqslant 0$$

故只有 $x = y$

1.2.3 函数极限

1-76 用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{x^2-3x+2} = -4$.

对左端的式子适当放大，使最后只含有常数与 $|x-2|$ 的乘积形式. 先确定自变量的某个变化范围，这种思想在用定义证明的极限中常常用到.

证 因为

$$\left|\frac{4-x^2}{x^2-3x+2}+4\right| = \frac{3|x-2|}{|x-1|},$$

取 $\delta_1 = 1/2$，令 $0<|x-2|<1/2$，这时

$$|x-1| = |(x-2)+1| \geqslant 1-|x-2| > \frac{1}{2}$$

从而当 $0<|x-2|<1/2$ 时，

$$\frac{3|x-2|}{|x-1|} < 6|x-2|$$

所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{6}\right\}$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，必有

$$\left|\frac{4-x^2}{x^2-3x+2}+4\right| < \varepsilon$$

即 $$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{x^2-3x+2} = -4$$

1-77 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 不存在.

利用左、右极限不等或至少有一个不存在，是证明原极限不存在的一种方法.

证 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 不存在.

1-78 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^4-4x^2+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+2x^5}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+6}{x^3-x-1}$　　4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+1)^{30}(9x+2)^{20}}{(6x-1)^{50}}$

解 1)　原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x^2-3)(x-1)(x+1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{(x^2-3)(x+1)}=\frac{1}{2}$$

分解因式并约分.

2)　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{x^2+2x^5}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{1+2x^3}=10$$

利用二项展开式并约分.

3)　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=0$

4)　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^{30}\left(9+\dfrac{2}{x}\right)^{20}}{\left(6-\dfrac{1}{x}\right)^{50}}$

$$=\frac{4^{30}\times9^{20}}{6^{50}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

分子、分母同除以一个因子，使每一项极限均存在. 然后运用极限运算法则.

1-79　求下列极限

1)　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{(1+x)^n}-1}{x}$　　2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}$

3)　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$　　4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[4]{x+14}-2}{x^2-4}$

解 1)　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{n}{m}\ln(1+x)}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{n\ln(1+x)}{mx}=\frac{n}{m}$$

2)　原式 $=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1-\sqrt{1+(x-5)}}{x-5}$

$$=\lim_{x\to5}\frac{-(x-5)}{2(x-5)}=-\frac{1}{2}$$

3)　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1-x^2)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{3}{2}$

4)　原式 $=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2\left(\sqrt[4]{1+\dfrac{x-2}{16}}-1\right)}{(x-2)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)}{4\times16(x-2)(x+2)}=\frac{1}{128}$$

当 $x\to0$ 时 $e^x-1\sim x$.

1) 说明，当 $x\to0$ 时，$(1+x)^{\frac{n}{m}}-1\sim\dfrac{n}{m}x$.

2) 用 $1-\sqrt{1+(x-5)}\sim-\dfrac{1}{2}(x-5)$ 即 1) 的结果.

分子、分母同时有理化一次.

简单变形后，直接用 1) 的结果作等

价无穷小代换.

1-80 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

作变量代换.

解 1 令 $x=\dfrac{1}{y}$

利用等价无穷小代换.

$$\text{原式}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{1+2y}-2\sqrt{1+y}+1}{y}$$
$$=\lim_{y\to0^+}\left[\frac{\sqrt{2y+1}-1}{y}+\frac{2(1-\sqrt{1+y})}{y}\right]$$
$$=\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}+2\lim_{y\to0^+}\frac{1-\sqrt{1+y}}{y}$$
$$=1-1=0$$

解 2

请比较这两种解法，若用洛必达法则解又将怎样.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\,[(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2-4(x+1)]}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{x}\,(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\,(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2}=0$$

1-81 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x+\cos^2x+\cdots+\cos^nx-n}{\cos x-1}$

利用简单的分解、组合.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos x-1)+(\cos^2x-1)+\cdots+(\cos^nx-1)}{\cos x-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}[1+(\cos x+1)+\cdots+(\cos^{n-1}x+\cos^{n-2}x+\cdots+1)]$

$=1+2+\cdots+n$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}$

1-82 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$　　2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan2x\tan(\frac{\pi}{4}-x)$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(1-\cos2x)}{x^4}$　　4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos5x}{x^2}$

重要极限.

解 1) 原式 $=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{-\sin y}{y}=-1,\left(x-\dfrac{\pi}{2}=y\right)$

2) 原式 $=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\tan y}{\tan2y}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{2y} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{\pi}{4} - x = y\right)$$

3） 原式$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2}{2x^4}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(4x^2)^2}{8x^4} = 2$$

连续两次利用当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

4） 原式$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 3x-1}{x^2} + \frac{1-\cos 5x}{x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-(3x)^2}{2x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2}{2x^2} = 8$$

拆开两项后才能各自用等价无穷小量替换.

1-83 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$

解 $\left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right|$

$$= 2\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|$$

三角函数和、差化积.

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 0$$

有理化分子.

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}) = 0$

1-84 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

解 原式$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\right]$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2} + \frac{\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{(\cos 2x-1)+1}}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{(\cos 3x-1)+1}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}$$

反复利用加一项、减一项及等价无穷小量代换.

请自己比较用其它方式的解法.

参见(1-79 1)，容易求出的非零极限应首先求出.

$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$$

1-85 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + e^x\sin^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}[1 + (\arcsin x)^2]^{\cot^2 x}$

解 1) 原式 $= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{2}\tan x}$

$$= \exp\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\tan x\ln(1 - \cos^2 x)\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\tan x(-\cos^2 x)\right\} = 1$$

对所有这些题均用换底的方法：$y^x = e^{x\ln y}$ 比较方便。
当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$.

2) 原式 $= \exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1 + e^x\sin^2 x)}{1 - \cos x}\right\}$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin^2 x}{1 - \cos x}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right\} = e^2$$

连续函数的极限运算法则.

3) 原式 $= \exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(\cos 2x - 1) + 1]}{x^2}\right\}$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{x^2}\right\} = e^{-2}$$

4) 原式 $= \exp\{\lim\limits_{x\to 0}\cot^2 x\ \ln[1 + (\arcsin x)^2]\}$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}(\arcsin x)^2\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right\} = e$$

当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim x$.

1-86 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1^{1/x} + a_2^{1/x} + \cdots + a_n^{1/x}}{n}\right)^{nx}$， $(a_1, a_2, \cdots, a_n > 0)$.

解

原式 $= \exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty} nx\ln\dfrac{a_1^{1/x} + a_2^{1/x} + \cdots + a_n^{1/x}}{n}\right\}$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to+\infty} nx\ln\left[\left(\frac{a_1^{1/x} + a_2^{1/x} + \cdots + a_n^{1/x}}{n} - 1\right) + 1\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to+\infty} nx\left(\frac{a_1^{1/x} + a_2^{1/x} + \cdots + a_n^{1/x}}{n} - 1\right)\right\}$$

$$= \exp\{\lim_{x\to+\infty}[x(a_1^{1/x} - 1) + x(a_2^{1/x} - 1) + \cdots + x(a_n^{1/x} - 1)]\}$$

$$= \exp\{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n\}$$

请自己比较用洛必达法则的解法.

参见(1-59 题 1).

$= a_1 a_2 \cdots a_n$

1-87 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to 0}\arccos\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{1+\sin^2 x}}{(\arcsin x)^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{1+x}\right)$

解 1) 原式 $= \arccos\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}\right)$

$$= \arccos\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{2\sin x}\right)$$

$$= \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1 \sim \dfrac{1}{2}x$.

2) 原式 $= \arccos[\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)]$

$$= \arccos\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right]$$

$$= \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

3) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{(\arcsin x)^2}+\dfrac{1-\sqrt[3]{1+\sin^2 x}}{(\arcsin x)^2}\right]$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2(\arcsin x)^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3(\arcsin x)^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{4x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}$$

$$= -\frac{7}{12}$$

等价无穷小代换.

4) 原式 $= \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-y\right)}{1-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-y\right)}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}\cdot\lim_{y\to 0}\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y(1+\tan y)}{2\tan y} = \frac{1}{2}$$

作变量代换

$y = \dfrac{\pi}{4} - \arctan\dfrac{x}{1+x}$.

1-88 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(3x^2+1)-\ln(x^2+3)]$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}{\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x})}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2}{x}\ln x-\dfrac{1}{x}\ln(x^4+2x^3+x^2)\right]$

4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\sin\dfrac{x}{2}}{1+\cos x}$

解 1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{3x^2+1}{x^2+3}$

$$=\ln\left[\lim\frac{3x^2+1}{x^2+3}\right]=\ln 3$$

2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}})+\dfrac{1}{2}\ln x}{\ln(1+x^{-\frac{1}{12}}+x^{-\frac{2}{15}})+\dfrac{1}{3}\ln x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\ln(1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}})}{\ln x}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\ln(1+x^{-\frac{1}{12}}+x^{-\frac{2}{15}})}{\ln x}+\dfrac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

分子项的真数提出因子$\sqrt{x}$,分母项的真数提出因子$\sqrt[3]{x}$.

3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{2}{x}\ln x-\dfrac{2}{x}\ln x(x+1)\right]$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x}\ln(1+x)=-2$$

4) 原式 $=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\left[\left(\sin\dfrac{x}{2}-1\right)+1\right]}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\dfrac{x}{2}-1}{2\left(1-\sin\dfrac{x}{2}\right)\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)}=-\frac{1}{4}$$

有关的三角函数公式要熟悉.

1-89 求极限$\lim\limits_{x\to a}\tan\dfrac{\pi x}{2a}\ln\left(2-\dfrac{x}{a}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{2a}}{\cos\dfrac{\pi x}{2a}}\ln\left[\left(1-\dfrac{x}{a}\right)+1\right]$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2a}}\left(1-\frac{x}{a}\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-1}{\sin\dfrac{\pi y}{2a}}\left(-\frac{y}{a}\right),\quad (y=x-a)$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2a}{\pi y}\,\frac{y}{a}=\frac{2}{\pi}$$

作变量代换以利于作等价无穷小代换.

1-90 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}$.

当 $x\to0$ 时，$\arctan x\sim x$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{\sin x}-1)+\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{4}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$$

请注意，利用等价无穷小代换给我们的解法带来了很大的方便.读者可比较其它解法.

1-91 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

分部求极限也是解题的方法之一.

解 1 $\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}=\dfrac{x^4}{4\left(\dfrac{x^2}{2}+1+\sqrt{1+x^2}\right)}$

而 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2}{2}+1+\sqrt{1+x^2}\right)=2$,

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1-e^{x^2}}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1$$

所以，原式 $=-\dfrac{1}{12}$

解 2 当 $x\to0$ 时，

利用泰勒公式.

$$1-\sqrt{1+x^2}=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$$

请比较此两种解法与其它的解法.

所以原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)}{\left[-\dfrac{3}{2}+\dfrac{o(x^2)}{x^2}\right]\dfrac{\sin x^2}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}+o(x^4)}{\left[-\frac{3}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]\frac{\sin x^2}{x^2}} = -\frac{1}{12}$$

1-92 若$|x|<1$,求

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}).$$

解

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x},\qquad (|x|<1)$$

分子、分母同乘一个非零因子是常用的手段.

1-93 求极限

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}.$$

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1-\sin x}\,\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sin x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{\sin x}}{1-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}\,\frac{1-\sqrt[3]{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}$$

当 $x\to 0$ 时,$\sqrt[m]{1+x}-1\sim\frac{x}{m}$.

1-94 分析下面求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$的两种解法.

解 1 (正确)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

解 2 (错误)

当 $x\to 0$ 时,$\tan x\sim x$,$\sin x\sim x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

当 $x\to 0$ 时,$\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.

解1中将函数分解为因式形式,再用等价无穷小代换,是正确的;

解2的等价代换用在代数和中,是没有根据的,因而得出错误结果.

1-95 设 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为实数，

$f(x)=a_1\ln(1+x)+a_2\ln(1+2x)+\cdots+a_n\ln(1+nx)$，如果当 $x\in[0,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant\ln(1+x)$，证明

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

证 因为当 $x\in[0,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant\ln(1+x)$，所以当 $x\in(0,1)$ 时 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，

但 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$$

$$=\lim_{x\to0}\left|\frac{a_1\ln(1+x)}{x}+\frac{a_2\ln(1+2x)}{x}+\cdots+\frac{a_n\ln(1+nx)}{x}\right|$$

$$=|a_1+2a_2+\cdots+na_n|$$

所以，$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant1$

注意极限的运算法则及性质.

1-96 求 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{2}{x}\right]$（$[x]$ 表示 x 的取整函数）.

解 $\dfrac{2}{x}-1<\left[\dfrac{2}{x}\right]\leqslant\dfrac{2}{x}$

所以当 $x>0$ 时，

$$2-x<x\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant2$$

当 $x<0$ 时，

$$2-x>x\left[\frac{2}{x}\right]\geqslant2$$

但 $$\lim_{x\to0}(2-x)=2$$

所以 $$\lim_{x\to0}x\left[\frac{2}{x}\right]=2$$

分 x 大于零或小于零是为了便于估计 $x\left[\dfrac{2}{x}\right]$ 的变化范围及利用夹逼准则.

1-97 试求曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ 的斜渐近线.

解 依题意即求 k 及 b 使下式成立

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-kx-b\right)=0\qquad(*)$$

因为 $$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{x^2+1}{x^2+x}-k-\frac{b}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-kx-b\right)=0$$

所以必有 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+x}-k-\frac{b}{x}\right)=0$$

请仔细体会此分解式的用意.

注意括号内各项均有极限.

请自己求其垂直渐近线.

易由上式求得 $k=1$,代回(*)式应有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{x+1}-b\right)$$

$$=-1-b=0$$

所以,$b=-1$,故所求的斜渐近线为 $y=x-1$

1-98 试确定常数 a 和 b 使下式成立

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0.$$

解 因为

$$\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b=x^2(\sqrt[3]{x^{-6}-1}-a-bx^{-2})$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$,

$$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$$

所以,必有 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^{-6}-1}-a-bx^{-2})=0$

易由上式求得 $a=-1$,代回原式应有

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}+x^2-b)=0$$

所以 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}+x^2)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}-x^2\sqrt[3]{1-x^6}+x^4}=0$$

综上所述,有 $a=-1,b=0$

已知条件.

否则原式极限一定不为零,请深刻理解.

分子有理化.

1-99 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=2$

又 $\lim\limits_{x\to0}(e^{3x}-1)=0$

故 $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1=0$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)\sin2x=0$

从而 $2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin2x}{2\times3x}$$

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}=1$

这样得到 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在,且

$$\lim_{x\to0}f(x)=6$$

当 $x\to0$ 时,$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$,$e^x-1\sim x$.

由极限的四则运算法则.

1-100 设$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$,求$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt{k+x}$.

解 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$

所以, 对$x>0$时,$\sum_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x} = 0$

于是 $\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt{k+x}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k\sqrt{k+x} - a_k\sqrt{x})$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k k}{\sqrt{k+x}+\sqrt{x}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to+\infty}\frac{k a_k}{\sqrt{k+x}+\sqrt{x}} = 0$$

分子有理化.

1-101 证明$f(x) = x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$上无界,且当$x\to\infty$时,$f(x)$不是无穷大量.

证 因为对任意给定的$M>0$时,总有自然数$n_0>M$,$x_0 = 2n_0\pi\in(-\infty,+\infty)$,使$f(x_0) = 2n_0\pi > M$,
所以,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

取$x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}(n = 1,2,\cdots)$,显然有$x_n\in(-\infty,+\infty)$,且$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$,

而 $f(x_n)\equiv 0$, $n(=1,2,\cdots)$,

所以当$x\to\infty$时,$f(x)$不是无穷大量.

从否定$f(x)$有界的定义出发即可证得$f(x)$的无界性.

证$f(x)$不是无穷大量,可通过适当选取一个数列来说明.

1.2.4 连续函数

1-102 讨论函数$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$的连续性.

解 因为若$x\neq 0$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1} = \begin{cases} -1, & 0<|x|<1 \\ 0, & |x| = 1 \\ x^2, & |x|>1 \end{cases}$$

而$f(x)$在$(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$上是初等函数,所以连续

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = 1,\qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = -1,$$

先求$f(x)$的表达式,从而对自变量x的变化范围加以划分,使当$n\to\infty$时的极限对应于x的每种划分都有确定的结果.

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = 1$$

所以，$f(x)$ 在 $x=\pm1,0$ 处间断，属第一类间断点，其中 $x=0$ 是可去间断点.

1-103 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$ 的连续性 $(x\leqslant 0)$.

解 若 $0\leqslant x\leqslant 1/2$，

则 $\sqrt[n]{2}\leqslant\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}\leqslant\sqrt[n]{4}$

若 $1/2<x<2$

则 $2x<\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$

$$=2x\sqrt[n]{2(2x)^{-n}+1+2^{-n}x^n}<2x\sqrt[n]{3}$$

若 $2\leqslant x<+\infty$，

则 $x^2<\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$

$$=x^2\sqrt[n]{2x^{-2n}+2^nx^{-n}+1}<x^2\sqrt[n]{3},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6}=1$,

所以
$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1/2\\ 2x, & 1/2<x<2\\ x^2, & 2\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

而 $f(x)$ 在 $[0,1/2),(1/2,2),(2,+\infty)$ 上是初等函数，所以连续.

注意初等函数在其定义区间内是连续的.

又 $\lim\limits_{x\to1/2^-} f(x)=1,\quad \lim\limits_{x\to1/2^+} f(x)=1, f(\frac{1}{2})=1$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=4,\quad \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=4$

$f(2)=4$

所以，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续.

注意函数在一点连续的条件.

1-104 求 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并指出类型.

解 由 $\ln|x|$ 的定义域知 $x\neq0$. 又由

$$x^2-3x+2=0$$

得 $x_1=1, x_2=2$

而 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),(0,1),(1,2),(2,+\infty)$ 上是初等函数，所以连续，故 $f(x)$ 的间断点是 $0,1,2$.

函数的间断点主要发生在函数无定义的点、使分母为零的点及分段点上.

$$\lim_{x\to0}\ln|x|=-\infty,\quad \lim_{x\to0}(x^2-3x+2)=2,$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$,

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属第二类

利用等价无穷小代换.

又 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-1$,

所以，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，属第一类.

如果我们补充 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义，即令 $f(1)=-1$，这时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处就连续了. $x=2$ 处，因为$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$，故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属第二类.

1-105 求函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geqslant0\end{cases}$$

的间断点，并指出类型.

注意寻找间断点的原则.

解 当 $x<0$ 时，

$$f(x)=\frac{x^3-x}{\sin\pi x}$$

由 $\sin\pi x=0$ 解得 $x=-1,-2,-3,\cdots$

当 $x\geqslant0$ 时，

$$f(x)=\ln(1+x)+\sin\frac{1}{x^2-1}$$

由 $x^2-1=0$ 解得 $x=1$

所以 $f(x)$ 在 $x=1,-1,-2,-3,\cdots$ 处间断，在分段点 $x=0$ 处可能间断，在除去以上点的其它区间上 $f(x)$ 是初等函数，故连续.

因为在 $x_0=-2,-3,\cdots$ 处

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=\infty$$

所以 $x_0=-2,-3,\cdots$ 均是 $f(x)$ 的无穷间断点，属第二类.

在 $x_0=-1$ 处，

利用变量代换求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}f(x)&=\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}\\&=\lim_{y\to0}\frac{(y-1)(y-2)y}{-\sin\pi y},\qquad x=-1+y\\&=-\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

所以 $x_0=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，属第一类

如果令 $f(-1)=-2/\pi$，则 $f(x)$ 在 $x_0=-1$ 处就连续了.

在 $x_0=0$ 处，

分段点是否为间断点，必须从定义出发考察函数的左、右极限及函数值.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=-\frac{1}{\pi}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x)&=\lim_{x\to0^+}\left[\ln(1+x)+\sin\frac{1}{x^2-1}\right]\\&=-\sin1\end{aligned}$$

所以，$x_0=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，属第一类.

在 $x_0=1$ 处，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在，所以 $x_0=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

1-106 设

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx, & x<1\\ 3, & x=1\\ 2a-bx, & x>1\end{cases}$$

求 a,b 使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

解

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax^2+bx)=a+b$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(2a-bx)=2a-b$$

$$f(1)=3,$$

所以，应有 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$

函数在某点连续的充要条件.

即 $\begin{cases}a+b=3\\ 2a-b=3\end{cases}$

解得 $a=2,b=1$，这时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

1-107 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ a, & x\geqslant1\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}b, & x\leqslant0\\ x+1, & x>0\end{cases}$$

求 a,b，使 $f(x)+\psi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

解

$$f(x)+\psi(x)=\begin{cases}x+b, & x\leqslant0\\ 2x+1, & 0<x<1\\ x+a+1, & 1\leqslant x\end{cases}$$

以 $f(x),\psi(x)$ 的分段点为新的分段点，就可容易地求出 $f(x)+\psi(x)$ 的表达式.

所以 $f(x)+\psi(x)$ 在 $(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty)$ 上为初等函数，故连续.

现只要适当选取 a,b，使 $f(x)+\psi(x)$ 在 $x=0,1$ 两处都连续即可. 由函数的连续性定义不难得到应取 $a=b=1$.

可参见 1-106 题.

故当 $a=b=1$ 时，$f(x)+\psi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

1-108 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，

当 a,b 取何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$

首先求 $f(x)$ 的表达式，参见题 1-102.

$$=\begin{cases} ax^2+bx, & |x|<1 \\ x, & |x|>1 \\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x=-1 \\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1 \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在$(-\infty,-1)$,$(-1,1)$,$(1,+\infty)$上为初等函数,所以是连续的.

现只要适当选取 a,b,使 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处同时连续即可,由连续的定义应有:

$$\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x) \\ f(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x) \end{cases}$$

即得
$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-1 \end{cases}$$

解之得 $a=0,b=1$,这时 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续.

1-109 证明方程 $x^6-2x^5+5x^3+1=0$ 至少有一实根.

证 令 $f(x)=x^6-2x^5+5x^3+1$

因为 $f(-1)=-1<0$, $f(0)=1>0$

又 $f(x)$ 在$[-1,0]$上连续,所以由根的存在定理知,至少存在一点 $x_0\in(-1,0)$ 使 $f(x_0)=0$,

即方程 $x^6-2x^5+5x^3+1=0$ 至少有一实根.

此类题解法关键是找两个点,使构造的函数 $f(x)$ 在这两点取值异号.从而便于利用方程的根的存在定理(也称函数的零点定理).

1-110 证明方程 $x^3-9x-1=0$ 恰有三个实根.

证 令 $f(x)=x^3-9x-1$

因为 $f(-3)=-1<0$, $f(-2)=9>0$

$f(0)=-1<0$, $f(4)=27>0$

又 $f(x)$ 在$[-3,4]$上连续,所以 $f(x)$ 在$(-3,-2)$,$(-2,0)$,$(0,4)$各区间内至少有一零点,即

$$x^3-9x-1=0$$

至少有三个实根.又它是一元三次方程,最多有三个根,这样我们就证明了所给方程恰有三个实根.

注意代数基本定理.

1-111 证明方程 $x^3-3x^2-9x+1=0$ 在$(0,1)$内有唯一实根.

证1 令 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

因为 $f(0)=1>0$, $f(1)=-10<0$

又 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,所以存在 $x_1\in(0,1)$ 使

要注意学习本题证明唯一性的思

$$f(x_1) = 0$$

若另有 $x_2 \in (0,1)$ 使 $f(x_2) = 0$

则 $\quad f(x_2) - f(x_1) = 0,$

即 $\quad (x_2 - x_1)[(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 3(x_2 - x_1) - 9] = 0$

而 $\quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3(x_2 - x_1) - 9 < 0$

$$x_2 = x_1$$

故方程 $x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一实根.

证 2 令 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

$$f(0) > 0, \quad f(1) < 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

又 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1, +\infty)$ 各区间内至少有一零点,即一元三次方程 $x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = 0$ 在 $(-\infty, 0)$,$(0,1)$,$(1, +\infty)$ 各区间内恰有一实根,这样就证明了所给方程在 $(0,1)$ 内有唯一实根.

1-112 证明当 n 为奇数时,方程

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

至少有一实根($a_n \neq 0$).

证 令 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$

那么 $\quad \dfrac{f(x)}{x^n} = a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}$

由于 $\quad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_{n-k}}{x^k} = 0 (k = 1,2,\cdots,n)$

所以 $\quad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^n} = a_n$

故存在 $x_0 > 0$,当 $|x| > x_0$ 时,$\dfrac{f(x)}{x^n}$ 与 a_n 同号,即当 $|x| > x_0$ 时,$f(x)$ 与 a_nx^n 同号.

又 n 是奇数,所以 $a_n(2x_0)^n$ 与 $a_n(-2x_0)^n$ 异号,即

$$f(2x_0)f(-2x_0) < 0$$

而 $f(x)$ 是一元多项式,在 $[-2x_0, 2x_0]$ 上连续所以至少存在一点 $\zeta \in (-2x_0, 2x_0)$,使 $f(\zeta) = 0$.

即方程 $\quad a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$

至少有一实根.

想.

注意 $0 < x_1 < x_2 < 1$.

注意极限的性质及根的存在定理.

这里用了代数基本定理.

由于系数 a_k 不确定,所以不能找具体的点使 $f(x)$ 在该点取值异号,现利用极限理论来证.

注意极限的保号性.

1-113 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_i \in [a,b]$，$t_i > 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$，试证至少存在一点 $\zeta \in [a,b]$ 使

$$f(\zeta) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n).$$

由题给条件，联想到闭区间上连续函数的性质.

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x), \qquad m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

使得对任何 $x \in [a,b]$ 都有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

利用最大值、最小值定理.

由于 $x_i \in [a,b]$，$t_i > 0\quad (i=1,2,\cdots,n)$，所以

$m = \sum_{i=1}^{n} m t_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M t_i = M$，从而至少存在一点 $\zeta \in [a,b]$，使

$$f(\zeta) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n)$$

利用介值定理.

1-114 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$. 证明存在 $x_0 \in [0,1]$，使 $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{4}\right)$.

证 令 $F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{4}\right)$，则 $F(x)$ 在 $\left[0,\frac{3}{4}\right]$ 上连续.

若对任何 $x \in \left[0,\frac{3}{4}\right]$ 都有 $F(x) \neq 0$，那么在 $\left[0,\frac{3}{4}\right]$ 上必有

$F(x) > 0$ 或 $F(x) < 0$

现不妨设 $F(x) > 0$，这样当 x 分别取 $0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ 时，就有

利用连续函数的性质.

$$f(0) - f\left(\frac{1}{4}\right) = F(0) > 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) > 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) - f(1) = F\left(\frac{3}{4}\right) > 0$$

从而 $\qquad f(0) > f(1)$，

这与 $f(0) = f(1)$ 矛盾，故存在 $x_0 \in \left[0,\frac{3}{4}\right]$ 使 $F(x_0) = 0$.

即有 $x_0 \in [0,1]$ 使 $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{4}\right)$.

适当构造一个函数把要证的结果转化成利用介值定理(根的存在定理)来证明的问题. 这也是数学上常用的手法.

1-115 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0) = f(1)$，证明：对任何自然数 n，存在 $x_0 \in [0,1]$，使 $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$.

此题是上题的一般情形，请读者仿照证明.

证 （略）

1-116 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明至少存在一个 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，且 $\beta-\alpha=(b-a)/2$，使 $f(\alpha)=f(\beta)$.

证 1 令 $F(x)=f\left(\frac{b-a}{2}+x\right)-f(x)$，则 $F(x)$ 在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 上连续.

$$F(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)$$

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

又由条件 $f(a)=f(b)$，所以 $F(a)F\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant 0$.

故至少存在一点 $x_0\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，使

$$F(x_0)=0$$

也即有 $\alpha=x_0,\beta=(b-a)/2+x_0$，且 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$

$\beta-\alpha=(b-a)/2$，使 $f(\alpha)=f(\beta)$.

证 2 同上构造 $F(x)$，利用 1-114 题的证明思想证之（略）.

由条件 $\beta-\alpha=(b-a)/2$，想到构造这样的函数 $F(x)$，从要证 $f(\alpha)=f(\beta)$ 想到要证 $F(x_0)=0$.

1-117 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明：对任何大于或等于 2 的自然数 n，至少存在一个 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，且 $\beta-\alpha=(b-a)/n$，使 $f(\alpha)=f(\beta)$.

证 本题实质上可这样描述：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，

证明：对任何自然数 $n\geqslant 2$，至少存在一点 $x_0\in[a,b]$，使

$$f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{n}\right)$$

这样，我们就可参照 1-114 题的证法不难证得此题，这里就不再赘述了.

此题可看作是上题的一般情形，当我们用同样的数学语言对它进行描述时，两个题就可用同一的数学方法解决了.

1-118 设 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，且对任意 $x、y\in[0,1]$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$，任取 $x_1\in[0,1]$ 定义

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+f(x_n)),\qquad(n=1,2,\cdots)$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛于 $[0,1]$ 内的某个 x_0，且有 $f(x_0)=3x_0$.

证 由已知条件可证得 $0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2}$，$\qquad(n=2,3,\cdots)$

又 $\qquad|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\qquad(x,y\in[0,1])$，

所以，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

注意利用连续

$$|x_{n+1}-x_n| \leqslant \frac{1}{4}(|x_n - x_{n-1}| + |f(x_n) - f(x_{n-1})|)$$
$$\leqslant \frac{1}{4}(|x_n - x_{n-1}| + |x_n - x_{n-1}|)$$
$$= \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$$
$$\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1|, \qquad (n = 2,3,\cdots).$$

这时由柯西收敛原理不难证明$\{x_n\}$收敛,又$0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$ $(n = 2,3,\cdots)$,所以,存在$x_0 \in [0,1]$,使$x_n \to x_0 (n \to \infty)$,从而由$f(x)$连续的定义,得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

所以,$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{4}[\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)]$

$$f(x_0) = 3x_0 \qquad x_0 \in [0,1].$$

的定义.

循环递推下去.参见1-65.

注意:不先证明$\{x_n\}$收敛而于等式两边取极限是没有根据的.

1-119 设$f(x)$在(a,b)内连续,且

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$$

证明$f(x)$在(a,b)内有最大值.

证 因为$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

由极限定义知,对于$M = f(\frac{a+b}{2})$,存在这样的$c,d(a < c < \frac{a+b}{2} < d < b)$,当$a < x \leqslant c$或$d \leqslant x < b$时,都有

$$f(x) < M.$$

又$f(x)$在(a,b)内连续,所以$f(x)$在$[c,d] \subset (a,b)$上连续,由最大值定理知,存在$\xi \in [c,d]$使$f(\xi) \geqslant f(x)$, $\forall x \in [c,d]$

特别有 $f(\xi) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

下面证$f(\xi)$即为(a,b)内的最大值,$\forall x \in (a,b)$.

1) 若$x \in (a,c)$或$x \in [d,b]$时,有

$$f(x) < f(\frac{a+b}{2}) \leqslant f(\xi)$$

2) 若$x \in [c,d]$时,有

$$f(x) \leqslant f(\xi)$$

综上所述,$f(x)$在(a,b)内有最大值$f(\xi)$.

请结合极限定义及几何直观来理解.

请注意领会所得到的闭区间$[c,d]$.

注意c,d的取法.

第 2 章　导数与微分

2.1　客观题

2.1.1　填空题

2-1　已知 $f'(x_0)=-1$.则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\underline{\quad 1\quad}$$

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[f(x_0-2x)-f(x_0)]-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}$$

$$=-2f'(x_0)+f'(x_0)=1$$

利用导数的定义并结合加减项解之.

2-2　设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$.则 $f'(t)=\underline{\quad(2t+1)e^{2t}\quad}$.

解　因为　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x=e^{2t}$

所以　　$f(t)=te^{2t}$

故　　$f'(t)=(2t+1)e^{2t}$

先把 t 看作常数,求出极限是解本题的关键参见1-9题的解法.

2-3　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+\tan x)^{10}-(2-\sin x)^{10}}{\sin x}=\underline{\quad 10\times 2^{10}\quad}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(2+\tan x)^{10}-2^{10}}{\sin x}+\dfrac{(2-\sin x)^{10}-2^{10}}{-\sin x}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2+\tan x)^{10}-2^{10}}{\tan x}+\lim_{x\to 0}\frac{(2-\sin x)^{10}-2^{10}}{-\sin x}$$

$$=[(2+x)^{10}]'_{x=0}+[(2+x)^{10}]'_{x=0}=10\times 2^{10}$$

本题用洛必达法则解也不难.但我们在这里想让读者熟悉导数的定义和作变量代换.

2-4　曲线 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3\end{cases}$,在 $t=2$ 处的切线方程为 $\underline{3x-y-7=0}$.

解　切点坐标

$$x\Big|_{t=2}=5\qquad y\Big|_{t=2}=8$$

导数的几何意义:表示曲线切线的斜率.

切线斜率　$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=\left.\frac{3}{2}t\right|_{t=2}=3$

故切线方程为　$3x-y-7=0$

2-5　已知曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ $\underline{\dfrac{1}{\mathrm{e}}}$.

解　曲线在(1,1)处的切线斜率

$$k=f'(1)=n$$

故切线方程为　$y-1=n(x-1)$

令 $y=0$，得与 x 轴的交点 $\xi_n=1-\frac{1}{n}$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}$

2-6　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ $\underline{\dfrac{y\sin(xy)-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-x\sin(xy)}}$

解　方程两边求关于 x 的导数，得

$$\mathrm{e}^{x+y}(1+y')-(y+xy')\sin(xy)=0$$

解出 y' 即为所求.

注意 y 是 x 的函数. 求导过程中把 y 作为中间变量.

2-7　设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$，所确定，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ $\underline{\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}}$

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(1+t)(3t+2)$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\\&=\frac{[(1+t)(3t+2)]'}{[t-\ln(1+t)]'}\\&=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}\end{aligned}$$

参数方程求二阶导数一定要熟练掌握.

2-8　已知 $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ $\underline{\dfrac{3\pi}{4}}$.

解　$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\left.\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)'\right|_{x=0}$

本题的关键是把 $\frac{3x-2}{3x+2}$ 看作一个整体. 即令

$$=\left[\arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}\right]_{x=0}=\frac{3\pi}{4}$$

$u=\dfrac{3x-2}{3x+2}$，则 $y=f(u)$.

2-9 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$ $\underline{\dfrac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}}$.

解 因为

$$f(x)=\frac{2}{1+x}-1$$

所以
$$f'(x)=-2(1+x)^{-2}$$
$$f''(x)=2\times2(1+x)^{-3}$$
$$f'''(x)=-2\times3!\ (1+x)^{-4}$$
$$\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$$

此类题一般是先化简，然后用归纳法推出 n 阶导数.

2.1.2 单项选择题

2-10 设 $f(x)$是可导函数，且

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$$

则曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线斜率为（ ）. (B)

(A) -1 (B) -2 (C) 0 (D) 1

变化题中条件，紧扣导数定义.

解 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}$$
$$=-\frac{1}{2}f'(1)$$

所以 $f'(1)=-2$

2-11 设周期函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线斜率为（ ）. (D)

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 0 (C) (-1) (D) -2

本题的关键是利用周期性将题意转化，变成可求解的形式.参见上题.

解 因为 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且周期为 4，所以

$$f(5)=f(4+1)=f(1)$$

即求曲线在$(5,f(5))$处的切线斜率等于求曲线在$(1,f(1))$处的切线斜率.故选(D).

2-12 若函数 $y=f(x)$满足 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}$ 是(　). (B)

(A) 与 Δx 等价的无穷小

(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小

(D) 比 Δx 高阶的无穷小

解 因为

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$$

故选(B).

2-13 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$在 $x=1$ 处(　). (A)

(A) 左导数存在，但右导导数不存在

(B) 左、右导数都存在

(C) 左、右导数都不存在

(D) 左导数不存在，但右导数存在

根据导数定义考查左右导数.

解 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{3}(x^3-1)}{x-1}=1$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\frac{1}{3}}{x-1}\text{不存在}$$

故选(A).

2-14 设 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，$F(x)=f(x)(1+|x|)$，则 $f(0)=0$ 是$F(x)$在 $x=0$ 处可导的(　). (C)

(A) 必要条件但非充分条件

(B) 既非充分条件又非必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 充分条件但非必要条件

解 因为

$$\begin{aligned}F'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+x)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\right]\\&=f'(0)+f(0)\end{aligned}$$

$F(x)$在 x_0 处可导$\Leftrightarrow F'_+(x_0)=F'_-(x_0)$

$F(x)$在 x_0 处

$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-x)-f(0)}{x}$$
$$=f'(0)-f(0)$$

故选(C).

可导必有 $F(x)$在 x_0 处连续.

2-15 设函数 $f(x)$在区间$(-\delta,\delta)$内有定义.若当 $x\in(-\delta,\delta)$时,恒有$|f(x)|\leqslant x^2$,则 $x=0$ 必是 $f(x)$的(　). (C)

(A) 连续而不可导点　　(B) 间断点

(C) 可导点,且 $f'(0)=0$　　(D) 可导点,但 $f'(0)\neq0$

解 由$|f(x)|\leqslant x^2$,令 $x=0$ 得

$$f(0)=0$$

又
$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant|x|$$

所以
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

正确应用条件$|f(x)|\leqslant x^2$ 是解本题的关键.

2-16 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leqslant0\end{cases}$,其中 $g(x)$是有界函数,则 $f(x)$在 $x=0$ 处(　). (B)

(A) 极限不存在　　(B) 可导

(C) 连续不可导　　(D) 极限存在,但不连续

解 因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=0$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\cdot x}=0$$

故选(B).

一般说来,分断点处的可导性应通过左右导数的情况进行判断.

2-17 设函数 $f(x)$对任意 x 均满足关系$f(1+x)=af(x)$,且有$f'(0)=b$,其中 a,b 为非零常数,则(　). (C)

(A) $f(x)$在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=a$

(B) $f(x)$在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=b$

(C) $f(x)$在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=ab$

(D) $f(x)$在 $x=1$ 处不可导

解 因为对任意 x 都有

$$f(1+x)=af(x)$$

由题给条件推出特殊的有用关系式$f(1)=af(0)$是解

令 $x=0$,得 $f(1)=af(0)$

所以 $$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a[f(x)-f(0)]}{x}$$
$$=af'(0)=ab$$

此题的要点.

2-18 若 $f(-x)=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$,在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$,且 $f''(x)<0$.则在 $(0,+\infty)$ 内有( ). (A)

(A) $f'(x)<0$, $f''(x)<0$

(B) $f'(x)>0$, $f''(x)<0$

(C) $f'(x)<0$, $f''(x)>0$

(D) $f'(x)>0$, $f''(x)>0$

解 当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$-x\in(-\infty,0)$

所以 $$f'(x)=f'(-x)(-x)'$$
$$=-f'(-x)<0$$
$$f''(x)=-f''(-x)(-x)'$$
$$=f''(-x)<0$$

故选(A).

利用复合函数求导法.

2-19 设 $f(x)$ 处处可导,则( ). (B)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

解 取 $f(x)=x+1$,易知(A),(C)都不正确.

取 $f(x)=x^2$ 易知(D)不正确.

故选(B).

用排除法知选(B).本题也可用拉格朗日中值定理证明选(B).

2-20 设曲线 $y=x^3+ax$ 与曲线 $y=bx^2+c$ 在点 $(-1,0)$ 处相切,其中 a,b,c 为常数,则( ). (A)

(A) $a=b=-1,c=1$　　(B) $a=-1,b=2,c=-2$

(C) $a=1,b=-2,c=2$　　(D) $a=c=1,b=-1$

解 因为 $(-1,0)$ 为切点,即为交点.

所以 $-1-a=0$　　$b+c=0$

又 $$y'\Big|_{x=-1}=(x^3+ax)'\Big|_{x=-1}=3+a$$
$$y'\Big|_{x=-1}=(bx^2+c)'\Big|_{x=-1}=-2b$$

斜率相同,即导数相等.

所以 $b=-1 \quad a=-1 \quad c=1$

2-21 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f^{(n)}(x)$ 是（ ）． (B)

(A) $n[f(x)]^{n+1}$ (B) $n!\ [f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{2n}$ (D) $n!\ [f(x)]^{2n}$

解 当 $n\geqslant 2$ 时

$$f''(x)=[(f(x))^2]'=2f(x)f'(x)$$
$$=2[f(x)]^3$$
$$f'''(x)=3![f(x)]^2f'(x)$$
$$=3![f(x)]^4$$
$$\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=(n-1)![(f(x))^n]'$$
$$=n![f(x)]^{n-1}f'(x)$$
$$=n![f(x)]^{n+1}$$

从题给条件出发，用归纳法推导 n 阶导数．

2-22 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为（ ）． (C)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

解 因为

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\geqslant 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$$

所以 $$f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}24x, & x>0\\ 0, & x=0\\ 12x, & x<0\end{cases}$$

又 $f'''_+(0)=24,\ f'''_-(0)=12$

故 $f''(0)$ 存在，$f'''(0)$ 不存在，所以选(C)．

求带有绝对值的函数的导数，首先要将绝对值符号去掉．

2.2 非客观题

2.2.1 导数的概念与性质

2-23 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}.$$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[f(x_0+x)-f(x_0)]+[f(x_0)-f(x_0-3x)]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+3\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-3x)-f(x_0)}{-3x}$$

$$=f'(x_0)+3f'(x_0)$$

$$=4f'(x_0)$$

这里插入 $f(x_0)$ 是因为题目假定 $f(x)$ 在 x_0 点可导，所以分成两项的极限都存在.

注：本题有个常见的错误做法：

令 $x_0-3x=t$，则 $x_0=t+3x$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(t+4x)-f(t)}{x}=4\lim_{x\to 0}f'(t)\qquad(1)$$

$$=4\lim_{x\to 0}f'(x_0-3x)=4f'(x_0)\qquad(2)$$

因为题目中只设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，没说在 x_0 及其邻域内可导，更没假定 $f'(x)$ 在 x_0 点连续，所以上面做法是无根据的. 在学习数学时，一定要注意数学的严谨性，给了什么条件，只能用什么条件.

作变换并不错，可是题中没说 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内可导. (1) 式却用了在 t 点的导数；(2) 式如果成立，那么就要假定 $f(x)$ 在 x_0 点有连续的导数，题中更没此条件.

2-24 设 $f(x)=g(x)\sin^{\alpha}(x-x_0)$ $(\alpha\geqslant 1)$，其中 $g(x)$ 在 x_0 处连续，证明 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

证 因为 $f(x_0)=0$，

所以
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)\sin^{\alpha}(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$=\begin{cases} g(x_0), & \alpha=1\\ 0, & \alpha>1\end{cases}$$

所以，$f(x)$ 在 x_0 处可导.

只知 $g(x)$ 连续，所以不能用乘法求导公式，只能从导数的定义出发来证明.

2-25 设不恒为零的奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，试说明 $x=0$ 为函数 $f(x)/x$ 的何种间断点.

解 因为 $f(x)=-f(-x)$，令 $x=0$，得

奇函数的定义.

$$f(0)=0$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

导数的定义.

所以，$f(x)/x$ 在 $x=0$ 处有极限，从而 $x=0$ 是 $f(x)/x$ 的可去间断

点.

2-26 已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,且 $f(a)>0$.求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$$

解 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,所以

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right]=f'(a),$$

且当 n 充分大时,$f\left(a+\frac{1}{n}\right)>0$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$$
$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty} n\ln\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty} n\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right\}$$
$$=\exp\left\{\frac{f'(a)}{f(a)}\right\}$$

题给条件 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,故 $f(x)$ 在 a 连续,所以这是"1^∞"型极限,从而想到导数定义而解出本题.

利用等价无穷小量的替换.

本题 $f(a)>0$ 的条件可改为 $f(a)\neq 0$.

2-27 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,且 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导,证明 $f(x)$ 在 x_0 处也可导.

证 当 $f(x_0)\neq 0$ 时,记 $|f(x_0)|'$ 为 $|f(x)|$ 在 x_0 处的导数,因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}[|f(x)|+|f(x_0)|]$$
$$=2|f(x_0)||f(x_0)|'$$

存在

可导必连续.

所以
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)+f(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{|f(x_0)|}{f(x_0)}|f(x_0)|'$$

由条件知 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

当 $f(x_0)=0$ 时,

因为
$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=|f(x)|'=A \text{ 存在}$$

这是证明极限为零的常用手段.

所以 $$A=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|}{x-x_0}\geqslant 0$$

$$A=\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|}{x-x_0}\leqslant 0$$

注意 $A=0$.

故 $A=0$

从而 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=0$$

综上所述，$f(x)$ 在 x_0 处可导，且

$$f'(x_0)=\begin{cases}|f(x_0)|'\dfrac{|f(x_0)|}{f(x_0)}, & f(x_0)\neq 0\\ 0, & f(x_0)=0\end{cases}$$

2-28 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，$f'(a)f'(b)>0$. 试证在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=f(a)$.

证 1(反证法). 因为 $f'(a)f'(b)>0$，不防设 $f'(a)>0$ 且 $f'(b)>0$. 如果对任何 $x\in(a,b)$，都有 $f(x)\neq f(a)$，那么在 (a,b) 内

$f(x)<f(a)$ 或 $f(x)>f(a)$

成立.

由 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续性质即知.

1) 若有 $f(x)<f(a)$，$x\in(a,b)$，则

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0,\qquad x\in(a,b)$$

从而 $$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$$

这与 $f'(a)>0$ 矛盾.

此证法关键在于利用反证法将结论否定后，怎样用数学语言来表达，从而推出矛盾.

2) 若有 $f(x)>f(a)=f(b)$，$x\in(a,b)$，则

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0,\qquad x\in(a,b)$$

从而 $$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\leqslant 0,$$

这与 $f'(b)>0$ 矛盾.

综上所述，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=f(a)$. 同理可证 $f'(a)<0$ 且 $f'(b)<0$ 的情况.

证 2 因为 $f'(a)f'(b)>0$，所以，可不妨设 $f'(a)>0$，且 $f'(b)>0$. 由于

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0$$

所以，存在 $c\left(a<c<\dfrac{a+b}{2}\right)$ 使

此证法主要是利用了极限的保号性，从而将在开区间 (a,b) 内要解决的问题转换成在闭

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0 \qquad (1)$$

又 $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)>0$

所以,存在 $d(\frac{a+b}{2}<d<b)$ 使

$$\frac{f(d)-f(b)}{d-b}>0 \qquad (2)$$

即 $f(c)>f(a)=f(b)>f(d)$,

且 $[c,d]\subset[a,b]$. 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性知, $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上也连续, 根据介值定理可知, 至少存在一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$, 使 $f(\xi)=f(a)$.

同理可证 $f'(a)<0$ 且 $f'(b)<0$ 的情况.

区间 $[c,d]$ 上来解决. 为了隔离 c,d, 我们取了 $\delta<\frac{b-a}{2}$ 使在 $(a,a+\delta)$ 和 $(b-\delta,b)$ 内不等式 (1), (2) 分别成立.

2-29 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

且 $f'(0)=1$. 证明当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时, $f'(x)=f(x)$.

解 因为对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

现特取 $y=0$, 则有

$$f(x)=f(x)f(0)$$

或

$$f(x)[1-f(0)]=0$$

由 x 的任意性及 $f'(0)=1$, 得

$$f(0)=1,$$

所以对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}\\&=f(x)f'(0)\\&=f(x)\end{aligned}$$

注意, 由 $f'(0)=1$, 知 $f(x)\neq 0$, 才有 $f(0)=1$.

利用 $f(x)$ 的所设性质.

利用导数定义.

2-30 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义, x,y 为该邻域内任意两点, 且 $f(x)$ 满足条件:

1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$,

2) $f'(0)=1$.

证明: 在上述邻域内 $f'(x)=1$.

证　记题给 $x=0$ 的某个邻域为 E，那么对任何 $x,y\in E$ 均有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+1,$$

所以，取 $y=0$ 时，可得

$$f(0)=-1.$$

这样，对任何 $x\in E$，必有 $\Delta x\in E$ 及 $x+\Delta x\in E$，且

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(\Delta x)+1-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\\&=f'(0)=1\end{aligned}$$

即对任何 $x\in E$ 有 $f'(x)=1$.

注意，一点的邻域是个开区间，$x\in E$ 则一定存在 x 的一邻域 $E_1\subset E$. 而 E 是含有零的一个邻域，所以存在 $\Delta x\in E$ 且 $x+\Delta x\in E_1\subset E$.

2-31　求 a,b 的值，使函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3, & x\leqslant 0\\ ax+b, & x>0\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续、可导.

解　因为当 $x>0$ 或 $x<0$ 时，$f(x)$ 均为多项式，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 上连续、可导.

欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则应有

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b$$

但　　$f(0)=3$

所以，$b=3$.

欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则应有

$$f'_-(0)=f'_+(0)$$

但　$f'_-(0)=(x^2+2x+3)'|_{x=0}=2$

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0+}\frac{ax+b-3}{x}=a\end{aligned}$$

所以，$a=2$.

故当 $a=2,b=3$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续、可导.

可导必连续，像这样的题必须先使函数在分段点处连续，然后进一步使它可导.

将 $b=3$ 代入. 其实 $f(x)$ 连续时，求 $f'_+(0)$ 也可不必直接用定义去作.

2-32　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0\\ e^x-1, & 0\leqslant x<\ln 3\\ 2x^2, & \ln 3\leqslant x<3\end{cases}$$

讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

解 易知 $f(x)$ 的定义域为 $[-\pi/2,3)$，且 $f(x)$ 在 $[-\pi/2,0)$，$(0,\ln3)$，$(\ln3,3)$ 上均为初等函数，所以 $f(x)$ 在这些区间上是连续的. 且是可导的. 因此，我们只要考虑 $f(x)$ 在分段点 0 和 $\ln3$ 处的情况.

在 $x=0$ 处，因为

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \sin x = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (e^x - 1) = 0$$

而 $\qquad f(0)=0,$

所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

在 $x=\ln3$ 处，因为

$$\lim_{x\to\ln3^-} f(x) = \lim_{x\to\ln3^-} (e^x-1) = 2$$

$$\lim_{x\to\ln3^+} f(x) = \lim_{x\to\ln3^+} 2x^2 = 2\ln^2 3$$

所以，$f(x)$ 在 $x=\ln3$ 处不连续，当然不可导.

利用左、右极限及函数值来判断分段点的连续性.

一般先验证连续性，然后进一步考查可导性.

2-33 设

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\leqslant x_0 \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0 \end{cases}$$

求 a,b,c 使 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导.

解 首先，由于 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，所以，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续，

故 $\qquad f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = c$

但 $\qquad f(x_0)=x_0^3$

所以 $\qquad c = x_0^3$

其次 $\qquad f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0+0) = b$

故得 $\qquad b=3x_0^2$

最后考查 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的二阶导数.

因为 $f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\leqslant x_0 \\ 2a(x-x_0)+3x_0^2, & x>x_0 \end{cases}$

所以 $\qquad \lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0+0) = 2a$

注意，像这样的题，第一步用 $f(x)$ 在 x_0 点的连续性；第二步用一阶导数存在并连续；最后用二阶导数存在性. 一定要按这个步骤做.

要 $f''(x)$ 存在，由于 $f'(x)$ 在 x_0 连续，故只要左、右导数存在且相等.

得 $$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=6x_0$$

从而当 $a=3x_0, b=3x_0^2, c=x_0^3$ 时,$f(x)$ 在 x_0 处二阶可导.

2-34 设 $f(x)=|\sin x|^3, x\in[-1,1]$.证明 $x=0$ 是 $f'''(x)$ 的间断点,并判断其类型.

证 $$f(x)=\begin{cases}-\sin^3 x, & x\in[-1,0)\\ \sin^3 x, & x\in[0,1]\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-3\sin^2 x\cos x, & x\in[-1,0)\\ 3\sin^2 x\cos x, & x\in(0,1]\end{cases}$$

且 $f'(0)=0$.

$$f''(x)=\begin{cases}3\sin^3 x-6\sin x\cos^2 x, & x\in[-1,0)\\ -3\sin^3 x+6\sin x\cos^2 x, & x\in(0,1]\end{cases}$$

且 $f''(0)=0$.

$$f'''(x)=\begin{cases}21\sin^2 x\cos x-6\cos^3 x, & x\in[-1,0)\\ -21\sin^2 x\cos x+6\cos^3 x, & x\in(0,1]\end{cases}$$

而 $$f'''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{-3\sin^3 x+6\sin x\cos^2 x}{x}=6$$

$$f'''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{3\sin^3 x-6\sin x\cos^2 x}{x}=-6$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的三阶导数不存在,又

$$\lim_{x\to0^-}f'''(x)=\lim_{x\to0^-}(21\sin^2 x\cos x-6\cos^3 x)=-6$$

$$\lim_{x\to0^+}f'''(x)=\lim_{x\to0^+}(-21\sin^2 x\cos x+6\cos^3 x)=6$$

故 $x=0$ 是 $f'''(x)$ 的第一型间断点.

函数中有绝对值时一般化为分段函数.但我们也可用 $[|x|^3]'=3x|x|$ 及 $(x|x|)'=2|x|$.于是,$f'(x)=3\sin x|\sin x|\cos x$,$f''(x)=6|\sin x|\cos^2 x-3\sin^2 x|\sin x|$.

注意,由于 $f'''(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限不等,故可直接得 $x=0$ 是 $f'''(x)$ 的间断点及其类型.

2-35 讨论函数 $f(x)=x|x(x-1)|$ 的可导性.

解1 由 $x(x-1)\geqslant0$,得 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant1$

由 $x(x-1)<0$,得 $x\in(0,1)$.

所以 $$f(x)=\begin{cases}x^3-x^2, & x\leqslant0\text{ 或 }x\geqslant1\\ x^2-x^3, & x\in(0,1)\end{cases}$$

且 $$f'(x)=\begin{cases}3x^2-2x, & x<0\text{ 或 }x>1\\ 2x-3x^2, & x\in(0,1)\end{cases}$$

又 $$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^3-x^2}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x^3}{x}=0$$

所以 $f'(0)=0$

首先要去掉绝对值符号,即要解不等式,化为分段函数.

讨论在分段点处的可导性一般用左、右导数定义,但也不一定都要直接用定义.请读者想一想.

而 $$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x^3}{x-1}=-1$$
$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-x^2}{x-1}=1$$
故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

综上所述,$f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导,在$(-\infty,1)$,$(1+\infty)$上可导.

解2 本题的$f(x)=x\sqrt{x^2}\sqrt{(x-1)^2}$是初等函数,仅在$x=0$和 $x=1$ 处有可能不可导,故只需讨论 $f(x)$ 在这两点的情况:

1) 在 $x=0$ 点,由
$$\lim_{x\to0}\frac{x|x||x-1|}{x}=0$$
知 $f'(0)$ 存在.

2) 在 $x=1$ 点,由于
$$\lim_{x\to1}\frac{x|x||x-1|}{x-1}$$
不存在,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

2-36 已知 $f'(x)=\frac{1}{x}$,$y=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$,求$\frac{dy}{dx}$.

解1 令 $u=\frac{x+1}{x-1}$, $(x\neq-1)$

则 $$\frac{du}{dx}=-\frac{2}{(x-1)^2}$$
所以
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}$$
$$=\frac{1}{u}\left[-\frac{2}{(x-1)^2}\right]$$
$$=\frac{2}{1-x^2}\qquad(x\neq\pm1).$$

由于 $f'(x)=\frac{1}{x}$,应用 $x\neq0$,故 $f(u)$ 中 $u=\frac{x+1}{x-1}\neq0$,即 $x\neq-1$.

解2 $f'(x)=\frac{1}{x}$,
$$f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$
故 $$y=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$$
所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{1-x^2}\qquad(x\neq\pm1)$$

利用不定积分先求出 $f(x)$,然后再根据条件求导.参见第4章不定积分.

2-37 设 $F(x)=\max\{f_1(x),f_2(x)\}$ 的定义域为 $(-1,1)$，其中 $f_1(x)=x+1, f_2(x)=(x+1)^2$. 在定义域内求 $\frac{dF(x)}{dx}$.

首先要求出 $F(x)$ 的表达式.

解 当 $-1<x\leqslant 0$ 时，$x+1\geqslant(x+1)^2$，

当 $0<x<1$ 时，$(x+1)^2>x+1$.

所以
$$F(x)=\begin{cases} x+1, & -1<x\leqslant 0 \\ (x+1)^2, & 0<x<1 \end{cases}$$

$$F'(x)=\begin{cases} 1, & -1<x<0 \\ 2(x+1) & 0<x<1 \end{cases}$$

而在分段点 $x=0$ 处，

从定义出发来说明函数在分段点处的可导性.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)^2-1}{x}=2$$

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，所以

$$\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases} 1, & -1<x<0 \\ 2(x+1), & 0<x<1 \end{cases}$$

2.2.2 导数的求法

2-38 设 $y=\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$，求 $\frac{dy}{dx}$.

利用一阶微分形式不变性求一阶导数.

解 1
$$\begin{aligned} dy &= d\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)d\sin\left(\frac{1-\ln x}{x}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)d\frac{1-\ln x}{x} \\ &= \frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)dx, \end{aligned}$$

所以
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right).$$

解 2 令 $u=\sin v, v=\frac{1-\ln x}{x}$，

利用复合函数求导法则求导.

则
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \\ &= 2u\cos v\frac{\ln x-2}{x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\ln x - 2}{x^2}\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right).$$

2-39 设 $y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$,求 $\mathrm{d}y, y'$.

解 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^{-\frac{2}{3}}\ \frac{1}{3}(1+\sqrt[3]{x})^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}(1+\sqrt[3]{x})$$

$$= \frac{1}{9}\left[\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)(1+\sqrt[3]{x})\right]^{-\frac{2}{3}}\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{27}\left[\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)(1+\sqrt[3]{x})x\right]^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$$

所以 $$y' = \frac{1}{27}\left[\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)(1+\sqrt[3]{x})x\right]^{-\frac{2}{3}}$$

这个函数虽有几层根式,但由于它不能写成几个函数的积,所以不能用对数求导法.

2-40 设 $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}\ (a>0)$,求 y'.

解 $y' = [x^{(a^a)}]' + [a^{(x^a)}]' + [a^{(a^x)}]'$

$$= a^a x^{a^a-1} + (x^a)'a^{x^a}\ln a + (a^x)'a^{a^x}\ln a$$

$$= a^a x^{a^a-1} + ax^{a-1}a^{x^a}\ln a + a^{a^x+x}\ln^2 a$$

注意各项中函数的复合结构.

2-41 设 $y = [\ln(x\sec x)]^2$,求 $\mathrm{d}y$.

解 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}[\ln(x\sec x)]^2$

$$= 2\ln(x\sec x)\mathrm{d}\ln(x\sec x)$$

$$= 2\ln(x\sec x)\frac{1}{x\sec x}\mathrm{d}(x\sec x)$$

$$= \frac{2(1+x\tan x)\ln(x\sec x)}{x}\mathrm{d}x$$

2-42 若 $\varphi'(x)$ 存在,$y = \varphi(\sec^2 x) + \arcsin x$,求 $\mathrm{d}y$.

解 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}[\varphi(\sec^2 x) + \arcsin x]$

$$= \mathrm{d}\varphi(\sec^2 x) + \mathrm{d}\arcsin x$$

$$= \varphi'(\sec^2 x)\mathrm{d}\sec^2 x + \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left[2\varphi'(\sec^2 x)\sec^2 x\ \tan x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x$$

以上两题都是利用一阶微分形式不变性求一阶微分.

2-43 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-1\,000)$,求 $f'(0)$.

解 1
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-1\,000)$$
$$=1\,000\,!$$

解 2
$$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-1\,000)+x(x-2)(x-3)\cdots(x-1\,000)+\cdots+x(x-1)(x-2)\cdots(x-k)(x-k-2)+\cdots(x-1\,000)+\cdots+x(x-1)(x-2)\cdots(x-999)$$

所以
$$f'(0)=1\,000\,!$$

利用导数的定义.

利用导数的运算法则.

2-43 题的两种解法告诉我们,利用导数的定义求函数在某点的导数有时反而简明.

2-44 设 $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2},)$ 求 y''.

解 1.
$$y'=\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}\right)'-\left[\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]'$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}\right)-\frac{a^2}{2}\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$=\sqrt{x^2-a^2}$$

所以
$$y''=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

解 2
$$dy=\frac{1}{2}d(x\sqrt{x^2-a^2})-\frac{a^2}{2}d\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{x^2-a^2}dx+xd\sqrt{x^2-a^2})-\frac{a^2}{2}\frac{d(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$=\sqrt{x^2-a^2}dx,$$

因而
$$y'=\sqrt{x^2-a^2}$$
$$y''=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

一般求导数,我们都应注意可导区间,但对明显的题我们不写出可导区间,像 2.23 这样的题最好写出求导数的区间,因题设中 $|\cos x|\leqslant 1$,故此处 $|x|\leqslant 1$.

2-45 设 $f'(\cos x)=\cos 2x$,求 $f''(x)$.

解
$$f'(\cos x)=\cos 2x$$
$$=2\cos^2 x-1$$

所以 $f'(x) = 2x^2 - 1$

$f''(x) = 4x, \qquad |x| \leqslant 1$

2-46 设 $x = e^{\sin t}, y = \sin e^t, z = t^2$,求$\dfrac{dx}{dz}, \dfrac{dy}{dz}$,

解 1 $\dfrac{dx}{dz} = \dfrac{dx/dt}{dz/dt} = \dfrac{e^{\sin t}\cos t}{2t}$

$\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{dy/dt}{dz/dt} = \dfrac{e^t\cos e^t}{2t}$

这里将 t 看作中间变量.

解 2 $dx = e^{\sin t}\cos t\,dt, dy = e^t\cos e^t\,dt, dz = 2t\,dt$

所以,$\dfrac{dx}{dz} = \dfrac{e^{\sin t}\cos t}{2t}, \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{e^t\cos e^t}{2t}$

利用微分形式不变性.

2-47 设 $x = e^{2t} - 1, y = 2e^t$,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2e^t}{2e^{2t}} = e^{-t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(e^{-t})$$

$$= \frac{d}{dt}(e^{-t})\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{-e^{-t}}{2e^{2t}} = -\frac{1}{2}e^{-3t}$$

二阶导数的定义.

反函数求导法则,或微分形式不变性.

2-48 设 $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t)$,且 $f''(t) \neq 0$,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{[tf'(t) - f(t)]'}{f''(t)} = t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{f''(t)}$$

注意利用反函数求导法则或微分形式不变性.

2-49 设$\begin{cases} x = 1 - e^{c\theta} \\ y = c\theta + e^{-c\theta} \end{cases}$ 求$\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{c - ce^{-c\theta}}{-ce^{c\theta}}$

$$= (e^{-c\theta} - 1)e^{-c\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{-2ce^{-2c\theta} + ce^{-c\theta}}{-ce^{c\theta}}$$

$$= 2e^{-3c\theta} - e^{-2c\theta}$$

所以 $$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{d\theta}{dx}$$
$$= \frac{-6ce^{3c\theta}+2ce^{-2c\theta}}{-ce^{c\theta}}$$
$$= 6e^{-4c\theta} - 2e^{-3c\theta}$$

请注意解题步骤.

2-50 设 $y = y(x)$ 是由方程组
$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y\sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定的隐函数,求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解 1 由 $x = 3t^2 + 2t + 3$,得

方程两端求关于 t 的导数并解之.

$$\frac{dx}{dt} = 6t + 2$$

由 $e^y\sin t - y + 1 = 0$,得$y|_{t=0} = 1$ 及

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^y\cos t}{1 - e^y\sin t}$$
$$= \frac{e^y\cos t}{2 - y}$$

所以 $$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = e$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}$$

故 $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} =$$
$$\frac{\left(\frac{dy}{dt}e^y\cos t - e^y\sin t\right)(2-y)(6t+2) - e^y\cos t\left[6(2-y) - \frac{dy}{dt}(6t+2)\right]}{(2-y)^2(6t+2)^3}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \frac{2e^2 - 3e}{4}$$

解 2 由 $t = 0$ 得 $x = 3, y = 1$.

求导数在一点的值时,尽量避免求导函数.

又 $$\frac{dx}{dt} = 6t + 2,$$

$$\frac{dy}{dt}(e^y\sin t - 1) + e^y\cos t = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^y\cos t}{1 - e^y\sin t} = \frac{e^y\cos t}{2 - y}$$

所以 $$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y\cos t}{(2-y)(6t+2)},\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = \frac{e}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^y}{2-y}\frac{\cos t}{6t+2}\right) = \frac{\cos t}{6t+2}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{e^y}{2-y}\right) + \frac{e^y}{2-y}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos t}{6t+2}\right)=\frac{\cos t}{6t+2}\,\frac{(2-y)\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^y}{(2-y)^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{e}^y}{2-y}\,\frac{-\sin t(6t+2)-6\cos t}{(6t+2)^3}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{3}{4}\mathrm{e}=\frac{\mathrm{e}}{4}(2\mathrm{e}-3)$$

直接套用参数方程确定的函数求二阶导数公式，反倒最方便.

解 3　套用公式是解本题的最好办法

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\ddot{y}\,\dot{x}-\dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3}\qquad\left(\dot{u}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)$$

而　$\dot{x}|_{t=0}=(6t+2)|_{t=0}=2$

$\ddot{x}=6$

$\dot{y}\,\mathrm{e}^y\sin t-\dot{y}+\mathrm{e}^y\cos t=0$

所以　$\dot{y}|_{t=0}=\mathrm{e}$

上面方程中再对 t 求导，得

$$\ddot{y}\,\mathrm{e}^y\sin t+\dot{y}^2\mathrm{e}^y\sin t+2\,\dot{y}\,\mathrm{e}^y\cos t-\ddot{y}-\mathrm{e}^y\sin t=0$$

所以　$\left.\ddot{y}\right|_{t=0}=2\mathrm{e}^2$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{\mathrm{e}}{4}(2\mathrm{e}-3)$$

2-51　设 $x^2y-\mathrm{e}^{2x}=\sin y$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

不需要解出 y 的表达式，而直接利用方程求微分或导数.

解 1　由 $\mathrm{d}(x^2y-\mathrm{e}^{2x})=\mathrm{d}\sin y$

得
$$\mathrm{d}(x^2y)-\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{d}\sin y=0$$
$$2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y-2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-\cos y\mathrm{d}y=0$$

整理得
$$(x^2-\cos y)\mathrm{d}y=(2\mathrm{e}^{2x}-2xy)\mathrm{d}x$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2(\mathrm{e}^{2x}-xy)}{x^2-\cos y}$$

解 2　方程两边对 x 求导

$$(x^2y)-\mathrm{e}^{2x})'=(\sin y)'$$

得
$$2xy+x^2y'-2\mathrm{e}^{2x}=y'\cos y$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2(\mathrm{e}^{2x}-xy)}{x^2-\cos y}$$

2-52　设 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 y'.

解　原等式两边对 x 求导得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

请比较这两种解法.

所以　$y'=\frac{x+y}{x-y}\quad(x\neq y)$

本题如引进极坐标，题设方程化为：$r = e^{\theta}(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$.

$$x = e^{\theta}\cos\theta, \quad y = e^{\theta}\sin\theta,$$

所以 $$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)}{e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{x+y}{x-y} \quad (x \neq y)$$

2-53 设 $y = f(x)$ 是由方程 $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$ 所确定的隐函数，求$dy|_{x=0}$.

由所给方程求出.

解 $$x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$$

$$d(x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y) = 0$$

$$3x^2dx + 3y^2dy - 3\cos 3x dx + 6dy = 0$$

$$dy = \frac{\cos 3x - x^2}{y^2 + 2}dx$$

但 $y|_{x=0} = 0$，所以$dy|_{x=0} = \frac{1}{2}dx$.

2-54 设 $e^{x+y} - xy = 1$，求 $y''(0)$.

解 易知 $y(0) = 0$，于 $e^{x+y} - xy = 1$ 两边对 x 求导

$$(1 + y')e^{x+y} - y - xy' = 0 \qquad (1)$$

故 $$y'(0) = -1.$$

(1) 式两边再对 x 求导，得

$$(1 + y')^2e^{x+y} + y''e^{x+y} - 2y' - xy'' = 0 \qquad (2)$$

以 $x = 0, y = 0, y'(0) = -1$ 代入(2) 得

$$y''(0) = -2$$

解题中，我们并没有求出 y'' 的具体表达式，请读者注意.

2-55 设 $f(x) = \log_x(\ln x)$，求 $f'(e)$.

解 $$f'(x) = [\log_x(\ln x)]'$$

$$= \left[\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right]'$$

$$= \frac{[\ln(\ln x)]'\ln x - (\ln x)'\ln(\ln x)}{\ln^2 x}$$

$$= \frac{1 - \ln(\ln x)}{x\ln^2 x}$$

所以 $$f'(e) = e^{-1}$$

利用换底公式变形.

2-56 证明$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}) = e^{\frac{1}{x}}\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$.

证 用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时，

用数学归纳法证明高阶导数公式，也是一种好方

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \text{ 成立.}$$

法.

设当自然数 $n \leqslant k$ 时,公式都成立,即

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}, \qquad n \leqslant k$$

那么,当 $n = k+1$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(kx^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x^{k-2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}) \\ &= k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}(x^{k-2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})\right] \\ &= \frac{k(-1)^k}{x^{k+1}}(x^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right] \\ &= \frac{k(-1)^k}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{k(-1)^k}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

利用高阶导数的定义.

同上.

利用归纳假设.

这就是说当 $n = k+1$ 时,等式也是成立的.

2-57 设 $f(x)$ 有任意阶导数.若 $f'(x) = f^2(x)$,试求 $f^{(n)}(x)$.

解 等式 $f'(x) = f^2(x)$ 两边同时求关于 x 的导数,得

$$f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2f^3(x)$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3f^2(x)f'(x) = 2\cdot 3f^4(x)$$

$$\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n![f(x)]^{n+1} \qquad (1)$$

这里公式(1)是归纳得到的,因此,还应当用数学归纳法来证明,而且只要加一步,即设 $n = k$ 时,

$$f^{(k)}(x) = k![f(x)]^{k+1}$$

上式两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= (k+1)![f(x)]^k f'(x) \\ &= (k+1)![f(x)]^{k+2}\end{aligned}$$

故 $n = k+1$ 时也成立.

注:本题如用积分可解得 $f(x) = \dfrac{1}{c-x}$,易得 $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(c-x)^{n+1}}$.

将 $f'(x) = f^2(x)$ 代入求导后的等式.

有时我们不加这一步是因为这一结果非常明显,但按数学归纳法的要求,补上这一步更好.

2-58 设 $y = \dfrac{1}{x^2-5x+4}$,求 $y^{(100)}$.

解 $y^{(100)} = \left(\dfrac{1}{x^2-5x+4}\right)^{(100)}$

化有理分式为部分分式,在求高阶导数中也很有用.

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-1}\right)^{(100)}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{x-4}\right)^{(100)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(100)}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{100\,!}{(x-4)^{101}} - \frac{100\,!}{(x-1)^{101}}\right]$$

2-59 设 $y = \sin^2 x$,求 $y^{(100)}(0)$.

解 1 $y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$y' = \sin 2x$, $y'' = 2\cos 2x$

$y''' = -2^2\sin 2x$, $y^{(4)} = -2^3\cos 2x$

$y^{(5)} = 2^4\sin 2x$, $\cdots$

$y^{(100)} = -2^{99}\cos 2x$,

$y^{(100)}(0) = -2^{99}$.

解 2 $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2\,!}(2x) + \frac{1}{4\,!}(2x)^2 - \cdots + \frac{1}{100\,!}(2x)^{100} - \cdots\right]$$

所以 $y^{(100)}(0) = -2^{99}$

利用幂级数展开.

解 3 由 $y' = \sin 2x$ 得 $y^{(100)}(x) = 2^{99}\sin\left(2x + \frac{99}{2}\pi\right)$

所以,$y^{(100)}(0) = -2^{99}$

用公式

$y = \sin x$

$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

2-60 设 $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$,求 $y^{(n)}$.

解 $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

$$= (1+x)^{\frac{2}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}}$$

而 $[(1+x)^{\frac{2}{3}}]' = \frac{2}{3}(1+x)^{-\frac{1}{3}}$

$$[(1+x)^{\frac{2}{3}}]'' = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)(1+x)^{-\frac{1+3}{3}}$$

$$[(1+x)^{\frac{2}{3}}]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{1+3(n-2)}{3}(1+x)^{-\frac{1+3(n-1)}{3}}$$

$$[(1+x)^{-\frac{1}{3}}]^{(n)} = (-1)^n\,\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{1+3(n-1)}{3}(1+x)^{-\frac{1+3n}{3}}$$

将乘积函数变形为简单的函数之和,有利于求高阶导数.

故 $y' = \frac{2}{3}(1+x)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{4}{3}}$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n-5)}{3^n}(3n+2x)(1+x)^{-\frac{1+3n}{3}}$$

$$(n \geqslant 2)$$

2-61 设 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$,求 $y^{(n)}(0)$.

解 将原等式变形为

$$y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$$

上式两边求关于 x 的导数,得

$$y'\sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

即 $y'(1-x^2) - xy - 1 = 0$ (1)

所以 $y'(0) = 1$.(1) 式两边再求关于 x 的导数,并注意 $y(0) = 0$,得

$$y''(1-x^2) - 3xy' - y = 0 \qquad (2)$$

所以 $y''(0) = 0$.(2) 式两边再求关于 x 的导数,

$$y'''(1-x^2) - 5xy'' - 4y' = 0$$

所以 $y'''(0) = 4$.根据上述求导规律可得公式

$$y^{(n)}(1-x^2) - (2n-1)xy^{(n-1)} - y^{(n-2)}\sum_{k=0}^{n-2}(2k+1) = 0$$

$$(y^{(0)}(x) = y(x), n \geqslant 2)$$

故 $$y^{(n)}(0) = \begin{cases}(n-1)^2, & n \geqslant 3 \text{ 的奇数} \\ 0, & n = 2,4,6,\cdots\end{cases}$$

及 $y'(0) = 1$.

此题虽以 y 的显式给出,但利用它直接求 $y^{(n)}$ 将是非常困难的.本法给出了一种解题技巧,即建立导数方程,利用递推关系解之.

可用归纳法证明.

$$\sum_{k=0}^{n-2}(2k+1) = (n-1)^2.$$

2-62 设 $f(x) = x^m\ln(1+x)$(m 为自然数),试证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数为

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-m-1}\frac{n!}{n-m} \qquad (n \geqslant m+1).$$

证 由莱布尼兹公式得

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^m)^{(k)}[\ln(1+x)]^{(n-k)}, \qquad (n \geqslant m+1)$$

因为当 $k = 0$ 时,$(x^m)^{(k)}|_{x=0} = x^m|_{x=0} = 0$

$0 < k < m$ 时,$(x^m)^{(k)}|_{x=0} = m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k}|_{x=0} = 0$

$m < k \leqslant n$ 时,$(x^m)^{(k)}|_{x=0} = 0$

$k = m$ 时,$(x^m)^{(k)}|_{x=0} = m!$

$$[\ln(1+x)]^{(n-k)}|_{x=0} = \left.\frac{(-1)^{n-m-1}(n-m-1)!}{(1+x)^{n-m}}\right|_{x=0} =$$

此题利用泰勒级数也可做,读者不妨一试.

$(-1)^{n-m-1}(n-m-1)!$

所以，$f^{(n)}(0) = C_n^m m!(-1)^{n-m-1}(n-m-1)! =$

$$(-1)^{n-m-1}\frac{n!}{n-m} \qquad (n \geqslant m+1)$$

2.2.3 导数的应用

2-63 试求经过原点且与曲线 $y = \frac{x+9}{x+5}$ 相切的切线方程.

解 设所求切线方程为

$$y = kx.$$

由题意所给曲线在切点(x_0, y_0)处切线斜率应满足

$$y'|_{x=x_0} = -\frac{4}{(x_0+5)^2} = k, \qquad (1)$$

另一方面应有 $kx_0 = \frac{x_0+9}{x_0+5}$ (2)

联立方程(1),(2)得

$$k = -1 \qquad 或 \qquad k = -\frac{1}{25}$$

所以切线方程为

$$y = -x \qquad 或 \qquad y = -\frac{1}{25}x$$

(x_0, y_0)既在切线上，又在曲线上.

2-64 求与直线 $x + 9y - 1 = 0$ 垂直的曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 5$ 的切线方程.

解 因为曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 5$ 上任一点处切线的斜率为

$$y' = 3x^2 - 6x$$

而直线 $x + 9y - 1 = 0$ 的斜率为 $-1/9$，依题意有

$$3x^2 - 6x = 9$$

解之得 $x_1 = -1, x_2 = 3$. 故切点为

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \qquad 或 \qquad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

对应于该两切点的切线斜率为

$$k_1 = y'|_{x=-1} = 9 \quad 及\ k_2 = y'|_{x=3} = 9$$

故两切线方程为

$$y - 1 = 9(x+1)$$

及 $y - 5 = 9(x-3)$

$$y - 9x - 1 = 0 \quad 及 \quad y - 9x + 22 = 0$$

两直线垂直的条件：两斜率之积为 -1.

2-65 求曲线 $r = a\sin 2\theta$ 在 $\theta = \pi/4$ 处的法线方程.

解 将曲线 $r = a\sin 2\theta$ 表示为

$$\begin{cases} x = a\sin 2\theta\cos\theta \\ y = a\sin 2\theta\sin\theta \end{cases}$$

则曲线的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\pi/4} = \left.\frac{2a\cos 2\theta\sin\theta + a\sin 2\theta\cos\theta}{2a\cos 2\theta\cos\theta - a\sin 2\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

所以法线斜率为 1,又切点为

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}a, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$$

故法线方程为 $\quad x - y = 0.$

将极坐标方程转换成直角坐标系下的参数方程,这样便于求切线斜率.

2-66 证明曲线 $x^2 - y^2 = a$ 与曲线 $xy = b$ 在交点处必正交(a,b 为非零常数).

证 由

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$$

知,对任意 $ab \neq 0$ 它们均相交.设 (x_1, y_1) 是任一个交点,则

$$\begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = a \\ x_1 y_1 = b \end{cases}$$

且 $x^2 - y^2 = a^2$ 在此点斜率

$$k_1 = y'_x\big|_{x=x_1} = \frac{x_1}{y_1}$$

而曲线 $xy = b$ 在此点斜率为

$$k_2 = y'_x\big|_{x=x_1} = -\frac{y_1}{x_1}$$

故
$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

即二曲线在交点处正交.

请读者仔细研究此解法的优点,并与自己的其它解法作比较.

2-67 求等边三角形当高为 8cm 时,其面积对高的变化率.

解 因为等边三角形当高为 h 时,其面积为

$$S = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$$

故面积对高的变化率为

$$S'(8) = \left.\frac{2h}{\sqrt{3}}\right|_{h=8} = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

2-68 设一质点的运动方程为

$$\begin{cases} x = 3\sin\omega t - 4\cos\omega t \\ y = 4\sin\omega t + 3\cos\omega t \end{cases}$$

求该质点在 $t=0$ 时的运动速度及加速度的大小(ω 为大于零的常数).

解
$$x'(0)=3\omega$$
$$y'(0)=4\omega$$

水平分速度.
铅直分速度
水平分加速度
铅直分加速度
(一般取 x 轴为水平方向 y 轴是铅直方向)

所以在 $t=0$ 时的运动速度的大小为

$$v\mid_{t=0}=\sqrt{(x'(0))^2+(y'(0))^2}=5\omega$$

而
$$x''(0)=4\omega^2$$
$$y''(0)=-3\omega^2$$

所以在 $t=0$ 时的质点运动的加速度的大小为

$$a\mid_{t=0}=\sqrt{(x''(0))^2+(y''(0))^2}=5\omega^2$$

2-69 一物体沿曲线为 $r=2\theta$ 的轨迹运动,如果角度 $\theta=t^2$,求 $\theta=\pi/2$ 时物体运动的速度 v、加速度 a 的大小(t 表示时间).

解 因为 $\begin{cases} r=2\theta \\ \theta=t^2 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

变成直角坐标系下的参数方程.

所以物体的运动方程可写为

$$\begin{cases} x=2t^2\cos t^2 \\ y=2t^2\sin t^2 \end{cases}$$

当 $\theta=\pi/2$ 时,取 $t=\sqrt{\pi/2}$,得

t 为时间,应取正.

$$x'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=-4\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}},\qquad y'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=4\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=-10\pi,\qquad y''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=4-2\pi^2$$

所以 $\quad v=\sqrt{2\pi^3+8\pi}$

$$a=\sqrt{\left(x''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right)^2+\left(y''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right)^2}$$
$$=2\sqrt{\pi^4+21\pi^2+4}$$

2-70 设有一个球体,其半径以 0.02m/s 的速率增加,求当其半径为 2m 时,体积及表面积的增加速率各为多少?

解 设球的半径为 R,则其体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

本题也可写出 $R=2+0.02t$,求当 $t=0$ 时的 $V'(0)$ 及 $S'(0)$.

故 $\quad V'(t)=4\pi R^2(t)R'(t)$($t$ 为时间).

以 $R'(t_0)=0.02\text{m/s}$,$R(t_0)=2\text{m}$(t_0 为对应于 $R=2$ 的时刻)代入上式,得所求球体的增加速率为

$$V'(t_0)=0.32\pi(\text{m}^3/\text{s})$$

又球的表面积为

$$S(t) = 4\pi R^2(t)$$

故
$$S'(t) = 8\pi R(t)R'(t)$$

以 $R'(t_0) = 0.02\text{m/s}, R(t_0) = 2\text{m}$ 代入上式，得所求面积的增加速率为

$$S'(t_0) = 0.32\pi(\text{m}^2/\text{s}).$$

第 3 章　导数应用

3.1　客观题

3.1.1　填空题

3-1　$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})=$ <u>1/3</u>.

解 1　(用拉格朗日中值定理).

$$\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$$
$$=x\frac{1}{6(1+\xi)^{5/6}}\cdot\frac{2}{x}$$

其中 $-\frac{1}{x}<\xi<\frac{1}{x}$,当 $x\to+\infty$,$\xi\to0$,故原式 $=\frac{1}{3}$.

解 2　(用泰勒公式)

$$\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right]$$
$$=x\left[1+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\left(1-\frac{1}{6x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\to\frac{1}{3}$$

3-2　曲线 $y=\frac{x^2}{1+x^2}$ 的拐点为= $\underline{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)}$.

解　$y=\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$

$y'=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $y''=2\left[\frac{1}{(1+x^2)^2}-\frac{4x^2}{(1+x^2)^3}\right]$. 令 $y''=0$ 得拐点的横坐标 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$,故拐点为 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

3-3　函数 $y=(x-1)^3(x-2)^4(x-3)^5$ 的极值点为 $x=$ $\underline{\frac{4}{3},\frac{5}{2}}$ <u>和 2</u>.

解　$y'=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4[3(x-2)(x-3)+$
$4(x-1)(x-3)+5(x-1)(x-2)]=$

$2(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(2x-5)(3x-4)$

3-4 曲线 $y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ 在 $x=\pm\sigma(\sigma>0)$ 处有拐点，则正参数 $h=$ $\underline{\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}}$.

解 由 $y''=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(4h^2x^2-2h^2)$ 可知 $h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$.

3-5 曲线 $y=2(x-1)^2$ 在 $x=$ $\underline{\ 1\ }$ 处具有最小的曲率半径 $R=$ $\underline{1/4}$.

解 该曲线的曲率半径 $R=R(x)=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{1}{4}\sqrt{1+16(x-1)^2}$，故当 $x=1$ 时，$R(x)$ 最小，为 $\frac{1}{4}$.

3-6 函数 $f(x)=(x^2+3x-3)e^{-x}$ 在 $[-5,+\infty)$ 内的最小值为 $\underline{-3e^3}$，最大值为 $\underline{e^4}$.

解 由 $f'(x)=-(x+3)(x-2)e^{-x}$ 可知驻点为 $x=-3$ 和 $x=2$ 两点，另外，在边界点 $x=-4$ 处，$f(-4)=e^4$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 我们得知最小值为 $f(-3)=-3e^3$，最大值为 $f(-4)=e^4$.

最大值点可能是驻点、不可导点、或边界点.

3-7 函数 $y=x2^x$ 的极小值点是 $x=$ $\underline{-1/\ln 2}$.

解 由 $y'=2^x(1+x\ln 2)$ 可求得极小值点与极小值.

3-8 曲线 $y=e^{-x^2}$ 的向上凸区间是 $\underline{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$.

解 由 $y''=4e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$ 可知，当且仅当 $|x|<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y''<0$.

3-9 函数 $f(x)=x+2\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\underline{\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}}$；在区间 $[0,2\pi]$ 上的最大值为 $\underline{2(\pi+1)}$.

解 $y'=1-2\sin x$，得 $y=f(x)$ 的驻点为 $\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$\frac{5\pi}{6}+2k\pi$. 当在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内考虑时，仅有一个驻点 $\frac{\pi}{6}$. $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$，$f(0)=2$，$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$. 比较后，得知 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$；而当考

在求最大值的时候，一定要将不可导点处及区间端点处的函数值与驻点处的函数值进行比较.

虑区间$[0,2\pi]$上的最大值时,需比较 $f(0)$,$f(2\pi)$,$f(\frac{\pi}{6})$,$f(\frac{5\pi}{6})$4 个值的大小,其中最大者为 $f(2\pi)=2(\pi+1)$.

3-10 设 $f(x)=(a+b\cos x)\sin x-x$,当 $x\to 0$ 时,$f(x)$是 x 的 5 阶无穷小,则 $a=$ __4/3__ ,$b=$ __$-1/3$__ .

解 当 $x\to 0$ 时,$f(x)$是 x 的 5 阶无穷小的充要条件是 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(4)}(0)=0$,且 $f^{(5)}(0)\neq 0$,由此解得 $a=4/3$,$b=-1/3$.

将 $f(x)$展成泰勒级数 $f(x)=f(0)+\cdots+\frac{1}{5!}f^{(5)}(0)x^5+o(x^5)$后,就不难看出,所谓的 5 阶无穷小等价于 $f^{(k)}(0)\neq 0$,$f^{(5)}(0)\neq 0$,$(k\leqslant 4)$

3.1.2 单项选择题

3-11 设 n 为正整数,则关于函数 $f(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})e^{-x}$的极值问题是( ). (D)

(A) 有极小值

(B) 有极大值

(C) 既无极小值也无极大值

(D) $f(x)$是否有极值依赖于 n 的具体取值

解 因为 $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$,所以,当 n 为偶数量,$f(x)$是严格单减的函数,既无极小值也无极大值;而当 n 为奇数时,$x=0$ 是 $f(x)$的极大值点.综合起来,应选(D).

3-12 设$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在点 $x=a$ 处( ). (B)

(A) $f(x)$的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$

(B) $f(x)$取得极大值

(C) $f(x)$取得极小值

(D) $f(x)$的导数不存在

解 当 x 充分接近a 时,$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$,而其中的分母为正,所以 $x=a$ 是$f(x)$的极大值点.

不难证明,$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=0$,即 $f'(a)=0$.

3-13 设 $f(x)$在 $x=x_0$ 的附近二阶可导，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处有(　). (B)

(A) 极大值　(B) 极小值

(C) 拐点　(D) 既非极值点也非拐点

解 由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(x_0)}{2}>0$$

说明 当 x 充分接近 x_0 时，$f(x)-f(x_0)>0$.
即 $x=x_0$ 是 $f(x)$的极小点.

3-14 设 $f(x)$在 $x=x_0$ 的附近$(n-1)$阶可导，在 $x=x_0$ 点处 n 阶可导，$f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)>0$，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 点处有(　). (D)

(A) 极大值

(B) 极小值

(C) 既非极小值也非极大值

(D) 是否取极值依赖于 n 的具体取值

解 仿照 3-13 题，可知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

洛必达法则.

导数定义.

在上式中用到了洛必达法则和导数的定义. 因为不知道 n 为偶数还是奇数，所以无法知道$(f(x)-f(x_0))$是正是负. 容易看出，当 n 为偶数时，$f(x)$以 x_0 为极小值点；当 n 为奇数时，$f(x)$在 $x=x_0$ 点处既非极大值也非极小值. 综上，选(D).

3-15 已知函数 $f(x)$具有任意阶导数，且 $f'(x)=(f(x))^3$，则当 n 为大于 1 的整数时，$f(x)$的 n 阶导数$f^{(n)}(x)$为(　). (A)

(A) $(2n-1)!!\ [f(x)]^{2n+1}$

(B) $(2n-1)[f(x)]^{2n+1}$

(C) $(2n-1)!!\ [f(x)]^{2n}$

(D) $(2n-1)[f(x)]^{2n}$

解 可归纳出 $f^{(n)}(x)$的表达式为(A).

3-16 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,则 $f'(0)$为( ). (C)

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) -1

解 按导数定义求导数 $f'(0)$,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}\cdot 2x}{2x}=1$$

3-17 已知 $f(x)$在 $x=0$ 的某个邻域内有定义,且 $f(0)=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$$

则在 $x=0$ 点处 $f(x)$( ). (D)

(A) 不可导

(B) 可导,且 $f'(0)\neq 0$

(C) 取极大值

(D) 取极小值

解 因为

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}=0$$

所以排除了(A)和(B).其实,注意到 $1-\cos x\geqslant 0$ 的事实,便可知,当 x 充分接近 0 时,$f(x)>0=f(0)$,即 $x=0$ 为 $f(x)$的极小值点.

3-18 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内二阶可导,若 $f(x)=-f(-x)$,且在$(0,+\infty)$内有 $f'(x)>0,f''(x)>0$,则 $f(x)$在$(-\infty,0)$内必有( ). (C)

由 $f(x)=-f(-x)$可知 $f(x)$是奇函.

(A) $f'(x)<0,\ f''(x)<0$

(B) $f'(x)<0,\ f''(x)>0$

(C) $f'(x)>0,\ f''(x)<0$

(D) $f'(x)>0,\ f''(x)>0$

解 因为奇函数的导数为偶函数,而偶函数的导数为奇函数,所以只能选(C).

3-19 设 $f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$内,且对任意的实数 x_1,x_2,我们有$(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))\geqslant 0$,则( ). (D)

式子$(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))$

(A) 对任意的 $x, f'(x) \geqslant 0$

(B) 对任意的 $x, f'(x) \leqslant 0$

(C) 函数 $f(-x)$ 单增

(D) 函数 $-f(-x)$ 单增

解 因为 $f(x)$ 未必可导,故将(A),(B)排除掉,注意到已知条件是指 $f(x)$ 单增,因此当 $x_1 < x_2$ 时,$-x_1 > -x_2$,从而 $-f(-x_1) < -f(-x_2)$,即(D)是正确的.

$\geqslant 0$ 说明 $f(x)$ 是单增的.

3-20 设 $f(x)$ 是有一阶连续导数,$F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$,则 $f(0) = 0$ 是 $F'(0)$ 存在的( ). (C)

(A) 必要但非充分的条件

(B) 充分但非必要的条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分也非必要条件

解 记 $g(x) = f(x)|\sin x|$,显然 $F(x) = f(x) + g(x)$,因此 $F'(0)$ 的存在性等价于 $g'(0)$ 的存在性.而

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -f(0)$$

所以,当且仅当 $f(0) = 0$ 时,$g'(0)$ 存在.故选(C).

3-21 设常数 $k > 0$,函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内的零点个数为( ). (B)

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

解 因为 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$,所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 内严格单增;在 $(e, +\infty)$ 内严格单减.另外 $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$,$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,$f(e) = k > 0$,所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不同的零点.

3-22 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的一个充分条件是( ). (D)

(A) $\lim_{h \to +\infty} h\left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a)\right]$ 存在

(B) $\lim_{h \to 0} \frac{f(a + 2h) - f(a + h)}{h}$ 存在

(C) $\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{h}$ 存在

(A)是指 $f'_+(a)$ 存在;(D)是指 $f'(a)$ 存在.

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

解 由$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

可知,正确者为(D).

3-23 在区间$(-\infty,\infty)$内方程$|x|^{1/4}+|x|^{1/2}-\cos x=0$(　).

(C)

(A) 无实根

(B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有两个实根

(D) 有无穷多个实根

解 记$f(x)=|x|^{1/4}+|x|^{1/2}-\cos x$,则$f(x)$为偶函数.显然,当$x\geqslant 1$时,$f(x)>0$,故只需考虑区间$[0,1]$.因为$f(0)=-1$,$f(1)=2-\cos 1>0$,且当$x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,所以$f(x)=0$在$(0,1)$内有唯一一个实根,从而说明$f(x)$在$(-\infty,\infty)$内有且仅有两个实根.

3-24 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,$x_0\neq 0$是函数$f(x)$的极大值点,则(　).

(C)

(A) x_0是$f(x)$的驻点

(B) $-x_0$必是$-f(-x)$的极大值点

(C) $-x_0$必是$-f(-x)$的极小值点

(D) 对一切x都有$f(x)\leqslant f(x_0)$

(E) 当$x<x_0$时,$f'(x)\geqslant 0$;当$x>x_0$时,$f'(x)\leqslant 0$

解 $f(x)$在极大值点$x=x_0$的附近未必可导,故可将(A)与(E)排除掉;又极大值点不同于最大值点,故将(D)也排除了.简单地作个示意图,可知(C)是正确的.

通过导函数来研究函数的形态、性质,这是一种有效的方法,但前提是函数的导数要存在.

3-25 已知函数$y=f(x)$对一切x满足$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$,若$f'(x_0)=0$,且$x_0\neq 0$,则

(B)

(A) x_0是$f(x)$的极大值点

(B) x_0是$f(x)$的极小值点

(C) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

(D) x_0不是$f(x)$的极值点,$(x_0,f(x_0))$也非曲线$y=f(x)$的拐点

解 我们有 $f''(x_0)=\frac{1}{x_0}(1-e^{-x_0})>0$,说明 x_0 是 $f(x)$的极小值点.

3-26 设 $y=f(x)$在区间$[0,1]$上不恒为常数,且连续可导.若 $f(0)=f(1)$,则在开区间$(0,1)$内,( ). (D)

(A) $f'(x)$恒为0 (B) $f'(x)>0$ (C) $f'(x)<0$

(D) 在$(0,1)$内存在两点 ξ_1 和 ξ_2 使 $f'(\xi_1)$与 $f'(\xi_2)$异号

解 (A)显然不对;(B)和(C)分别意味 $f(x)$的严格单增性和严格单减性,也被排除掉了.在区间$(0,1)$取一点 ξ 使$f(\xi)\neq f(0)$,显然$(f(\xi)-f(0))$与$(f(1)-f(\xi))$异号,而由拉格朗日中值定理可知,存在 ξ_1,ξ_2 使 $f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}$,$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$显然$f'(\xi_1)$与 $f'(\xi_2)$异号.

3-27 设两函数 $f(x)$及 $g(x)$均在 $x=x_0$ 处取极大值,则函数 $h(x)=f(x)g(x)$在 $x=a$ 处( ). (D)

(A) 取极大值

(B) 取极小值

(C) 不可能取极值

(D) 是否取极值不能确定

解 举例如下:(1) $f(x)=-x^2,g(x)=-x^4$ 显然 $f(x),g(x)$都在 $x=0$ 处取极大值,但 $h(x)=f(x)g(x)=x^6$ 在 $x=0$ 处取极小值.

(2) $f(x)=-x^2,g(x)=\cos x,x_0=0$,这时 $f(x)$与 $g(x)$在 $x=x_0$ 点处取极大值,$f(x)g(x)$也在 $x=x_0$ 点处取极大值.

综上可知应选(D).

3-28 曲线 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$(常数 a,b,c 满足 $4ac-b^2>0$ 且 $a>0$)( ). (C)

(A) 没有渐近线

(B) 只有一条渐近线

(C) 有两条渐近线

(D) 是否有不近线与 a,b,c 有关.

解 由

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right]=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\left(-\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right]=0$$

可知曲线 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 有两条斜渐近线，但显然该曲线没有铅直渐近线，所以，该曲线共有两条渐近线.

3-29 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ( ). (D)

(A) 没有渐近线

(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

解 直线 $x=0$ 及 $y=1$ 分别是该曲线的铅直渐近线与水平渐近线.

3.2 非客观题

3.2.1 微分中值定理

3-30 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(b)-f(a)=g(b)-g(a)$，试证明在 (a,b) 内至少有一点 c，使 $f'(c)=g'(c)$.

证 令 $F(X)=f(x)-g(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，因此在 (a,b) 内至少存在一点 c 使 $F'(c)=0$，即 $f'(c)=g'(c)$.

$f'(\xi)=g'(\xi)$ 可写为 $f'(\xi)-g'(\xi)=0$ 这提示我们作辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$

3-31 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且当 $x\in(a,b)$ 时，$g'(x)\neq 0$，试证明在 (a,b) 内至少有一点 c，使得

$$\frac{f'(x)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

证 令 $G(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(x)$，由 $g'(x)\neq 0$，故 $g(b)-g(a)\neq 0$ 容易验证 $f(b)-f(a)=G(b)-G(a)$，由上题可知在 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $f'(c)=G'(c)$，而 $G'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$，所以

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$$

即

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

这是柯西定理的又一证法.

与上题相比，这里未必有 $f(b)-f(a)=g(b)-g(a)$，为此乘一个因子 μ，使 $f(b)-f(a)=\mu(g(b)-g(a))$，即 $\mu=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

3-32 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，则在 $(a,+\infty)$ 内至少存在一点 c，使得 $f'(c)=0$.

证 记 $B = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$A = \arctan a$，以下在区间 $[A,\frac{\pi}{2}]$ 上定义一个函数 $F(t)$.

$$F(t)=\begin{cases} B, & t = A \text{ 或 } \frac{\pi}{2} \\ f(\tan t), & A < t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

显然 $F(t)$ 在 $\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且 $F(A)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

又 $\lim\limits_{t\to A^+} F(t) = \lim\limits_{t\to A^+} f(\mathrm{tg}t) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = B = F(A)$.

所以，$F(t)$ 在 A 点右连续，在 $\frac{\pi}{2}$ 点左连续，又 $F(t)$ 在 $\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，根据罗尔定理知存在 $\xi\in\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $F'(\xi)=0$.

记 $c=\tan\xi$，则 $c\in(a,+\infty)$，且

$$0 = F'(\xi) = f'(c)\sec^2\xi$$

而 $$\sec^2\xi \neq 0$$

故 $$f'(c)=0$$

这是罗尔定理的推广.

在罗尔定理中区间 $[a,b]$ 是有限的. 本题的关键是利用变换 $x=\tan t$，将无限区间转化为有限区间.

3-33 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，证明存在 $c\in(-\infty,+\infty)$ 使得

$$f'(c)=0$$

本题证明与 3-32 题类似，请读者自己完成.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的条件可改为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在.

3-34 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant \frac{x}{1+x^2}$，对任意的正数 x 成立，证明在 $(0,+\infty)$ 内至少有一点 c，使得 $f'(c)=\frac{1-c^2}{(1+c^2)^2}$.

证 记 $g(x)=\frac{x}{1+x^2}$，令 $F(x)=f(x)-g(x)$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{1+x^2}=0$，而 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}$

所以，$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$

则 $\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(f(x)-g(x))=0$

同理可证 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$，而 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，所以 $F(x)$ 满足 3-32 题的条件，故在 $(0,+\infty)$ 内至少有一点 c 使得 $F'(c)=0$.

本题主要是要注意到：

$$g'(x)=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

即

$$f'(c)=\frac{1-c^2}{(1+c^2)^2}$$

3-35 设 $a<c<b$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=g(a)$，$f(c)=g(c)$，$f(b)=g(b)$，则在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

这是罗尔定理的推广.

证 在 $[a,c]$ 上考虑函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，则 $f(x)$，$g(x)$ 满足 3-30 题的条件，所以，存在 $\xi_1\in(a,c)$，使得 $f'(\xi_1)=g'(\xi_1)$；同理存在点 $\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_2)=g'(\xi_2)$.

记 $h(x)=f'(x)$，$k(x)=g'(x)$，在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上考虑 $h(x)$，$k(x)$，则 $h(x)$，$k(x)$ 满足 3-30 题的条件，所以，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $h'(\xi)=k'(\xi)$，即

$$f''(\xi)=g''(\xi)$$

3-36 设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(4)=2$，证明存在一点 $\xi\in(0,4)$，使得 $f''(\xi)=-\frac{1}{3}$

证 首先定义一个二次函数 $y=g(x)=Ax^2+Bx+C$，使 $g(0)=0$，$g(1)=1$，$g(4)=2$，得 $g(x)=-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{6}x$. 显然

$g(0)=f(0)$，$g(1)=f(1)$，$g(4)=f(4)$，根据 3-35 题知，存在 $\xi\in(0,4)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$，而 $g''(\xi)=-\frac{1}{3}$，所以，$f''(\xi)=-\frac{1}{3}$.

因已知 $f(x)$ 在 0,1,4 三点的值，而三点确定一抛物线：$g(x)=Ax^2+Bx+C$.

故以，二次函数为辅助函数，这是作辅助函数的一种重要方法.

注 1 实际上这里仅需求出 A.

注 2 过三点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3) 的二次抛物线方程可直接写出（拉格朗日插值多项式）.

$$y=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}y_2+\frac{(x-_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

本题可直接代入得：

$$y=\frac{1}{6}x(x-1)-\frac{1}{3}x(x-4)\text{，即知 }A=-\frac{1}{6}$$

3-37 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二次可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得：

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

证 1 令 $c=\frac{a+b}{2}$，作过三点 $(a,f(a))$，$(c,f(c))$，$(b,f(b))$ 的抛物线

在证明拉格朗日中值定理时辅助函数是连結点 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 的直线，本题的辅助函数是过 $(a,f(a))$，$(b,

$$y = g(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}f(a) + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)$$

由 3-35 题知，存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f''(\xi) = g''(\xi)$，而

$$g''(\xi) = \frac{4}{(b-a)^2}f(a) + \frac{4}{(b-a)^2}f(b) - \frac{8}{(b-a)^2}f(c)$$

所以 $$\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi) = f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)$$

$f(b))$，$(c,f(c))$ 三点的抛物线.

达布定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，μ 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 间任一数. 则 $\exists\, \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = \mu$.

证 2 用泰勒公式. 记 $\frac{a+b}{2} = c$，

$$f(a) = f(c) + f'(c)(a-c) + \frac{1}{8}(b-a)^2 f''(\xi_1),\ \xi_1 \in (a,c)$$

$$f(b) = f(c) + f'(c)(b-c) + \frac{1}{8}(b-a)^2 f''(\xi_2),\ \xi_2 \in (c,b)$$

$$f(a) + f(b) = 2f(c) + \frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}\right]$$

由达布中值定理得：

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).\ \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$$

3-38 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 $f''(x)$ 存在，设连结 $A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$ 两点的直线与曲线 $y = f(x)$ 在异于 A，B 点的另一点 $C(c,f(c))$ 相交，$c \in (a,b)$，试证在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f''(\xi) = 0$.

证 直线 AB 的方程是

$$y = g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

则显然 $g(a) = f(a)$，$g(b) = f(b)$，$g(c) = f(c)$ 所以根据 3-35 题存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f''(\xi) = g''(\xi)$，而 $g''(x) \equiv 0$，则 $f''(\xi) = 0$.

这是 3-35 题的特例.

3-39 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 内有一阶连续导数，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a) = g(a)$，$f'(a) = g'(a)$，$f(b) = g(b)$，则在 (a,b) 内至少有一点 ξ 使 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

证 因为 $f(a) = g(a)$，$f(b) = g(b)$，所以根据 3-30 题知存在 $\xi_1 \in (a,b)$，使得 $f'(\xi_1) = g'(\xi_1)$.

记 $h(x) = f'(x)$，$k(x) = g'(x)$，在 $[a,\xi_1]$ 上考虑 $h(x)$，$k(x)$，由 3-30 题知存在 $\xi \in (a,\xi_1) \subset [a,b]$，使得 $h'(\xi) = k'(\xi)$，即

$$f''(\xi) = g''(\xi)$$

由 $f(a) = g(a)$，$f(c) = g(c)$ 可知 $f(c) - f(a) = g(c) - g(a)$ 从而 $f'(\xi_1) = g'(\xi_2)$，ξ_1，ξ_2 均在 (a,c) 内，这样当 $c \to a^+$，由一阶导数连

3-40 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n-1)}(x),g'(x),g''(x),\cdots,g^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在且连续,$f^{(n)}(x),g^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 内存在,且 $f(a)=g(a),f'(a)=g'(a),f''(a)=g''(a)\cdots f^{(n-1)}(a)=g^{(n-1)}(a),f(b)=g(b)$,则在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f^{(n)}(\xi)=g^{(n)}(\xi)$.

证 本题证法与 3-39 题类似,从略.

续性知 $f'(a)=g'(a)$,所以 $f(a)=g(a),f'(a)=g'(a)$,可看作是 $f(a)=g(a)$,$f(c)=g(c)$,当 $c\to a^+$ 的极限状态,本题可看作 3-35 题的推广.

3-41 设 $f(x),f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 内存在,则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得,

$$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

证 令 $g(x)=f(a)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\left[f(b)-f(a)-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right]\dfrac{(x-a)^n}{(b-a)^n}$

易验证 $f(a)=g(a),f'(a)=g'(a),\cdots,f^{(n-1)}(a)=g^{(n-1)}(a)$,$f(b)=g(b)$,这样 $f(x),g(x)$ 满足 3-40 题的条件,所以,存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f^{(n)}(\xi)=g^{(n)}(\xi)$.

又 $$g^{(n)}(x)=n!\frac{f(b)-f(a)-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{(b-a)^n}$$

所以 $$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

这是泰勒定理的另一证明.

我们要作一个多项式 $g(x)$,使 $g(a)=f(a)$,$g'(a)=f'(a)\cdots$,$g^{(n-1)}(a)=f^{(n-1)}(a)$,$g(b)=f(b)$,可设 $g(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n$.根据以上条件可求得本题中的辅助函数 $g(x)$.

3-42 设 a,b,c 为实数,求证方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证 令 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$,则 $f(0)=0$,$f(1)=0$,故显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件,从而存在 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=0$,即 $4a\xi^3+3b\xi^2+2c\xi=a+b+c$

故原题得证.

本题等价于证明 $[ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x]'=0$ 在 $(0,1)$ 内有解.因而考虑函数 $ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$.

3-43 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 上可导,且 $f(a)=f(b)=0$,则 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0$ 在 (a,b) 内有解.

证 令 $F(x)=f(x)g(x)$.

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

由于 $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,因此作辅助函数

$$F'(\xi) = 0$$

即 $$f'(\xi)g(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$$

故原题得证.

$F(x) = f(x)g(x)$ 注意这里的 $g(x)$ 是任意的可导函数.

3-44 设 $f(x)$ 可导,λ 为实数,则 $f(x)$ 的任意两个零点之间必有 $\lambda f(x) + f'(x) = 0$ 的零点.

证 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点,不妨设 $x_1 < x_2$,在 3-43 题中取 $g(x) = e^{\lambda x}$,则

$$f'(x)e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} f(x) = 0$$

在(x_1, x_2)内有解,即 $f'(x) + \lambda f(x)$ 在(x_1, x_2)内有零点.

注意:$(f(x)e^{\lambda x})' = e^{\lambda x}[f'(x) + \lambda f(x)]$.

3-45 设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,$f(a) = g(b) = 0$,证明在(a,b)内至少有一点 ξ,使得 $f'(\xi)g(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$.

证 令 $F(x) = f(x)g(x)$,则 $F(x)$ 在$[a,b]$上可满足罗尔定理的条件,所以存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$.

即 $f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$

请与 3-43 题进行比较.

选取不同的可导函数 $g(x)(g(b) = 0)$ 可得不同的方程式.

证明 $(x-1)f'(x) + kf(x) = 0$ 在$(0,1)$内有解.

3-46 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,$f(0) = 0$,k 为正整数,则存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $\xi f'(\xi) + kf(\xi) = f'(\xi)$.

证 在 3-45 题中取 $g(x) = (x-1)^k$,则存在 $\xi \in (0,1)$,使得

$$k(\xi - 1)^{k-1} f(\xi) + f'(\xi)(\xi - 1)^k = 0$$

即 $$\xi f'(\xi) + kf(\xi) = f'(\xi).$$

本题等价于证明 $f(x-1)f'(x) + kf'(1-x)f(x) = 0$ 在$(0,1)$内有解.

3-47 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,$f(0) = 0$,当 $x > 0$ 时,$f(x) > 0$,试证对任意的正整数 k,存在 $\xi \in (0,1)$,满足

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{kf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

证 令 $g(x) = [f(1-x)]^k$,显然 $g(1) = 0$. 由 3-45 题知存在 $\xi \in (0,1)$,使得

$$f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0,$$

即 $f'(\xi)[f(1-\xi)]^k - k[f(1-\xi)]^{k-1} f'(1-\xi) f(\xi) = 0.$

所以

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{kf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

本题等价于证明 $f(1-x)f'(x) - kf'(1-x)f(x) = 0$ 在$(0,1)$内有解,从而要构造一个满足 $g(1) = 0$ 的辅助函数,参照 3-45 题并结合这里要证的式子定义 $g(x) = [f(1$

$-x)]^k$.

3-48 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,又设对 (a,b) 内所有 x,$g'(x)\neq 0$,则在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}.$$

证 令 $f_1(x)=f(x)-f(a)$,$g_1(x)=g(b)-g(x)$. 则 $f_1(x),g_1(x)$ 满足3-45题条件,故存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'_1(\xi)g_1(\xi)+f_1(\xi)g'_1(\xi)=0$$

即
$$f'(\xi)[g(b)-g(\xi)]-g'(\xi)[f(\xi)-f(a)]=0$$

所以

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$$

本题等价于证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)[g(b)-g(\xi)]=g'(\xi)[f(\xi)-f(a)]=0$,故考虑辅助函数 $[f(x)-f(a)][g(b)-g(x)]$.

3-49 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$0\leqslant f\leqslant 1$,且对于区间 $(0,1)$ 内所有 x 有 $f'(x)\neq 1$,求证在 $[0,1]$ 上有且仅有一个 x_0,使 $f(x_0)=x_0$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(1)=f(1)-1\leqslant 0$,$F(0)=f(0)\geqslant 0$. 由连续函数介值定理知至少存在一点 $x_0\in[0,1]$,使得 $F(x_0)=0$,即 $f(x_0)=x_0$. 以下证明在 $[0,1]$ 上仅有一点 x_0,使 $F(x_0)=0$,否则,设另有一点 $x_1\in[0,1]$,使得 $F(x_1)=0$. 不妨设 $x_0<x_1$,则由罗尔定理可知在 $[x_0,x_1]$ 上至少有一点 ξ,使 $F'(\xi)=0$,即 $f'(\xi)=1$,这与原题设矛盾. 故原题得证.

本题中用罗尔定理估计方程 $F(x)=0$ 实根的个数是一种常用方法. 一般有若 $F^{(n)}(x)\neq 0$,则 $F(x)=0$ 最多有 n 个根.

3-50 证明方程 $2^x=x^2+1$ 有且仅有三个实根.

证 令 $f(x)=2^x-x^2-1$,则原题等价为 $f(x)=0$ 有且仅有三个实根,显然 $f(0)=f(1)=0$,又 $f(4)\cdot f(5)<0$,则在 $(4,5)$ 内至少有一点 c 使 $f(c)=0$,从而 $f(x)=0$ 至少有三个实根,又 $f'''(x)=2^x(\ln 2)^3\neq 0$,则 $f(x)=0$ 最多有三个实根,原题得证.

3-51 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界、可导且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在,试证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证 对任意的 $x\in(0,+\infty)$,由拉格朗日中值定理知存在 $c\in(x,2x)$,使得

$$\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x}=f'(c)$$

即
$$f(2x)-f(x)=f'(c)x.$$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A\neq 0$,不妨设 $A>0$,那么

从几何上看,$f'(x)$ 是切线的斜率,从物理上看 $f'(x)$ 是速度,如果 $f'(x)$ 总大于某个正数,显然应有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(2x)-f(x)] = \lim_{x\to+\infty}f'(c)x = +\infty$$

这与 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界矛盾.

3-52 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(x)$ 不为线性函数,试证在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得

$|f'(\xi)| > \left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.

证 令 $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

易知 $F(a) = F(b) = 0$,且当 $a < x < b$ 时,$F(x) \neq 0$(因为 $f(x)$ 为非线性函数). 设在 $c_1(a < c_1 < b)$ 点 $F(c_1) \neq 0$,不妨设 $F(c_1) > 0$. 在 $[a,c_1]$ 与 $[c_1,b]$ 上分别应用拉格朗日定理,可知存在 $\xi_1 \in (a,c_1)$ 使

$$F'(\xi_1) = \frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a} = \frac{F(c_1)}{c-a} > 0$$

$\xi_2 \in (c_1,b)$ 使

$$F'(\xi_2) = \frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1} - \frac{F(c_1)}{b-c_1} < 0$$

因而

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(\xi_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

由此可知当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$ 时,

$$|f'(\xi_1)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

而当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$ 时

$$|f'(\xi_2)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

本题从几何上看,只要找到一条弦,使其斜率的绝对值大于连结点 $A(a,f(a))$,$B(b,f(b))$ 的直线斜率的绝对值即可. 由于 $f(x)$ 不是线性函数,所以总有点不在 AB 上,从而这样的弦很易找到.

3-53 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n} - \arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$.

解 1 设 $f(x) = \arctan\dfrac{a}{x}$.

在区间 $[n,n+1]$ 上对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理,存在 $c_n \in (n,\ n+1)$ 使得

$$f(n+1) - f(n) = f'(c_n)(n+1-n) = -\frac{a}{c_n^2+a^2}$$

即 $\quad \arctan\dfrac{a}{n+1} - \arctan\dfrac{a}{n} = -\dfrac{a}{c_n^2+a^2}$

本题的解 1 是用拉格朗日中值定理,解 2 是用洛必达法则. 解 1 要比解 2 方便些.

所以 $n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}) = n^2\frac{a}{c_n^2+a^2}$

又 $\frac{n^2a}{(n+1)^2+a^2} < \frac{n^2a}{c_n^2+a^2} < \frac{n^2a}{n^2+a}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2a}{(n+1)^2+a^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2a}{n^2+a^2} = a$

由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right) = a$$

解 2 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{\arctan(ta)-\arctan\frac{ta}{1+t}}{t^2} \quad (\frac{1}{x}=t)$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{a}{1+a^2t^2}-\frac{a}{(1+t)^2+a^2t^2}}{2t} \quad (\text{洛必达法则})$$

$= a$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right) = a$

3-54 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x)$

解 1 由拉格朗日中值定理知

$$x^2(\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x) = \frac{x^2}{(1+\xi^2)\arctan\xi},$$

其中 $\xi\in(x,x+1)$,仿照 3-53 题得

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x) = \frac{2}{\pi}.$$

解 2 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x}{\frac{1}{x^2}}$.

用洛必达法则易可求得此极限为$\frac{2}{\pi}$.

3-55 设 $f(x)$ 在$[a,+\infty]$上可导,且当 $x>a$ 时,$f'(x)>k>0$,其中 k 为常数,证明如里 $f(a)<0$,则方程 $f(x)=0$,在

已知 $f(a)<0$,若能说明 $f(b)>0$,即可得

$\left[a, a - \frac{f(a)}{k}\right]$内有且仅有一个实根.

证 记 $b = a - \frac{f(a)}{k}$,显然 $b > a$,由拉格朗日定理知存在 $\xi \in (a, b)$,使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) = -\frac{f(a)}{k}f'(\xi) > -\frac{f(a)}{k} \cdot k = -f(a)$$

所以 $f(b) > 0$.

又 $f(a) < 0$,由介值定理知 $f(x) = 0$ 在(a, b)内至少有一个实根.又 $f'(x) > k > 0$,则 $f(x)$ 在$[a, b]$内严格单调,所以 $f(x) = 0$ 在区间$[a, a - \frac{f(a)}{k}]$内有且仅有一个实根.

出结论.视 $f(a)$ 为已知,$f(b)$ 为未知,已知与未知的关系是

$f(b) = f(a) + [f(b) - f(a)]$.

这就提醒我们考虑 $f(b) - f(a)$.

3-56 设 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$上可导,且当 $x > 0$ 时,$0 < f'(x) < \frac{1}{x^2}$,证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在.

证 1 由于 $f'(x) > 0$,则 $f(x)$ 单调增.由拉格朗日中值定理知:

$$f(2) - f(1) = f'(\xi_1) < 1, \qquad 1 < \xi_1 < 2$$

$$f(3) - f(2) = f'(\xi_2) < \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2 \times 1} < 1 - \frac{1}{2}, \qquad 2 < \xi_2 < 3$$

$$\cdots$$

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n) < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

其中 $n < \xi_n < n + 1$.

将以上 n 个式子两边相加得

$$f(n+1) - f(1) < 2 - \frac{1}{n} < 2$$

则数列 $f(n)$ 有上界,即 $\exists M$,使得对一切的 n,$f(n) < M$,又 $f(x)$ 单调增,而对任意的 $x \geqslant 0$,存在 n,使 $n > x$,从而 $f(x) < f(n) < M$,即 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上有上界,又 $f(x)$ 单调增,故极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在.

证 2 当 $x > 1$ 时,

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)\mathrm{d}t < \int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x} < 1$$

则 $f(x) < 1 + f(1)$

即 $f(x)$ 有上界,又 $f'(x) > 0$,从而 $f(x)$ 单调增,故极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在.

3-57 设 $g(x)$ 处处可导,且对任意 x 有

$|g'(x)| \leqslant g(x)$,又 $g(0)=0$,试证 $g(x) \equiv 0$.

证 1) 首先证明当 $x \in [0,1]$ 时,$g(x) \equiv 0$,任意取定 $x_0 \in (0,1)$,由拉格朗日中值定理知,存在 $x_1 \in (0,x_0)$,使

$$g(x_0) = g(x_0) - g(0) = g'(x_1)x_0$$

$$|g(x_0)| = |g'(x_1)|x_0 \leqslant |g(x_1)|x_0$$

同理存在 $x_2 \in (0,x_1)$,使

$$|g(x_1)| \leqslant |g(x_2)|x_1 < |g(x_2)|x_0$$

即 $$|g(x_0)| \leqslant |g(x_2)|x_0^2$$

依次类推有:

$$|g(x_0)| \leqslant |g(x_n)|x_0^n$$

记 $|g(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 M,则

$$|g(x_0)| \leqslant Mx_0^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

从而 $g(x_0)=0$,由 x_0 的任意性知 $g(x) \equiv 0, x \in [0,1)$ 由 $g(x)$ 的连续性知 $g(1)=0$.

又 令 $h(x) = g(x+1)$,则 $h(0) = g(1) = 0$,

又 $|h'(x)| = |g'(x+1)| \leqslant g(x+1) = h(x)$,由 1) 知,当 $x \in [0,1]$ 时,$h(x) \equiv 0$,即当 $t \in [1,2]$ 时,$g(t) \equiv 0$.因此我们证明了 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上恒为零,同理我们可以证明 $g(x)$ 在 $[2,3]$,$[3,4]$,…,

$[n,n+1]$,…上恒为零,所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒为零,同理 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上恒为零.

用式子 $|g(x_0)| = |g(x_0) - g(0)| = |g'(x_1)||x_0| \leqslant |g(x_1)||x_0|$,将已知 $g(0)=0$,$|g'(x)| \leqslant |g(x)|$ 与未知 $g(x)$ 联系起来. 这里的关键是拉格朗日中值定理的反复使用. 首先考虑 $x_0 \in (0,1)$ 是因为 $x_0 \in (0,1)$ 时,$\lim\limits_{n\to+\infty} x_0^n = 0$.

3-58 设 $0<a<b$,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 上可导,求证在 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

证 1 在柯西中值定理中取 $g(x) = \ln x, g'(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0$,

$x \in (a,b)$,则存在 $\xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$$

故 $$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

证 2 本题也可以用罗尔定理证明,原题也就是要证明

$$\frac{f(b)-f(a)}{\xi} - f'(\xi)\ln\frac{b}{a} = 0.$$

故作辅助函数 $F(x)=[f(b)-f(a)]\ln x-f(x)\ln\dfrac{b}{a}$，

则 $\quad F(a)=F(b)=f(b)\ln a-f(a)\ln b$

由罗尔定理可证明本题.

3-59 设 $ab>0, a\neq b, f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

证 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}, G(x)=\dfrac{1}{x}$.

根据柯西定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

整理即得 $\dfrac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

$a\cdot b>0$ 表示零点不在区间内，又 $\dfrac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\dfrac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}$. 这样很容易想到柯西定理.

3-60 设 $x_1\neq x_2$，且 $x_1x_2>0$，试证在 x_1 与 x_2 之间至少存在一点 ξ，使得

$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2).$$

证 因为 $x_1x_2>0$，故以 x_1 与 x_2 为端点的区间不包含原点，故引进辅助函数

$$f(x)=\frac{e^x}{x},\quad g(x)=\frac{1}{x}$$

引用柯西定理，在 x_1 与 x_2 之间至少有一点 ξ，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即 $\quad x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$

事实上本题是 3-59 的特例，要证的式子可写成 $\dfrac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ e^{x_1} & e^{x_2}\end{vmatrix}=e^{\xi}-\xi e^{\xi}$.

3-61 设 $0\leqslant a<b, f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，试证在 (a,b) 内存在三点 x_1,x_2,x_3，使得

$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ab+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$

证 在柯西定理中分别取 $g(x)=x,x^2,x^3$，则在 (a,b) 内存在 x_1,x_2,x_3，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(x_1)}{1}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_2)}{2x_2}$$

注意：$x'=1$，$(x^2)'=2x$，$(x^3)'=3x^2$，从而我们可在柯西定理中分别取 $g(x)=x,x^2$，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$

则 $$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x)}{2x_2}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

x^3.

3-62 设当 $x \geqslant a$ 时，$|f'(x)| \leqslant g'(x)$，则对于开区间 $(a,+\infty)$ 内的任一点 x，恒有 $|f(x)-f(a)| \leqslant g(x)-g(a)$ 成立.

证 1 显然 $g'(x) \geqslant 0$.

1) 若对于任意的 $x \in (a,+\infty)$ 均有 $g'(x)>0$，则根据柯西定理，存在 $\xi \in (a,x)$，使

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\right|=\frac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\frac{|f'(\xi)|}{g(\xi)} \leqslant 1$$

故 $$|f(x)-f(a)| \leqslant g(x)-g(a).$$

2) 一般情况，任给 $\varepsilon>0$，令 $G_\varepsilon(x)=g(x)+\varepsilon(x-a)$，则 $|f'(x)| \leqslant g'(x)<g'(x)+\varepsilon=G'_\varepsilon(x)$，而 $G'_\varepsilon(x)>0, x \in (a,+\infty)$，根据 1) 可得

$$|f(x)-f(a)| \leqslant G_\varepsilon(x)-G_\varepsilon(a)$$
$$=g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a).$$

上式对于任意的 $x>a$，及任意的 $\varepsilon>0$ 总成立，固定 x，令 $\varepsilon \to 0^+$，则

$$|f(x)-f(a)| \leqslant g(x)-g(a).$$

由 x 的任意性可知，当 $x>a$ 时，恒有

$$|f(x)-f(a)| \leqslant g(x)-g(a)$$

任意取定 $x>a$ 要证的式子等价于 $\frac{|f)(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)} \leqslant 1$，从而我们考虑柯西定理，但柯西定理要求 $g'(x) \neq 0$，所以我们首先在，$g'(x)>0$ 的特殊条件下证明结论. 一般情况要利用特殊情况的结论，辅助函数 $G_\varepsilon(x)$ 的目的就在于此，要证原式也只要证明 $g(x)-g(a)>f(x)-f(a)$. 且 $g(x)-g(a)>-(f(x)-f(a))$，从而考虑 $\varphi(x),\psi(x)$.

证 2 令 $\varphi(x)=g(x)-f(x), \psi(x)=g(x)+f(x)$

则 $\varphi'(x)=g'(x)-f'(x) \geqslant 0$.

所以，$\varphi(x)$ 单调增，

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(a), \qquad x \geqslant a$$

即 $$g(x)-g(a) \geqslant f(x)-f(a)$$

同理考虑 $\psi(x)$ 可得

$$g(x)-g(a) \geqslant (f(x)-f(a))$$

故 $$g(x)-g(a) \geqslant |f(x)-f(a)|, \qquad x \geqslant a$$

证 3 若加 $f'(x), g'(x)$ 分段连续的条件，则有

$$|f(x)-f(a)|=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t$$

证 3 中用了积分，故要求导函数分段连续，加强了条件.

$$\leqslant \int_a^x g'(t)\mathrm{d}t$$
$$= g(x) - g(a)$$

3-63 1) 将多项式 $p(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ 表示为 $(x+1)$ 的幂的多项式;

2) 求次数最低的多项式 $p(x)$,使 $p(x_0) = a_0, p'(x_0) = a_1, \cdots, p^{(n)}(x_0) = a_n$,

解 1) 方法 1:

因为 $x = (x+1) - 1$,代入 $p(x)$ 得

$$p(x) = 1 + 3[(x+1) - 1] + 5[(x+1) - 1]^2 - 2[(x+1) - 1]^3$$
$$= 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$$

方法 2,由泰勒定理知:

$$p(x) = p(-1) + p'(-1)(x+1) + \frac{p''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{p'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{p^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)^4$$

由于 $p(x)$ 为三次多项式,则 $p^{(4)}(x) \equiv 0$.

又 $p(-1) = 5, \quad p'(-1) = -13$

$p''(-1) = 22, \quad p'''(-1) = -12$

代入后 $p(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$

2) $p(x)$ 即泰勒多项式

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}(x - x_0)^k$$

此题说明一个多项式的泰勒多项式就是自己(当然写的形式与在什么点展开有关).

3-64 设 $p(x)$ 为一 n 次多项式,

1) 若 $p(a), p'(a), \cdots, p^{(n)}(a)$ 皆为正数,试证 $p(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 无实根.

2) 若 $p(a), p'(a), \cdots, p^{(n)}(a)$ 的正负号相间,证明 $p(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 无实根.

证 根据泰勒定理

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

1) 因为 $p(a), p'(a), \cdots, p^{(n)}(a)$ 皆为正数所以当 $x > a$ 时,$p(x) > 0$,故 $p(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 无实根.

2) 因为 $p(a), p'(a) \cdots, p^{(n)}(a)$ 的正负号相间,所以当 $x < a$ 时,展开式中各项同号,$p(x) \neq 0$,故 $p(x) = 0$ 在 $(-\infty, a)$ 无实根.

$p(a), p'(a), \cdots, p^{(n)}(a)$ 为已知,$p(x)$ 是未知,通过泰勒公式将已知与未知写在一起,未知也就变成已知了,用尽可能少的式子包含尽可能多的信息.

3-65 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有二阶连续导数，当 h 充分小时，$f(x_0)<\frac{1}{2}[f(x_0+h)+f(x_0-h)]$ 恒成立，试证 $f''(x_0)\geqslant 0$. 举例说明等号不能去掉.

证1 （反证法） 若 $f''(x_0)<0$，则由 $f''(x)$ 的连续性可知存在 δ_0，使当 $|\delta|<\delta_0$. $f''(x_0+\delta)<0$，以下假定 h 充分小，并且 $|h|<\delta_0$.

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0+\delta_1)}{2!}h^2$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)+f'(x_0)(-h)+\frac{f''(x_0+\delta_2)}{2!}h^2$$

两式相加得

$$\begin{aligned}f(x_0+h)+f(x_0-h)&=2f(x_0)+\frac{h^2}{2}[f''(x_0+\delta_1)+f''(x_0+\delta_2)]\\&<2f(x_0)\end{aligned}$$

与假设矛盾，故 $f''(x_0)\geqslant 0$.

证2 1) 设 $f'(x_0)=0$，在这种情况下我们证明 $f''(x_0)\geqslant 0$.

否则设 $f''(x_0)<0$，这时 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的严格极大值点，显然当 h 充分小时，

$$f(x_0)>\frac{1}{2}[f(x_0-h)+f(x_0+h)]$$

这与已知条件矛盾，故 $f''(x_0)\geqslant 0$.

2) 一般情况下我们可作辅助函数

$$g(x)=f(x)-f'(x_0)x$$

则当 h 充分小时，

$$g(x_0)<\frac{1}{2}[g(x_0+h)+g(x_0-h)]$$

且 $g'(x_0)=0$，由 1) 知 $g''(x_0)\geqslant 0$，而 $g''(x_0)=f''(x_0)$，则 $f''(x_0)\geqslant 0$.

证3 （反证法）设 $f''(x_0)<0$，则因为 $f''(x)$ 连续，所以在 x_0 的某邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内 $f''(x)<0$，这样在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上 $f(x)$ 是上凸的，从而有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

取 $x_1=x_0-h$，$x_2=x_0+h$，则

$$f(x_0)\geqslant\frac{1}{2}[f(x_0-h)+f(x_0+h)]$$

与题设矛盾，故 $f''(x_0)\geqslant 0$

等号不能去掉的例子：

$$f(x)=x^4, x_0=0$$

则 $f(0)<\frac{1}{2}[f(-h)+f(h)]$

但 $f''(0)=0$,并不严格大于零.

3-66 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f'(a)=f'(b)=0$,则在 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

式中的 $\frac{4}{(b-a)^2}=1/\left(\frac{(b-a)}{2}\right)^2$,提醒我们考虑区间 $[a,b]$ 的中点,$f''(\xi)$ 提醒我们考虑二阶泰勒展式,另外就一个区间 $[a,b]$ 来说,其端点及中点自然是比较特殊的点,应首先考虑.

证 根据泰勒公式,存在 $\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$, $\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$,使得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

两式相减后,移项,同除 $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$,取绝对值得

$$\begin{aligned}\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|&=\left|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\right|\\&\leqslant\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}\\&\leqslant\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}\end{aligned}$$

当 $|f''(\xi_1)|\geqslant|f''(\xi_2)|$ 时,取 $\xi=\xi_1$,否则取 $\xi=\xi_2$,总有 $\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\leqslant f''(\xi)$.

3-67 证明 e 是无理数.

证 (反证法) 设 e 是有理数, $\mathrm{e}=\frac{m}{n}$, m,n 为正整数, $(m,n)=1$,由于 $2<\mathrm{e}<3$,所以 $n\neq1$, $n\geqslant2$.

根据泰勒公式

$$\mathrm{e}^x=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad\theta\in(0,1)$$

取 $x=1$,则

$$\mathrm{e}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+1)!}$$

所以

$$\frac{m}{n}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+1)!}$$

$$m \cdot ((n-1)!) - n! - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} = \frac{e^{\theta}}{n+1}$$

上式左边为整数，故右边为一整数，再看右边，$1 < e^{\theta} < 3$，而 $n+1 \geqslant 3$，则

$$0 < \frac{e^{\theta}}{n+1} < \frac{3}{3} = 1$$

右边不为整数，矛盾，故 e 为无理数.

3-68 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上二次可导，$\xi \in (a,b)$，是一定点，$f''(\xi) \neq 0$，求证在 (a,b) 内可找到两个值 x_1, x_2，使

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

请与 3-65 题证二做比较.

请从几何直观上来理解.

证 1) 我们先在简单、特殊情况下证明结论，即先在 $f'(\xi) = 0$ 的情况下证明.

不妨假设 $f''(\xi) > 0$，则 ξ 是 $f(x)$ 的严格小值点，即存在 $\delta_0 > 0$，当 $0 < |h| \leqslant \delta_0$ 时，

$$f(\xi + h) > f(\xi)$$

若 $f(\delta_0 + \xi) \geqslant f(-\delta_0 + \xi)$，则根据介值定理(因为 $f(\delta_0 + \xi) \geqslant f(-\delta_0 + \xi) > f(\xi)$) 在 $(\xi, \xi + \delta_0]$ 内有一点 x_1 使

$$f(x_1) = f(-\delta_0 + \xi)$$

记 $x_2 = -\delta_0 + \xi$，则 $x_1 \neq x_2$，且 $f(x_1) = f(x_2)$，这时

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2} = 0 = f'(\xi)$$

若 $f(\delta_0 + \xi) < f(-\delta_0 + \xi)$，也可以找到 $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$，使 $f(x_1) = f(x_2)$，这样

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

当 $f''(\xi) < 0$ 时，同理可证.

2) 一般情况，$f'(\xi) \neq 0$.

先证 $f'(\xi) = 0$ 的特殊情况，再证 $f'(\xi) \neq 0$ 的一般情况，是个好方法.

令 $g(x) = f(x) - f'(\xi)x$，则 $g''(\xi) = f''(\xi) \neq 0$，且 $g'(\xi) = 0$，则根据 1)，存在 $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$，使得

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = g'(\xi) = 0$$

所以 $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

3-69 设对于任意的实数 x, y，不等式 $|f(x) - f(y)| \leqslant M|y - x|^{1+\delta}$ (M, δ 为正常数) 恒成立.

等价于证明

求证 $f(x)$ 为常值函数.

证 任取 x 为实数,则当 $\Delta x\to 0$ 时,

$$\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\leqslant\frac{|x+\Delta x-x|^{1+\delta}}{|\Delta x|}=|\Delta x|^{\delta},$$

但 $$\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|^{\delta}=0,$$

所以 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$

由 x 的任意性可得 $f'(x)\equiv 0$,故 $f(x)$ 为常值函数.

$f'(x)\equiv 0$.

这里只能按导数定义来计算 $f'(x)$

3-70 证明下列恒等式:

1) $\arcsin x+\arccos x\equiv\dfrac{\pi}{2}\qquad(|x|\leqslant 1)$

2) $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\equiv\pi\qquad(x\geqslant 1)$

3) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)\equiv\pi\quad(|x|\leqslant\dfrac{1}{2})$

证 1) 记 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$,显然 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.又当 $x\in(-1,1)$ 时,

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为常值函数,又 $f(0)=\pi/2$,所以 $f(x)\equiv\pi/2$,即

$$\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2}\qquad(|x|\leqslant 1)$$

同理可证 2),3) 的情况.

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,$f'(x)$ 在 (a,b) 内恒为零.

3-71 已知 $f(1)=1$,

1) 若 $f(x)$ 满足方程 $xf'(x)+f(x)\equiv 0$,求 $f(2)$;

2) 若 $f(x)$ 满足方程 $xf'(x)-f(x)\equiv 0$,求 $f(2)$.

解 1) 令 $F(x)=xf(x)$,则 $F'(x)=xf'(x)+f(x)\equiv 0$,所以 $F(x)$ 为常值函数,$F(2)=F(1)=1$,从而 $f(2)=1/2$.

2) 令 $G(x)=f(x)/x$,同理可证 $G(x)$ 为常值函数,所以 $G(2)=G(1)=1$,$f(2)=2$

求导公式要熟,显然 $(xf(x))'=xf'(x)+f(x)$.

$(f(x)/x)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

3-72 设 $f(x)$ 对所有的非零实数有定义,且对于任何的非零实数 x,y 均有

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

又设 $f'(1)$ 存在,

1) 问在其它点 x,$f'(x)$ 是否存在;

2) 求 $f(x)$.

因无法套用公式,只好按定义求导数.

解 1) 令 $x=y=1$,则

$$f(1)=f(1)+f(1)$$

所以,$f(1)=0$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{f'(1)}{x}$$

记 $f'(1)=A$,那么当 $x\neq 0$ 时,有

$$f'(x)=\frac{A}{x}$$

2) 因为 $(f(x)-A\ln|x|)'=\frac{A}{x}-\frac{A}{x}\equiv 0$,

所以 $f(x)=A\ln|x|+C$

又 $x=1$ 时,$f(1)=0$,故 $C=0$,

$$f(x)=A\ln|x|$$

3.2.2 函数的单调性、极值

3-73 不经过计算比较 π^e 与 e^π 的大小.

解 取对数后变成比较 $e\ln\pi$ 与 π 的大小,考虑函数 $f(x)=e\ln x-x$,则

$$f'(x)=\frac{e}{x}-1$$

当 $0<x<e$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)\uparrow$

当 $x>e$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)\downarrow$

所以 $f(x)<f(e)=0,(x>0,x\neq e)$

所以 $f(\pi)<0$

故 $e\ln\pi<\pi$

也即 $\pi^e<e^\pi$.

幂指数形式常常先取对数,然后再考虑(如对数求导法).

3-74 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

解 设 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}(x > 0)$ 则

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x\right) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$$

所以，当 $0 < x < \mathrm{e}$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 严格单增，当 $x > \mathrm{e}$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 严格单减.

所以 $\quad 1 < 2^{\frac{1}{2}}$

$$3^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{1}{4}} > 5^{\frac{1}{5}} > \cdots > n^{\frac{1}{n}} > \cdots$$

又 $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$，所以在数列$\{n\sqrt{n}\}$中最大项为 $3^{\frac{1}{3}}$.

这个方法是通过考虑连续变量 $x^{\frac{1}{x}}$ 的最大值来求离散变量 $n^{\frac{1}{n}}$ 的最大值，这一方法值得注意.

3-75 求 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\cos x^2$ 的值域.

解 显然 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$. 令 $x^2 = t$，则可考虑

$$g(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t \qquad t \in [0, +\infty)$$

的值域，因为

$$g'(t) = -\mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t).$$

所以，其驻点为 $t_k = k\pi + 3\pi/4 \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$

而 $\quad g(t_k) = (-1)^{k+1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-t_k} \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$

$g(t_0), g(t_2), g(t_4), \cdots$ 为负数，其中以 $g(t_0) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi}$ 为最小.

$g(t_1), g(t_3), g(t_5), \cdots$ 为正数，但均小于

$$g(0) = 1$$

又

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0.$$

所以，$g(t)$ 在$[0, +\infty)$上的最大值为 $g(0) = 1$，最小值为 $g(3\pi/4) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi}/2$，故 $g(t)$ 的值域为$[-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi}/2, 1]$也就是 $f(x)$ 的值域为$[-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi}/2, 1]$.

设连续函数 $h(x)$ 的定义在某区间上(开或闭均可)，若 $h(x)$ 有最大值 M 与最小值 m，则 $h(x)$ 的值域为$[m, M]$.

3-76 设 $f(x) = 3x^2 + Ax^{-3}$，问正数 A 至少为何值时，可使对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 都有 $f(x) \geqslant 20$ 成立.

解 $f'(x) = 6x - 3Ax^{-4}$，

其驻点为 $x = \sqrt[5]{A/2}$.

所以 $\quad 0 < x < \sqrt[5]{\dfrac{A}{2}}$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 单减.

$$\sqrt[5]{\frac{A}{2}} < 2 \text{ 时}, f'(x) > 0, f(x) \text{ 单增}.$$

故 $x = \sqrt[5]{A/2}$ 为 $f(x)$ 在区间$(0, +\infty)$内的最小值点，所以当

只要在最小值点 x_0 处有 $f(x_0) \geqslant 20$ 则函数值总大于或等于 20.

此题的初等解法是 $3x^2 + Ax^{-3} = x^2 + x^2 + x^2 +$

$$f\left(\sqrt[5]{\frac{A}{2}}\right)=5\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{5}}\geqslant 20$$

即当 $A\geqslant 64$ 时,有

$$f(x)\geqslant f\left(\sqrt[5]{\frac{A}{2}}\right)\geqslant 20 \qquad x\in(0,+\infty)$$

成立,因此 A 至少为 64.

$\frac{A}{2}x^{-3}+\frac{A}{2}x^{-3}+\frac{A}{2}x^{-3}\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{A^2}{4}}\geqslant 20$. 解得 $A\geqslant 64$.

3-77 设 $a>0$,求 $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$ 的最值.

解 因为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x-a}, & x\geqslant a\\ \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+a-x}, & 0\leqslant x<a\\ \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+a-x}, & x<0\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0,a$ 两点不可导,在其它点可导,

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x-a)^2}, & x>a\\ -\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+a-x)^2}, & 0<x<a\\ \frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+a-x)^2}, & x<0\end{cases}$$

从而 $f(x)$ 仅有一个驻点 $x=a/2$,

而 $\quad f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{4}{2+a},\quad f(0)=f(a)=1+\frac{1}{1+a}$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

故函数 $f(x)$ 的最大值为 $1+1/(1+a)$,没最小值. $x=a/2$ 为其极小值点.

对于有限闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$,我们要考虑不可导点,驻点、端点,然后比较这些点上的函数值来决定最大值、最小值. 这里区间无限长,故要考虑在无穷远点处的变化形态.

注意无限区间上的连续函数不一定有最值.

3-78 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导. 又设直线 $l:y=g(x)=f(a)+k(x-a)$ 过点 $(a,f(a))$,但不是 $y=f(x)$ 的切线,则不管正数 δ 多么小,曲线段 $y=f(x),x\in(a-\delta,a+\delta)$,不能位于 l 的同一侧.

证(反证法) 假定存在 $\delta_0>0$,使曲线段

$$y=f(x),\quad x\in(a-\delta_0,a+\delta_0)$$

位于 l 的同一侧,即或者 1):位于 l 上侧

$$f(x)\geqslant g(x),\quad x\in(a-\delta_0,a+\delta_0)$$

或者 2),位于 l 下侧

$$f(x)\leqslant g(x),\qquad x\in(a-\delta_0,a+\delta_0)$$

在 1) 的情况下，令 $h(x) = f(x) - g(x)$

则 $\quad h(x) \geqslant 0, \quad x \in (a - \delta_0, a + \delta_0)$

又 $\quad h(a) = 0$，所以 a 为 $h(x)$ 的极小值点.

所以，
$$h'(a) = 0$$
$$f'(a) = g'(a) = k$$

这说明 l 为 $f(x)$ 在 $(a, f(a))$ 处的切线，矛盾.

在 2) 的情况下，同样可推出矛盾.

综上所述，不管正数 δ 多小，曲线段
$$y = f(x), x \in (a - \delta, a + \delta)$$
不能位于 l 的同一侧.

请考虑，位于同侧时，就相切吗？相切时就一定位于同侧吗？

3-79 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 异号，求证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证 不妨假定 $f'_+(a) > 0, f'_-(b) < 0$，

因为，
$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
$$f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

所以，$\delta_0 > 0$，使当 $0 < h < \delta_0$ 时，
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0, \qquad \frac{f(b-h) - f(b)}{-h} < 0$$
$$f(a+h) > f(a), \quad f(b-h) > f(b)$$

$f(a)$ 及 $f(b)$ 均不是 $f(x)$ 的最大值，这样 $f(x)$ 的最大值点只能在 (a,b) 内某点 ξ 处达到. 显然 $f'(\xi) = 0$.

同理，如果 $f'_+(a) < 0, f'_-(b) > 0$，命题依然成立.

请画图，从直观上理解.

本题及下题都不能用连续函数的介值定理，因为 $f'(x)$ 未必连续.

3-80 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 不相等，c 是夹在 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的一个数，求证：存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = c$.

证 令 $g(x) = f(x) - cx$

则
$$g'_+(a) = f'_+(a) - c$$

与
$$g'_-(b) = f'_-(b) - c$$

异号，根据 3.50 题，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得
$$f'(\xi) - c = g'(\xi) = 0$$

即 $\quad f'(\xi) = c, \quad \xi \in (a,b)$

推论：一个可导函数的导数在某区间上不取零值. 那么在此区间其导数不变号.

这个命题称为达布(Darboux)定理.

显然 3-79 题是 3-80 题的特殊情况. 但 3-80 题的证明是通过 3-79 题来得到的. 这种先易后难的方法常常用到.

3-81 在什么条件下,方程 $x^3+px+q=0$,

1) 仅有一个实根,2) 有三个不同的实根.

解 令 $f(x)=x^3+px+q$

则 $f'(x)=3x^2+p$

以下分两种情况讨论.

1) $p\geqslant 0$,时,显然当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)>0$,说明 $f(x)$ 严格单增,所以方程 $f(x)=0$. 至多只有一个实根,另一方面 $f(x)$ 是三次多项式,至少有一实根,故 $p\geqslant 0$ 时,方程 $x^3+px+q=0$ 仅有一个实根.

2) $p<0$ 时,易得 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{-p/3})$ 内严格单增,在 $(-\sqrt{-p/3},\sqrt{-p/3})$ 内严格单减,在 $(\sqrt{-p/3},+\infty)$ 内严格单增.

显然只有

$$f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)>0 \text{ 及 } f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)<0$$

即 $\dfrac{-2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}>-q>\dfrac{2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}$

时,方程 $f(x)=0$ 有三个实根.

上面不等式等于 $27q^2+4p^3<0$

同样我们可以得到方程 $f(x)=0$ 只有一个实根的充分必要条件是

$$27q^2+4p^3>0$$

综上所述,得到以下结论:

(1) 若 $27q^2+4p^3>0$,则 $x^3+px-q=0$ 仅有一个实根(单根).

(2) 若 $27q^2+4p^3<0$,则 $x^3+px+q=0$ 有三个不同的实根.

奇数次多项式的值域为 $(-\infty,+\infty)$.

别忘了几何直观的帮助,请画个图.

顺便问一下何时只有两个不同的实根(即其中一个是重根).

请想一想:如果有一个三重根又当如何?

3-82 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 可导,$f(0)=0$,且 $f'(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调增(严格单调增),证明函数 $f(x)/x$ 在 $(0,a)$ 内单调增(严格单调增).

证 我们只给出 $f'(x)$ 单调增时的证明,严格单调增时的证明类似.

证1 设 $0<x_1<x_2<a$,则由拉格朗日定理,存在 $\xi_1\in(0,x_1)$,$\xi_2\in(x_1,x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}=f'(\xi_1)$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi_2)$$

所以 $$\frac{f(x_1)}{x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$f'(x)$ 单增,$f(x)$ 是下凸函数,则 $f(x)/x$ 是 $(0,0)$ 点与 $(x,f(x))$ 点连线的斜率.

设 $b_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$,$a_i$ 为实数,则 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\dfrac{a_i}{b_i}\right\}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\dfrac{a_i}{b_i}\right\}$

$$\frac{f(x_2)}{x_2}=\frac{f(x_2)-f(x_1)+f(x_1)}{x_2-x_1+x_1}\geqslant\frac{f(x)}{x_1}$$

即 $f(x)/x$ 在$(0,a)$内单增.

证 2 设 $0<x<a$,令 $F(x)=f(x)/x$,

则 $$F'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$$

由拉格朗日定理,存在 $\xi\in(0,x)$ 使

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)x$$

因 $f'(x)$ 是单增的,且 $f(0)=0$,

所以 $$f(x)=f'(\xi)x\leqslant f'(x)x$$

将上式代人 $F'(x)$ 的表达式中得 $F'(x)\geqslant 0$

所以 $F(x)$ 单增,$f(x)/x$ 在$(0,a)$内单增.

等价于证明 $\left(\frac{f(x)}{n}\right)'\geqslant 0$

3.2.3 不等式

3-83 证明:1) $\frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant 1\qquad(0\leqslant x<\frac{\pi}{2})$

2) $\frac{\tan x_1}{x_1}<\frac{\tan x_2}{x_2}\qquad(0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2})$

3) $x<\tan x<\frac{4}{\pi}\qquad(0<x<\frac{\pi}{4})$.

证 令 $f(x)=\sin x$,则 $f'(x)=\cos x$ 在$(0,\pi/2)$内严格单减,又 $f(0)=0$,根据3-82题的证明可推得 $\sin x/x$ 在$(0,\pi/2]$严格单减.

所以,$\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$,

$x\in(0,\frac{\pi}{2}]$

不等式的右侧是已知的.

2) 在3-82题中取 $f(x)=\tan x$ 即可得到结果.

3) 当 $0<x<\pi/4$ 时(参阅图3.1),$x<\tan x$ 是已知的.由2)有

$$\frac{\tan x}{x}<\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}$$

即 $\tan x<\frac{4}{\pi}x,\qquad x\in(0,\frac{\pi}{4})$

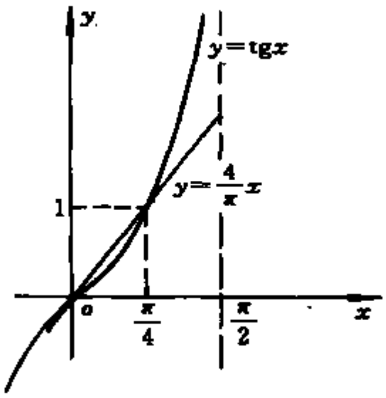


图3.1

3) 的几何意义知图 $\tan x$ 在$[0,\frac{\pi}{4}]$是向上凹的

3-84 证明：若 $x \neq 0$，则 $e^x > 1 + x$.

证 1 令 $f(x) = e^x - x - 1$，

则
$$f'(x) = e^x - 1$$
所以，当 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$，严格单增，当 $x < 0$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 严格单减.

故
$$f(x) > f(0) = 0, \qquad x \neq 0$$
$$e^x > 1 + x, \qquad x \neq 0$$

证 2 设 $g(x) = e^x$，则 $g''(x) = e^x > 0$，所以 $g(x)$ 严格下凸，又 $y = 1 + x$ 是 $y = e^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线.

故 $e^x > 1 + x, x \neq 0$.

证 1 是常用的方法.

$y = 1 + x$ 是 $y = e^x$ 的切线，曲线 $y = e^x$ 在直线 $y = 1 + x$ 上方是显然的. 请画图.

3-85 证明 $\dfrac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$，$\qquad x \in (0,1)$

证 1 令 $f(x) = (1-x)e^{2x} - (1+x)$，则

$f'(x) = (1-2x)e^x - 1$，$\quad f''(x) = -4xe^{2x}$，

当 $0 < x < 1$ 时，$f''(x) < 0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调减，且 $f'(0) = 0$，故 $f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调减.

所以，$\qquad f(x) < f(0) = 0, \qquad x \in (0,1)$

$$(1-x)e^{2x} - (1+x) < 0$$

即 $\qquad \dfrac{1-x}{1+x} < e^{-2x} \qquad x \in (0,1)$

先化简式子，然后再做.

证 2 原不等式等价于
$$\frac{1+x}{1-x} > e^{2x}, \qquad x \in (0,1)$$
$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1-x} &= (1+x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)\\ &= 1+2x+2x^2+\cdots+2x^n+\cdots \quad x \in (0,1)\end{aligned}$$
$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{2^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{2^2x^n}{n!} + \cdots$$

左边的一般项为 $2x^n$，右边的一般项为 $\dfrac{2^nx^n}{n!}$，显然当 $n \geqslant 3$ 时，
$$2 > \frac{2^n}{n!}$$
所以当 $n \geqslant 3, 0 < x < 1$ 时，
$$2x^n > \frac{2^n}{n!}x^n$$
所以
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n > 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^nx^n}{n!},$$
即
$$\frac{1+x}{1-x} > e^{2x}, \qquad x \in (0,1)$$

证 2 用到了幂级数展开.

3-86 设 $m,n>0,0\leqslant x\leqslant a$,证明

$$x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$$

常常通过求最大、最小值来证明不等式.

证 令 $f(x)=x^m(a-x)^n$,

则 $f'(x)=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x]$,

所以, $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内的驻点为 $x_0=ma/(m+n)$.

当 $0<x<\frac{ma}{m+n}$ 时,$f'(x)>0$

当 $\frac{ma}{m+n}<x<a$ 时,$f'(x)<0$

所以 $x_0=ma/(m+n)$ 为 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的最大值点.即有

$$f(x)\leqslant f(x_0),\qquad x\in[0,a]$$

所以,$x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}\quad x\in[0,a]$

3-87 求证

1)$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$, $\quad(a\geqslant0,\ \ b\geqslant0,\ \ 0<p<1)$

2)$(a+b)^p\geqslant a^p+b^p$, $\quad(a\geqslant0,\ \ b\geqslant0,\ \ p>1)$

通过建立一元函数来证明题中的不等式.

证 1) 方法 1

令 $f(x)=(x+b)^p-x^p-b^p$,将 b,p 视为常数,显然

$$f'(x)=p(x+b)^{p-1}-px^{p-1}$$

$$0<p<1,b\geqslant0,x>0\text{ 时},f'(x)\leqslant0.$$

所以,$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单减,故当 $x\geqslant0$ 时

$$f(x)\leqslant f(0)=0$$

即 $(x+b)^p\leqslant x^p+b^p,x\geqslant0$

以 $x=a$ 代入上式得

$$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$$

方法 2) 只需在 $a>0,b>0$ 时证明.

原式可先化为 $\left(1+\frac{b}{a}\right)^p-1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\leqslant0$.故可考虑函数,$g(x)=(1+x)^p-1-x^p$.

令 $g(x)=(1+x)^p-x^p-1$,

则 $g'(x)=p(1+x)^{p-1}-px^{p-1}<0\quad(x>0)$

所以,$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单减,

$$g(x)\leqslant g(0)=0$$

所以 $\qquad(1+x)^p\leqslant1+x^p,\qquad x>0$

取 $x=a/b$ 代入上式,

则 $(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$

2) 证法与 1) 类似.

3-88 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则以下三条件相互等价：

1) $f(x)$ 下凸，即曲线 $y=f(x)$ 位于其上任一点处的切线上方.

2) 对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，任意的 $p\in[0,1]$，有

$$f[px_1+(1-p)x_2]\leqslant pf(x_1)+(1-p)f(x_2).$$

3) $f'(x)$ 在 (a,b) 内单增.

证 1)⇒3) 设 $a<x_1<x_2<b$，则因为曲线 $y=f(x)$ 位于 $(x_1,f(x_1))$ 点处的切线上方.

请将这里的不等式与几何直观联系起来.

所以 $$f(x)\geqslant f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$$

当 $x=x_2$ 时，上式变为

$$f(x_2)\geqslant f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$$

同样有 $$f(x_1)\geqslant f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)$$

两式相加并整理后可得

$$[f'(x_2)-f'(x_1)](x_2-x_1)\geqslant 0$$

所以 $$f'(x_2)\geqslant f'(x_1)$$

3)⇒2) 设 $x_1,x_2\in(a,b)$，$p\in[0,1]$，不妨假定 $x_1<x_2$，$0<p<1$，

令 $$x_3=px_1+(1-p)x_2$$

显然 $x_1<x_3<x_2$. 由拉格朗日定理，存在 $\xi_1\in(x_1,x_3)$，$\xi_2\in(x_3,x_2)$，使

$$\begin{aligned}p[f(x_3)-f(x_1)]&=pf'(\xi_1)(x_3-x_1)\\&=p(1-p)f'(\xi_1)(x_2-x_1)\\(1-p)[f(x_2)-f(x_3)]&=(1-p)f'(\xi_2)(x_2-x_3)\\&=p(1-p)f'(\xi_2)(x_2-x_1)\end{aligned}$$

因为 $f'(x)$ 单增，所以 $f'(\xi_1)\leqslant f'(\xi_2)$.

$$p[f(x_3)-f(x_1)]\leqslant(1-p)[f(x_2)-f(x_3)]$$

$$f[px_1+(1-p)x_2]\leqslant pf(x_1)+(1-p)f(x_2)$$

注意，$p=0,1$ 时，不等式显然成立.

2)⇒1) 略.

注 1 设 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$ 是曲线 $y=f(x)$ 上两点，2) 中的不等式表示曲线上弧段 AB 在弦线 AB 的下方.

注 2 若 $f''(x)$ 存在，则 3) 可换成 $f''(x)\geqslant 0$.

注 3 很显然，若 1) 中 $f(x)$ 改为上凸，2) 中不等号反向，3) 中 $f'(x)$ 改为单减，结论仍成立.

3-89 设 $f(x)$ 为 n 次多项式 $(n\geqslant 3)$，又 $f(x)$ 为凸函数，试证 n 必为偶数.

证 假定 n 为奇数，$n\geqslant 3$，设

奇数次多项式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

$a_n \neq 0$,则 $f''(x)$ 仍为奇数次多项式.根据连续函数介值定理可以说明 $f''(x)$ 的值域为$(-\infty, +\infty)$,所以

$$f''(x) \geqslant 0, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

不成立,故 $f(x)$ 不是凸函数与题设矛盾,所以 n 必为偶数.

的值域为$(-\infty, +\infty)$.

3-90 设 $f(x)$ 定义在(a,b) 内,当 $x_1, x_2 \in (a,b)$, $p_1, p_2 \in [0,1]$ 且 $p_1 + p_2 = 1$ 时,$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqslant p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$,试证:

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$, $p_1, p_2, \cdots, p_n \in [0,1]$,且 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ 时.$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n) \leqslant p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \cdots + p_nf(x_n)$

证(用归纳法) $n = 2$ 时,就是已知条件.假定 $n = k$ 时结论成立,下面要证 $n = k + 1$ 时结论成立.

不妨假设 $p_1, p_2, \cdots, p_{k+1}$ 中没有等于 0 的数,记

$$x' = \frac{p_1}{p_1 + p_2}x_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2}x_2$$

则根据归纳假设

$$\begin{aligned} &f[(p_1 + p_2)x' + p_3x_3 + p_4x_4 + \cdots + p_{k+1}x_{k+1}] \\ &\leqslant (p_1 + p_2)f(x') + p_3f(x_3) + \cdots + p_{k+1}f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} f(x') &= f\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}x_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2}x_2\right) \\ &\leqslant \frac{p_1}{p_1 + p_2}f(x_1) + \frac{p_2}{p_1 + p_2}f(x_2) \end{aligned}$$

所以 $f(p_1x_+ \ p_2x_2 + \cdots + p_{k+1}x_{k+1}) \leqslant p_1f(x_1) + \cdots + p_{(k+1)}f(x_{k+1})$

这样我们就证明了题给结论是正确的.

x_1, x_2 可在(a, b) 内任意取值. p_1, p_2 在满足 $p_1 + p_2 = 1$ 的前提下可于$[0,1]$ 上任意取值.

3-91 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0$,且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$,试证

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

证 假定 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$,显然 $\ln x$ 是$(0, +\infty)$上的上凸函数,这是因为

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

所以由 3-88 题,3-90 题得

$$\ln(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \cdots + \alpha_na_n) \geqslant \alpha_1\ln a_1 + \cdots + \alpha_n\ln a_n$$

所以

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有一个为零时,不等式显然成立.

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

3-92 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0$,证明

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

证 在 3-91 中取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ 即得.

几何平均值小于或等于算术平均值.

3-93 设 $a, b \geqslant 0, k, k' > 0$ 且 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$

则

$$ab \leqslant \frac{1}{k} a^k + \frac{1}{k'} b^{k'}$$

证 令 $x_1 = a^k, x_2 = b^{k'}, \alpha_1 = \frac{1}{k}, \alpha_2 = \frac{1}{k'}$,由 3-91 题得

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

即

$$ab \leqslant \frac{1}{k} a^k + \frac{1}{k'} b^{k'}$$

如果 $k = k' = 2$,则是我们熟知的不等式

$$ab \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}$$

3-94 设 $a_i \geqslant 0, \quad b_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$. 又 $k > 1, k' > 1$ 且 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$,

则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

证 不妨假设 a_i, b_i 中没有等于 0 的数.

我们先在特殊情形下证明,设

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^{k'} = 1$$

此时要证的不等式就是

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1$$

由 3-93 题

$$a_i b_i \leqslant \frac{1}{k} a_i^k + \frac{1}{k'} b_i^{k'}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} a_i^k + \frac{1}{k'} \sum_{i=1}^{n} b_i^{k'} = 1$$

一般情形可用特殊情形下的结论来证明.

令

$$A_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}}, \quad B_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}}$$

这个不等式叫 Holder 不等式.

首先考虑特殊的、简单的情形,然后再考虑一般情形是很重要的思维方法,当然很多时候是先考虑一般,后考虑特殊.

则 $\sum_{i=1}^{n} A_i = 1,\quad \sum_{i=1}^{n} B_i = 1$

由前面已证的结论得

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqslant 1$$

将 $A_i, B_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 代入上式即得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

3-95 设 $a_i, b_i \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,n)$，试证 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

柯西不等式.

证 在3-94题中取 $k = k' = 2$ 即得.

3-96 设 $a_i, b_i \geqslant 0, (i = 1,2,\cdots,n), k > 1$,

这一不等式称为闵可夫斯基不等式.

则 $\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right)^{\frac{1}{k}}$

证 $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{k-1} a_i + \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{k-1} b_i$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right]^{\frac{k-1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right]^{\frac{k-1}{k}}$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\right] \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right]^{\frac{k-1}{k}},$$

整理后得

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

3-97 证明三角形三边之和小于或等于 $3\sqrt{3}R$，R 为其外接圆半径.

本题在初等数学中是道较难的题.

证 设三角形三边为 a, b, c，其所对角为 A, B, C，由正弦定理:

$$a = 2R\sin A,\quad b = 2R\sin B,\quad C = 2R\sin C,$$

$a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$.

以下考虑函数 $\sin x$，在 $(0,\pi)$ 内

$$(\sin x)'' = -\sin x < 0$$

所以 $\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 内是上凸的，因此，3-88题之2)成立，从而3-90题的结论成立. 在3-90题中取 $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$，得

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leqslant \sin\left(\frac{A + B + C}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

等号仅在三角

所以，　　　　　　$$a+b+c\leqslant 3\sqrt{3}R.$$

形是等边三角形时成立.

3-98　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，又存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)>0$，证明在 (a,b) 内存在 ξ，使 $f''(\xi)<0$.

证 1　（反证）若对任意的 $x\in(a,b)$ 均有 $f''(x)\geqslant 0$ 成立，则由 3-88 题知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是向上凹的，所以曲线

$$y=f(x),x\in(a,b)$$

应位于连续接点 $A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$ 的直线 l 的下方，而 l 即是 x 轴

故　　　　　　$$f(x)\leqslant 0\qquad x\in(a,b).$$

这与假设矛盾，所以在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$.

证 2　利用拉格朗日定理知，存在 $\xi_1\in(a,c)$ 及 $\xi_2\in(c,b)$ 使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$$

在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对函数 $f'(x)$ 引用拉格朗日定理，则至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$$

本题如用过 A，B，$C(c,f(c))$ 三点的抛物线

$g(x)=$

$\dfrac{f(c)(x-a)(b-x)}{(c-a)(b-c)}$

而令：$F(x)$

$=f(x)-g(x)$.

则 $F(a)=F(c)$

$=F(b)=0$.

反复用罗尔定理知，存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F''(\xi)=0$，

$f''(\xi)=$

$\dfrac{2f(c)}{(c-a)(b-c)}>0$.

也是一种好证法.

3-99　设 $f(x)\geqslant 0$，它在区间 $[a,b]$ 上的任一子区间上不恒为 0，在 $[a,b]$ 上二次可导，且 $f''(x)\geqslant 0$，证明方程 $f(x)=0$，在 $[a,b]$ 上最多只有一根.

证 1　（反证）　设方程

$$f(x)=0$$

在 $[a,b]$ 上有两个根 x_1,x_2，

则　　　　　　$$f(x_1)=f(x_2)$$

由题设 $f''(x)\geqslant 0$，并根据 3-88 题，当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时，

$$f[px_1+(1-p)x_2]\leqslant pf(x_1)+(1-p)f(x_2)=0,$$

又 $f(x)\geqslant 0$

所以　　　　$$f[px_1+(1-p)x_2]=0,p\in[0,1]$$

而当 p 取遍 $[0,1]$ 上的每一点时，$px_1+(1-p)x_2$ 正好取遍 $[x_1,x_2]$ 上的每一点，这样上式说明

$$f(x)\equiv 0,\qquad x\in[x_1,x_2]$$

与题设矛盾，因此 $f(x)=0$ 至多有一根.

证 2（反证）　设 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 均为

$$f(x)=0$$

的根，由罗尔定理，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使

$$f'(\xi) = 0$$

因为 $f''(x) \geqslant 0$，所以 $f'(x)$ 单增，

$$f'(x) \geqslant f'(\xi) = 0, \qquad \xi \leqslant x \leqslant b$$

$$f'(x) \leqslant f'(\xi) = 0, \qquad a \leqslant x \leqslant \xi$$

所以，ξ 点是 $f(x)$ 的最小值点，从而

$$f(\xi) \leqslant f(x_1) = 0$$

又 $$f(x) \geqslant 0, \quad x \in [a, b]$$

所以 $$f(\xi) = 0$$

由前面的结论 $f(x)$ 在 $[\xi, b]$ 上单增，所以 $f(x)$ 在 $[\xi, x_2]$ 上也单增，这时

$$0 = f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) = 0, \quad x \in [\xi, x_2]$$

即 $f(x)$ 在 $[\xi, x_2]$ 上恒为零，与题设矛盾，因此 $f(x) = 0$ 至多有一根.

3-100 设 $0 < a < b$，求证 $\ln \dfrac{b}{a} > \dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

证 1 考虑函数 $f(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$，

则 $$f'(x) = \frac{1}{x} + \ln x - 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

当 $x > 1$ 时，$f''(x) > 0$，所以 $f'(x)$ 严格单增，

所以 $$f'(x) > f'(1) = 0, \qquad x > 1$$

从而 $f(x)$ 在 $[1, +\infty]$ 上严格单增.

$$f(x) > f(1) = 0, \qquad x > 1$$

取 $x = b/a$，得

$$\left(\frac{b}{a} + 1\right)\ln \frac{b}{a} - 2\left(\frac{b}{a} - 1\right) > 0$$

即 $$\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$$

适当改变欲证的不等式的形式，使之便于证明，这一思想要注意学习.

证 2 $\ln \dfrac{b}{a} = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{a+b-x}\right]$

令 $f(x) = 1/x$，则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内严格下凸.

所以 $$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geqslant f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), x_1, x_2 \in (0, +\infty)$$

所以 $$\ln \frac{b}{a} = \int_a^b \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2}\mathrm{d}x$$

$$> \int_a^b f\left(\frac{x + a + b - x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

用此法可以证明以下命题：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为严格凸函数，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

请注意理解左

$$= \int_a^b \frac{2}{a+b}\mathrm{d}x = \frac{2(b-a)}{a+b}$$

即
$$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$$

边证明中不等式严格成立的条件.

3.2.4 洛必达法则与未定型的极限问题

3-101 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$，　　2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$，　　4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{x^3}$

解 1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

在利用洛必达法则时，可以联合使用其它方法，以简化计算过程.

3)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{6x} = \frac{1}{2}$$

4) **解法 1**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x) - \tan x}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} = I_1 + I_2 + I_3$$

$\tan x \sim x(x\to 0)$
$\sin x \sim x(x\to 0)$.

$$I_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x) - \tan x}{\tan^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan t - t}{t^3} = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{t - \sin t}{t^3} = \frac{1}{6}$$

原式 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$

4) 解法 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x) - \sin(\tan x)}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x) - \sin(\sin x)}{x^3}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin\frac{\tan x - \sin x}{2}\cos\frac{\tan x + \sin x}{2}}{x^3}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\tan x - \sin x}{2}}{x^3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

利用加一项、减一项，并两次运用 3) 的结果及等价无穷小量的代换.

3-102 求 $I = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

解 $I \overset{\frac{"0"}{0}}{=} \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{[x - (1+x)\ln(1+x)]}{x^2(1+x)}$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\overset{\frac{"0"}{0}}{=} e\lim_{x\to 0}\frac{1 - 1 - \ln(1+x)}{2x} = -\frac{e}{2}$$

3-103 求 $I = \lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$

解 $I = \lim_{x\to 0} e^x\frac{xe^x + x - 2e^x + 2}{x^3}$

$$\overset{\frac{"0"}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x + xe^x + 1 - 2e^x}{3x^2}$$

$$\overset{\frac{"0"}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^x + xe^x - 2e^x}{6x} = \frac{1}{6}$$

先用 $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$ 代换，然后用洛必达法则.

3-104 求证：

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}+0$,　　　$(a,k$ 为常数$,a>1)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^\beta x}{x^\delta}=0$,　　　$(\delta,\beta$ 为常数$,\delta>0)$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}x^\delta|\ln x|^\beta=0$,　　$(\delta,\beta$ 为常数$,\delta>0)$

证　1) 当 k 为正整数时，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{k!}{a^x\ln^k a}=0$$

反复用洛必达法则，共 k 次.

当 k 为一般正数时，只要 $x\geqslant1$，就有

$$0\leqslant x^k\leqslant x^{[k]+1}$$

这里$[k]$是取整的意思.

夹逼法

而
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{[k]+1}}{a^x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^k}=0$$

这里利用了 1) 的结果.

当 $k\leqslant0$ 时，显然原式极限为 0.

所以
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0$$

2) 证法 1　令 $t=\ln x$，则 $x=e^t$，

所以　原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^\beta}{(e^\delta)t}=0$

利用2)的结果.

证法 2　直接用洛必达法则.

3) 令 $x=\dfrac{1}{t}$，

则　　原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln^\beta t}{t^\delta}=0$

3-105　求1) $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}\cot\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to0}(\cos\pi x)^{1/x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{arccot}x)^{\frac{1}{\ln x}}$

对分母直接用等价无穷小代换，比用洛必达法则容易.

解　1) 原式 $=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\tan\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)}$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}=\lim_{x\to1^-}\frac{2}{x}(1+x)=4.$$

2) 取对数后

对幂指函数形

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos\pi x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\pi\sin\pi x}{2x\cos\pi x}=-\frac{\pi^2}{2}$$

所以原式 $=e^{-\frac{\pi^2}{2}}$.

3) 取对数后，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\operatorname{arccot}x}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\operatorname{arccot}x}\cdot\frac{x}{1+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\arctan x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=-1$$

所以，原式 $=e^{-1}$

式的未定式求极限，一般先取对数.

当 $x\to+\infty$ 时，

$\frac{x}{1+x^2}\sim\frac{1}{x}$

3-106 求 1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}n(n^{\frac{1}{n}}-1)$

解 1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$=e^0=1$$

2) 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，而当 $n\to+\infty$ 时，$n^{\frac{1}{n}}-1\to 0$，

所以 $\ln[1+(n^{\frac{1}{n}}-1)]\sim n^{\frac{1}{n}}-1\quad(n\to\infty)$

所以 $$\lim_{n\to\infty}n(n^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}\ln[1+(n^{\frac{1}{n}}-1)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty$$

数列极限不能用洛必达法则求，但若相应的函数极限存在，则数列极限与之相等.

请参见数列极限1-42题，1-59题.

3-107 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$

解 因为 $$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t+t^2)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t+t^2}{t}=1$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1$

故 原式 $=e$

先化为函数极限. 利用变量代换及等价无穷小量代换.

请参见1-58题.

3-108 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$f'(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = A$. 证明 $f'(x_0)$ 存在且等于 A.

证 利用洛必达法则及导数定义.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1} = A$$

这就证明了 $f'(x)$ 存在且等于 A.

请叙述洛必达法则的条件.

3-109 设 $f(x)$ 的二阶导函数连续，$f(0) = 0$，定义

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$$

证明 $g(x)$ 的导函数连续.

证 $x \neq 0$ 时，

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

显然 $g'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$ 上均连续，

而 $$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$$

又 $$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= f'(0) = g(0).$$

所以 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，由 3-108 题知

$$g'(0) = \frac{f''(0)}{2}$$

即 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处也连续，故 $g'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

利用洛必达法则.

导数定义.

3-110 证明：若 $x \geqslant 0$，则有 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中 $\dfrac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x) = \dfrac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x) = \dfrac{1}{2}$.

证 由欲证的等式可直接解出

$$\theta(x) = \frac{2\sqrt{x+1}\sqrt{x} - 2x + 1}{4}$$

由于 $1 \leqslant 2\sqrt{x+1}\sqrt{x} - 2x + 1 \leqslant 2$，　　$(x \geqslant 0)$

由 $2ab \leqslant a^2 + b^2$.

故 $\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2}$

显然 $\lim\limits_{x \to 0} \theta(x) = \frac{1}{4}$.

最后我们考查另一个极限

$$\lim_{x \to +\infty} \theta(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 2x + 1}{4}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{2\frac{1}{t}(1+t)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{t} + 1}{4}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{2\frac{1}{t}(1+\frac{1}{2}t + o(t)) - \frac{2}{t} + 1}{4}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{2 + 2\frac{o(t)}{t}}{4} = \frac{1}{2}$$

$(1+t)^\mu = 1 + \mu t + o(t)$. 其中 $\lim\limits_{t \to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$

3-111 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(0) > 0, f(0) = 0, f'(0) = 0$，求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{xf(u)}{uf(x)}$，其中 u 是曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解 设 $x \neq 0$，由切线方程可解出

$$u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

容易得，当 x 充分小时，$0 < |u| < |x|$，且 u, x 同号，

在 $x = 0$ 的附近，$f''(0) > 0$，所以 $f(x)$ 是凸函数请画图看 u 与 x 的关系.

因为
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{f'(x)x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{f'(x) + f''(x)x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x} + f''(x)} = \frac{f''(0)}{2f''(0)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

注意导数的定义.

所以
$$\lim_{x \to 0} \frac{u}{x} = \lim_{x \to 0}\left(1 - \frac{f(x)}{f'(x)x}\right) = \frac{1}{2}$$

由泰勒公式：

$$f(u) = \frac{1}{2}f''(0)u^2 + o(u^2)$$

注意 $f(0) = f'(0) = 0$

所以
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(u)}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2}f''(0)u^2 + o(u^2)}{\frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)}$$

分子、分母同除以 x^2. 并注意到 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{o(u^2)}{x^2} = 0$.

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{u}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(u)}{uf(x)} = \frac{1}{2}$

3-112 求 $a,b,c(c>0)$ 使

$$\lim_{x\to\infty}[(x^5+x^4+1)^c - ax - b] = 0$$

解 若 $c > 1/5$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^5+x^4+1)^c}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{(x^2+x^4+1)^c}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = +\infty$$

若 $0 < c < \frac{1}{5}$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^5+x^4+1)^c}{x^{5c}} = 1$

所以

$$\lim_{x\to+\infty} x^{5c}\left[\frac{(x^5+x^4+1)^c}{x^{5c}} - ax^{1-5c} - \frac{b}{x^{5c}}\right]$$

$$= \begin{cases} +\infty, & a \leqslant 0 \\ -\infty, & a > 0 \end{cases}$$

故 c 只可能为 1/5. 这时必有

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^5+x^4+1)^{\frac{1}{5}} - ax - b]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}[x(1+x^{-1}+x^{-5})^{\frac{1}{5}} - ax - b]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\{[x(1+\frac{1}{5}(x^{-1}+x^{-5}) + o(x^{-1}+x^{-5})] - ax - b\}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x - ax + \frac{1}{5} - b\right)$$

$$= 0$$

所以 $a = 1, b = c = \frac{1}{5}$

求未定型的极限,除了洛必达法则,用泰勒公式有时更方便.

这里用了泰勒公式.

注意题给条件.

3-113 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x) - x^2}{\sin^4 x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x) - x^2}{x^4}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin^4 x + o(\sin^4 x) - x^2}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} - \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x) - 2x^2}{2x^4} - \frac{1}{2}$$

$\ln(1+t)$

$= t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$,

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{o(t^2)}{t^2} = 0$

本题也可用洛必达法则来解.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2!}(2x)^2 - \frac{1}{4!}(2x)^4 + o(x^4) - 2x^2}{2x^4} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{7}{6}$$

3-114 确定常数 a,b,使 $x\to 0$ 时,$f(x) = e^x - \frac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的三阶无穷小量.

解 即要求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$ 存在且不为零.

当 $x\to 0$ 时,

$$f(x) = e^x - (1-ax)(1+bx)^{-1}$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) -$$
$$(1+ax)(1 - bx + b^2x^2 - b^3x^3 + o(x^3))$$
$$= (1-a+b)x + (\frac{1}{2} + ab - b^2)x^2 +$$
$$(\frac{1}{6} - ab^2 + b^3)x^3 + o(x^3).$$

依题意,令 $1 - a + b = 0, \frac{1}{2} + ab - b^2 = 0$

得 $$a = \frac{1}{2},\quad b = -\frac{1}{2}$$

这时 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{12}$$

所以取 $a = 1/2, b = -1/2$,那么当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 为 x 的三阶无穷小量.

本题也可用洛必达法则来解.

3-115 求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,两边分别平行于坐标轴的面积最大的矩形($a, b > 0$).

解 1 设所求矩形在第一象限的顶点坐标为(x, y).显然矩形面积为

$$S(x) = 4xy = 4bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\qquad 0 < x < a$$

由 $$S'(x) = 4b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - \frac{4bx^2}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

得驻点 $x = \sqrt{2}a/2$, 而

注意 $S'(x)$ 的定义域.

$S'(x) > 0,\qquad$ 当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 时

$S'(x) < 0,\qquad$ 当 $\frac{\sqrt{2}a}{2} < x < a$ 时

所以，$x = \sqrt{2}a/2$ 为 $S(x)$ 的最大值点. 因而所求矩形在第一象限的顶点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$，最大矩形的面积为 $2ab$.

参数选得好，计算就简单.

解 2 设椭圆的参数方程为

$$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta.$$

矩形在第一象限的项点坐标为 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$. 则矩形的面积为

$$S(\theta) = 2ab\sin 2\theta,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

注意 $S'(\theta)$ 的定义域.

由
$$S'(\theta) = 4ab\cos 2\theta$$

注意 $S'(\theta)$ 的定义域.

得驻点 $\theta = \pi/4$,

当 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 时，$S'(\theta) > 0$

当 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，$S'(\theta) < 0$

所以 $\theta = \pi/4$ 是 $S(\theta)$ 的最大值点. 所求矩形在第一象限的项点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$，最大矩形的面积为 $2ab$.

初等解法.

解 3 设矩形在第一象限的顶点坐标为 (x, y)，则矩形的面积为

$$S = 4ab\frac{x}{a}\frac{y}{b} \leqslant 2ab\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] = 2ab$$

且等号仅当 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 时成立. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \end{cases} \qquad (x, y > 0)$$

可得 $x = \sqrt{2}a/2,\ y = \sqrt{2}b/2$. 故所求矩形在第一象限的顶点坐标为 $(\sqrt{2}a/2, \sqrt{2}b/2)$.

3-116 求椭圆 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ 的两条对称轴的方程 $(A > 0, 4AC - B^2 > 0, A \neq C)$.

解 由于该方程表示的椭圆的中心为原点，所以实质上就是求椭圆距原点的最远、最近点. 所给椭圆用极坐标方程表示

将原问题转化为求最大、最小值

$$r^2 = \frac{1}{A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta}$$

的问题.

记上式右边的函数为 $f(\theta)$,

则 $f'(\theta) = -f^2(\theta)[(C-A)\sin2\theta + B\cos2\theta]$

令 $f'(\theta) = 0$,解得

$$\tan2\theta = \frac{B}{A-C}$$

注意 $f'(\theta)$ 的定义域.

所以驻点为

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\left(\arctan\frac{B}{A-C} + \pi\right)$$

故两条对称轴的方程分别为

$$y - x\tan\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C}\right) = 0$$

及 $$y + x\cot\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C}\right) = 0$$

3-117 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 (x_0,y_0) 处相切,且在这一点曲线 $y=f(x)$ 的曲率 k_1 比 $y=g(x)$ 的曲率 k_2 大,$f''(x_0)$,$g''(x_0)>0$. 问在 (x_0,y_0) 附近,$y=f(x)$ 是在 $y=g(x)$ 的上方还是下方.

联系曲率的几何意义及曲率公式来解.

解 显然

$$y_0 = f(x_0) = g(x_0),\ f'(x_0) = g'(x_0)$$

又 $$k_1 = \frac{|f''(x_0)|}{(1+f'^2(x_0))^{3/2}},\qquad k_2 = \frac{|g''(x_0)|}{(1+g'^2(x_0))^{3/2}}$$

$$k_1 > k_2$$

注意题给条件.

所以 $|f''(x_0)| > |g''(x_0)|$

所以 $f''(x_0) > g''(x_0)$

令 $F(x) = f(x) - g(x)$

则 $F(x_0) = 0,\ F'(x_0) = 0,\ F''(x_0) > 0$

所以,x_0 是 $F(x)$ 的极小值点. 即存在 $\delta>0$,当 $|h|<\delta$ 时,

$$F(x_0+h) \geqslant F(x_0) = 0$$

即 $$f(x_0+h) \geqslant g(x_0+h)$$

故在 (x_0,y_0) 附近,曲线 $y=f(x)$ 在曲线 $y=g(x)$ 的上方.

第 4 章　不定积分

4.1 客观题

4.1.1 填空题

4-1 $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx = \underline{\quad \frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C \quad}$

解 $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{-d\cos x}{\cos x\sqrt{\cos x}}$

$= \frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$

本题中出现$\sqrt{\cos x}$，应先凑$d\cos x$.

4-2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \underline{\quad \arcsin\frac{x-2}{2}+C \text{ 或 } 2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C \quad}$

解 1 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$

$= \arcsin\frac{x-2}{2}+C$

解 2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$

$= \int \frac{2d\sqrt{x}}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$

本题解 1 的关键是在根号里面配方.

4-3 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \underline{\quad -2\arctan\sqrt{1-x}+C \quad}$

解 1 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2d\sqrt{1-x}}{1+(\sqrt{1-x})^2}$

$= -2\arctan\sqrt{1-x}+C$

解 2 令$\sqrt{1-x}=t$,则

$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2t}{(1+t^2)t}dt$

$= -2\int \frac{dt}{1+t^2}$

解 1 主要是利用 $\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2d\sqrt{1-x}$.

$= -2\arctan t + C$

$= -2\arctan\sqrt{1-x} + C$

4-4 $\int \frac{\ln x - 1}{x^2}\mathrm{d}x =$ $\underline{\quad -\frac{\ln x}{x} + C \quad}$

本题主要是用分部积分法.

解 $\int \frac{\ln x - 1}{x^2}\mathrm{d}x = -\int (\ln x - 1)\mathrm{d}\,\frac{1}{x}$

$= -\frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

$= -\frac{\ln x - 1}{x} - \frac{1}{x} + C$

$= -\frac{\ln x}{x} + C$

4-5 $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x =$ $\underline{\quad -\cot x\ln\sin x - \cot x - x + C \quad}$

解 由分部积分法知

$\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \ln\sin x\mathrm{d}\cot x$

$= -\cot x\ln\sin x + \int \cot x\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$

$= -\cot x\ln\sin x + \int \cot^2 x\mathrm{d}x$

$= -\cot x\ln\sin x + \int (\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$= -\cot x\ln\sin x - \cot x - x + C$

4-6 $\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x =$ $\underline{\quad (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C \quad}$

被积函数仅仅是一个反三角函数的积分，一般都是用分部积分法求解.

解 1 由分部积分法知

$\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x = x\arctan\sqrt{x} - \int \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$

$= x\arctan\sqrt{x} - \int \frac{(x+1)-1}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x}$

$= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C$

$= (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

解 2 令 $\arctan\sqrt{x} = t$，则 $x = \tan^2 t$，

$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan^2 t$

原式 $= \int t\mathrm{d}\tan^2 t$

$= t\tan^2 t - \int \tan^2 t\mathrm{d}t$

$$=t\tan^2 t-\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t$$
$$=t\tan^2 t-\tan t+t+C$$
$$=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C$$
$$=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$$

4-7 $\int xf''(x)\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad xf'(x)-f(x)+C\quad}$.

被积函数中出现 $f(x)$ 的导数的积分一般都是用分部积分.

解 $\int xf''(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f'(x)$

$$=xf'(x)-\int f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=xf'(x)-f(x)+C$$

4-8 $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=\underline{\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C}$

解 $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-6)+8}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+8\int\frac{\mathrm{d}(x-3)}{(x-3)^2+4}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C.$$

4-9 $\int|x|\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad\frac{1}{2}x|x|+C\quad}$

解 1 由于 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

所以

$$\int|x|\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+C_1, & x\geqslant 0\\ -\frac{x^2}{2}+C_2, & x<0\end{cases}$$

这种分段函数不定积分应特别注意,分段分别积分后一定要调整常数 C_1 和 C_2 使积出来的分段函数在分界点连续.

由于 $|x|$ 是连续函数,则其原函数必定存在,从而原函数在 $x=0$ 至少应连续,从而知

$C_1=C_2$,不妨令 $C_1=C_2=C$,则

$$\int|x|\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+C, & x\geqslant 0\\ -\frac{x^2}{2}+C, & x<0\end{cases}$$
$$=\frac{1}{2}x|x|+C$$

解 2 的好处在于不需调整任意常

解2 由于$|x|$连续，则$F(x)=\int_0^x |t|\mathrm{d}t$就是$|x|$的一个原函数，从而

$$\int |x|\mathrm{d}x = F(x)+C$$

而 $$F(x)=\int_0^x |t|\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x t\mathrm{d}t, & x\geqslant 0\\ \int_0^x (-t)\mathrm{d}t, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & x\geqslant 0\\ -\dfrac{x^2}{2}, & x<0\end{cases}$$

数.

4-10 设$f'(\ln x)=(x+1)\ln x$，则$f(x)=$ $\underline{e^x(x-1)+\dfrac{x^2}{2}+C}$.

解 令$\ln x=t$，则

$$f'(t)=(e^t+1)t$$

$$f(t)=\int (e^t+1)t\mathrm{d}t=e^t(t-1)+\frac{t^2}{2}+C.$$

此类问题一般先作变量代换，然后积分便可求解.

4-11 设$\int f'(\sqrt{x})\mathrm{d}x=x(e^{\sqrt{x}}+1)+C$，则$f(x)=$ $\underline{\dfrac{e^x}{2}(x-1)+e^x+x+C}$.

解 由$\int f'(\sqrt{x})\mathrm{d}x=x(e^{\sqrt{x}}+1)+C$ 知

$$f'(\sqrt{x})=[x(e^{\sqrt{x}}+1)]'=e^{\sqrt{x}}+1+\frac{\sqrt{x}}{2}e^{\sqrt{x}}$$

令$\sqrt{x}=t$，则$f'(t)=\dfrac{t}{2}e^t+e^t+1$

$$f(t)=\int \left(\frac{t}{2}e^t+e^t+1\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{e^t}{2}(t-1)+e^t+t+C$$

则$f(x)=\dfrac{e^x}{2}(x-1)+e^x+x+C$

这里应特别注意$\int f'(\sqrt{x})\mathrm{d}x\neq f(\sqrt{x})+C$，由于$f'(\sqrt{x})$表示$f(\sqrt{x})$对$\sqrt{x}$求导，不是对$x$求导.

4-12 设$\int \dfrac{\sin x}{f(x)}\mathrm{d}x=\arctan(\cos x)+C$，则$\int f(x)\mathrm{d}x=$ $\underline{-\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x\right)+C}$

解 由原题知

$$\frac{\sin x}{f(x)} = (\arctan(\cos x))' = \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$$

这一步是此类问题的关键.

则 $f(x)=-(1+\cos^2 x)$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = -\int (1+\cos^2 x)\mathrm{d}x$$
$$= -(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x)+C$$

4-13 设 $\sin x^2$ 为 $f(x)$的一个原函数,则 $\int x^2 f(x)\mathrm{d}x=$ $\underline{x^2\sin x^2+\cos x^2+C}$.

解 1 由于 $\sin x^2$ 为 $f(x)$的一个原函数,则

$$f(x) = (\sin x^2)' = 2x\cos x^2$$

则 $\int x^2 f(x)\mathrm{d}x = 2\int x^3\cos x^2\mathrm{d}x$

$= \int x^2 \mathrm{d}\sin x^2$

$= x^2\sin x^2 - 2\int x\sin x^2\mathrm{d}x$

$= x^2\sin x^2+\cos x^2+C.$

解 2 由于 $\sin x^2$ 为 $f(x)$的原函数,则

$\int x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}\sin x^2$

$= x^2\sin x^2 - 2\int x\sin x^2\mathrm{d}x$

$= x^2\sin x^2+\cos x^2+C.$

4-14 已知 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,且 $f(x)=\frac{xF(x)}{1+x^2}$,则 $f(x)=$ $\underline{\frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}}$.

求解此类问题要求对原函数的概念要很清楚.

解 由于 $F(x)$是 $f(x)$的原函数,则

$F'(x)=f(x)$,代入 $f(x)=\frac{xF(x)}{1+x^2}$得

$F'(x)=\frac{xF(x)}{1+x^2}$

$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{x}{1+x^2}$

两边积分得 $\ln F(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C_1$

$F(x)=C\sqrt{1+x^2}$

$$f(x)=\frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}$$

4.1.2 单项选择题

4-15 设 $f(x)$是连续函数,$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则下列结论正确的是( ). (A)

(A) 当 $f(x)$是奇函数时,$F(x)$必是偶函数

(B) 当 $f(x)$是偶函数时,$F(x)$必是奇函数

(C) 当 $f(x)$是周期函数时,$F(x)$必是周期函数

(D) 当 $f(x)$是单调增函数时,$F(x)$必是单调增函数

解 1 排除法,对(B)(C)(D)举反例,如

(B) $f(x)=\cos x, F(x)=\sin x+1$;

(C) $f(x)=\cos x+1$, $F(x)=\sin x+x$;

(D) $f(x)=x$, $F(x)=\frac{1}{2}x^2$.

所以(B)(C)(D)都不对,应选(A).

解 1 采用排除法,这是作选择题时一种常用方法.

解 2 直接法,由于 $f(x)$连续,$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,若 $f(x)$是奇函数,则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C\xlongequal{t=-u}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=F(x)$,从而 $F(x)$是偶函数,应选(A).

4-16 若 $f(x)$的导函数是 $\sin x$,则 $f(x)$有一个原函数为( ). (B)

(A) $1+\sin x$ (B) $1-\sin x$

(C) $1+\cos x$ (D) $1-\cos x$

解 1 由原题知 $f'(x)=\sin x$,则

$f(x)=-\cos x+C_1$

$\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+C_1x+C_2$

当 $C_1=0, C_2=1$,右端为 $1-\sin x$,故应选(B).

解 2 利用求导的方法,由题意知 $f'(x)=\sin x$,若所选项记为 $F(x)$,则应有 $F'(x)=f(x)$.从而 $F''(x)=f'(x)=\sin x$,又$(1-\sin x)''=\sin x$,所以选(B).

4-17 $\int e^{-|x|}\mathrm{d}x=$( ). (B)

本题与题 4-9 类似.

(A) $\begin{cases}-e^{-x}+C, & x\geqslant 0\\ e^x+C, & x<0\end{cases}$

(B) $\begin{cases}-e^{-x}+C, & x\geqslant 0\\ e^{x}-2+C, & x<0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}-e^{-x}+C_1, & x\geqslant 0\\ e^{x}+C_2, & x<0\end{cases}$

(D) $\begin{cases}e^{x}+C, & x\geqslant 0\\ -e^{-x}+C, & x<0\end{cases}$

应选(B).

4-18 若$\int f'(x^3)\mathrm{d}x=x^3+C$,则$f(x)=(\quad)$. (C)

本题与题 4-11 类似.

(A) $x+C$ (B) x^3+C

(C) $\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$ (D) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

解 由$\int f'(x^3)\mathrm{d}x=x^3+C$知

$f'(x^3)=3x^2$

令$x^3=u$,则$f'(u)=3u^{\frac{2}{3}}$

$f(u)=3\int u^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}u=\frac{9}{5}u^{\frac{5}{3}}+C$

所以应选(C).

4.2 非客观题

4.2.1 分项积分法

求下列不定积分:

4-19 $\int x\sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 原式$=\frac{1}{9}\int(1-3x-1)\sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}(1-3x)$

$$=\frac{1}{9}\int(1-3x)^{4/3}\mathrm{d}(1-3x)-\frac{1}{9}\int(1-3x)^{1/3}\mathrm{d}(1-3x)$$

$$=\frac{1}{21}(1-3x)^{7/3}-\frac{1}{12}(1-3x)^{4/3}+C$$

解1采用了拆项凑微分这样一种常用的积分方法.

解 2 本题也可用第二类换元法,先有理化,令$1-3x=t^3$,$\mathrm{d}x=-t^2\mathrm{d}t$.

遇到根式中是一次多项式时,也可先通过适当的换

$$\text{原式}=-\frac{1}{3}\int(1-t^3)t^2\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{3}(\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7})+C$$
$$=\frac{1}{21}(1-3x)^{7/3}-\frac{1}{12}(1-3x)^{4/3}+C$$

元有理化被积函数,然后再积分.

4-20 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\mathrm{d}x$

解 1

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt[3]{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\int(x^2+1-1)\sqrt[3]{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{4/3}\mathrm{d}(1+x^2)-\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{1/3}\mathrm{d}(1+x^2)$$
$$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{7/3}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{4/3}+C.$$

这里仍采用了拆项凑微分的方法.

解 2 像上题一样 令 $1+x^2=u^3$,则 $x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}u^2\mathrm{d}u$.

$$\text{原式}=\frac{3}{2}\int(u^3-1)u^3\mathrm{d}u$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{u^7}{7}-\frac{u^4}{4}\right)+C$$
$$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{7/3}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{4/3}+C$$

4-21 $\int\frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x$

解 1 $\text{原式}=\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}(1+x^3)$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{x^3+1-1}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}(1+x^3)$$
$$=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{2/3}\mathrm{d}(1+x^3)-\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{-1/3}\mathrm{d}(1+x^3)$$
$$=\frac{1}{5}(1+x^3)^{5/3}-\frac{1}{2}(1+x^3)^{2/3}+C$$

这里又一次用到分项凑微分的方法.

要学会用微分去验证所得不定积分的结果是否正确.

解 2 令 $1+x^3=u^3$,则 $x^2\mathrm{d}x=u^2\mathrm{d}u$

$$\text{原式}=\int\frac{(u^3-1)u^2\mathrm{d}u}{u}$$

$$= \int (u^4 - u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{5}(1 + x^3)^{5/3} - \frac{1}{2}(1 + x^3)^{2/3} + C$$

4-22 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \mathrm{e}^x}$

解 1 原式 $= \int \frac{1 + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

$$= \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

$$= x - \int \frac{\mathrm{d}(1 + \mathrm{e}^x)}{1 + \mathrm{e}^x}$$

$$= x - \ln(1 + \mathrm{e}^x) + C$$

解 1 采用拆项凑微分的方法.

解 2 原式分子分母同乘以 e^{-x}

则 原式 $= \int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1}\mathrm{d}x$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x} + 1)}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$$

$$= -\ln(\mathrm{e}^{-x} + 1) + C$$

解 2 是给分子分母分别乘以 e^{-x}，这是处理指数函数积分的有效方法.

4-23 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2 + 2\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$

解 原式 $= \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 2}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 2)}{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 2} - \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x + 1)}{1 + (\mathrm{e}^x + 1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 2) - \arctan(\mathrm{e}^x + 1) + C$$

本题同时采用了上题的两种方法. 即分子分母同乘 e^x，然后拆项凑微分.

4-24 $\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{1 + x^4}}\mathrm{d}x$

解 1

原式 $= \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^4}}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1 + x^4}}$

本题的关键是拆项，然后对第二项利用倒代换的思想.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1+(x^2)^2}} + \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4}) - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4}) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\right) + C$$

解 2　原式 $= \operatorname{sgn}x\int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx$

$$= \operatorname{sgn}x\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx$$

$$= \operatorname{sgn}x\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}$$

$$= \operatorname{sgn}x\ \ln\left(x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right) + C$$

解 2 关键是利用了 $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$

4-25　$\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$

解　原式 $= \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^3 x}dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx + \int \cot x\,\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + \int \frac{1}{\tan x}d\operatorname{tg}x$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\tan x| + C$$

本题关键是利用 $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ 拆项. 这也是处理三角有理式不定积分的一种常用方法.

4-26　$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

解:　原式 $= \int \frac{x^4-x^2+1+x^2}{x^6+1}dx$

$$= \int \frac{(x^2)^2-x^2+1}{(x^2)^3+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{1+(x^3)^2}$$

拆项积分法也是处理有理函数积分的一种常用方法.

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{3}\arctan x^3$$

$$= \arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3 + C$$

4.2.2 换元积分法

求下列不定积分.

4-27 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

解 原式 $= 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}(1+\sqrt{x})}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

$$= 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$$

本题采用凑微分法. 形如 $f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 的被积式一般都可凑 $f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$ 的形式.

4-28 1) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$

2) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}\mathrm{d}x$

解 1) 原式 $= \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\sin^2 x}{1+(\sin^2 x)^2}$$

$$= \arctan(\sin^2 x) + C$$

注意: $\sin 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin^2 x$

解 2) 原式 $= \int \frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{4-\cos^4 x}}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{-\mathrm{d}\cos^2 x}{\sqrt{4-(\cos^2 x)^2}}$$

$$= -\arcsin\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right) + C$$

$\sin 2x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\cos^2 x$

4-29 $\int \frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$

解 原式 $= \int \sec^2 x\,\mathrm{d}\tan x$

$$= \int (1+\tan^2 x)\mathrm{d}\tan x$$

$\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan x$

$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

4-30 $\int \frac{\tan x}{\ln\cos x}\mathrm{d}x$

$\tan x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\ln\cos x$

解 原式 $= -\int \frac{\mathrm{d}\ln\cos x}{\ln\cos x}$

$$= -\ln|\ln\cos x| + C$$

4-31 $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}\mathrm{d}x$

原式 $= \int \frac{\ln\tan x}{\tan x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\ln\tan x}{\mathrm{tg}x}\mathrm{d}\tan x$$

$$= \int \ln\tan x\mathrm{d}\ln\tan x$$

$$= \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C$$

本题被积式中出现了 $\ln\tan x$，所以应先凑 $\mathrm{d}\tan x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$

4-32 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

解 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{e^x\sqrt{1+e^{-2x}}}$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}e^{-x}}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}$$

$$= -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + C$$

本题也可令 $\sqrt{1+e^{2x}} = u$ 换元求解.

4-33 $\int \frac{2^x3^x}{9^x - 4^x}\mathrm{d}x$

解 原式 $= \int \frac{2^x3^x}{(3)^{2x} - (2)^{2x}}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\ln\frac{2}{3}}\mathrm{d}\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}}$$

$$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)}\ln\left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right| + C$$

这种以指数函数为基本元素且底数不尽相同的被积式一般首先要将被积式化为同底数幂的形式.

4-34 $\int \frac{\ln 2x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$

解

$$原式 = \int \frac{\ln x+\ln 2}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}\ln x$$

$$= \int \frac{\ln x+1+\ln 2-1}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}(1+\ln x)$$

$$= \int (1+\ln x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+\ln x)+(\ln 2-1)\int (1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+\ln x)$$

$$= \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+2(\ln 2-1)(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}+C$$

形如：$f(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 的被积函数一般都将$\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}\ln x$.

4-35 $\int \frac{1+\ln x}{2+(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$

解 $$原式 = \int \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{2+(x\ln x)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x\ln x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$(1+\ln x)\mathrm{d}x$
$=\mathrm{d}(x\ln x)$

4-36 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

解 1 $$原式 = \int \frac{(1-\ln x)\mathrm{d}x}{x^2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}+C$$

$$= \frac{x}{x-\ln x}+C$$

$\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$
$=\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

解 2 $$原式 = \int \frac{1+\ln\frac{1}{x}}{\left(x+\ln\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1+\ln\frac{1}{x}}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

本题的关键仍然是利用：$(1+\ln x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x\ln x)$.
当然本题中用到的形式是
$\left(1+\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\,\frac{1}{x}$

$$= -\int \frac{1+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\frac{1}{x}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}} + C$$

$$= \frac{x}{x-\ln x} + C$$

$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)$.

4-37 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^4}}$

解 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}}$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\right) + C$$

$\frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

4-38 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

解 原式 $= \int \frac{\cos x}{\sqrt{2\cos^2 x + \sin^2 x}}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

本题从分母的根式中提出 $\frac{1}{\cos x}$，并利用 $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x$.

4-39 $\int \frac{(x+1)}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(xe^x)}{xe^x(1+xe^x)}$$

本题由于分母中出现了 xe^x，而 $\mathrm{d}(xe^x) = (1+x)e^x\mathrm{d}x$ 所以立即想到分子分母同乘 e^x.

$$= \int \frac{(1+xe^x)-xe^x}{xe^x(1+xe^x)}d(xe^x)$$

$$= \ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C.$$

4-40 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, $(a>0)$

解 令 $x = a\sin t$，则 $dx = a\cos t dt$

$$原式 = \int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos t dt$$

$$= a^2\int \sin^2 t dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t)dt$$

$$= \frac{1}{2}a^2 t - \frac{1}{4}a^2\sin 2t + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

被积式中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的积分一般都可用 $x = a\sin t$ 或 $x = a\cos t$ 换元，目的是有理化被积表达式.

4-41 $\int \frac{dx}{2x+\sqrt{1-x^2}}$

解 令 $x = \sin t$，则 $dx = \cos t dt$.

$$原式 = \int \frac{\cos t}{2\sin t+\cos t}dt$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{(2\sin t+\cos t)+2(2\cos t-\sin t)}{2\sin t+\cos t}dt$$

$$= \frac{1}{5}(t+2\ln|2\sin t+\cos t|)+C$$

$$= \frac{1}{5}(\arcsin x + 2\ln|2x+\sqrt{1-x^2}|)+C$$

本题分母中出现 $\sqrt{1-x^2}$ 所以先令 $x = \sin t$.

4-42 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$

解 令 $x = a\tan t$，则 $dx = a\sec^2 t dt$

$$原式 = \int \frac{a\sec^2 t}{a^2\tan^2 t\cdot a\sec t}dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$= -\frac{1}{a^2\sin t} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2 x} + C$$

对被积式中含有 $\sqrt{a^2+x^2}$ 的不定积分一般可令：$x = a\tan t$.

4-43 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$

解 1 令 $x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 t dt$.

$$\text{原式}=\int \tan^5 t\sec t dt$$
$$=\int \tan^4 t d\sec t$$
$$=\int (\sec^2 t-1)^2 d\sec t$$
$$=\frac{1}{5}\sec^5 t-\frac{2}{3}\sec^3 t+\sec t+C$$
$$=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C$$

由于被积式中含有$\sqrt{1+x^2}$，所以解1是很容易想到的一种常用方法.

解 2 令$\sqrt{1+x^2}=t$,则 $x^2=t^2-1, xdx=tdt$.

$$\text{原式}=\int (t^2-1)^2 dt$$
$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$
$$=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C$$

解 2 直接令$\sqrt{1+x^2}=t$最为简单.

解 3 原式$=\int x^4 d\sqrt{1+x^2}$

$$=x^4\sqrt{1+x^2}-4\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$$
$$=x^4\sqrt{1+x^2}-4\int x(x^2+1-1)\sqrt{1+x^2}dx$$
$$=x^4\sqrt{1+x^2}-2\int (1+x^2)^{3/2}d(1+x^2)$$
$$+2\int (1+x^2)^{1/2}d(1+x^2)$$
$$=x^4\sqrt{1+x^2}-\frac{4}{5}(1+x^2)^{5/2}+\frac{4}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$$

解3利用分部积分逐次将 x^5 的次数降低以达到求解的目的.

4-44 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 1 令 $x=\sec t$，则 $dx=\sec t\tan t dt$

$$\text{原式}=\int \frac{\sec t\tan t}{\sec t|\tan t|}dt$$
$$=\pm\int dt$$
$$=|t|+C$$

对被积式中含有$\sqrt{x^2-a^2}$ 的不定积分一般都可作变换：

$x=a\sec t$.或 $x=$

$$= \left|\arccos\frac{1}{x}\right| + C$$

解 2　令 $x = \mathrm{ch}t$，则 $\mathrm{d}x = \mathrm{sh}t\mathrm{d}t$.

$$\text{原式} = \int\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t\,\mathrm{sh}t}\mathrm{d}t$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}t}$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sh}t}{1+\mathrm{sh}^2t}$$

$$= \arctan(\mathrm{sh}t) + C$$

$$= \arctan\sqrt{x^2-1} + C$$

解 3　令 $\sqrt{x^2-1} = t$，则 $x^2 = 1 + t^2$，$x\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$

$$\text{原式} = \int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= \arctan t + C$$

$$= \arctan\sqrt{x^2-1} + C$$

解 4　令 $x = \frac{1}{x}$，则 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

$$\text{原式} = \mp\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \mp\arcsin t + C$$

$$= \begin{cases} -\arcsin\dfrac{1}{x} + C_1, & x > 1 \\ \arcsin\dfrac{1}{x} + C_2, & x < -1 \end{cases}$$

4-45　$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$

解 1　$\displaystyle\text{原式} = \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

$$= 2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

$$= 2\arcsin\sqrt{x} + C$$

$a\mathrm{ch}t$.

解 1、解 2 是这类问题的一般方法. 解 3、解 4 是特殊方法. 其中解 4 事实上是倒数代换.

不定积分的题目大都能一题多解，本题给出五种解法，其中解 1、解 2、解 3 是常用方法.

比较解 1、解 2 和解 4 的结果可得反三角函数恒等式

解 2 原式$=\int \dfrac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$=\arcsin(2x-1)+C$

解 3 原式$=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$=\int \mathrm{d}t$ （令 $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t$）

$=t+C$

$=\arcsin(2x-1)+C$

解 4 令$\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=u$

原式$=\int \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$

$=2\int \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$

$=2\arctan u+C$

$=2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}+C$

解 5 易求得被积函数$\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的定义域为$0<x<1$,则可令$x=\sin^2 t$.

原式$=\int 2\mathrm{d}t$

$=2t+C$

$=2\arcsin\sqrt{x}+C$

$\arcsin\sqrt{x}=\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)+\dfrac{\pi}{4}$.

用微分去验算积分的结果.

4-46 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$

解 1 令$\sqrt{1+\mathrm{e}^x}=u$，则 $x=\ln(u^2-1)$.

原式$=2\int \dfrac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u$

$=\ln\dfrac{u-1}{u+1}+C$

$=\ln\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C$

由于被积式中只出现了$\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$,所以不妨设:$\sqrt{1+\mathrm{e}^x}=u$,即解 1、解 2 独特简洁是种好方法.

解2 原式 $=\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x/2}\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}}$

$$=\int \frac{\mathrm{e}^{-x/2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1+(\mathrm{e}^{-x/2})^2}}$$

$$=-2\int \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{1+(\mathrm{e}^{-x/2})^2}}$$

$$=-2\ln(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}})+C$$

4.2.3 分部积分法

求下列不定积分：

4-47 $\int x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

对被积式为指数函数与幂函数相乘的不定积分一般都先把指数函数凑进微分号，然后分部积分. 当然这种问题也可用待定系数法.

解1 原式 $=\int x^3\mathrm{d}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$=\int x^3\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=x^3\mathrm{e}^x-3\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=x^3\mathrm{e}^x-3x^2\mathrm{e}^x+6\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=x^3\mathrm{e}^x-3x^2\mathrm{e}^x+6x\mathrm{e}^x-6\mathrm{e}^x+C$$

解2 用待定系数法，不难看出可设

$$\int x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)\mathrm{e}^x+C$$

两边求导得

$$x^3\mathrm{e}^x=[x^3+(a_2+3)x^2+(a_1+2a_2)x+(a_0+a_1)]\mathrm{e}^x$$

从而 $a_2=-3, a_1=6, a_0=-6.$

$$\text{原式}=\mathrm{e}^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$$

4-48 $\int x\tan^2x\mathrm{d}x$

三角函数与幂函数相乘先将三角函数凑进微分号.

解 原式 $=\int x(\sec^2x-1)\mathrm{d}x$

$$=\int x\mathrm{d}\tan x-\frac{1}{2}x^2$$

$$=x\tan x-\frac{1}{2}x^2-\int \tan x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+x\tan x+\ln|\cos x|+C$$

4-49 $\int(1+x^2)^2\cos x\mathrm{d}x$

解 1 原式 $=\int(1+x^2)^2\mathrm{d}\sin x$

$$= (1+x^2)^2\sin x - 4\int x(1+x^2)\sin x\mathrm{d}x$$

$$= (1+x^2)^2\sin x + 4\int x(1+x^2)\mathrm{d}\cos x$$

$$= (1+x^2)^2\sin x + 4x(1+x^2)\cos x - 4\int x(1+3x^2)\cos x\mathrm{d}x$$

$$= (1+x^2)^2\sin x + 4x(1+x^2)\cos x - 4\int(1+3x^2)\mathrm{d}\sin x$$

$$= (1+x^2)^2\sin x + 4x(1+x)^2\cos x - 4(1+3x^2)\sin x + 24\int x\sin x\mathrm{d}x$$

$$= (4x^3-20x)\cos x + (x^4-10x^2+21)\sin x + C$$

解1采用分部积分法，是处理这种多项式与正余弦函数乘积的不定积分的一般方法.但在多项式次数较高时分部积分需多次，较繁.这时，解2是行之有效的，即采用待定系数法.

解 2 用待定系数法.这里可设，

$$\int(1+x^2)^2\cos x\mathrm{d}x = (a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)\cos x + (x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)\sin x + C$$

两边求导得：

$$(1+x^2)\cos x = [x^4+b_3x^3+(b_2+3a_3)x^2+(b_1+2a_2)x+(b_0+a_1)]\cos x + [(4-a_3)x^3+(3b_3-a_2)x^2+(2b_2-a_1)x+(b_1-a_0)]\sin x$$

解得：$a_3=4,\quad b_3=0,\quad a_2=0,\quad b_2=-10$

$a_1=-20,\quad b_1=0,\quad a_0=0,\quad b_0=21$

故　原式 $=(4x^3-20x)\cos x+(x^4-10x^2+21)\sin x+C$

4-50 $\int\frac{\ln x}{(x-2)^2}\mathrm{d}x$

解 原式 $=-\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-2}\right)$

$$= \frac{1}{2-x}\ln x + \int\frac{\mathrm{d}x}{x(x-2)}$$

$$= \frac{1}{2-x}\ln x + \frac{1}{2}\int\frac{x-(x-2)}{x(x-2)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2-x}\ln x + \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{2}{x}\right| + C$$

对数函数与幂函数相乘先把幂函数凑进微分号.

4-51 $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$

解 原式 $= -\int \arcsin x \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} + \operatorname{sgn}x \cdot \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \operatorname{sgn}x\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \operatorname{sgn}x\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right| + C$$

反三角函数与幂函数相乘先把幂函数凑入微分号.

4-52 $\int \arctan(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$

解 1 原式 $= x\arctan(1+\sqrt{x}) - \int \frac{x}{1+(1+\sqrt{x})^2}\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$

$$= x\arctan(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+2}\mathrm{d}x$$

令 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2, \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+2\sqrt{x}+2}\mathrm{d}x = \int \frac{2t^2}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t$$

$$= 2t - 2\ln(t^2+2t+2) + C$$

原式 $= x\arctan(1+\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \ln(x+2\sqrt{x}+2) + C$

本题也可看作幂函数(x^0)与反三角函数的乘积.

解 2 令 $\arctan(1+\sqrt{x}) = t$，则 $x = (\tan t - 1)^2$

原式 $= \int t\mathrm{d}(\tan t - 1)^2$

$$= t(\tan t - 1)^2 - \int (\tan t - 1)^2\mathrm{d}t$$

$$= t(\tan t - 1)^2 - \tan t - 2\ln|\cos t| + C$$

$$= x\arctan(1+\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x}) + \ln(x+2\sqrt{x}+2) + C$$

对这种被积函数仅由一个反三角函数构成的不定积分解 2 是行之有效的.

4-53 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$

解 原式 $= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

4-54 $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$

解 1 原式 $= -\int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C$$

解 2 令 $x = \tan t$，则 $\mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$.

原式 $= \int \ln\tan t \cdot \sin t\,\mathrm{d}t$

$$= -\int \ln\tan t\,\mathrm{d}\cos t$$

$$= -\cos t\ln\tan t + \int \csc t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\cos t\ln\tan t - \ln|\csc t + \cot t| + C$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C$$

解 3 令 $x = \mathrm{sh}t$，$\mathrm{d}x = \mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$.

原式 $= \int \frac{\mathrm{sh}t\ln\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}^2 t}\mathrm{d}t$

$$= -\int \ln\mathrm{sh}t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}t}\right)$$

$$= -\frac{\ln\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t} + \int \frac{\mathrm{ch}t}{\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{\ln\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t} + \int \frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}^2 t - 1}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{\ln\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\mathrm{ch}t}{1+\mathrm{ch}t}\right| + C$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C$$

4-55 $\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx$

解 原式 $= 2\int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx$

$$= 2\int \sin x\,de^{\sin x}$$

$$= 2\sin x e^{\sin x} - 2\int e^{\sin x}\,d\sin x$$

$$= 2\sin x e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C$$

4-56 $\int \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}dx$

解1 原式 $= \int \frac{1}{\ln x}dx - \int \frac{dx}{(\ln x)^2}$

$$= \frac{x}{\ln x} + \int x\cdot\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}dx - \int\frac{dx}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{x}{\ln x} + C$$

解2 令 $\ln x = u$，则 $x = e^u, dx = e^u du$.

原式 $= \int \frac{u-1}{u^2}e^u du$

$$= \int \frac{1}{u}de^u - \int\frac{e^u}{u^2}du$$

$$= \frac{e^u}{u} + \int\frac{e^u}{u^2}du - \int\frac{e^u}{u^2}du$$

$$= \frac{e^u}{u} + C$$

$$= \frac{x}{\ln x} + C$$

解法1是将原题拆成两项，第一项分部积分一次抵消第二项，解2是先用变量代换，然后仍用这种方法，这是一种常用的方法.

4-57 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$

解1 原式 $= \int\frac{x}{1+\cos x}dx + \int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$$= \int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx - \int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

$$= \int x\,d\tan\frac{x}{2} - \ln(1+\cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int\tan\frac{x}{2}dx - \ln(1+\cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - \ln(2\cos^2\frac{x}{2}) + C$$

解1是将原式拆项后，第一项分部积分，第二项凑微分.

$$= x\tan\frac{x}{2} + C$$

解 2 原式 $= \int\left[\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \tan\frac{x}{2}\right]dx$

$$= \int\left(x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}dx\right)$$

$$= \int d\left(x\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C$$

解 2 是将原式拆项后整个式子凑微分.

解 3 原式 $= \int\left[\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx + \tan\frac{x}{2}\right]$

$$= \int\left(x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}dx\right)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int\tan\frac{x}{2}dx + \int\tan\frac{x}{2}dx$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C$$

解 3 是将原式拆项后，第一项分部积分抵消第二项.

4-58 $\int\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx$

解 1 原式 $= \int\frac{e^x\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$= \int\left[e^x\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + e^x\tan\frac{x}{2}\right]dx$$

$$= \int\left(e^x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}e^x\right)$$

$$= \int d\left(e^x\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= e^x\tan\frac{x}{2} + C$$

解 1，解 2 都与上题类似.

解 2 原式 $= \int\frac{e^x}{1+\cos x}dx + \int\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}e^x$

$$= \int\frac{e^x}{1+\cos x}dx + \frac{e^x\sin x}{1+\cos x}$$

$$-\int e^x \frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx$$

$$=\frac{e^x \sin x}{1+\cos x}+C$$

4-59 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}dx$

解 1 原式 $=\int \frac{x d(e^x-2)}{\sqrt{e^x-2)}}$

$$=2\int x d\sqrt{e^x-2}$$

$$=2x\sqrt{e^x-2}-2\int\sqrt{e^x-2}dx$$

令 $\sqrt{e^x-2}=u$，则 $x=\ln(u^2+2)$

$$\int\sqrt{e^x-2}dx=\int\frac{2u^2}{u^2+2}du$$

$$=2u-2\sqrt{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C$$

原式 $=2x\sqrt{e^x-2}-4\sqrt{e^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+C$

解 1 是先采用分部积分法，然后采用换元法.

解 2 令 $\sqrt{e^x-2}=u$，则 $x=\ln(u^2+2)$，$dx=\frac{2u}{u^2+2}du$

原式 $=\int\frac{\ln(u^2+2)(u^2+2)\cdot 2u}{u(u^2+2)}du$

$$=2\int\ln(u^2+2)du$$

$$=2u\ln(u^2+2)-2\int\frac{2u^2}{u^2+2}du$$

$$=2u\ln(u^2+2)-4u+4\sqrt{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-2}-4\sqrt{e^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+C$$

解 2 是先换元，然后采用分部积分法.

4-60 $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^2}dx$.

解 令 $x=\tan u$，$dx=\sec^2 u du$

原式 $=\int\frac{\tan u\cdot e^u\cdot\sec^2 u}{\sec^4 u}du$

$$=\int\sin u\cos u e^u du$$

本题综合运用了分部积分法与换元法.

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2u\, e^{u}\, du$$

$$= \frac{1}{10}e^{u}(\sin 2u - 2\cos 2u) + C$$

$$= \frac{e^{\arctan x}(x^2 + x - 1)}{5(1 + x^2)} + C$$

4-61 $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\frac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}}dx$

解 1 令 $x = \sin u$，则 $dx = \cos u du$.

原式 $= \int \frac{u}{\sin^2 u}\frac{1 + \sin^2 u}{\cos u}\cos u du$

$$= \int \frac{u}{\sin^2 u}du + \int u du$$

$$= -\int u d\cot u + \frac{1}{2}u^2$$

$$= -u\cot u + \ln|\sin u| + \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$$

解1综合运用了换元法和分部积分法.

解 2 原式 $= \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}d\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \int\left(\frac{1}{x} + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)dx$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ln|x| + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$$

解2的关键是分部积分法中选取 $du = d(x - \frac{1}{x})$.

4-62 $\int x\arctan x\ln(1 + x^2)dx$

解 由于 $\int x\ln(1 + x^2)dx$

$$= \frac{1}{2}\int \ln(1 + x^2)d(1 + x^2)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + x^2)\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

则 原式 $= \int \arctan x d\left[\frac{1}{2}(1 + x^2)\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}x^2\right]$

$$= \frac{1}{2}[(1 + x^2)\ln(1 + x^2) - x^2]\arctan x$$

$$- \frac{1}{2}\int\left[\ln(1 + x^2) - \frac{x^2}{1 + x^2}\right]dx$$

本题是三类函数相乘的形式. 这类问题一般都采用本题的方法.

$$= \frac{1}{2}\arctan x[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3]$$
$$-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3}{2}+C$$

4-63 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

解 原式 $= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$$

则 原式 $= \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C]$

连续分部积分两次又出现原积分，然后移项求解.

4-64 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int x\mathrm{d}f(x)$

$$= xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x$$

又 e^{-x^2} 是 $f(x)$ 的一个原函数，

则 $\int f(x)\mathrm{d}x = e^{-x^2} + C$

则 原式 $= -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C$

这类问题一般都是直接用分部积分，而不是先求出 $f'(x)$ 后代入原积分求解.

4-65 设 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$, $(n \geqslant 2)$.

试建立递推公式.

解 $I_n = \int \frac{1-\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin^n x}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}\mathrm{d}x + I_{n-2}$$

$$= -\frac{1}{n-1}\int \cos x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^{n-1} x}\right) + I_{n-2}$$

$$= -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1}I_{n-2} + I_{n-2}$$

$$= -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

分部积分法是建立递推公式的主要方法.

4.2.4 有理函数的积分

求下列不定积分：

4-66 $\int \frac{x^9-8}{x^{10}+8x}\mathrm{d}x$

解 原式 $= \int \frac{x^9-8}{x(x^9+8)}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{(x^9-8)x^8}{x^9(x^9+8)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{2x^9-(x^9+8)}{x^9(x^9+8)}\mathrm{d}x^9$$

$$= \frac{2}{9}\ln|x^9+8| - \ln|x| + C$$

方次较高的有理函数积分一般都采用本题的降幂凑微分的方法.

4-67 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x$

解 原式 $= \int \frac{1-x^8+x^8}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1-x^8}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \int \frac{1-x^2+x^4-x^6}{x^8}\mathrm{d}x + \arctan x$$

$$= -\frac{1}{9x^9} + \frac{1}{7x^7} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \arctan x + C$$

本题的关键在拆项.

4-68 $\int \frac{x}{x^8-1}\mathrm{d}x$

解 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{(x^4)^2-1}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{x^4-1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{x^4+1}$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \frac{1}{4}\arctan x^2 + C$$

本题仍采用降幂拆项的方法.

4-69 $\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$

解 原式 $= \frac{1}{4}\int x\mathrm{d}\frac{1}{(1-x^2)^2}$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^2}$$

分部积分法也是求有理函数积分的行之有效的方法.

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} - \frac{1}{8}\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{x}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$= \frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

4-70 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

解1 原式 $= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + C$$

解1虽简单,但这里要求 $x \neq 0$.

解2 原式 $= \int \frac{x^2+1}{(x^4+2x^2+1)-2x^2}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{x^2+1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)+(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^4+\sqrt{2}x^2+1)-(x^2-\sqrt{2}x+1)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan x(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x-1) + C$$

解法2采用部分分式法,结论很完整.

4-71 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$

解 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x$

本题采用了拆项凑微分的方法.当然本题也可用部

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + C$$

分分式法求解，但较繁.

4-72 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^6)}$

解 原式 $= \int \frac{1+x^6-x^6}{x^6(1+x^6)}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^6} - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$$

$$= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{1+x^2-x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5x^5} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{3}\arctan x^3$$

又 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right| + C$$

原式 $= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3}\arctan x^3 + \frac{1}{2}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right| + C$$

本题先拆项，降幂，然后利用与上题类似的方法，即分子分母同除以 x^2 后凑微分.

4-73 $\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^4-9x^3+29x^2-39x+18}\mathrm{d}x$

解 把分母分解因式得：

$$x^4-9x^3+29x^2-39x+18=(x-1)(x-2)(x-3)^2$$

设 $$\frac{x^3+2x^2+1}{x^4-9x^3+29x^2-39x+18}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x(x-3)^2}$$

即 $$x^3+2x^2+1=A(x-2)(x-3)^2+B(x-1)(x-3)^2+C(x-1)(x-2)(x-3)+D(x-1)(x-2)$$

令 $x=1$，得 $A=-1$

$x=2$，得 $B=17$

$x=3$，得 $D=23$

上式两边对 x 求导，然后令 $x=3$，得

$$C=-15$$

原式 $=-\ln|x-1|+17\ln|x-2|-15\ln|x-3|-\frac{23}{x-3}+C$

本题在确定部分分式中的待定系数时，采用将 x 的特定值代入的方法，显得简便.

4-74 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-2x^2+1}$

解 $x^4-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2$

设 $$\frac{1}{x^4-2x^2+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

上式两边乘以 $(x-1)^2$，并令 $x\to1$，得 $C=\frac{1}{4}$

上式两边乘以 $(x+1)^2$，并令 $x\to-1$，得 $D=\frac{1}{4}$

上式两边乘以 x，并令 $x\to+\infty$，得 $0=A+B$

用 $x=0$，代入上式得 $B-A=\frac{1}{2}$. 从而 $-A=B=\frac{1}{4}$

原式 $=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)+C$

本题在确定部分分式中的待定系数时，采用等式两边同乘适当的因子后令 x 趋于某些值. 这也是一种较好的方法.

4-75 $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

解 设 $$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

以下用两种方法确定 A,B,C,D.

1. 等式两边乘以 $(x-1)$，令 $x\to1$，得

$$A=\frac{2+2}{(1+1)^2}=1$$

解 1 是一般方法. 解 2 也是一种行之有效的方法.

等式两边乘以$(x^2+1)^2$,令 $x \to i = \sqrt{-1}$,得

$$Di + E = \frac{2i+2}{i-1} = -2i$$

即 $\quad D = -2, E = 0$

等式两边乘以 x,令 $x \to \infty$,得

$$0 = 1 + B, B = -1$$

等式中令 $x = 0$,得

$$-2 = -1 + C, C = -1$$

2. 将等式通分消去分母得

$$2x + 2 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)$$

比较同次幂系数得

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = -B + C \\ 0 = 2A + B - C + D \\ 2 = -B + C - D + E \\ 2 = A - C - E \end{cases}$$

由方程组解得 $A = 1, B = -1, C = -1, D = -2, E = 0$.

原式 $= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + \frac{1}{x^2+1} + C$

4.2.5 三角有理式的积分

利用三角公式将原式变形,然后再积分是三角有理式积分的一种常用方法.

4-76 $\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$

解 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(\sec^2 x + 1)}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\tan x}{2 + \tan^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$$

4-77 $\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

解 由于 $\quad \sin^4 x + \cos^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= \cos^2 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

则 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x}$

$$= \int \frac{2}{2+\tan^2 2x} \frac{dx}{\cos 2x}$$

$$= \int \frac{1}{2+\tan^2 2x} d\tan 2x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

4-78 $\int \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x \cos x} dx$

原式 $= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{\sin x \cos x} dx$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right) dx$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln|\csc x + \cot x| + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

4-79 $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, $(\sin(a-b) \neq 0)$

解 原式 $= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(a-b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx$$

$$= \frac{-1}{\sin(a-b)} \left[\int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} dx - \int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C$$

4-80 $\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x + \sin x} dx$

解 原式 $= \int \frac{1+\sin x}{2\sin 2x \cos x} dx$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sin \cos^2 x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx + \frac{1}{4} \tan x + C$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sin x} + \frac{1}{4} \tan x + C$$

$$= \frac{1}{4\cos x} + \frac{1}{4} \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4} \tan x + C$$

本题主要是将分母和差化积.

4-81 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$

解 1 原式 $= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$$

解 2 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

$$= -\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C$$

至此，不定积分用不同解法，得到结果似乎不同，你能解释这种情况吗？

解 3 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$$

4-82 $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, \mathrm{d}x$

解 $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$.

原式 $= \frac{1}{2}\int \sin 2x \cos 2x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \sin 2x \cos 4x \, \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{8}\sin^2 2x - \frac{1}{4}\int(\sin 6x + \sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\sin^2 2x + \frac{1}{24}\cos 6x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

形如本题的三角连乘的不定积分一般先用积化和差.

4-83 $\int \sin^6 x\cos^3 x\,dx$

解 原式 $= \int \sin^6 x\cos^2 x\,d\sin x$

$$= \int \sin^6 x(1-\sin^2 x)\,d\sin x$$

$$= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + C$$

4-84 $\int \sin^2 x\cos^4 dx$

解 原式 $= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cos^2 x\,dx$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\,dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d\sin 2x$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin^3 2x + C$$

4-85 $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}dx$

解 原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos^4 x}dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx + \int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

本题提供的方法是处理形如 $\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$（其中 m,n 为正整数）的不定积分的一般方法.

4-86 $\int \frac{3\sin x + 4\cos x}{2\sin x + \cos x}dx$

解 令 $3\sin x + 4\cos x = a(2\sin x + \cos x) + b(2\cos x - \sin x)$

得 $a = 2, b = 1$. 故有

原式 $= \int \frac{2(2\sin x + \cos x) + (2\cos x - \sin x)}{2\sin x + \cos x}dx$

$$= \int 2dx + \int \frac{d(2\sin x + \cos x)}{2\sin x + \cos x}$$

本题提供的方法是处理形如 $\int \frac{A\sin x + B\cos x}{C\sin x + D\cos x}dx$ 的不定积分的一般方法.

$$= 2x + \ln|2\sin x + \cos x| + C$$

4-87 $\int \frac{dx}{(2+\sin^2 x)\cos x}$

解 令 $\sin x = t$，则 $\cos x dx = dt$

$$原式 = \int \frac{dt}{(2+t^2)(1-t^2)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{(2+t^2)+(1-t^2)}{(2+t^2)(1-t^2)}dt$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2+t^2}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

形如$\int R(\sin x, \cos x)dx$ 的三角有理式的积分，若满足：$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，则可令 $\sin x = t$ 将原积分化为有理函数的积分.

4-88 $\int \frac{5+4\cos x}{(2+\cos x)^2 \sin x}dx$

解 令 $\cos x = t$，则 $-\sin x dx = dt$.

$$原式 = -\int \frac{5+4t}{(2+t)^2(1-t^2)}dt$$

$$= -\int \frac{(2+t)^2+(1-t)^2}{(2+t^2)(1-t^2)}dt$$

$$= -\int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{(2+t)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{1}{2+t} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + \frac{1}{2+\cos x} + C$$

形如 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 的三角有理式积分，若满足 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，则可令 $\cos x = t$ 将原积分化为有理函数的积分求解.

4-89 $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$

解 1 令 $\cos x = t$，则 $-\sin x dx = dt$

$$原式 = -\int \frac{t^4}{(1-t^2)^2}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^3 d\left(\frac{1}{1-t^2}\right)$$

$$= \frac{t^3}{2(t^2-1)} + \frac{3}{2}\int \frac{t^2}{1-t^2}dt$$

$$= \frac{t^3}{2(t^2-1)} - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

本题与上题属同一类型.

$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\cos x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C$$

解 2 原式 $= \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} \mathrm{d}\sin x$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos^3 x \mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{3\cos^2 x \sin x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{3}{2}\cos x + C$$

解2主要是利用分部积分法.

4-90 $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\mathrm{d}x$

解 令 $\mathrm{tg}x = t$，则 $\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

原式 $= \int \frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{(1+t)^2 - (1-t+t^2)}{(1+t)(1-t+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

$$= \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\ln|1+t| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{\tan^2 x - \tan x + 1}{(1+\tan x)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

形如 $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ **的三角有理式的积分，若满足：**$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$**，则可令** $\tan x = t$ **将原积分化为有理函数的积分求解.**

4-91 $\int \frac{\sin 2x}{\sin^6 x + \cos^6 x}\mathrm{d}x$

解 1 由于原式 $= \int \frac{2\sin x\cos x}{\sin^6 x + \cos^6 x}\mathrm{d}x$，则可令 $\tan x = t$，$\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

原式 $= \int \frac{2t}{t^4 - t^2 + 1}\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t^2}{\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

本题属于 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ **故可令** $\tan x = t$ **求解.**

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan^2 x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

解 2 原式 $= \int \frac{2\sin x \mathrm{d}\sin x}{\sin^6 x + (1-\sin^2 x)^3}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\sin^2 x}{3\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}) + C$$

本题也属于 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，故可令 $\sin x = t$ 求解.

4-92 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

解 1 采用万能代换，是三角有理式积分的一般方法，但一般较繁. 解 2 和解 3 都是先将原式利用三角公式变形，然后再求解.

解 1 令 $\tan\frac{x}{2} = t$

原式 $= \int \frac{2t}{(1+t)(1+t^2)}\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{(1+t^2)-(1+t^2)}{(1+t)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1+t}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

$$= \arctan t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \ln|1+t| + C$$

$$= \frac{x}{2} + \ln\sec\frac{x}{2} - \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

解 2 原式 $= \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}) - (\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}\frac{x}{2}$$

$$= \frac{x}{2} - \int \frac{\mathrm{d}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{x}{2} - \ln\left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| + C$$

解 3 原式分子分母同乘 $1-(\sin x+\cos x)$

$$\text{原式} = \int \frac{\sin(1-\sin x-\cos x)}{-2\sin x\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{1-\sin x-\cos x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| - \frac{1}{2}\ln|\cos x| + \frac{x}{2} + C$$

4.2.6 无理式的积分

4-93 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$

解 1 令$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$，则 $\mathrm{d}x = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$

$$\text{原式} = -4\int\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\mathrm{d}t$$

$$= -2\int\frac{(t^2+1)+(t^2-1)}{(t^2+1)(t^2-1)}\mathrm{d}t$$

$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2\arctan t + C$$

解 1 是解形如 $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 的不定积分的一般方法.

解 2 $\text{原式} = \int\frac{1}{x}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

$$= \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} + \int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \ln|x+\sqrt{x^2-1}| - \operatorname{sgn}(x)\arcsin\frac{1}{x} + C$$

4-94 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

本题事实上与上题是同一类型.

解 原式 $= \int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$

令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$，则 $x = 1+\frac{2}{t^3-1}$

$$\text{原式} = -\frac{3}{2}\int\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}t + C$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$$

4-95 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

解 令$\sqrt[6]{1+x}=t$, $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$

原式$=6\int \frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t$

$=2t^3-3t^2+6t+6\ln|t+1|+C$

$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C$

注意$\sqrt[6]{1+x}$的根指数6是$\sqrt{1+x}$与$\sqrt[3]{1+x}$的根指数2和3的最小公倍数.

4-96 $\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$

解 原式$=\int \frac{x(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}{(3x+1)-(2x+1)}\mathrm{d}x$

$=\int \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x-\int \sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{9}(3x+1)^{3/2}+\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}+C$

本题的关键是分母有理化.

4-97 $\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

解 原式$=\int x(x-\sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}(x^2-1)$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}+C$

4-98 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

解 原式$=\int \frac{(1+\sqrt{x})-\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{x})^2-(1+x)}\mathrm{d}x$

$=\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$

$=\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\int \frac{1+x}{\sqrt{x(1+x)}}\mathrm{d}x$

$=\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int \frac{(2x+1)+1}{\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x$

$=\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}$

本题的关键是第一步.即分母有理化.

$$= \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{4}\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right) + C$$

4.2.7 杂例

本题事实上是一个分段函数的不定积分，这类问题的关键是分段求出每段上的原函数后，要适当调整每一段上的常数使其原函数在分段函数的分界点处连续.

4-99 $\int \max(1,|x|)\mathrm{d}x$

解 设 $f(x) = \max(1,|x|)$

则
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 1, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则必存在原函数 $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C_1, & x < -1 \\ x + C_2, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{x^2}{2} + C_3, & x > 1 \end{cases}$$

又 $F(x)$ 须处处连续，故可取 $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}, C_3 = 1$

$$故,原式 = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C, & x < -1 \\ x + \frac{1}{2} + C, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{x^2}{2} + 1 + C, & x > 1 \end{cases}$$

这类问题首先作变换求出 $f'(t)$，然后积分求得 $f(t)$.

4-100 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，$f(1) = 0$，$f'(e^x+1) = e^{3x} + 2$，试求 $f(x)$.

解 令 $e^x + t = 2$，则 $e^x = t - 1$

$$f'(t) = (t-1)^3 + 2$$

$$f(t) = \frac{1}{4}(t-1)^4 + 2t + C$$

又 $f(1) = 0$，则 $C = -2$

故
$$f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4 + 2x - 2$$

4-101 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1 \\ x, & 1 < x < +\infty \end{cases}$ 求 $f(t)$ 和 $f(\ln x)$.

解　令 $\ln x = t$

则　$$f'(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t < 0 \\ e^t, & 0 < t < +\infty \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} t + c, & -\infty < t \leqslant 0 \\ e^t + d, & 0 < t < \infty \end{cases}$$

由 $f(t)$ 的连续性得：$c = 1 + d$

所以　$$f(t) = \begin{cases} t + 1 + d, & -\infty < t \leqslant 0 \\ e^t + d, & 0 < t < +\infty \end{cases}$$

$$f(\ln x) = \begin{cases} \ln x + 1 + d, & 0 < x \leqslant 1 \\ x + d, & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

4-102　设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$，若当 $x > 0$ 时，有 $f(x)F(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$，试求 $f(x)$.

本题的关键是 $F'(x)F(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解　由于 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x)F(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$\int F(x)\mathrm{d}F(x) = \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}F^2(x) = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$$

又　$F(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$，所以，$C = 0$.

$$F(x) = \sqrt{2}\arctan\sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)}$$

4-103　设 $y = y(x)$ 是由 $y^2(x-y) = x^2$ 所确定的隐函数，求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2}$.

这种隐函数的不定积分一般都是通过变量代换将 x 和 y 用同一参数 t 表示出来，然后求解.

解　令　$y = tx$，则 $y^2(x-y) = x^2$ 可得

$$x = \frac{1}{t^2(1-t)},\ y = \frac{1}{t(1-t)}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{-2+3t}{t}\mathrm{d}t \\
&= 3t - 2\ln|t| + C \\
&= \frac{3y}{x} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + C
\end{aligned}
$$

第 5 章　定积分

5.1　客观题

5.1.1　填空题

5-1　$\int_{-1}^{1}\frac{x+|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ __ln2__

解　由于$\frac{x}{1+x^2}$为奇函数，$\frac{|x|}{1+x^2}$为偶函数，则

$$\int_{-1}^{1}\frac{x+|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

关于原点对称区间上的定积分首先应考虑被积函数的奇偶性.

5-2　$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2}\mathrm{d}x=$ __$-\frac{\pi}{2}\ln 2$__

解　原式$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x-\ln 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$，

由于 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数，则

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x=0$，所以

$$原式=-2\ln 2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

根据几何意义 $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$

5-3　$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}}(\sin^2x+\sin 2x)|\sin x|\mathrm{d}x=$ __$\frac{16}{3}$__

解　由于$(\sin^2x+\sin 2x)|\sin x|$以 π 为周期，

则　原式$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2x+\sin 2x)|\sin x|\mathrm{d}x$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x|\sin x|\mathrm{d}x$$

$$=8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\mathrm{d}x=\frac{16}{3}.$$

本题用到 $\int_{a}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T}f(x)\mathrm{d}x$ 其中 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数.

5-4 $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=$ $\underline{\dfrac{4}{15}}$

解 1 $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1[(1-x)-1]\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}(1-x)$$

$$=\left[\frac{2}{5}(1-x)^{5/2}-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{4}{15}$$

解 2 令$\sqrt{1-x}=t$，则 $x=1-t^2$，

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(1-t^2)t^2\mathrm{d}t=\frac{4}{15}.$$

解 1 是用凑微分的方法.

解 2 是用变量代换的方法.

5-5 $\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ $\underline{2(\mathrm{e}^2+1)}$

解 令$\sqrt{x}=t$，则

$$\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^2 2t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$=2(t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t)\Big|_0^2$$

$$=2(\mathrm{e}^2+1).$$

先换元后分部.

5-6 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=$ $\underline{\dfrac{\pi}{2}}$

解 $$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+x}$$

$$=2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

5-7 设 $f(x)$有一个原函数为$\dfrac{\sin x}{x}$，则$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=$ $\underline{\dfrac{4}{\pi}-1}$.

解 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\mathrm{d}f(x)$$

$$=xf(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\left[xf(x)-\frac{\sin x}{x}\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{\pi}-1$$

其中 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

此类问题一般是用分部积分法.

5-8 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t\mathrm{d}t$,则常数 $a=$__2__.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=e^a$

$$\int_{-\infty}^{a}te^t\mathrm{d}t=(te^t-e^t)\Big|_{-\infty}^{a}=e^a(a-1)$$

则 $e^a=e^a(a-1)$,从而

$a=2$.

5-9 设 $f(x)$连续,且$\int_0^{x^2-1}f(t)\mathrm{d}t=1+x^3$,则 $f(8)=$__$\dfrac{3}{2}$__.

解 原式两边求导得

$$2xf(x^2-1)=3x^2$$

令 $x=3$, 得 $6f(8)=9$

$$f(8)=\frac{3}{2}$$

此类问题一般是用两边求导的方法.

5-10 若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$,则$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=$__$\dfrac{\pi}{4-\pi}$__

解 1 令$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=A$,由原式得

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+A\sqrt{1-x^2}$$

代入上式得 $A=\int_0^1\left(\dfrac{1}{1+x^2}+A\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{4}+A\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}(1+A)$$

$A=\dfrac{\pi}{4-\pi}$.

解 2 原式两边从0 到 1作定积分得

$$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$$

从上式解得$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4-\pi}$.

解 1 是将 $f(x)$ 的形式设出来,代入求 $f(x)$.

解 2 是原式两边再做 0 到 1 的定积分.

5-11 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\cos(x-t)^2\mathrm{d}t=$__$\cos x^2$__

解 令 $x-t=u$,则

这类问题一般先用变量代换把 x

$$\int_0^x \cos(x-t)^2 dt = \int_0^x \cos u^2 du$$

则 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \cos(x-t)^2 dt = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \cos u^2 du = \cos x^2$.

换到积分上下限上,然后求导.

5-12 设 $f(x)$连续,则$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^2 f(x+t)dt = \underline{f(2+x)-f(1+x)}$

解 令 $x+t=u$,则

$$\int_1^2 f(x+t)dt = \int_{1+x}^{2+x} f(u)du$$

$$\frac{d}{dx}\int_1^2 f(x+t)dt = \frac{d}{dx}\int_{1+x}^{2+x} f(u)du = f(2+x)-f(1+x).$$

这类问题解法与上题相同.

5-13 由曲线 $y=x+\dfrac{1}{x}$, $x=2$及 $y=2$ 所围成图形的面积 $S=\underline{\ln 2-\dfrac{1}{2}}$

解 先画出所求面积的图形(见图 5.1),则所求面积

$$S=\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}-2\right)dx = \ln 2-\frac{1}{2}.$$

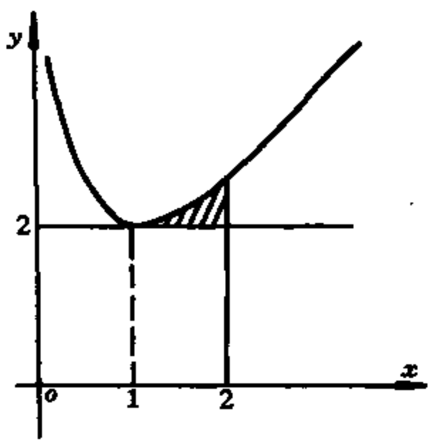


图 5.1

此类问题先画图,再建立积分式求面积.

5-14 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成平面图形的面积是 $\underline{\dfrac{3}{2}}$

解 先画出所求面积的图形(图 5.2),所求面积为

$$\int_0^1 [(e+1)-y-e^y]dy = \frac{3}{2}$$

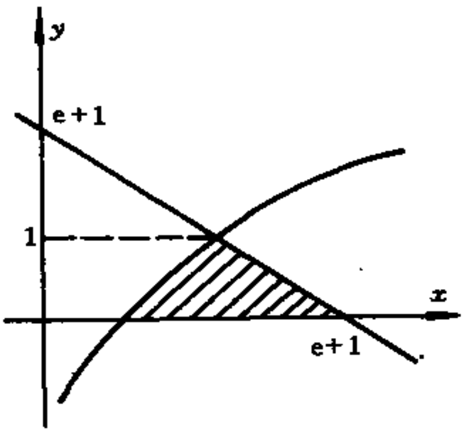


图 5.2

5-15 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成图形的面积是 $A=$ $\underline{\frac{37}{12}}$

解 先画出所求面积的图形(图 5.3),则所求面积为

$$A=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)\mathrm{d}x=\frac{37}{12}.$$

本题的关键是正确地画出所求面积部分草图.

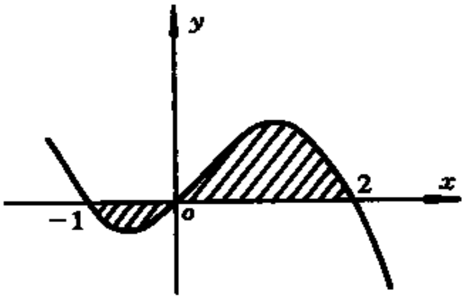


图 5.3

5.1.2 单项选择题

5-16 设 $f(x)$ 为连续函数,且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)$ 等于( ). (A)

(A) $\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$ (B) $f(\ln x)+f(\frac{1}{x})$

(C) $\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$ (D) $f(\ln x)-f(\frac{1}{x})$

解 $F'(x)=f(\ln x)(\ln x)'-f(\frac{1}{x})(\frac{1}{x})'$

$$=\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$$

此类问题有一般公式 $\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x)$,其中 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导.

5-17 设 $f(x)$ 连续,则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=($ $)$. (B)

(A) $\frac{1}{2}f(x^2)$ (B) $xf(x^2)$

(C) $2xf(x^2)$ (D) $-2xf(x^2)$

解 令 $x^2-t^2=u$,则

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u$$

解决此类问题的关键是先作变量代换,将被积函数中的 x 换到上、下限.

$$=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x = xf(x^2)$$

所以选(B).

5-18 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t$，$g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时 $f(x)$是 $g(x)$的（　）. (B)

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}}$$

此处用了等价无穷小代换.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^5}{x^4+x^5}=0$$

则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$是 $g(x)$的高阶无穷小.

5-19 设 $f(x)$有连续一阶导数 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\,\mathrm{d}t$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$与 x^k 为同阶无穷小，则 k 等于（　）. (C)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解1是一种常规作法.

解 1
$$F(x)=x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x^2f(x)-x^2f(x)$$
$$=2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

由题意知
$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x^k}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

该极限应为非零常数，则 $k=3$，所以应选(C).

解 2 由原题知当 $x\to0$ 时 $F'(x)$ 与 x^k 为同阶无穷小,换句话说当 $x\to0$ 时 $F'(x)$ 是 x^k 阶无穷小,本题要决定 k,即要决定当 $x\to0$ 时 $F'(x)$ 是 x 的几阶无穷小,但题目直接给我们的是 $F(x)$,如果能决定出 $F(x)$ 是 x 几阶无穷小,降一阶就应是 $F'(x)$ 的阶数,以下决定 $F(x)$ 是 x 的几阶无穷小,由于

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+o(t)=f'(0)t+o(t)$$

由于上式中第二项 $o(t)$ 是高阶无穷小,略去它不影响 $F(x)$ 的阶数,则 $x\to0$ 时 $\int_0^x(x^2-t^2)t\mathrm{d}t$ 与 $F(x)$ 的阶数相同,而

$$\int_0^x(x^2-t^2)f'(0)t\mathrm{d}t=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{4}\right)f'(0)=\frac{f'(0)}{4}x^4$$

显然它是 x 的四阶无穷小,则 $x\to0$ 时 $F(x)$ 是 x 的四阶无穷小,$F'(x)$ 应是 x 的三阶无穷小,则应选(C).

解 2 的主要思想是利用泰勒公式来估计无穷小的阶.

解 3 与解 2 分析前面的分析一样只要决定出 $F(x)$ 是 x 的几阶无穷小,问题就很快得到解决,而 $F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$,在 $F(x)$ 的表达式中有一个一般函数 $f(t)$,本题是一个选择题,对这样一个一般的 $f(t)$ 它都能决定 $F(x)$ 的阶数,那么取一个具体的 $f(t)$,比如取 $f(t)=t$,当然同样也可以决定结果.将 $f(t)=t$ 代入 $\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$,得

$$\int_0^x(x^2-t^2)t\mathrm{d}t=\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{4}=\frac{x^4}{4}$$

显然它是 x 的四阶无穷小,从而 $F'(x)$ 是 x 的三阶无穷小,所以应选(C).

解 3 是最好的方法,这是解决选择题一种常用的技巧,读者应特别注意.

5-20 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为连续函数,则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于( ). (B)

(A) a^2 (B) $a^2f(a)$ (C) 0 (D) 不存在

解 1 由积分中值定理知

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{x-a}(x-a)f(c)=a^2f(a)$$

所以选(B).

解 2 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2}{(x-a)}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=a^2\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}$
$=a^2\lim\limits_{x\to a}f(x)=a^2f(a).$

5-21 设 $F(x)=\int_0^x \frac{du}{1+u^2}+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2}(x>0)$，则(　). (B)

(A) $F(x)\equiv 0$ (B) $F(x)\equiv\frac{\pi}{2}$

(C) $F(x)=\arctan x$ (D) $F(x)=2\arctan x$

解 因为 $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$

所以 $F(x)\equiv C$

又 $F(1)=\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}+\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}$

所以 $F(x)\equiv\frac{\pi}{2}$

则应选(B).

$F(x)\equiv C$ 充要条件是 $F'(x)\equiv 0$.

5-22 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$，则 $F(x)$(　). (A)

(A) 为正常数 (B) 为负常数

(C) 恒为零 (D) 不为常数

解 首先决定 $F(x)$是否恒为常数:

〔分析 1〕 由于 $F'(x)=e^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi)-e^{\sin x}\sin x\equiv 0$，则 $F(x)\equiv C$.

〔分析 2〕 显然被积函数 $e^{\sin t}\sin t$ 以 2π 为周期，又积分区间$[x,x+2\pi]$长度正好为 2π，则积分值与区间的端点 x 无关，则

$$F(x)\equiv C$$

其次来决定常数 C 是正数、负数还是零.

<u>法 1</u> 考察 $F(0)=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$

被积函数中 $\sin t$ 在$(0,\pi)$为正，而 $\sin t$ 在$(\pi,2\pi)$上为负，且在这两个区间上 $\sin t$ 的值完全对应且仅仅相差一个负号，而当 $t\in(0,\pi)$时 $e^{\sin t}>1$，当 $t\in(\pi,2\pi)$时 $e^{\sin t}<1$，则积分 $\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$ 一定为正，故应选 (A)

法 1 最好，它是一种几何加分析的方法.

<u>法 2</u> $F(0)=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$

$$=\int_0^{\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$$

令 $t=\pi+u$，则 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$

$$=-\int_0^{\pi} e^{-\sin u}\sin u\,du$$

法 2 主要是通过变量代换证明 $F(0)>0$.

法 3 是用分部积分证明 $F(0)>0$.

则 $F(0)=\int_0^{\pi}[e^{\sin t}-e^{-\sin t}]\sin t\,dt$

而 当 $t\in(0,\pi)$时，$[e^{\sin t}-e^{-\sin t}]\sin t>0$

则 $F(0)>0$，故选(A)．

法 4 是用幂级数展开来证明 $F(-\pi)>0$.

法 3 $F(0)=-\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\,d\cos t$

$$=-e^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\cos^2 t\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\cos^2 t\,dt>0$$

所以选(A)．

法 4 考察 $F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$

而 $e^{\sin t}=1+\sin t+\dfrac{\sin^2 t}{2!}+\cdots+\dfrac{\sin^n t}{n!}+\cdots$

则 $F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin t+\sin^2 t+\dfrac{\sin^3 t}{2!}+\cdots+\dfrac{\sin^{n+1}t}{n!}+\cdots\right]dt$ 被积函数中 $\sin t$ 的奇次项为奇函数，该项积分为零，而 $\sin t$ 的偶次项的积分显然为正，所以，$F(-\pi)>0$.

5-23 设在区间$[a,b]$上 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)dx,S_2=f(b)(b-a),S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则（ ）． (B)

(A) $S_1<S_2<S_3$ (B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$ (D) $S_2<S_3<S_1$

解 1 是通过具体的 $f(x)$ 来判定结论.

解 1 在$[0,\ln2]$上考虑 $f(x)=e^{-x}$，显然 $f(x)$满足原题条件

$$S_1=\int_0^{\ln2}e^{-x}dx=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=e^{-\ln2}(\ln2-0)=\frac{1}{2}\ln2$$

$$S_3=\frac{1}{2}[e^{-\ln2}+1]\ln2=\frac{3}{4}\ln2$$

则 $S_2<S_1<S_3$.

解 2 是利用几何意义来判定结论，对本题来讲这个方法方便.

解 2 如图5.4，S_2 等于长方形 $ABCE$ 的面积，S_3 等于梯形 $ABCD$ 的面积，S_1 等于曲边梯形 $ABCD$ 的面积，从而有

$$S_2<S_1<S_3$$

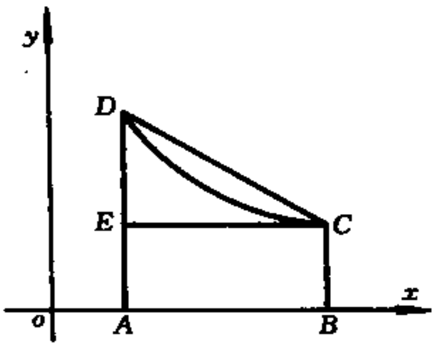


图 5.4

从而应选(B).

5-24 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x$, $P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$,则有(　). (C)

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

解 由于$\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x$ 是奇函数,则 $M=0$,同理 $N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x>0$,$N=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x<0$,则 $N<M<P$,故应选(C).

本题主要是利用函数的奇偶性.

5-25 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$,设 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$,则 $F(x)$为(　). (D)

(A) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

解 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$

$$=\begin{cases}\int_1^x t^2\mathrm{d}t, & 0\leqslant x<1\\ \int_1^x \mathrm{d}t, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

所以应选(D).

5-26 下列广义积分中发散的是(　). (A)

(A) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

(C) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$

解 由于$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$与$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x}$同敛散,而$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x}$发散,则$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$发散,

所以应选(A).

5.2 非客观题

5.2.1 定积分的概念及基本性质

5-27 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2})$

解 分析:将[0,1]区间n等分,则每个小区间长$\Delta x=\frac{1}{n}$;再将题目的$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$中的一个因子$\frac{1}{n}$分配于各项,便可得出一积分和,从而可把所求极限化为本题的定积分来求.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$
$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$
$$=\frac{2}{3}$$

化这种问题为定积分主要是确定积分限和被积函数.如读者对文中式子不好想象,可反过来对[0,1]n等分作成积分和与之比较,逐渐掌握本方法.

5-28 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{2}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n-1}{4n^2-n^2}\right)$

解1 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k-1}{4n^2-k^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}\frac{\frac{k-1}{n}}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

又
$$\frac{\frac{k-1}{n}}{4-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}<\frac{\frac{k-1}{n}}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}<\frac{\frac{k}{n}}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

函数$\frac{x}{4-x^2}$在[0,1]上连续,

则 $原式=\int_0^1\frac{x}{4-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

解2 将原式分为两部分

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

5-28题也是先提出$\frac{1}{n}$作为Δx_k,然后再考虑积分区间和被积函数,由于分子$\frac{k-1}{n}$与分母中的$\frac{k}{n}$不是同一点,故采取文中两种解法.

$$= \int_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

这里，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right]\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{4-x^2}$，故这部分有界. 因此

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right]\cdot\frac{1}{n} \to 0(当\ n \to \infty)$$

5-29 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

取对数将乘法变加法，然后用定积分求解，是处理这类连乘形式极限问题的常用方法.

解 令 $y_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$

$$\ln y_n = \frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)] - \ln n$$

$$= \frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n) - n\ln n]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}(\ln y_n) = \int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$$

$$原式 = e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}$$

5-30 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$.

本题与上题类似.

解 令 $y_n = \frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$

则 $$\ln y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln(n^2+k^2) - 4\ln n$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln n^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right] - 4\ln n$$

$$= 4\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right] - 4\ln n$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

此和可看作函数 $\ln(1+x^2)$ 在 $[0,2]$ 上的积分和，即把区间 $[0,2]$ $2n$ 等分，$\xi_k = \frac{k}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n = \int_0^2 \ln(1+x^2)dx$$

$$= x\ln(1+x^2)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= 2\ln 5 - 4 + 2\arctan 2$$

原式 $= \exp(2\ln 5 - 4 + 2\arctan 2)$

5-31 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^4}-1}$

这种带有变上限积分的 $\dfrac{"0"}{0}$ 型极限问题，一般用洛必达法则较好，但应注意与其它方法的结合.

解 由于当 $x\to 0$ 时，$(\sqrt{1+x^4}-1)\sim\dfrac{1}{2}x^4$，因此，

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\ \cos x\ \ln(1+\sin^2 x)}{2x^3}$$

又 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$

故 $$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

5-32 设 $f(x)$ 连续，试求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

这种变上限定积分的极限除洛必达法则以外，有时也可用积分中值定理求解.

解 1 由积分中值定理得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = (x-a)f(c)$$

则 $$\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}xf(c) = af(a)$$

解 2 $$原式 = \lim_{x\to a}\frac{x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)\right)$$

$$= af(a)$$

5-33 a,b,c 取何实数值才能使

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x - ax}\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = c\ 成立$$

这类问题一般也是用洛必达法则设法确定出常数.

解 由于不论 a 取什么值都有 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x - ax) = 0$，因此，只有当 $\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = 0$ 时，原极限才有存在的可能，因此，$b = 0$. 此时

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x - ax}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\cos x-a}$$

$$=\begin{cases}0, & a\neq 1\\ -2, & a=1\end{cases}$$

则 $a=1,b=0,c=-2$ 或 $a\neq 1,b=0,c=0.$

5-34 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

解 1 由于在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 有 $0\leqslant\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\leqslant x^n$

所以
$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$$

又
$$\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\to 0\quad(n\to\infty)$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=0$$

解 2 由积分中值定理 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 知

$$\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1+\xi_n^2}}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x,\quad(0<\xi_n<1)$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=0$，而 $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+\xi_n^2}}\leqslant 1$，即有界，

故
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=0$$

解 1(夹逼)，解 2(积分中值定理)是处理这类问题的两种常用方法. 但本题不能这样作：$\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\xi^n}{\sqrt{1+\xi^2}}$ $(0<\xi<1)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=0$ 因为 ξ 与 n 有关，这样作无根据.

5-35 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}\mathrm{d}x$

解 1 由积分中值定理得
$$\int_n^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\xi^2}{e^{\xi^2}}\cdot 2,\quad n\leqslant\xi\leqslant n+2$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0$

故 原式 $=0$

解 2 由于当 $n\leqslant x\leqslant n+2$ 时，
$$0<\frac{x^2}{e^{x^2}}<\frac{(n+2)^2}{e^{n^2}}$$

本题虽与上题不是一种类型(本题求极限的变量在上下限上，而上题在被积函数中)但求解方法是一样的.

所以 $$0<\int_n^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}dx<\frac{(n+2)^2}{e^{n^2}}\cdot 2$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{e^{x^2}}=0$

则 $$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}dx=0$$

5-36 设 $\alpha_n=\int_0^1\sin x^n dx,\beta_n=\int_0^1\sin^n x dx$,试证:

a) $\alpha_n\geqslant\beta_n\geqslant 0$,

b) 当 $n\to\infty$ 时,$\alpha_n\to 0,\beta_n\to 0$.

本题主要是利用极限的两边夹逼法则.

证 a) $[\sin x^n-\sin^n x]'=n\cos x^n\cdot x^{n-1}-n\sin^{n-1}x\cdot\cos x$

又当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\cos x>0$ 且单调减,而 $0\leqslant\sin x\leqslant x$

故 $[\sin x^n-\sin^n x]\geqslant 0$

又 $[\sin x^n-\sin^n x]|_{x=0}=0$,

则当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\sin x^n\geqslant\sin^n x$

所以 $$\alpha_n\geqslant\beta_n\geqslant 0$$

b) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$0\leqslant\sin x^n\leqslant x^n$

$$0\leqslant\int_0^1\sin x^n dx\leqslant\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$

5-37 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数,试求 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx$.

本题的关键是分部积分一步.

解 $$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=\frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)d\sin\lambda x$$
$$=\frac{1}{\lambda}f(x)\sin\lambda x\Big|_a^b-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x dx$$

而 $$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}f(x)\sin\lambda x\Big|_a^b=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}[f(b)\sin\lambda b-f(a)\sin\lambda a]$$
$$=0$$

又 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $|f'(x)|\leqslant L,x\in[a,b]$

$$\left|\int_a^b f'(x)\sin\lambda x dx\right|\leqslant\int_a^b|f'(x)\sin\lambda x|dx$$
$$\leqslant\int_a^b|f'(x)|dx\leqslant L(b-a)$$

于是 $$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x dx=0$$

故 $$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0$$

5-38 求证$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin x\,\mathrm{d}x = 0$,其中 $a>0, b>0$.

证 由于$\left|\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin x\,\mathrm{d}x\right|$

$$\leqslant \int_a^{\frac{a}{b}}\left|\frac{x^na^n}{n!}\left(1-\frac{b}{a}x\right)^n\sin x\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{a^n}{n!}\int_a^{\frac{b}{a}}x^n\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a^n\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

故 原式得证.

本题主要是用两边夹逼法则.

5-39 设 $f'(x)$ 在$[0,1]$上连续,求证

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty).$$

证 $$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x^n,$$

$$= \frac{1}{n}x^{n+1}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1[f(x)+xf'(x)]x^n\,\mathrm{d}x,$$

由于 $f'(x)$ 在$[0,1]$上连续,故 $|f(x)+xf'(x)|\leqslant L$,

从而 $$\left|\int_0^1[f(x)+xf'(x)]x^n\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1|f(x)+xf'(x)|\,x^n\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant L\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{L}{n+1}\to 0$$
$$(n\to\infty)$$

故原式成立.

第一步(即分部积分)是本题的关键.

5-40 设 $f(x)$ 在$[A,B]$上连续,$A<a<b<B$,

求证 $$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

证 1 $$\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

此题应注意,$h\to 0$,故先取$|h|$充分小,使得$(a+h, b+h)\subset(A,B)$.

本题也可用 $f(x)$ 在$[A,B]$原

令 $x+h=u$，则$\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{a+h}^{b+h}f(u)\mathrm{d}u$

从而 $$\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=\frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{h}\int_b^{b+h}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(x)\mathrm{d}x$$

由积分中值定理及 $f(x)$ 的连续性知：
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_b^{b+h}f(x)\mathrm{d}x=f(b)$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(x)\mathrm{d}x=f(a)$$

故原题得证.

证 2 由证 1 可知
$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{a+h}^{b+h}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}[f(b+h)-f(a+h)]\quad（洛必达法则）$$
$$=f(b)-f(a)$$

函数存在：$F'(x)=f(x)$ 则$\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x=F(b+h)-F(a+h)$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$

故原式 $=\lim_{h\to\infty}\frac{F(b+h)-F(b)}{h}-\lim_{h\to\infty}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=f(b)-f(a)$.

5-41 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，证明
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

证 1 由 $f(x)$ 的周期性知
$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{[\frac{x}{T}]T}f(t)\mathrm{d}t+\int_{[\frac{x}{T}]T}^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$=[\tfrac{x}{T}]\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_{[\frac{x}{T}]T}^x f(t)\mathrm{d}t$$

又 $\frac{x}{T}-1<[\frac{x}{T}]\leqslant\frac{x}{T}$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{[\frac{x}{T}]}{x}=\frac{1}{T}$$

而 $$\left|\int_{[\frac{x}{T}]T}^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{[\frac{x}{T}]T}^{[\frac{x}{T}]T+T}|f(t)|\mathrm{d}t=\int_0^T|f(t)|\mathrm{d}t$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{[\frac{x}{T}]T}^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=0$$，故原式得证.

本题的结论事实上是周期函数在区间$[0,x]$上的平均值在x趋于正无穷时的极限值就等于$f(x)$在一个周期上的平均值.

本题不能用洛必达法则，因为$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 不一定是无穷大量.

证 2 令 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$

则 $\Phi(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t-\frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{T+x} f(t)\mathrm{d}t-\frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_T^{T+x} f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\Phi(x)$$

$\Phi(x)$ 以 T 为周期，连续，故在$[0,T]$上有界，从而在 R' 上有界，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right]=0$

5-42 设 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，试求

$$\lim_{a\to0^+}\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}[f(x+a)-f(x-a)]\mathrm{d}x$$

解 由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而取 a 充分小，可使 $f(x)$ 在$[-a,a]$上连续，由积分中值定理得

$$\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}[f(x+a)-f(x-a)]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{a}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]\qquad(-a\leqslant\xi\leqslant a)$$

$$=4f'(\eta)\qquad(\text{微分中值定理})$$

$$(-2a\leqslant\xi-a<\eta<\xi+a\leqslant2a)$$

当 $a\to0^+$ 时，$\eta\to0$，又 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，故

$$\lim_{a\to0^+}\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}[f(x+a)-f(x-a)]\mathrm{d}x=4f'(0)$$

本题用一次积分中值定理，一次微分中值定理.

本题可用 5-40 题旁注方法做，请读者自己完成.

5-43 设 $g(x)$，$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $g(x)$ 非负，$f(x)>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x$.

解 由于 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有最小值 m 和最大值 M，又 $f(x)>0$，则 $M>0$，$m>0$. 而 $g(x)$ 非负.

那么 $\sqrt[n]{m}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt[n]{M}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

注意两边夹逼法则是很有用途的.

5-44 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，试证

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\max_{0\leqslant x\leqslant1}|f(x)|$$

本题采用的方法类似于两边夹逼的方法.

证 记 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)| = A$,则 $A = |f(x_0)|$,其中 $x_0 \in [0,1]$.

当 $p > 0$ 时, $$\left(\int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^1 A^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = A$$

对任意的 $\varepsilon > 0$,选取 $\delta > 0$,使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x)| \geqslant A - \frac{\varepsilon}{2}$$

设 $0 \leqslant \alpha \leqslant x_0 \leqslant \beta \leqslant 1$,且 $0 < |\alpha - \beta| < \delta$

则 $$\left(\int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\geqslant \left(\int_\alpha^\beta \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{\frac{1}{p}}$$

因为当 $p \to +\infty$ 时,$(\beta - \alpha)^{\frac{1}{p}} \to 1$,故当 p 充分大时有

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = A - \varepsilon$$

因此 p 充分大时有

$$A - \varepsilon \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = A$$

由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = A$

5-45 任给 $0 < \delta < 1$,求证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_\delta^1 (1 - t^2)^n \mathrm{d}t}{\int_0^1 (1 - t^2)^n \mathrm{d}t} = 0$$

本题主要也是利用两边夹逼法则.

证 由于 $$\int_\delta^1 (1 - t^2)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_\delta^1 (1 - \delta^2)^n \mathrm{d}t$$
$$= (1 - \delta)(1 - \delta^2)^n$$

而 $$\int_0^1 (1 - t^2)^n \mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{\delta}{2}} (1 - t^2)^n \mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{\delta}{2}} \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right)^n \mathrm{d}t$$
$$= \frac{\delta}{2}\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right)^n$$

则 $$0 \leqslant \frac{\int_\delta^1 (1 - t^2)^n \mathrm{d}t}{\int_0^1 (1 - t^2)^n \mathrm{d}t} \leqslant \frac{(1 - \delta)(1 - \delta^2)^n}{\frac{\delta}{2}\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right)^n}$$
$$= \frac{2(1 - \delta)}{\delta}\left(\frac{1 - \delta^2}{1 - \frac{\delta^2}{4}}\right)^n$$

又 $0<\dfrac{1-\delta^2}{1-\dfrac{\delta^2}{4}}<1$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\delta^2}{1-\dfrac{\delta^2}{4}}\right)^n=0$,故原题得证.

5-46 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,试证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi|\sin nx|f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x.$$

证 由于

$$\int_0^\pi|\sin nx|f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin x|f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{n_k})\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\mathrm{d}x,$$

其中 $\frac{k-1}{n}\pi\leqslant\xi_{n_k}\leqslant\frac{k}{n}\pi$,这里应用了积分中值定理.

又 $$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\mathrm{d}t\quad(令\ nx=t)$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^\pi|\sin t|\mathrm{d}t\quad(|\sin x|\ 以\ \pi\ 为周期)$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi|\sin nx|f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{n_k})\int_0^\pi\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{n_k})\int_0^\pi\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x.$$

将(1)式化为(2)式是定积分的重要技巧,之所以这样分是由于在这些区间上 $\sin nx$ 不变号,便于去绝对值.本题既用到积分中值定理,也用到定积分的定义.

5.2.2 定积分的计算

求下列定积分:

5-47 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 原式 $\displaystyle=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

在求关于原点对称的区间上的定积分时,首先应考虑的是函数的奇偶性.

由于 $\dfrac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数，而 $\dfrac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数，

故 $\text{原式}=4\int_0^1 \dfrac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=4\int_0^1 \frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^1 \mathrm{d}x-4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

由定积分的几何意义知 $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ 应为单位圆的面积 π.

原式 $=4-\pi$.

5-48 $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e^{3/4}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

本题的关键是两次凑微分.

解 $\text{原式}=\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e^{3/4}} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

$$=\int_{\sqrt{e}}^{e^{3/4}} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt{\ln x}\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$$

$$=\int_{\sqrt{e}}^{e^{3/4}} \frac{2\mathrm{d}\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$$

$$=2\arcsin(\sqrt{\ln x})\Big|_{\sqrt{e}}^{e^{3/4}}=\frac{\pi}{6}$$

5-49 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

本题事实上是一个三角有理式的积分，当然可以用万能代换作.

解 $\text{原式}=\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x(1-\sin^2 x)}{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}-2+\sqrt{2}$$

5-50 $\displaystyle\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (a>0).$

被积式中含有形如 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的定积分一般令 $x=$

解　原式 $= \int_0^{2a} x\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx$

令 $x-a=a\sin t$

原式 $= a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\,dt$

$= 2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}a^3$

$a\sin t$ 或 $a=\cos t$ 较好.

5-51 $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

本题与上题属同一类型.

解　令 $x=\sin t$

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{2-\sin^2 t}dt$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos t}{1+\cos^2 t}$

$= -\arctan(\cos t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

5-52 $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$　　$(a>0)$

注意计算定积分与计算不定积分的区别.

解　令　$x=a\sin t$.

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$，令 $t=\frac{\pi}{2}-u$

则　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u+\cos u}du$

原式 $= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt\right]$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt = \frac{\pi}{4}$

5-53 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$

被积式中含有形如 $\sqrt{a^2+x^2}$ 的定积分一般可作变换 $x=a\,\mathrm{tg}t$.

解　令 $x=\tan t$.

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sec^2 t}{(2\tan^2 t+1)\sec t}dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt = \arctan(\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= \arctan\frac{1}{2}$

5-54 设 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$，求$\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$ （设 $f''(x)$ 连续）.

解 1 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}2x$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}f'(2x)$$

$$=\frac{1}{2}xf'(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}f(2x)\Big|_0^1$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}(3-1)=2$$

解 2 令 $2x=t$

原式 $=\frac{1}{4}\int_0^2 tf''(t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 t\mathrm{d}f'(t)$$

$$=\frac{1}{4}tf'(t)\Big|_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 f'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}f(t)\Big|_0^2$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}(3-1)=2$$

这类题目一般都是用分部积分法. 这里应注意的是：$f''(2x)$ 表示 $f(2x)$ 对 $2x$（不是对 x）的二阶导数. 为了不易错建议用解 2 的方法做.

5-55 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$

解 1 令 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}=t$，得 $x=\tan^2 t$

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\mathrm{d}\tan^2 t$

$$=t\tan^2 t\,\Big|_0^{\pi/3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t=\pi-(\tan t-t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

解 2 由分部积分公式得

解 1 和解 2 是解被积式仅由一个反三角函数构成的不定积分的两种常用方法.

$$原式 = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3 - \int_0^3 x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\frac{\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}dx$$

$$= \pi - \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}dx$$

$$= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}dt \qquad (令\sqrt{x} = t)$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

5-56 $\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$

解1 令 $t = \arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$.

$$\cos 2t = \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t} = \frac{1-\frac{a-x}{a+x}}{1+\frac{a-x}{a+x}} = \frac{x}{a}$$

$$原式 = \int_{\pi/4}^0 t\,d(a\cos 2t) = at\cos 2t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 + a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,dt$$

$$= \frac{a}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{2}$$

解2 令 $x = a\cos t$

$$原式 = a\int_{\pi/2}^0 \frac{t}{2}d\cos t$$

$$= a\cdot\frac{t}{2}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 - \int_{\pi/2}^0 \frac{a}{2}\cos t\,dt = \frac{a}{2}$$

解3 记 $\omega(x) = \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$,分部积分得

$$原式 = x\arctan\omega(x)\Big|_0^a - \int_0^a x\frac{1}{1+\omega^2}\frac{1}{2\omega}\frac{-2a}{(a+x)^2}dx$$

$$= \int_0^a \frac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{a}{2}$$

5-57 计算$\int_0^1 x^2 f(x)dx$,其中 $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

解 由分部积分法得

解1与解3是解这类题目的两种常用方法.

注意,这里归结为收敛的广义积分.

这类问题一般都是用分部积分法.

原式$= \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^3$

$$= \frac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{12}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(1+x^4)}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{6}(1-\sqrt{2})$$

5-58 $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

本题的两种解法都是用分部积分法，而分部积分的关键在于 u，v 的选取.

解 1 原式$= -\int_0^1 xe^x \mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$$= -\frac{xe^x}{1+x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x + xe^x}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{e}{2} + \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \frac{e}{2} - 1$$

解 2 原式$= \int_0^1 \frac{(x+1-1)e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}e^x - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^x}{1+x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e}{2} - 1$$

5-59 $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

本题是将原式分为两项. 然后第二项分部积分一次出来的积分与第一项抵消，这是一种常用的技巧.

解 原式$= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^2 x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^2 x\mathrm{d}e^{x+\frac{1}{x}}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{1/2}^2 - \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$$

5-60 $\int_{-2}^2 \min\left\{\frac{1}{|x|}, x^2\right\}\mathrm{d}x$

先将被积函数写成分段函数，然后再积分就简单

解　由于 $\min\left\{\dfrac{1}{|x|},x^2\right\}=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{|x|}, & |x|>1\end{cases}$ 是偶函数，因此，

$$\text{原式}=2\int_0^2\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}dx$$

$$=2\int_0^1 x^2dx+2\int_1^2\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{2}{3}+2\ln 2$$

了.

5-61　$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}$

解　$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin^2x}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{1}{\cos^2x}+\tan^2x}dx$$

$$=2\int^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{1+2\tan^2x}=\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

注意本题若用下述方法求解将得到错误结论：$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\Big|_0^{\pi}=0$，这里主要是 $\arctan(\sqrt{2}\tan x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 没定义. 故必须将原积分分为 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}$ 去解，才能得到正确结果.

5-62　$\displaystyle\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$　（n 是自然数）.

解　$$\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|dx \tag{1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x\left|\sin x\right|dx. \tag{2}$$

令　$x=k\pi+t$

则　$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x|\sin x|dx=\int_0^{\pi}(k\pi+t)\sin t\,dt$$

$$=(2k+1)\pi$$

$$\text{原式}=\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\pi$$

$$=n^2\pi$$

为了去掉 $|\sin x|$ 的绝对值，故将 (1) 式化为 (2) 式.

5-63 $\int_0^{\pi}\frac{|\cos x|}{\cos^2 x+2\sin^2 x}\mathrm{d}x$

为了去掉 $|\cos x|$ 的绝对值符号故分成两个区间上的积分.

解 1 原式 $=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x}$$

$$=\arctan(\sin x)\Big|_0^{\pi/2}-\arctan(\sin x)\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

先用周期性,再用奇偶性使问题得以化简.

解 2 $\frac{|\cos x|}{\cos^2 x+2\sin^2 x}$ 以 π 为周期,

原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos x|}{\cos^2 x+2\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos x|}{\cos^2 x+2\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\arctan(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

5-64 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$

注意(2)式的绝对值不可漏掉.

解 2 应用了 $\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

解 1 原式 $=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$ (1)

$$=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}^2\right|\mathrm{d}x \quad (2)$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=4(\sqrt{2}-1)$$

解 2 原式 $=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{\pi/2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=4(\sqrt{2}-1)$$

5-65 $\int_0^{N\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$ (N 为正整数).

本题被积函数以 π 为周期. 所以原积分应等于一个周期上积分的 N

解 1 $\sqrt{1-\sin 2x}$ 以 π 为周期.

原式 $=N\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$

$$= N\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= N\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x - N\int_{\pi/4}^{\pi}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\sqrt{2}N$$

解 2 $\sqrt{1-\sin 2x}$ 以 π 为周期.

$$\text{原式} = N\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= N\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= N\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\sqrt{2}N$$

倍. 解 1 选取了 0 到 π, 解 2 选取了 $\frac{\pi}{4}$ 到 $\pi+\frac{\pi}{4}$ 的一个周期.

5-66 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$

解 原式 $= \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$ (1)

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\arctan(\sin^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4}\arctan(\sin^2 x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$

本题的(1)式应用了关系式 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$, 这是一个重要的关系式.

5-67 $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin^n x\,\mathrm{d}x$

解 原式 $= \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x$ (1)

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x \quad (2)$$

$$= \begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\pi, & (n\text{ 为奇数})\\[2mm] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\pi^2}{2}, & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$$

本题中的(1)式和(2)式分别应用了 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

5-68 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^4 x\,\mathrm{d}x$

解 $\sin^4 x$ 以 π 为周期.

这里还用到 $f(\sin x)$ 图像关于

原式 $= 2\int_0^{\pi} \sin^4 x \mathrm{d}x$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \mathrm{d}x$

$= 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$

$x = \frac{\pi}{2}$ 对称. 故

$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x.$

5-69 试证对任意的正整数 m, n 有

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x = 0$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x = 0$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x = \pi$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x = \pi$

5) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \ \sin mx \ \mathrm{d}x = 0, \qquad m \neq n$

6) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \ \cos mx \ \mathrm{d}x = 0, \qquad m \neq n$

7) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \ \cos mx \ \mathrm{d}x = 0$

证 1) 和 2) 是显然的, 3) 和 4) 类似, 5), (6), (7) 类似, 所以我们只证 3) 和 5).

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \mathrm{d}x = \pi$

5) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \ \sin mx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\mathrm{d}x$

$= 0$

本题的 1) 到 7) 式就是三角函数系 $1, \sin x, \cos x, \cdots, \sin nx, \cos nx, \cdots$ 的正交性. 即该系中任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零. 相同两个函数乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分不为零.

本题的结论在傅里叶级数中十分有用, 应当记住.

5-70 $\int_0^{2\pi} (\sin 2x + \cos x)^2 \mathrm{d}x$

解 原式 $= \int_0^{2\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x + 2\int_0^{2\pi} \sin 2x \cos x \ \mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x$

由上题的结论可知

原式 $= \pi + 0 + \pi$

$= 2\pi$

由三角函数系的周期性可知该系在 $[0, 2\pi]$ 上也具有正交性.

5-71 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

解 令 $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$, 则 $x - a = (b-a)\sin^2 t$

$b - x = (b-a)\cos^2 t$

注意: 5-71, 5-72 实际上是收敛的广义积分.

$$dx = 2(b-a)\sin t\cos t\,dt.$$

$$原式 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

5-72 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$

这是计算定积分的特殊技巧的例题. 我们并未求出 $\ln\sin x$ 的原函数, 却算出了其定积分值.

解 令 $x = 2t$.

$$原式 = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t\cos t)dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t)dt$$

在等式右端最后一项中令 $\frac{\pi}{2} - t = y$

$$原式 = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,dt - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin y dy$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

5-73 $\int_0^1 \frac{x}{e^x + e^{1-x}}dx$

本题中定积分的计算也不是先求出 $\frac{x}{e^x + e^{1-x}}$ 的原函数. 这些技巧值得读者注意.

解 令 $1 - x = t$

$$原式 = \int_0^1 \frac{1-t}{e^{1-t} + e^t}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{e^t + e^{1-t}}dt - \int_0^1 \frac{t}{e^t + e^{1-t}}dt$$

所以 $$原式 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{e^t + e^{1-t}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{de^t}{e^{2t} + e}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e}}\arctan\frac{e^t}{\sqrt{e}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e} - \arctan\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

5-74 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

本题和前两个题的原函数都很难求出. 这种积分一般都是通过变量代

解1 令 $x = \tan t$.

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}\sec^2 t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du \qquad (\text{令 } u=\frac{\pi}{4}-t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln 2-\ln(1+\tan u)]du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2du-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2du=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

解 2 令 $x=\frac{1-t}{1+t}$

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{\ln 2-\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$

$$=\ln 2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

换的特殊技巧来求解.

5-75 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x dx$

解 令 $x=-t$

$$\text{原式}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\sin^4 t\,dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^t}\sin^4 t\,dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^t+1-e^t}{1+e^t}\sin^4 dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^t}{1+e^t}\sin^4 t\,dt$$

$$\text{所以,原式}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dt=\frac{3}{16}\pi$$

本题主要还是应用变量代换.

5-76 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^{e}}$

解 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+(\cot t)^{e}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan t)^{e}}{1+(\tan t)^{e}}dt$$

从而

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^{e}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan x)^{e}}{1+(\tan x)^{e}}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{4}$$

形如 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$ 的积分都可用本题的解法. 本题也属于这种类型.

5-77 试证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ 并求值.

解 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3 t}{\sin x+\cos x}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$$

则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)dx=\frac{\pi-1}{4}$$

用 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 dx=\frac{\pi}{4}$

及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^n x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^n dx$

$=\frac{1}{n+1}$.

5.2.3 积分不等式

5-78 证明 $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant 2e^2$

证 令 $f(x)=e^{x^2-x}$

$$f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=\frac{1}{2}$

$f(0)=1, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, f(2)=e^2$

这种证明一个定积分介于两个数之间的问题一般都可先试用这种最大、最小值法.

所以，$f(x)$ 在$[0,2]$上的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$，最大值为 $f(2)=e^2$，故原不等式得证.

5-79 证明柯西积分不等式，若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在$[a,b]$上可积，则有 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$.

证 对任意的实数 λ

$$\int_a^b(f(x)+\lambda g(x))^2\mathrm{d}x=\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

上式右端是 λ 的非负的二次三项式，则其判别式非正，即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant 0$$

故原式得证.

5-80 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，证明

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x$$

本题关键是利用柯西积分不等式.

证 $f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x$

$$f^2(x)=\left(\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}x\int_0^x f'^2(x)\mathrm{d}x$$
$$=x\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x$$

又因 $f(1)=0$，故 $f(x)=\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x$.

$$f^2(x)=\left(\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_x^1 1^2\mathrm{d}x\int_x^1 f'(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant(1-x)\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

则 $$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x$$

5-81 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$，试证

$$\left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 1$$

证 $\left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right)^2$

$$= (\int_a^b \sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(x)}\sin\lambda x\mathrm{d}x)^2$$

$$\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\sin^2\lambda x\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f(x)\sin^2\lambda x\mathrm{d}x$$

同理可证$\left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f(x)\cos^2\lambda x\mathrm{d}x$,

从而 $\left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x)^2\right) + \left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right)^2$

$$\leqslant \int_a^b f(x)\sin^2\lambda x\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\cos^2\lambda x\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$$

原题得证.

本题主要是应用柯西积分不等式.

5-82 设 $f(x)$,$g(x)$ 都在$[a,b]$上可积,试证

$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

证 $\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x$

$$= \int_a^b (f(x)+g(x))(f(x)+g(x))\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x$$

又由柯西积分不等式得

$$\int_a^b f(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_a^b g(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x \leqslant \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

所以 $\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x$

$$\leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

本题中的不等式是著名的闵可夫斯基不等式.其更一般的形式是 $(\int_b^a \left|f(x)+g(x)\right|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} < \left(\int_a^b \left|f(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|g(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ $(p>0)$

又若记 $\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$ 则此不等式为 $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ 与向量不等式$\left|a+b\right| \leqslant \left|a\right|$

$$=\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\right\},$$

从而 $$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

$+|b|$ 一样.

5-83 试证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

证 1 只需证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\geqslant 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

在第二项积分中,令 $x=\frac{\pi}{2}-t$

得 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t-\cos t}{1+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\left[\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$\geqslant 0$$

故原式得证.

证1主要是利用变量代换,这是证明积分不等式的常用方法之一.

证 2 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1+\xi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1+\eta^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=(\sqrt{2}-1)\left(\frac{1}{1+\xi^2}-\frac{1}{1+\eta^2}\right)$$

其中 $0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\leqslant\eta\leqslant\frac{\pi}{2}$

证2主要是利用积分中值定理.

从而 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2} dx \geqslant 0$$

故原式得证.

5-84 证明 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$

本题的关键是两次应用变量代换.

证 令 $x^2 = u$.

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du\right]$$

在第二个积分中,令 $u = \pi + t$

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}} dt\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right)\sin u du$$

当 $0 < u < \pi$ 时,$\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right)\sin u > 0$

故 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$

5-85 设 $y = f(x)$ 在 $(x \geqslant 0)$ 是严格单调增的连续函数,$f(0) = 0$,$x = g(y)$ 是它的反函数.

这一结论从几何直观上看是十分明显的.

证明 $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(y)dy \geqslant ab \quad (a \geqslant 0, b \geqslant 0)$

证 若 $ab = 0$,结论显然成立,故设 $a > 0, b > 0$.

1) 若 $b = f(a)$,参阅图5.5,显然有$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(y)dy = ab$.

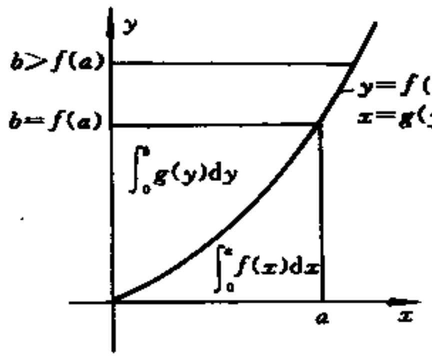


图5.5

2) 若 $b > f(a)$,设 $f(a) = c$ 及 $g(c) = a$,则 $0 < c < b$,

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\mathrm{d}y$$
$$= \left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^c g(y)\mathrm{d}y\right] + \int_c^b g(y)\mathrm{d}y$$
$$= ac + \int_c^b g(y)\mathrm{d}y$$
$$\geqslant ac + \int_c^b g(c)\mathrm{d}y$$
$$= ac + a(b-c) = ab$$

3) 若 $b < f(a)$ 同理可证.

5-86 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导,$f(0) = f(2) = 1$,图 5.6,$|f'(x)| \leqslant 1$,试证 $1 \leqslant \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 3$.

证 $f(x) - f(0) = f'(c_1)(x-0), \qquad c_1 \in (0,x)$

$f(x) - f(2) = f'(c_2)(x-2), \qquad c_2 \in (x,2)$

又 $|f'(x)| \leqslant 1$

则 $1 - x \leqslant f(x) = 1 + f'(c_2)x \leqslant 1 + x, \qquad x \in [0,1]$

$x - 1 \leqslant f(x) = 1 + f'(c_2)(x-2) \leqslant 3 - x, \qquad x \in [1,2]$

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x = 1$$
$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (3-x)\mathrm{d}x = 3$$

本题主要是利用微分中值定理.这也是证明积分不等式的一种常用方法.

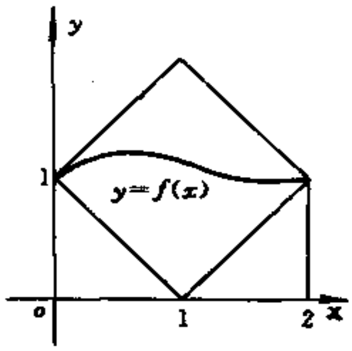


图 5.6

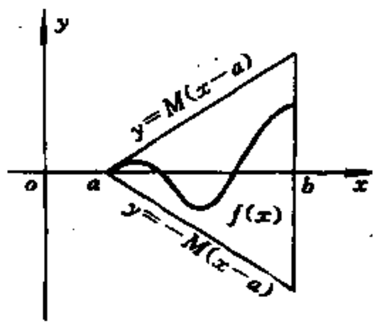


图 5.7

5-87 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数,$f(a) = 0$,图 5.7,试证

$\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| \geqslant \dfrac{2}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

证1 因为 $f(x)=f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$

所以 $|f(x)|=|f'(c)|(x-a)\leqslant \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|(x-a)$

则 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x$

$$=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{2}$$

故原式得证.

本题的证1主要也是应用微分中值定理.

证2 $f(x)=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x$

$$|f(x)|\leqslant\int_a^x|f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant(x-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$$

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x$$

$$=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{2}$$

5-88 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，$f(0)=f(1)=0$，且 $f(x)\neq 0(x\in(0,1))$.

本题的关键是用微分中值定理.

求证 $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4$.

证 如果积分 $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$ 发散于 $+\infty$，结论显然成立，以下假设

$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$ 收敛.

又在 $(0,1)$ 上 $f(x)\neq 0$，由 $f(x)$ 的连续性可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上同号，不妨设 $f(x)>0$（否则考虑 $-f(x)$，同时由于 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故存在 $x_0\in(0,1)$. 使得

$f(x_0)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant 1}f(x)>0$，于是

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x \qquad (1)$$

由微分中值定理可知，分别存在 $\alpha\in(0,x_0)$ 及 $\beta\in(x_0,1)$ 使得

$$f'(\alpha)=\frac{f(x_0)}{x_0},\ f'(\beta)=-\frac{f(x_0)}{1-x_0}$$

又 $\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_\alpha^\beta f''(x)\mathrm{d}x\right|$

$$=|f'(\beta)-f'(\alpha)|=\frac{f(x_0)}{x_0(1-x_0)}\geqslant 4f(x_0)$$

故 $\frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x>4$

由式(1)得 $\int_0^1 \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \mathrm{d}x > 4$

5-89 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且单调增加,求证 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证 1 考虑辅助函数

$$F(x) = \int_a^x tf(t)\mathrm{d}t - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= xf(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{a+x}{2}f(x) \\ &= \frac{x-a}{2}f(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{x-a}{2}f(x) - \frac{x-a}{2}f(x), \qquad (f(x)\text{ 单增}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

又 $F(a) = 0$

所以 $F(x) \geqslant 0, x \in [a,b]$

故 $F(b) \geqslant 0$,即原不等式成立

本题三种证明方法的主要思想是构造辅助函数,这也是证明积分不等式的一种常用方法.

证 2 因为 $f(x)$ 单调增加,

所以 $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \geqslant 0$

从而 $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x \geqslant 0$

即

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

故 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

证 3

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= f(\alpha)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(\beta)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}[f(\beta)-f(\alpha)] \quad \left(a\leqslant\alpha\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\beta\leqslant b\right)$$

$$\geqslant 0$$

故原式得证.

5-90 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上连续且单调增,试证明对任何 $b>a>0$,皆有

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]$$

本题的两种证法主要仍是构造辅助函数.

证 1　令 $F(x) = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\qquad x\geqslant 0$

则

$$\begin{aligned}
b\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x &= F(b)-F(a)\\
&= \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)\right]\mathrm{d}x\\
&\leqslant \int_a^b[xf(x)+xf(x)]\mathrm{d}x\\
&= 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

故 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left[b\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_a^a f(x)\mathrm{d}x\right]$

证 2　令 $F(x) = \int_a^x tf(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right]$

则

$$\begin{aligned}
F'(x) &= xf(x) - \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\left[xf(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\\
&\geqslant \frac{1}{2}[xf(x)-xf(x)] \qquad (x\geqslant a)\\
&= 0
\end{aligned}$$

又　$F(a)=0$

所以　$F(x)\geqslant 0, x\geqslant a$

故　$F(b)\geqslant 0$,即原不等式得证.

5-91 设 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{a},a\right]$ 上非负连续 $(a>0)$，且 $\int_{-\frac{1}{a}}^{a}xf(x)\mathrm{d}x=0$. 求证 $\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

本题主要也是考虑辅助函数.

证 由于 $f(x)$ 非负，则当 $x\in\left[-\dfrac{1}{a},a\right]$ 时，

$$\left(x+\frac{1}{a}\right)(a-x)f(x)\geqslant 0$$

从而 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{a}}^{a}\left(x+\frac{1}{a}\right)(a-x)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$

即 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\mathrm{d}x+\left(a-\frac{1}{a}\right)\int_{-\frac{1}{a}}^{a}xf(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$

已知 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{a}}^{a}xf(x)\mathrm{d}x=0$

故 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\mathrm{d}x$

5-92 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$，试证：

本题的关键是考虑辅助函数 $(x-\frac{1}{2})f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的积分.

1) 存在 $x_0\in[0,1]$，使 $|f(x_0)|>4$；

2) 存在 $x_1\in[0,1]$，使 $|f(x_1)|=4$.

证 1) 反证法，如果 $|f(x)|\leqslant 4$，

那么 $\displaystyle 1=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|\mathrm{d}x$

$$\leqslant 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=1$$

由此推出 $\displaystyle\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|\mathrm{d}x=1$

从而 $\displaystyle\int_0^1(4-|f(x)|)\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=0$

即得 $|f(x)|\equiv 4$，又 $f(x)$ 连续，可见 $f(x)\equiv 4$ 或 $f(x)\equiv -4$，这都与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

2) 首先证明存在 $x_2\in[0,1]$ 使 $|f(x_2)|<4$. 否则由 $f(x)$ 的连续性知 $f(x)\geqslant 4$ 或 $f(x)<-4$ 在 $[0,1]$ 上恒成立，这些都与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾. 再由本题 1) 的结论及 $\left|f(x)\right|$ 的连续性知存在 $x_1\in[0,1]$ 使，$\left|f(x_1)\right|=4$.

5-93 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0, \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0, \cdots, \int_0^1 x^{n-1}f(x)\mathrm{d}x = 0$，而 $\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 1$，试证在 $[0,1]$ 上至少存在一点 x_0，使得 $|f(x_0)| \geqslant 2^n(n+1)$.

证 反证法，设在 $[0,1]$ 上处处有 $|f(x)| < 2^n(n+1)$.

令 $$I = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x$$

由原题设可知 $I = 1$

而
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 \left| \left(x - \frac{1}{2}\right)^n f(x) \right| \mathrm{d}x \\ &< 2^n(n+1)\int_0^1 \left| \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \right| \mathrm{d}x \\ &= 2^n(n+1)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^n \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}x\right] = 1 \end{aligned}$$

即 $I = 1$，矛盾.

故原题得证.

5-94 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，且对 $[a,b]$ 内任意两点 x,y 及 $0 < \lambda < 1$，有
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

试证 $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

本题中的 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数. 本题主要是利用凸函数的定义及变量代换证明了所要证的不等式.

证 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$$

在 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$ 中令 $x = a + b - t$

那么
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)]\mathrm{d}x \\ &\geqslant 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

不等式左端得证.

令 $$t = \frac{b-x}{b-a}, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

则 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f[ta + (1-t)b]\mathrm{d}t$$

$$\leqslant (b-a)\int_0^1 [tf(a)+(1-t)f(b)]\mathrm{d}t$$
$$=(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$$

不等式右端得证. 故原不等式得证.

5-95 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(x)\geqslant a>0$,

试证 $\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x\leqslant \ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

证 1 由于 $f(x)$ 连续且 $f(x)\geqslant a>0$, 因此, $\ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 故有

$$\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \tag{1}$$
$$=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \tag{2}$$
$$=\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证 1 中的(1)式利用了凸函数(本题中 $\ln x$ 是凸函数) 的性质. 即
$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)}{n}\leqslant f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right).$$

证 2 设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$, 则 $a>0$, 又曲线 $y=\ln x$ 下凹, 则其上任一点的切线都在曲线上方, 而在 $x=a$ 处的切线为
$$y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$$

对任一点 $x=f(t)>0$, 都有
$$\ln f(t)\leqslant \ln a+\frac{1}{a}[f(t)-a]$$

则
$$\int_0^1 \ln f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 \ln a\,\mathrm{d}t+\frac{1}{a}\int_0^1[f(t)-a]\mathrm{d}t$$
$$=\ln a+\frac{1}{a}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-1$$
$$=\ln a+\frac{1}{a}\cdot a-1=\ln a$$
$$=\ln\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

故 $\int_0^1 \ln f(t)\mathrm{d}t\leqslant \ln\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

证 3 易证明当 $t>0$ 时有不等式

$$\ln t < t - 1$$

令 $t = \dfrac{f(x)}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$,得

$$\ln f(x) - \ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x < \frac{f(x)}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x} - 1$$

上式两边从 0 到 1 对 x 积分得

$$\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x - \ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x < \frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x} - 1$$

故 $$\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x < \ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

5-96 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续且单调减,试证对任何 $a \in (0,1)$ 有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证 1 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= (1-a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= (1-a)af(\alpha) - (1-a)af(\beta), \qquad (1)$$

其中 $0 \leqslant \alpha \leqslant a, a \leqslant \beta \leqslant 1$

又 $f(x)$ 单调减,则 $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$.

故原式得证.

本题证 1 中的 (1) 式是应用了积分中值定理.

证 2 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x - a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= (1-a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant (1-a)af(a) - a(1-a)f(a) \qquad (1)$$

$$= 0$$

故原式得证.

证 2 中的(1) 式是利用了 $f(x)$ 的单调性及积分的不等式性质.

证 3 令 $x = at$.

注意 $at \leqslant t$.

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = a\int_0^1 f(at)\mathrm{d}t \geqslant a\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

故原式得证.

本题知说 $f(x)$ 严格单调减，则要证的不等式也是严格的不等式.

证 4 设 $F(a) = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$F'(a) = f(a) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(a) - f(\xi)$, $(\xi \in (0,1))$

故当 $0 \leqslant a \leqslant \xi, F'(a) \geqslant 0, F(a)$ 单调增，$F(a) \geqslant F(0) = 0$

当 $\xi < a \leqslant 1, F'(a) \leqslant 0$, $F(a)$ 单调减，$F(a) \geqslant F(1) = 0$ 则 $F(a)$ 的最小值只能在端点取得，故对一切的 $a \in (0,1)$ 有 $F(a) > F(0) = 0$，原不等式得证. 证毕.

5-97 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调减且分段连续，试证 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x > 0$ （n 是自然数）.

证 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x + \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{4\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x + \cdots + \int_{\frac{(2n-2)\pi}{n}}^{\frac{2n\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

由于 $\sin nx$ 的周期为 $2\pi/n$，故本题将原积分区间 $[0, 2\pi]$ 分为 n 个长度为 $2\pi/n$ 的区间，然后利用变量代换证明这 n 个子区间上的积分都大于零.

又 $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

在第二项积分中，令 $x = \frac{\pi}{n} + t$

则 $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{n}} f\left(\frac{\pi}{n} + x\right)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left[f(x) - f\left(\frac{\pi}{n} + x\right)\right]\sin nx\mathrm{d}x > 0$$

同理可证(1)式中其它各项大于零，故原题得证.

5.2.4 杂例

5-98 设 $f(x) = x(1-x)^5 + \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

这类问题一般都采用等式两边同时作定积分的方

解 对等式 $f(x)=x(1-x)^5+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 两边从 0 到 1 积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1-x)^5\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

即
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=2\int_0^1 x(1-x)^5\mathrm{d}x\quad(\text{令 }1-x=t)\\&=2\int_0^1 t^5(1-t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{21}\end{aligned}$$

则
$$f(x)=x(1-x)^5+\frac{1}{42}$$

法.

5-99 设 $f(x)=x-\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x$，试求 $f(x)$

解 1 原等式两端同乘以 $\cos x$ 并从 0 到 π 积分得

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi x\cos x\mathrm{d}x-\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x\cdot\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x$$
$$=-2$$

则
$$f(x)=x-(-2)=x+2$$

解 2
$$\begin{aligned}f(x)&=x-\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}\sin x\\&=x-f(x)\sin x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\sin x f'(x)\mathrm{d}x\\&=x+\int_0^\pi\sin x f'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故原式 $f(x)=x-\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x$ 知 $f'(x)=1$

则
$$f(x)=x+\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=x+2$$

本题与上题类似，解 1 具有一般性，解 2 是本题的一种特殊解法.

5-100 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解 原等式两端分别从 0 到 1 和从 0 到 2 积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{d}x\cdot\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x-\int_0^2 x\mathrm{d}x\cdot\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+4\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

即
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

本题与前面两题属同一类型，但这里有两个定积分的值需求出来.

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{8}{3} - 2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + 4\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

从以上两式可解得：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

则 $$f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

5-101 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & |x| > 1 \end{cases}$

试求 $\int_0^3 xf(x-1)\mathrm{d}x$.

本题提供了这类问题一般常用的两种解法. 但一般情况下解 1 要方便些.

解 1 令 $x - 1 = t$

$$\int_0^3 xf(x-1)\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 (1+t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^2 (1+t)\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} + \ln 2$$

解 2 由于当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时，$\left|x - 1\right| \leqslant 1$

当 $2 < x \leqslant 3$ 时，$|x-1| > 1$

则 $\int_0^3 xf(x-1)\mathrm{d}x$

$$= \int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\int_2^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$= -\frac{x}{x-1}\bigg|_2^3 + \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \ln 2$$

5-102 设 $I(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x) = x$，

$g(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 求 $I(x)$.

解　令　$x-t=u$

$$I(x)=\int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u$$

当 $x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，

$$I(x)=\int_0^x (x-u)\sin u\mathrm{d}u$$
$$=-(x+\sin x)$$

当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时，

$$I(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-u)\sin u\mathrm{d}u$$
$$=-(x+1)$$

本题当然也可以先求出 $g(x-t)$，再代入原式求 $I(x)$，但较繁.

5-103　设 $f(x)=\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$.

解　当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\int_0^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{x}{2}$

当　$0<x\leqslant 1$ 时，

$$f(x)=\int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}$$

当　$1<x$ 时，

$$f(x)=\int_0^1 t(x-t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{x}{2}-1$$

则　$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & x\leqslant 0\\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}, & 0<x<1\\ \frac{1}{2}, & x>1\end{cases}$$

$f'(1)$ 不存在.

这类问题一般要先求出 $f(x)$，然后再求 $f'(x)$.

5-104　设 $y=y(x)$ 由 $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 u\mathrm{d}u$ 所确定，试求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　原式两边对 x 求导，

$$2-\sec^2(x-y)(1-y')=\sec^2(x-y)(1-y')$$

$$1 - y' = \cos^2(x - y)$$
$$y' = \sin^2(x - y)$$
$$y'' = \sin(2x - 2y)(1 - y')$$
$$= \sin(2x - 2y)\cos^2(x - y)$$

5-105 设 $y = y(x)$ 由 $x - \int_1^{y+x} e^{-u^2} du = 0$ 所确定，试求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解 由原式可知 $x = 0$ 时，$y = 1$.

原式两端对 x 求导得

$$1 - e^{-(x+y)^2}(1 + y') = 0$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入上式得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e - 1$$

(1) 式两端对 x 求导得

$$2(x + y)e^{-(x+y)^2}(1 + y')^2 - e^{-(x+y)^2}y'' = 0$$

将 $x = 0, y = 1, y' = e - 1$，代入上式得

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = 2e^2$$

5-106 证明恒等式.

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}, \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2}).$$

证 记 $\Phi(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int^{\cos} 2x_0 \arccos\sqrt{t}\,dt$.

$$\Phi'(x) = 2x\sin x\cos x - 2x\sin x\cos x = 0$$

则 $\Phi(x) = C, \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

又 $\Phi(\frac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos\sqrt{t}\,dt$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin\sqrt{t} + \arccos\sqrt{t})dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{4}$$

故 $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$

证明这类等式一般都采用微分的方法.

5-107 设 $f(x)$ 连续，试证 $\int_0^x f(x-u)u\mathrm{d}u = \int_0^x\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$

证 1 令 $x-u=t$.

$$\int_0^x f(x-u)u\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t$$
$$= x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)t\mathrm{d}t$$

从而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(x-u)u\mathrm{d}u$

$$= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x)$$
$$= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

又 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x$

则 $\int_0^x f(x-u)u\mathrm{d}u = \int_0^x\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u + C$

将 $x=0$ 代入上式得 $C=0$，故原式得证.

证 2 由以上的证明已知

$$\int_0^x f(x-u)u\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u$$

又由分部积分可知

$$\int_0^x[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}u$$
$$= u\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\Big|_0^x - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$
$$= x\int_0^x f(x)\mathrm{d}x - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$
$$= x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u$$

故原式得证.

证 1 仍采用了两边微分的方法.

证 2 采用了分部积分法.

5-108 设 $f(x)$ 连续且积分 $\int_0^1[f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t$ 的结果与 x 无关，试求 $f(x)$.

解 记 $\int_0^1[f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t = C_0$

$$\int_0^1[f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t = f(x)+x\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$$

令 $\qquad xt = u$

$$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

从而 $\quad \int_0^1[f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t$

$$= f(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = C_0$$

由 $f(x)$ 连续,知 $f(x)$ 可导,从而有

$$f'(x)+f(x)=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = -\mathrm{d}x$$

两边积分得 $\quad f(x) = C\mathrm{e}^{-x}$ （C 为任意常数）.

本题仍采用微分的方法. 本题中处理 $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ 对 x 导数的方法是一种常用方法,望读者注意.

5-109 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,且对任意的正数 a,b,积分 $\int_a^{ab} f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关,且 $f(1)=1$,求 $f(x)$.

解 由于 $f(x)$ 连续且 $\int_a^{ab} f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关,

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\int_a^{ab} f(x)\mathrm{d}x\right)=0$$

即

$$bf(ab)-f(a)=0$$

在上式中,令 $a=1$,

$$bf(b)-1=0$$

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad x\in(0,+\infty)$$

5-110 设 $f(x)$ 在 $x>0$ 时连续,$f(1)=3$.且 $\int_1^{xy} f(t)\mathrm{d}t = x\int_1^y f(t)\mathrm{d}t + y\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \quad (x>0,y>0)$,试求 $f(x)$.

解 原等式两端对 y 求导得

$$xf(xy) = xf(y)+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

令 $y=1$ 得,

$$xf(x) = 3x+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

上式两端对 x 求导得

$$f(x)+xf'(x) = 3+f(x)$$

本题分别对 y 和 x 各求一次导数,然后积分求得结果.

所以 $f'(x) = \frac{3}{x}$

$$f(x) = \int \frac{3}{x}\mathrm{d}x$$

$$= 3\ln x + C$$

又 $f(1) = 3$,得 $C = 3$,故 $f(x) = 3\ln x + 3$

5-111 设 $f(x)$ 连续,$f(x) \not\equiv 0$,且对任意的实数 x,y 有 $f(x+y) = f(x)f(y)$,试求 $f(x)$.

解 等式 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 两边对 y 积分,

$$\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}y = f(x)\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

$$= Cf(x)$$

在$\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}y$ 中,令 $x+y=u$

则
$$\int_{x+a}^{x+b} f(u)\mathrm{d}u = Cf(x)$$

由于 $f(u)$ 连续,那么等式左端是 x 的可导函数,从而右端也可导,即 $f(x)$ 可导,等式 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 两端对 y 求导,并令 $y=0$,得

$$f'(x) = f'(0)f(x)$$

又由于 $f(x) = f(x)f(0)$,而 $f(x)\not\equiv 0$,因此 $f(0) = 1$

由此得
$$f(x) = \mathrm{e}^{f'(0)x}$$

注意本题一开始不能直接对等式两边求导,因为这时只知 $f(x)$ 连续,本题利用等式两边作定积分的方法先证明了 $f(x)$ 可导性.

5-112 试证连续函数 $f(x)$ 是周期函数的充要条件是:存在 $T>0$,使对一切的 x 有$\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

证 必要性:由于 $f(x)$ 是周期函数,则存在 $T>0$,使得 $f(x+T) = f(x)$.

又 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = f(x+T) - f(x) \equiv 0$

故
$$\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = C$$

令 $x = 0$, 则 $C = \int_x^T f(t)\mathrm{d}t$

即 $\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$

充分性:等式$\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_x^T f(t)\mathrm{d}t$

两端对 x 求导,得

本题的结论在一般教科书中只给出必要性的证明,并且采用的是换元法.这里采用了变上限求导的方法,比较方便.

$$f(x+T)-f(x)\equiv 0$$

则 $f(x)$ 是周期函数.

注：T 不一定是最小周期.

5-113 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且非负，试证 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 的充要条件是在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

证 充分性是显然的，以下证明必要性.

证1 反证法，假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒等于零，则至少存在一点 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)>0$，由 $f(x)$ 的连续性知存在区间 $[\alpha,\beta]$ 使 $x_0\in[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 且在 $[\alpha,\beta]$ 上 $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$.

则
$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x>\frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha)>0$$

又
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x>0$$

矛盾，故 $f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

证1是利用了连续函数若在某一点大于零，则必在这点的某个邻域大于零这个重要性质.

证2 对一切的 $x\in[a,b]$ 有
$$0\leqslant\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$$

从而
$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\equiv 0,\qquad x\in[a,b]$$

那么
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\equiv 0$$

即 $f(x)\equiv 0$

原题得证.

证2主要是利用变上限求导，比较方便.

5-114 试证 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证 因为 $f(-x)=f(x)$，即 $f(x)$ 是偶函数，所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有界.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2\mathrm{e}^{x^2}-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{1}{2}$$

因而存在 $A>0$，使得对一切 $x\in[A,+\infty)$ 有 $0<f(x)<1$，又 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上连续，故存在 $M_1>0$ 使得对一切 $x\in[0,A]$ 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M_1$，取 $M=\max(1,M_1)$，则对一切 $x\in[0,+\infty)$ 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$.

故原题得证.

我们知道有限闭区间上连续的函数必有界. 而本题是无穷区间，为此我们只需证明极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在即可.

5-115 设 $x \geqslant 0$,证明 $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$ (n 为正整数)的最大值不超过$\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

证 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n} x$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=1, x=k\pi. k=0,1,2,\cdots$

由于当 $0 \leqslant x<1$ 时 $f'(x) \geqslant 0$,而 $1<x<+\infty$ 时 $f'(x) \leqslant 0$,则 $f(1)$ 为 $f(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 时的最大值.

$$
\begin{aligned}
f(1) &=\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 (t-t^2) t^{2n}\,\mathrm{d}t \\
&=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}
\end{aligned}
$$

原题得证.

5-116 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,\mathrm{d}t$,

1) 证明 $f(x+\pi)=f(x)$;

2) 求 $f(x)$ 的最大值,最小值.

解 1) 令 $u=t+\pi$,则 $|\sin t|=|\sin u|$

故 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}} |\sin u|\,\mathrm{d}u$

$=f(x+\pi)$

2) 由 1) 知 $f(x)$ 以 π 为周期,故只需求出 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上的最大值、最小值即可.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x| \\
&=|\cos x|-|\sin x|
\end{aligned}
$$

令 $f'(x)=0$,得,$x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{3\pi}{4}$

$$f(\pi)=f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t=1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}$$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}$. 故最大值为$\sqrt{2}$,最小值为 $2-\sqrt{2}$.

5-117 试证方程$\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t + \int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$有且只有一个实根.

证 设$f(x) = \int_0^x \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}t + \int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

那么 $$f'(x) = \sqrt{1+x^4} + \mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cdot \sin x$$

由于$\sqrt{1+x^4} \geqslant 1$,等号仅在$x = 0$时成立,而$0 < \mathrm{e}^{-\cos^2 x} \leqslant 1$,$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

则 $-1 \leqslant \mathrm{e}^{-\cos^2 x}\sin x \leqslant 1$

又 $x = 0$时,$\sqrt{1+x^4} + \mathrm{e}^{-\cos^2 x}\sin x > 0$

则 $f'(x) > 0$

即 $f(x)$严格单增.

又 $f(0) = \int_1^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t < 0$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t > 0$$

故原方程有且仅有一个实根.

讨论用变上、下限积分定义的函数方程根的问题,与讨论一般函数方程根问题所用方法一样.

5-118 设$f(x)$在$[0,1]$上可导,且满足$f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,\mathrm{d}x$,试证:存在$c \in (0,1)$,使$f'(c) = -\frac{f(c)}{c}$.

证 由积分中值定理得.存在$\xi \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$,使

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,\mathrm{d}x = \xi f(\xi)$$

即 $f(1) = \xi f(\xi)$.

令 $F(x) = xf(x)$,则$F(x)$在$[\xi,1]$上满足罗尔定理的条件,故存在$c \in (\xi,1)$使$F'(c) = 0$,

即 $$f(c) + cf'(c) = 0$$

故 $$f'(c) = -\frac{f(c)}{c}$$

本题用一次积分中值定理,再用一次微分中值定理.

5-119 设$f(x)$有界可微,且$|f(x) + f'(x)| \leqslant 1$,试证 $|f(x)| \leqslant 1$.

证 由$|f(x) + f'(x)| \leqslant 1$ 知

$$-1 \leqslant f(x) + f(x) \leqslant 1$$
$$-\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^x[f(x) + f'(x)] \leqslant \mathrm{e}^x$$
$$-\mathrm{e}^x \leqslant (\mathrm{e}^x f(x))' \leqslant \mathrm{e}^x$$

对以$f(x) + f'(x)$为条件或结论的问题往往要考虑辅助函数$\mathrm{e}^x f(x)$.

$$-\int_{-\infty}^{x} e^x dx \leqslant e^x f(x)\Big|_{-\infty}^{x} \leqslant \int_{-\infty}^{x} e^x dx$$

由 $f(x)$ 的有界性知 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x f(x) = 0$,

则 $$-e^x \leqslant e^x f(x) \leqslant e^x$$

即 $$-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

故 $$|f(x)| \leqslant 1$$

5-120 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$. 试证至少存在一点 $c \in (a,b)$,使 $f'(c) = 0$.

证 由积分中值定理知:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\alpha)(b-a), \qquad \alpha \in [a,b]$$

又 $\int_a^b f(x)dx = 0$,则 $f(\alpha) = 0$. 以下证明在 $[a,b]$ 内还存在另外一点 β,使 $f(\beta) = 0$. 若不然,即若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 仅有一点 α,使 $f(\alpha) = 0$. 则 $f(x)$ 在两个区间 $[a,\alpha]$,$[\alpha,b]$ 上应分别保持同号,但在两个区间上却为异号(这是由于 $\int_a^b f(x)dx = 0$).

由此可以推知 $(x-\alpha)f(x)$ 在 $[a,b]$ 上保持同号且仅在 $x=\alpha$ 处为零,从而 $\int_a^b (x-\alpha)f(x)dx \neq 0$,但这与 $\int_a^b (x-\alpha)f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx - \alpha\int_a^b f(x)dx = 0$. 相矛盾,故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有两点 α 和 β 使 $f(\alpha) = f(\beta) = 0$,在 α 与 β 两点之间对 $f(x)$ 用一次罗尔定理可知:存在点 $c \in (a,b)$,使得 $f'(c) = 0$.

本题中考虑积分 $\int_a^b (x-\alpha)f(x)dx$ 这种思想方法读者应该注意.

5-121 若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$. 试证在 $(0,\pi)$ 内存在 $\alpha,\beta(\alpha \neq \beta)$,使 $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

证 由于 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = 0$,则 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上至少有一个零点 α,否则 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上恒正或恒负,这与 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = 0$ 矛盾. 以下证明至少还应有另外一点 $\beta \in (0,\pi)$,$\beta \neq \alpha$,使 $f(\beta) = 0$,否则 $f(x)$ 应在 $(0,\alpha)$,(α,π) 上分别保持同一符号,且这两个区间上异号(否则 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx$ 不会为零).

由以上讨论知 $f(x)\sin(x-\alpha)$ 在 $(0,\pi)$ 上保持同号且仅在 $x=\alpha$

本题的关键是考虑积分 $\int_0^\pi f(x)\sin(x-\alpha)dx$.

处为零，从而积分

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x-\alpha)\mathrm{d}x \neq 0$$

但这与 $\int_0^{\pi} f(x)\sin(x-\alpha)\mathrm{d}x$

$$= \cos\alpha\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x - \sin\alpha\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$$

$$= 0$$

相矛盾，从而 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内除 α 之外，必另有一零点 β，故原题得证.

5-122 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对一切不大于正整数 N 的非负整数 n，都有 $\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$，试证 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $N+1$ 个零点.

证 如果 $f(x)\equiv 0$，则结论显然成立.

如果 $f(x)\not\equiv 0$，则可以证明，至少存在 $N+1$ 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_{N+1}\in(a,b)$，$x_1<x_2<\cdots<x_{N+1}$，使得 $f(x)$ 在 $x_k(k=1,2,\cdots,N+1)$ 的左、右邻域内符号相反. 事实上，假设这样的点只有 m 个，$m\leqslant N$，不妨设 $x\in(a,x_1)$ 时，$f(x)\geqslant 0$，$x\in(x_1,x_2)$ 时，$f(x)\leqslant 0$，依此类推. 令 $p(x)=(x_1-x)(x_2-x)\cdots(x_m-x)$，则当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)p(x)\geqslant 0$，且 $f(x)p(x)\not\equiv 0$，于是由 $f(x)p(x)$ 的连续性知

$$\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x > 0 \qquad (1)$$

另一方面，由于 $p(x)$ 是 x 的 m 次多项式，且 $m\leqslant N$，所以由题设条件得

$$\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x = 0$$

但这与(1)式相矛盾，因此至少存在 $N+1$ 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_{N+1}$ 属于 (a,b)，使得 $f(x)$ 在 $x_k(k=1,2,\cdots,N+1)$ 的左、右邻域内符号相反. 故由 $f(x)$ 的连续性知 $f(x_k)=0\quad(k=1,2,\cdots,N+1)$. 于是 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $N+1$ 个零点.

5.2.5 定积分的应用

这种面积问题一般先画草图，然后根据草图确定被积函数和上、下限.

5-123 试求由抛物线 $(y-2)^2=x-1$ 和抛物线相切于纵坐标 $y_0=3$ 处的切线以及 x 轴所围成图形的面积.

解 抛物线 $(y-2)^2=x-1$ 在 $y_0=3$ 处的切线为 $y-3=\frac{1}{2}(x-2)$，如图 5.8 所示.

$$\mathrm{d}A = [(y-2)^2+1-(2y-4)]\mathrm{d}y$$

$$A=\int_0^3[(y-2)^2+1-(2y-4)]\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^3(y^2-6y+9)\mathrm{d}y=9$$

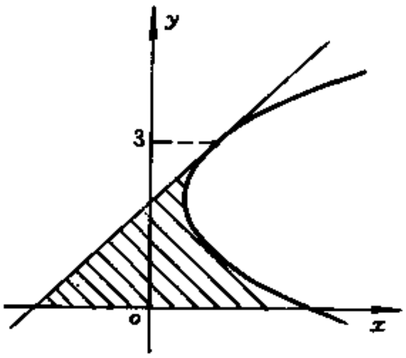


图 5.8

5-124 试求由双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$所围成且在$x^2+y^2=a^2/2$内部的图形的面积.

解 由对称性可知,总面积应等于第一象限部分面积的 4 倍(参阅图 5.9)所示.

在极坐标下双纽线的方程为

$$\rho^2=\frac{a^2\cos 2\theta}{2}$$

圆的方程为 $\rho=\frac{a^2}{2}$

交点处的 $\theta=\frac{\pi}{6}$,如图 5.9 所示,

$$A_1=\frac{\pi}{24}a^2$$

$$A_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{4}\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$A=4(A_1+A_2)$$
$$=\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$$

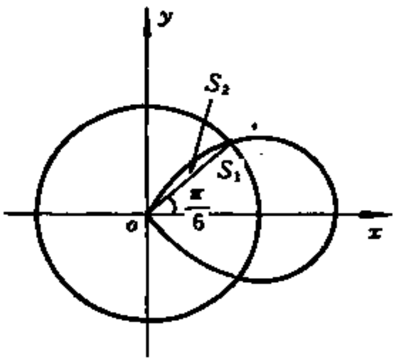


图 5.9

5-125 试求由抛物线 $y^2=4ax\quad(a>0)$ 与过焦点的弦围成图形面积的最小值.

解 取抛物线的焦点为极点,在极坐标下抛物线的方程为

$$\rho = \frac{2a}{1-\cos\theta}$$

设过焦点的弦与 x 轴正向的夹角为 α，如图 5.10 所示.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi}\left(\frac{2a}{1-\cos\theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta$$

$$A'_\alpha = 2a^2\left[\frac{1}{(1+\cos\alpha)^2} - \frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}\right] = \frac{-8a^2\cos\alpha}{\sin^4\alpha}$$

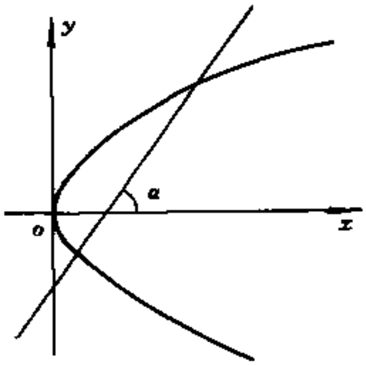


图 5.10

令 $A'_\alpha = 0$，得 $\alpha = \frac{\pi}{2}$

显然 A 在 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时有极小值，事实上也是最小值.

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，

$$A = 2\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{8a^2}{3}$$

5-126 求圆域 $x^2+(y-b)^2 \leqslant a^2$ $(b>a)$ 绕 x 轴旋转而成的圆环体的体积.

解 1 如图 5.11 上半圆周为 $y_2 = b+\sqrt{a^2-x^2}$，下半圆周为 $y_1 = b-\sqrt{a^2-x^2}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= (\pi y_2^2 - \pi y_1^2)\mathrm{d}x \\ &= \pi[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2 - (b-\sqrt{a^2-x^2})^2]\mathrm{d}x \\ &= 4\pi b\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \\ &= 8\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \\ &= 8\pi b\cdot\frac{\pi a^2}{4} = 2\pi^2a^2b. \end{aligned}$$

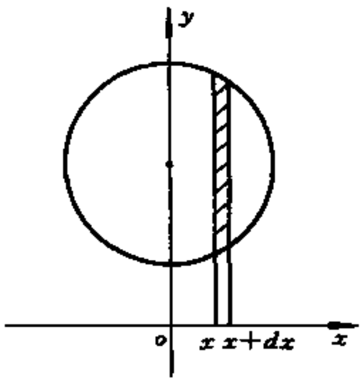


图 5.11

解 1 采用对 x 积分的方法. 在计算中利用了 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{4}$，即左端积分应等于圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 的面积的 $\frac{1}{4}$.

解 2 如图 5.12 所示.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= 2x\mathrm{d}y\cdot 2\pi y \\ &= 4\pi y\sqrt{a^2-(y-b)^2}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

解 2 采用了对 y 积分的方法.

$$V = 4\pi\int_{b-a}^{b+a} y\sqrt{a^2-(y-b)^2}\,dy$$
$$= 4\pi\int_{-a}^{a}(t+b)\sqrt{a^2-t^2}\,dt$$
(令 $y-b=t$)
$$= 8\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-t^2}\,dt$$
$$= 8\pi b\cdot\frac{\pi a^2}{4}$$
$$= 2\pi^2a^2b$$

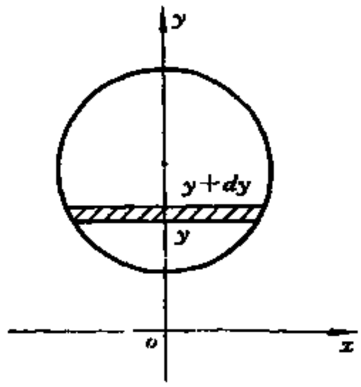


图 5.12

5-127 求心形线 $\rho=4(1+\cos\theta)$ 和直线 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成图形绕极轴旋转所成旋转体的体积.

解 由 $\rho=4(1+\cos\theta)$ 得

$x=4(1+\cos\theta)\cos\theta$

$y=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

$\theta=0$ 时,$\rho=8$

如图 5.13 所示.

$dV=\pi y^2dx$

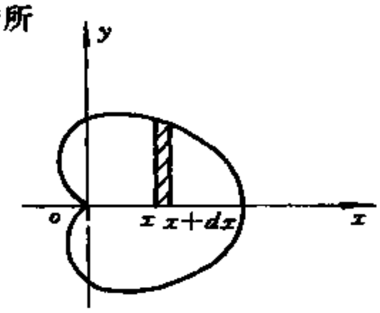


图 5.13

$$V=\int_0^8\pi y^2dx$$
$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\pi\cdot16(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot4(\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta)d\theta$$
$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\sin^3\theta(1+2\cos\theta)d\theta=160\pi$$

5-128 求双纽线 $\rho^2=a^2\cos2\theta(a>0)$ 所围面积与绕极轴旋转的侧面积.

解 由对称性知,所求双纽线所围面积 A 应等于在第一象限部分面积的 4 倍.(图 5.14)

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\rho^2d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta d\theta$$
$$=a^2$$

侧面积为由第一象限的弧段旋转所得侧面积的 2 倍.

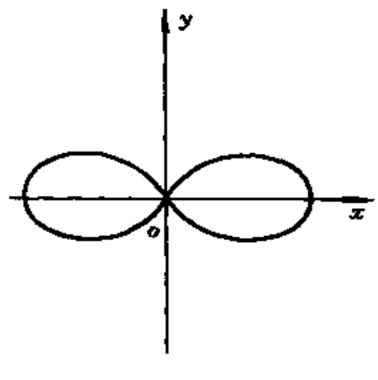


图 5.14

这里应特别注意的是,在求曲线绕 x 轴旋转产生的旋转面的面积时,面积微元应为 $dS=2\pi y ds$(其中 ds 是弧微分)而不是 $dS=2\pi y dx$.

$$S = 2 \cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho\sin\theta\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta.$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos2\theta}\sin\theta\sqrt{a^2\cos2\theta + \frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos2\theta}}\,d\theta$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta$$

$$= 2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$$

本题提供了由参数方程所表示的曲线围成的面积、弧长、旋转体的体积、旋转面的面积的一般方法.

5-129 设星形线的方程为

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \qquad (a > 0)$$

试求:1) 它所围的面积.

2) 它的弧长.

3) 它绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积和表面积.

解 如图 5.15 所示,

$$1)A = 4\int_0^a y dx$$

$$= -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^4 t \cdot 3a\cos^2 t dt$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(\sin^4 t - \sin^6 t)dt$$

$$= \frac{3\pi a^2}{8}$$

2) 弧长 $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t dt$$

$$= 6a$$

3) 体积 $V = 2\int_0^a \pi y^2 dx$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t(1 - \sin^2 t)dt$$

$$= \frac{32}{105}\pi a^3$$

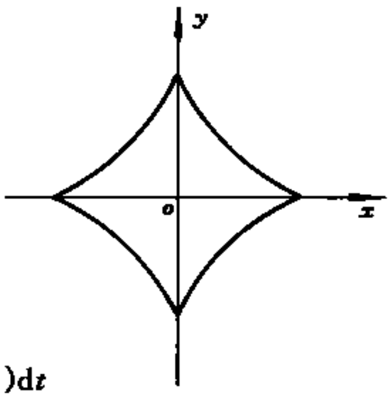


图 5.15

表面积 $S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}dt$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t dt$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^2$$

5-130 设有半径为 R 的圆盘,密度 μ 分别为:

$$1)\mu = 2\rho(\rho\text{ 为极径}),$$

$$2)\mu = \theta,(\theta\text{ 为极角}).$$

求圆盘的质量.

解 如图 5.16 所示,

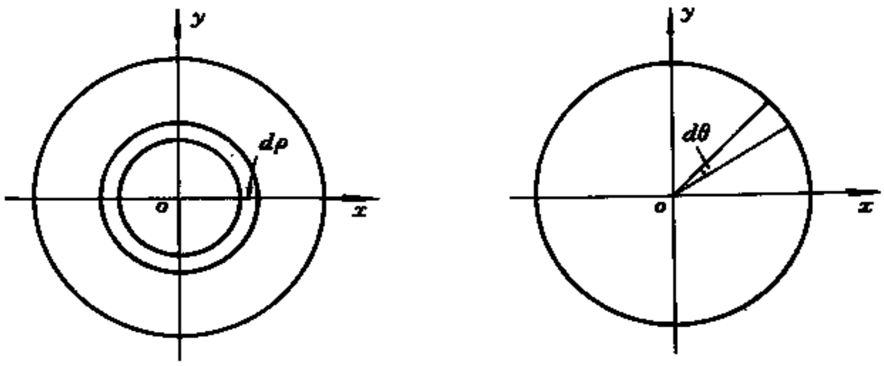


图 5.16

$$1)\mathrm{d}M = 2\pi\rho\mathrm{d}\rho\cdot 2\rho$$

$$M = 4\pi\int_0^R \rho^2\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$2)\mathrm{d}M = \theta\cdot\frac{1}{2}R\mathrm{d}\theta$$

$$M = \frac{1}{2}R^2\int_\theta^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \pi^2 R^2$$

定积分应用问题的关键是元素法,而元素法的核心是适当选取微元.

5-131 半径为 r 的球沉入水中,其最高点与水面相接,球的密度为 1,现将球从水中取出,问要做多少功?

解 1 如图 5.17 建立坐标系,图中圆的方程为 $x^2+(y-r)^2=r^2$.将球从水中取出恰离水面时,球中相当于$[y,y+\mathrm{d}y]$的小薄片总的行程 $2r$,其中在水中移动的行程为 y,由于球的密度为 1,重力与浮力的合力为零,故做功为零,其余行程为 $2r-y$,克服重力 $\pi x^2\mathrm{d}y$ 做功

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W &= (2r-y)\pi x^2\mathrm{d}y\\ &= (2r-y)\pi[r^2-(y-r)^2]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

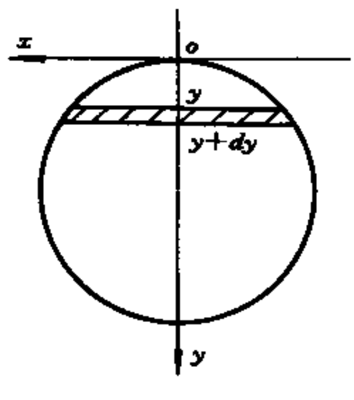


图 5.17

注意高为 h 的球顶体积为

$$W = \int_0^{2r} \pi(2r - y)[r^2 - (y - r)^2]\mathrm{d}y$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^4$$

解 2 事实上所求功等于把球的质量$\frac{4}{3}\pi r^3$集中到球心，设 h 为球露出水面的高度，

$$W = \int_0^{2r} \pi h^2 (r - \frac{h}{3})\mathrm{d}h$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^4$$

$\pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$.

5-132 一根半径为 R 的圆环金属丝，线密度 ρ 为常数，以等角速度 ω 绕其某一条直径旋转，求金属丝的动能.

解 1 如图 5.18 建立坐标系，由对称性易知整个圆环形金属丝的动能应等于第一象限部分动能的 4 倍.

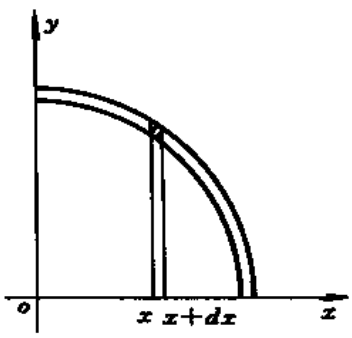


图 5.18

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \rho \mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{2}\omega^2 \rho x^2 \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}R\rho\omega^2 \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\mathrm{d}x$$
$$E = 4 \cdot \frac{1}{2}R\rho\omega^2 \int_0^R \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{2}\rho\omega^2 R^3$$

解 2 如图 5.19 建立坐标系，

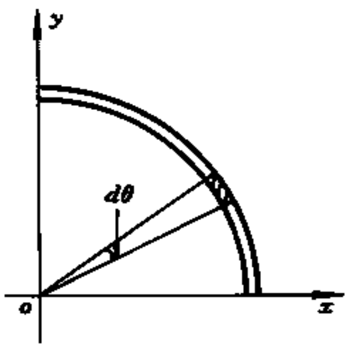


图 5.19

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \rho R \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{2}\omega^2 \rho R (R\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^3 \cos^2\theta \mathrm{d}\theta.$$
$$E = 4 \cdot \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}\rho\omega^2 R^3$$

5-133 一根长为 l，质量为 M 的均匀直棒，在它的一端垂线上距棒 a 处有质量为 m 的质点，求棒对质点的引力.

解 如图 5.20 建立坐标系，设引力为 F. 水平分力为 F_x，铅直分力为 F_y.

$$dF = \frac{kmM}{l(a^2+x^2)}$$

$$dF_x = \frac{kmMx}{l(a^2+x^2)^{3/2}}dx$$

$$F_x = \frac{kmM}{l}\int_0^l \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx$$

$$= \frac{kmM}{al\sqrt{a^2+l^2}}(\sqrt{a^2+l^2}-a)$$

$$dF_y = \frac{kMma}{l(a^2+x^2)^{3/2}}dx$$

$$F_y = \frac{kMma}{l}\int_0^l \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{kmM}{a\sqrt{a^2+l^2}}$$

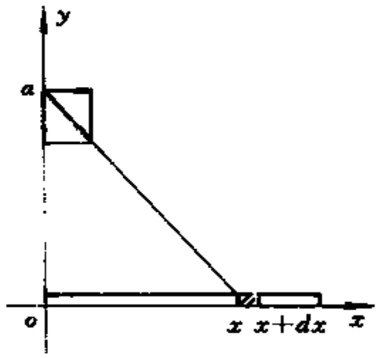


图 5.20

这里特别应注意的是引力是向量，只有将其坐标搞清楚，即沿坐标轴的分力搞清楚，才能分别用积分计算.

5.2.6 广义积分

收敛的广义积分的计算有与定积分完全类似的换元法和分部积分法.

5-134 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

解 1 令 $x = \tan t$.

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

解 2

$$原式 = \int_0^{+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x\,d(\frac{1}{1+x^2})$$

$$= \arctan x\Big|_0^{+\infty} + \frac{x}{2(1+x^2)}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

5-135 试证$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$并求值.

解 令 $x=\frac{1}{t}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_{+\infty}^{0}\frac{-t^2}{1+t^4}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

倒代换,即 $x=1/t$ 是广义积分计算中一种常的方法.

5-136 计算广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$

$$原式=\int_{+\infty}^{0}\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt$$

所以,原式 $=0$.

5-137 证明$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$与$\alpha$无关并求值.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}$$

令 $\quad x = \dfrac{1}{y}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{y^{\alpha}}{(1+y^2)(1+y^{\alpha})} dy$$

所以 $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{(1+x^2)(1+x^4)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

5-138 已知$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$,求$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

本题关键是用分部积分法.

解 $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \sin^2 x \, d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin x \cos x}{x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \qquad (令\ 2x = t)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

5-139 判定广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\cos x|}$的敛散性.

本题利用了比较判别法.

解 由于$\dfrac{1}{1+x|\cos x|} \geqslant \dfrac{1}{1+x}$,而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$ 发散,

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\cos x|}$ 发散.

5-140 判定广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$的敛散性.

等价无穷小代换是判定广义积分敛散性的一种常用方法,其依据是比较判别法的极限形

解 由于在 $x \to 0$ 时,$\ln(1+x) \sim x$,则$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$与$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^p} dx$同敛散,从而 $p-1<1$,即 $p<2$ 时,$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛. $p-1 \geqslant 1$,

即 $p\geqslant 2$ 时，$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 发散. 又对 $p>1$，可选取 $\varepsilon>0$，使 $p-\varepsilon>1$，这时，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\Big/\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\varepsilon}}=0$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}dx$ 收敛，则 $p>1$ 时$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛.

当 $p\leqslant 1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\geqslant\frac{1}{x^p}$ 而$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散，则 $p\leqslant 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 发散.

故广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 在 $1<p<2$ 时收敛，其余均发散.

式.

5-141 判定广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ $(p>q>0)$ 的敛散性.

解 由于 $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^p+x^q}\Big/\frac{1}{x^q}=1$

所以 $\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}$ 与$\int_0^1\frac{dx}{x^q}$ 同敛散，则 $q<1$ 时，$\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}$ 收敛.

又 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}/\frac{1}{x^p}=1$

所以 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$ 与$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 同敛散，则 $p>1$ 时$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ 收敛.

故 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$ 在 $p>1$ 且 $q<1$ 时收敛.

5-142 判定广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$ 的敛散性.

对于被积函数可变号的广义积分一般可先考虑其绝对值广义积分.

解 由于当 $x\to0$ 时 $\sin x\sim x$，则$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$ 与$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^3}}dx$ 同敛散，而$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^3}}dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛，那么$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛.

又 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^3}}$，而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛，则$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛，故原广义积分收敛.

5-143 设 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}$ $(x\geqslant1)$，试证 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)\leqslant1+\frac{\pi}{4}$.

证 由于 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}>0\quad(x\geqslant 1)$,因此,$f(x)$ 在 $x\geqslant 1$ 上单调增,又 $f(1)=1$,那么在 $x\geqslant 1$ 上 $f(x)\geqslant 1$,从而

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+f^2(x)}$$

$$\leqslant\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$$

即 $f(x)\leqslant 1+\dfrac{\pi}{4}$

由于 $f(x)$ 在 $x\geqslant 1$ 上单调增且 $f(x)\leqslant 1+\dfrac{\pi}{4}$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\leqslant 1+\dfrac{\pi}{4}$.

5-144 设 $f(x)$ 在$[a,+\infty]$上非负连续且单调减,$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,试证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证 反证法:由 $f(x)$ 非负及单调减知,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在,不妨设为 A,若 $A\neq 0$,则必有 $A>0$,此时必存在 $b>a$,使得 $x>b$ 时,$f(x)>\dfrac{A}{2}$.

则当 $x>b$ 时,

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^x\frac{A}{2}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{A}{2}(x-b)$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=+\infty$,与题设矛盾,故原题得证.

本题若去掉单调减的条件结论不成立.

第 6 章　级数

6.1　客观题

6.1.1　填空题

6-1　设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x+1)^n$ 在 $x=3$ 条件收敛，则该幂级数的收敛半径为＿4＿

解　由于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x+1)^n$ 在 $x=3$ 条件收敛，由阿贝尔引理知 $x=4$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛区间的端点，则收敛半径为 4.

此类问题的关键是用阿贝尔引理.

6-2　设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为＝＿$(-2,4)$＿

解　幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ 有相同的收敛半径，又 $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n\right)'=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_n(x-1)^{n-1}$，则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_n(x-1)^{n+1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ 有相同的收敛半径，收敛半径为 3，则其收敛区间为 $(-2,4)$.

这里用到幂级数逐项求导后收敛半径不变.

6-3　幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为＝＿$(0,4)$＿

解　该幂级数收敛半径为

$$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)4^{n+1}}{n4^n}}=2$$

当 $x-2=\pm 2$ 时，原级数为

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散

本题要注意只有偶次项.

则收敛域为 $-2<x-2<2$，即 $0<x<4$.

6-4 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$的收敛半径 $R=$ <u>$\sqrt{3}$</u>

本题只有奇次项.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2^n+(-3)^n}\cdot\frac{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}{n+1}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\,\frac{2\left(-\frac{2}{3}\right)^n-3}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}\right|=3$$

则 $R=\sqrt{3}$.

6-5 若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n^2}x^n(a>0)$的收敛域为$(-\infty,+\infty)$，则 a 应满足 <u>$a<1$</u> .

解 $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{a^{n^2}}{a^{(n+1)^2}}=\frac{1}{a^{2n+1}}$

当且仅当 $a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=+\infty$，则 $a<1$.

6-6 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于= <u>$\frac{\pi^2}{2}$</u> .

本题主要是用狄里克雷收敛定理.

解 由狄里克雷收敛定理可知，在 $x=\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-1+(1+\pi^2)}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

6-7 设 $f(x)=\pi x+x^2\quad(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则其中系数 b_3 的值为= <u>$\frac{2}{3}\pi$</u> .

解 $b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{\pi}x\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi.$$

6.1.2 单项选择题

6-8 设常数 $k>0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$( ). (C)

(A) 发散 (B) 绝对收敛

(C) 条件收敛 (D) 收敛与发散与 k 有关

解 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nk}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nk}{n^2}$绝对收敛,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$条件收敛,则原级数条件收敛,则应选(C).

本题主要是要用一个绝对收敛级数与一个条件收敛级数相加必是一个条件收敛级数.

6-9 设 α 是常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$( ). (C)

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛

(C) 发散 (D) 收敛性与 α 的取值有关

解 由于$\left|\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}$收敛,而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散,则原级数发散,则应选(C).

本题主要是要用一个收敛级数与一个发散级数相加必是一个发散级数.

6-10 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$ (常数 $\alpha>0$)( ). (C)

(A) 发散 (B) 条件收敛

(C) 绝对收敛 (D) 收敛性与 α 有关

解 $\left|(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)\right|=1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\sim\dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha^2}{n^2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,则原级数绝对收敛,故应选(C).

此处用了等价无穷小代换.

6-11 设常数 $\lambda>0$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\times\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$( ). (C)

(A) 发散 (B) 条件收敛

(C) 绝对收敛 (D) 收敛性与 λ 有关

解 因为

$$\left|(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|=|a_n|\frac{1}{\sqrt{n^2+\lambda}}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+\lambda}$都收敛.

则原级数绝对收敛,故应选(C).

此处利用了不等式 $ab\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

6-12 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，常数 $\lambda\in(0,\frac{\pi}{2})$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$（ ）. (A)

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛

(C) 发散 (D) 敛散性与 λ 有关

解 由于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ 也收敛，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}\right|}{a_{2n}}=\lambda,\quad \lambda\in(0,\frac{\pi}{2})$$

则原级数绝对收敛，应选(A).

6-13 设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则级数（ ）. (C)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 都收敛

(B) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 都发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 发散

(D) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛

解 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是一个交错级数，且 $\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 单调减，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛. 而 $u_n^2=\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\sim(\frac{1}{\sqrt{n}})^2=\frac{1}{h}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 发散，则应选(C).

此处利用了等价无穷小代换.

6-14 设 $0\leqslant a_n<\frac{1}{n}$，$(n=1,2,\cdots)$，则下列级数中肯定收敛的是（ ）. (D)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n}$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n^2$

解 因为 $0\leqslant a_n<\frac{1}{n}$，所以 $|(-1)^n a_n^2|=a_n^2<\frac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n^2$ 绝对收敛，故应选(D).

6-15 下列各选项正确的是( ).　　　　　　　　　　　　　　(A)

(A) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_nv_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2$ 都收敛

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散,则 $u_n\geqslant\frac{1}{n}$

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛,且 $u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 也收敛

解 由于 $0\leqslant(u_n+v_n)^2=u_n^2+v_n^2+2u_nv_n\leqslant2(u_n^2+v_n^2)$,若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛,故应选(A).

这里用到不等式:$2ab\leqslant a^2+b^2$.

6-16 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都发散,则( ).　　　　　　　　　(C)

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$发散　　　(B) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$ 发散

(C) $\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)$发散　　　(D) $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$发散

解 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都发散知, $\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)$必定发散,否则,由$|a_n|\leqslant|a_n|+|b_n|$就推知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛,与题设矛盾,则应选(C).

这里是用反证法.

6-17 a_n 与 b_n 符合( )条件,可由 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散推出 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散.

(D)

(A) $a_n\leqslant b_n$　　　(B) $a_n\leqslant|b_n|$

(C) $|a_n|\leqslant|b_n|$　　　(D) $|a_n|\leqslant b_n$

解 若$|a_n|\leqslant b_n$,则此时由 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散就能推出 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散,否则若 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛,由$|a_n|\leqslant b_n$ 知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛,与题设矛盾,所以选(D).

这里也是用反证法.

6-18 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 收敛，则此级数在 $x=2$ 处（ ）。 (B)

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛

(C) 发散 (D) 收敛性不能确定

解 由阿贝尔引理知，当 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 收敛，则该幂级数对一切的 $|x-1|<2$ 绝对收敛，则原幂级在 $x=2$ 处绝对收敛.

本题主要是利用了阿贝尔引理.

6-19 设函数 $f(x)=x^2, 0\leqslant x<1$，而 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty<x<+\infty$

其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$，$(n=1,2,\cdots)$

则 $S(-\frac{1}{2})$ 等于 (B)

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

解 $S(x)$ 是对 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上作奇延拓后展开的傅里叶级数，则 $S(-\frac{1}{2})=-(-\frac{1}{2})^2=-\frac{1}{4}$，所以应选(B).

6.2 非客观题

6.2.1 常数项级数

求下列级数的和：

6-20 $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

解
$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\frac{n^2-1}{n^2}$$
$$=\ln(n^2-1)-\ln n^2$$
$$=\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n$$

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$
$$=(\ln 3-2\ln 2+\ln 1)+(\ln 4-2\ln 3+\ln 2)+$$
$$\cdots+(\ln(n+1)-2\ln n+\ln(n-1))$$
$$=-\ln 2+\ln(n+1)-\ln n$$
$$=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 2$$

将一般项拆成若干项的差是常数项级数求和中一种常用方法. 以下几例都用这种方法.

这里我们同时证明了
$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

则 $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=-\ln2$

6-21 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

解 $1=\frac{1}{2}[(n+2)-n]$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+$$

$$\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

所以 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$

本题利用有理函数部分分式的思想拆项.

6-22 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

解 $$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$S_n=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to1$$

则原级数和为 1.

本题利用分母有理化拆项

6-23 $\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$

解 因为 $$\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}}{1+\frac{n(n-1)}{n(n+1)}}$$

$$=\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n-1}{(n-1)+1}$$

所以 $S_n=\arctan\frac{n}{n+1}\to\frac{\pi}{4}$

本题利用三角基本公式拆项.

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}$$

判定下列级数的敛散性.

在判定级数敛散性时一般首先应看通项 a_n 是否趋于零.

6-24 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$

解 由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot \sqrt[n]{n}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = 1$$

即原级数的通项不趋于零,故原级数发散.

6-25 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

解1 当 $n \geqslant 3$ 时,$1 < \sqrt[n]{\ln n} \leqslant \sqrt[n]{n} \to 1$

则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 1 \neq 0$

原级数发散.

解2 因为 $\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \geqslant \frac{1}{\ln n} \geqslant \frac{1}{n}$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散,则 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ 发散.

6-26 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$

解 因为 $\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$

$$\leqslant \frac{n(n!)}{(2n)!}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$$

$$\leqslant \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 收敛,则原级数收敛.

6-27 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$

本题利用对数的性质将原级数放

解 因为 $\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}=\dfrac{1}{e^{\ln n\cdot\ln(\ln\ln n)}}=\dfrac{1}{n^{\ln(\ln\ln n)}}<\dfrac{1}{n^2}$，当 n 充分大（即 $n>e^{e^{e^2}}$）时成立.

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数收敛.

大后与 P 级数比较.

6-28 试证明柯西积分判别法

设 $f(x)$ 在 $x\geqslant 1$ 上非负、连续且单调减，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

证 由于当 $k\leqslant x\leqslant k+1$ 时，

$$f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k)$$

因此 $a_{k+1}=f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)=a_k$

从而 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k+1}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$

即 $\sum\limits_{k=1}^{n+1}a_k-a_1\leqslant\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$

由上式不难看出 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

本题证明的关键还是用比较判别法，在题设下的：
$\int_1^{k}f(x)\mathrm{d}x$
$\leqslant\int_1^{x}f(x)\mathrm{d}x$
$\leqslant\int_1^{k+1}f(x)\mathrm{d}x$
说明广义积分与正项级数
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

判定下列级数的敛散性：

6-29 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{\ln(n!)}$

解 因为 $\dfrac{1}{\ln(n!)}=\dfrac{1}{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}>\dfrac{1}{n\ln n}$

因为 $\int_2^{\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 发散，故由柯西积分判别法可知级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，从而原级数发散.

6-30 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}\right)$

解 1 由于当 $-1<x<+\infty,x\neq 0$ 时，

解 1 的关键是用不等式 $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) < x$$

因此 $\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

同时 $\ln\frac{n+1}{n} = -\ln\frac{n}{n+1} = -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}$

于是有 $0 < \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，则原级数收敛.

解 2 由泰勒公式可知

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

从而 $\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，则原级数收敛.

< x.

对于相当多的正项级数的敛散性，可看出通项是 $\frac{1}{n}$ 的几阶无穷小量，便可知其敛散性.

6-31 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{\ln n}} \quad (a>0)$

解 由于 $a^{\ln n} = (e^{\ln a})^{\ln n} = e^{\ln n\cdot\ln a} = n^{\ln a}$

因此，当 $\ln a \leqslant 1$，即 $0 < a \leqslant e$ 时，原级数发散，当 $\ln a > 1$，即 $a > e$ 时，原级数收敛.

本题的关键是将原级数改写成 P 级数.

6-32 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$

解 1 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{5^{n+1}-3^{n+1}}$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{5-3\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{4}{5} < 1$$

故原级数收敛.

解 2 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n-3^n}}$$

$$= \frac{4}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}} = \frac{4}{5}$$

注意达朗贝尔判别法，本题也可用柯西判别法来证，即解 2.

故原级数收敛.

6-33 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n n!}{n^n}\quad (q>0)$

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{q^{n+1}(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{q^n n!}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{q}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{q}{\mathrm{e}}$$

则 当 $0<q<\mathrm{e}$ 时,原级数收敛;

当 $\mathrm{e}<q$ 时,原级数发散;

当 $q=\mathrm{e}$ 时,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$

故 a_n 严格单调递增,又 $a_1=\mathrm{e}$,则当 $n\to\infty$ 时,a_n 不趋于零,故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}$ 发散.

6-34 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}\quad (a>0)$

读者应注意,本题中对 $q=\mathrm{e}$ 时的讨论的方法,说明当极限判别法则失效时,比较判别法未必失效.

解1 当 $a=1$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}$ 显然发散.

当 $0<a<1$ 时,$\frac{a^n}{1+a^{2n}}<a^n$,则原级数收敛.

当 $a>1$ 时,$\frac{a^n}{1+a^{2n}}=\frac{1}{\frac{1}{a^n}+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$

则原级数收敛

解2 $a=1$ 时,原级数显然发散

$0<a<1$ 时,$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{1+a^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt[n]{1+a^{2n}}}=a<1$

$a>1$ 时,$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{1+a^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}}}=\frac{1}{a}<1$

则 $0<a<1$ 或 $a>1$ 时,原级数收敛.

6-35 $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{\alpha}\beta^n\quad (\beta>0)$

事实上本题是幂级数.

解 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{\alpha}\beta^{n+1}}{n^{\alpha}\beta^{n}}=\beta$

则 $0<\beta<1$ 时，原级数收敛

$\beta>1$ 时，原级数发散

$\beta=1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{\alpha}$

这时，$\alpha<-1$ 收敛，$\alpha\geqslant-1$ 发散 .

解 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\beta(\sqrt[n]{n})^{\alpha}=\beta$

以下的讨论与解 1 同.

6-36 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\qquad(x\geqslant 0)$

解 1 当 $0\leqslant x<1$ 时，$a_n\leqslant x^n$，级数收敛

当 $x=1$ 时，$a_n=\dfrac{1}{2^n}$，级数收敛

当 $x>1$ 时

$$a_n=\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$$

$$<\frac{x^n}{(1+x^{n-1})(1+x^n)}<\frac{x^n}{x^{n-1}x^n}=\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

原级数收敛

解 2 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{x}{1+x^{n+1}}$

当 $0<x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=x$，则原级数收敛.

$x>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=0$，则原级数收敛.

$x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，则原级数收敛

$x=0$ 时，原级数显然收敛.

6-37 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$

解 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}$

又 $1\leqslant\sqrt[n]{2+(-1)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}=1$

事实上可以证明，若 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 一定存在

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}<1$$

由柯西判别法知原级数收敛.但本题达朗贝尔判别法是失效的,事实上

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2+(-1)^n}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{1}{6}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$,反之则不然,本题即为一例,从而可知柯西判别法比达朗贝尔判别法适应范围广.

解 2 将此级数分为两个级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$$

此二级数都收敛,故原级数收敛.

6-38 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^p}\sin\dfrac{1}{n}$

解 由于当 $n\to+\infty$ 时,$\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$,则级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^p}\sin\dfrac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$,同敛散.而由积分判别法易知级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ 在

$p>1$ 时收敛 $\quad p\leqslant1$ 时发散

原级数在 $\quad p>1$ 时收敛 $\quad p\leqslant1$ 时发散.

等价无穷小代换是正项级数审敛的一种常用方法,其理论根据是比较判别法的极限形式.

6-39 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$

解 由于 $\quad(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$

$$=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\cdot\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n}$.

又,当 $n\to+\infty$ 时,$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n}$

则原级数与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 同敛散

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p}{n}\cdot n^{1+\frac{p}{2}}=\frac{1}{2^p}$$

故原级数与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}$ 同敛散,即原级数在 $p>0$ 时收敛,$p\leqslant0$ 时发散.

6-40 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}-1\right)$

解 因为 $n^{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}-1=e^{\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}}-1$,

当 $n\to+\infty$ 时, $e^{\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}}-1\sim\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

而 $\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}<\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2}=\frac{\ln n}{n^{3/2}}<\frac{n^{1/4}}{n^{3/2}}$($n$ 充分大) $=\frac{1}{n^{5/4}}$

则原级数收敛.

6-41 $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx$

处理这种用定积分表示通项的级数最常用的是比较判别法.

解 因为 $0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin x dx$

$$\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{n}}x dx=\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{n^2}$$

又级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,则原级数收敛.

6-42 $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}dx$, $(\alpha>-1)$

本题得出不等式就是证明 $\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha dx}{\sqrt{1+x^2}}$ 与 $\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}$ 是同阶无穷小量.

解 因为

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}dx\geqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}dx$$

$$=\frac{1}{(\alpha+1)\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}$$

又 $\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}dx\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}$

则原级数与级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}$ 同敛散,故原级数在 $\alpha>0$ 时收敛, $-1<\alpha\leqslant0$ 时发散.

6-43 $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 x^n\arctan x dx$

判别正项级数的敛散性主要是比较判别法,而比较判别法的极限形式又可归结为估计其通项作为无穷小量

解 因为 $\int_0^1 x^n\arctan x dx$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1\arctan x d(x^{n+1})$$

$$= \frac{\pi}{4(n+1)} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

又 $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{n+2}$$

则 $0 < \int_0^2 x^n \arctan x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

故原级数发散.

的阶数(与$\frac{1}{n}$比).

6-44 $\sum_{n=3}^{+\infty}\left(a - \frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (a > 0)$

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a - \frac{1}{\ln n}\right) = a$

则当 $0 < a < 1$ 时,原级数收敛

$a > 1$ 时,原级数发散

$a = 1$ 时,原级数为 $\sum_{n=3}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^n$

这时 $\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{n}{\ln n}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{n}{\ln n}}} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln n^2}} = \frac{1}{n^2}$($n$ 充分大)

则原级数收敛.

本题中用到不等式

$\ln(1+x) \leqslant x$

其中 $x > -1$.

6-45 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

解 设 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

则 $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0 \quad (x > \mathrm{e}^2)$

则数列$\{\ln n/\sqrt{n}\}$从 $n \geqslant 9$ 开始递减,又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$

则原级数收敛.

本题应用了交错级数的莱不尼兹审敛准则.

6-46 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

解 由于 $a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{(2n+1)\cdot(2n-1)!!}{(2n+2)(2n)!!}$

$$< \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} = a_n$$

则 a_n 单调减

又由不等式$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1} \quad (b > a > 0)$知

本题的关键是利用不等式$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$

我们利用 $(2n-1)^2 > 2n(2n-2)$ 见 3-82 题旁注易证:

$$a_n = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n+1}$$

$$\leqslant \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{a_n(2n+1)}$$

从而 $0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$

故原级数收敛.

$a_n^2 = \frac{(2n-1)^2\cdots3^2\times1^2}{(2n)^2\cdots4^2\times2^2} > \frac{1}{4n},a_n > \frac{1}{2\sqrt{n}}$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}$ 条件收敛.

6-47 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})\quad(a\neq0)$

解 $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$

$$= (-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)$$

$$= (-1)^n\sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$$

当 n 充分大时,$0<\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<\pi$

故原级数去掉有限项后为交错级数,且此时 $\sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ 单调减趋于零,则原级数收敛.

6-48 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{n^2+\alpha n+\beta}{n}\pi\right)\qquad(\alpha>0)$

解 记 $a_n = \sin\left(\frac{n^2+\alpha n+\beta}{n}\pi\right)$

1) 当 α 不是整数时,$a_n = (-1)^n\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\pi$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |\sin\alpha\pi|\neq0$$

从而原级数发散.

2) 当 α 为整数时,不失去一般性设 $\beta\geqslant0$

$$a_n = (-1)^{n+\alpha}\sin\frac{\beta}{n}\pi$$

此时原级数去掉有限项后为交错级数,且这时 $\sin\frac{\beta}{n}\pi$ 单调减趋于零,则原级数收敛.

6-49 $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots$

解1 $\alpha = 1$ 时,原级数为

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

该级数收敛.

当 $a>1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^a}$ 收敛,而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散,原级数为此二级数之差,故是发散的.

当 $a<1$ 时,考虑原级数加括号后的级数

$$1-\left(\frac{1}{2^a}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4^a}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{(2n)^a}-\frac{1}{2n-1}\right)$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n)^a}-\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{(2n)^a}}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{(2n)^a}{2n-1}\right]=1$$

又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^a}$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)^a}-\frac{1}{2n-1}\right)$ 发散,故原级数发散.

解2 $1-\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^a}+\cdots$

$$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^a}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4^a}\right)+\cdots$$

前一个级数收敛,后一个级数当 $a>1$ 时,$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^a}+\cdots$ 收敛.而 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ 发散,故原级数发散;当 $a<1$ 时,

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n)^a}<0$$

而 $\frac{1}{(2n)^a}-\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}$,又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$ 发散,故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n)^a}\right)$ 发散,则原级数发散.

6-50 试研究级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{a}{1+a^n}$ $(a>0)$ 是绝对收敛、条件收敛还是发散.

这种讨论绝对收敛、条件收敛的问题一般先考虑其绝对值级数.

解 先考虑其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{a}{1+a^n}$

当 $a>1$ 时,$\frac{1}{n}\frac{a}{1+a^n}<\frac{a}{a^n}$,而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{n-1}}$ 收敛,则原级数绝对收敛.

当 $a\leqslant 1$ 时,$\frac{1}{n}\frac{a}{1+a^n}>\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{2}$,则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{a}{1+a^n}$ 发散.此时令

$$f(x)=x(1+a^x)$$

则 $f'(x)=1+a^x+xa^x\ln a$,从而当 x 充分大时,$f'(x)>0$,$f(x)$

单增，那么 n 充分大时，$\frac{a}{n(1+a^n)}$ 单调减且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n(1+a^n)}=0$，故原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{a}{1+a^n}$ 收敛，即原级数条件收敛.

6-51 试研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^n n^p}$ 是绝对收敛、条件收敛，还是发散？

解 先考虑绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{a^n n^p}\right|$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a^n n^p}{a^{n+1}(n+1)^p}\right|=\frac{1}{|a|}$

则当 $|a|>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{a^n n^p}\right|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

当 $0<|a|<1$ 时 $\frac{1}{|a|}>1$，由上面极限式可知当 n 充分大时，$|a_{n+1}|>|a_n|$，这时 $a_n \nrightarrow 0$，原级数发散.

当 $|a|=1$ 时，需再讨论

当 $a=1$，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$，则 $p>1$ 时收敛，$p\leqslant 1$ 时发散.

当 $a=-1$ 时，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，

当 $p>1$ 时，原级数绝对收敛，

$0<p\leqslant 1$ 时，原级数条件收敛；

$p\leqslant 0$ 时，原级数发散.

在用达朗贝尔判别法考虑某个级数的绝对值级数的敛散性时，由绝对值级数收敛可知原级数收敛，而由绝对值级数发散可知原级数发散.

6-52 试讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 是绝对收敛条件收敛还是发散？

解 这是一个交错级数，对其通项用泰勒公式

$$(1+x)^a=1+ax+o(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}&=\frac{(-1)^n}{n^p}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{-p}\\&=\frac{(-1)^n}{n^p}\left[1-p\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{p}{n^{p+1}}+o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)\end{aligned}$$

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛，$p>1$ 时绝对收敛，

又 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{p}{n^{p+1}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$ 在 $p>0$ 时都绝对收敛，则原级数在

$0<p\leqslant 1$ 时，条件收敛；

因为 $a_n=\frac{1}{[n+(-1)^p]^n}$ 不单调减，故不能用莱不尼兹判别法. 本题利用泰勒公式将通项展开讨论其敛散性，这是一种较常用的行之有效的方法.

$p>1$ 时，绝对收敛，

$p\leqslant 0$ 时，原级数通项不趋于零，故发散.

6-53 试讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 的收敛性与绝对收敛性 $(p>0)$.

解 记 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n^p}, b_n=\ln(1+a_n), c_n=a_n-b_n$，则有

$$b_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

$$c_n=\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\sim\frac{1}{2n^{2p}}$$

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散

当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 条件收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 条件收敛，要不然，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 绝对收敛，由 $a_n=c_n+b_n$ 知 $|a_n|\leqslant|b_n|+|c_n|$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛，矛盾.

当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 皆绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 绝对收敛.

注意本例说明对非正项级数，由 $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\sim\frac{(-1)^n}{n^p}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ $(p>0)$ 收敛，得不出 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 收敛.

6-54 试讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\dfrac{\sin(n\alpha)^2-n\sin\alpha}{n^2}\right]$ 的敛散性.

解 $\dfrac{\sin(n\alpha)^2-n\sin\alpha}{n^2}=\dfrac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}-\dfrac{\sin\alpha}{n}$

又 $\left|\dfrac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ 收敛

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin\alpha}{n}$，当 $\alpha=k\pi$ 时收敛，$\alpha\neq k\pi$ 时发散. 故原级数在 $\alpha=k\pi$ 时收敛，$\alpha\neq k\pi$ 时发散.

这是一个任意项级数，本题采用拆项，考虑绝对值级数，利用绝对收敛一定收敛这个重要结论.

6-55 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，是否必有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛？

解 不一定.

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$b_n = 1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

显然$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$

但 $a_n b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$

由于$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，则原级数发散.

6-56 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，那么$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 是否一定收敛？为什么？

解 此时$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 一定收敛，这是由于$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，则存在 N，当 $n > N$ 时，$|b_n| \leqslant 2$，这时$|a_n b_n| \leqslant 2|a_n|$，又$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n|$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 一定收敛.

本题的结论对正项级数是正确的，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n b_n}{a_n} = 1$，但对一般项级数是不对的.

6-57 试求下列极限：

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n}$ $(a > 1)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2}$

解 1) 由于
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$ 收敛，故$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n} = 0$.

2) 由于$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \dfrac{a^n}{n^k} = \dfrac{1}{a} < 1$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^k}{a^n}$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

3) 由于
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0 < 1$$

级数与数列有密切的关系. 利用级数的理论来讨论数列的极限问题也是一种常用方法，本题是利用级数收敛的必要条件来讨论极限问题.

则级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$收敛,从而$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

6-58 试证数列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 的极限存在.

本题利用数列与级数的对应关系将数列的敛散性问题转化为级数敛散性的问题.

证 令 $a_1 = x_1, a_n = x_n - x_{n-1}$, $(n = 2,3,\cdots)$

则级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$的部分和数列就是$\{x_n\}$,所以只要证级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛即可.

$$a_n = x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n} + \left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

又$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$收敛,则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛,故数列$\{x_n\}$收敛.

6-59 设数列$\{na_n\}$有界,证明$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$收敛

证 由于$\{na_n\}$有界,则存在M,使得

$$|na_n| \leqslant M,$$

即

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{n}$$

$$a_n^2 \leqslant \frac{M^2}{n^2}$$

又$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M^2}{n^2}$收敛,则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$收敛.

6-60 设$a_n \geqslant 0$ $(n = 1,2,\cdots)$试证:若级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛,则级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$都收敛.

本题主要是利用比较判别法和不等式
$2ab \leqslant a^2 + b^2$.

证 由于$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛,则$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,故$n$充分大时,$a_n < 1, a_n^2 \leqslant a_n$,由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$收敛.

对 $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$

由于 $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛

对 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛.

6-61 设 $\lim_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$，求证 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散

这里应注意，若 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，不一定有 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

证　若 $a>0$，由 $\lim_{n\to\infty}na_n=a$ 知，至少从某项开始 $a_n>0$，又

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=a,$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

若 $a<0$，则 $\lim n(-a_n)=-a>0$，由以上所证的结论可知 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-a_n)$ 发散，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

6-62 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，求证 $\sum_{n=1}^{+\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{+\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

本题的关键是找出级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 的部分和数列间的关系.

证　由于

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})\\&=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})\\&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n-na_{n+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}\end{aligned}$$

又 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$

则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 存在且 $\lim_{n\to\infty}na_{n+1}=0$

故 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$

原题得证.

6-63 若正项数列$\{x_n\}$单调上升且上有界,试证级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$收敛.

证 由于数列$\{x_n\}$单调上升,则$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$为正项级数.

又
$$\begin{aligned}S_n &= \left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)+\left(1-\frac{x_2}{x_3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)\\ &= \frac{x_2-x_1}{x_2}+\frac{x_3-x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\\ &\leqslant \frac{(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_{n+1}-x_n)}{x_2}\\ &= \frac{x_{n+1}-x_1}{x_2}\end{aligned}$$

而$\{x_n\}$上有界,则S_n上有界,故$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$收敛.

本题主要是利用正项级数收敛的充要条件是部分和数列上有界.

6-64 若$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$都收敛,且$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n(n=1,2,\cdots)$,试证$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$收敛.

证 由于$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$

则
$$0\leqslant b_n-a_n\leqslant c_n-a_n$$

又因为$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$都收敛,则$\sum_{n=1}^{+\infty}(c_n-a_n)$收敛,由比较判别法知$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n)$收敛,而$b_n=(b_n-a_n)+a_n$,故$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$收敛.

注意本题不能由$b_n\leqslant c_n$且$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$收敛得出$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$收敛,这是由于比较判别法对任意项级数是不适用的.

6-65 设级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$收敛,$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$绝对收敛,试证$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$绝对收敛.

证 设级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$收敛于$S$

则
$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

其中
$$\begin{aligned}S_n &= (a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\\ &= (a_n-a_0)\end{aligned}$$

从而 $\lim_{n\to\infty}a_n=S+a_0$

则存在M,使对一切n有$|a_n|\leqslant M$.

又 $|a_nb_n|\leqslant M|b_n|$

本题的关键是从$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$收敛知$\{a_n\}$收敛,从而$\{a_n\}$有界.

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 绝对收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

6-66 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛,试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n^2}{1+a_n^2}$ 绝对收敛.

证 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,从而当 n 充分大时 $|a_n| < 1$,此时 $a_n^2 \leqslant |a_n|$,故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛,即绝对收敛.

本题主要是利用正项级数的比较判别法.

又
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{a_n}{1+a_n}\right|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|1+a_n|} = 1$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{a_n}{1+a_n}\right|$ 收敛,即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 绝对收敛.

又由于 $\dfrac{a_n^2}{1+a_n^2} \leqslant a_n^2$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n^2}{1+a_n^2}$ 收敛,即绝对收敛.

6-67 试证
$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots$$
$$(0 < x < \pi)$$

证 令 $S_n(x) = \sin x + \dfrac{\sin 3x}{3} + \cdots + \dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

那么,$S_n'(x) = \cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x$ 两边同乘以 $2\sin x$,利用积化和差公式整理得 $S_n'(x) = \dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$

本题的关键是前两步,即 $S_n(x)$ 求导后乘因子 $2\sin x$ 再利用积化和差公式.

两边从 $\dfrac{\pi}{2}$ 到 x 积分得

$$S_n(x)\Big|_{\pi/2}^{x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin 2nx}{2\sin x}\mathrm{d}x$$

$$\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right] -$$
$$\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{4n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\mathrm{d}(\cos 2nx)}{\sin x}$$

$$= -\frac{\cos 2nx}{4n\sin x} + \frac{\cos n\pi}{4n} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\cos 2nx\cos x}{4n\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

又当 $0 < x < \pi$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos 2nx}{4n\sin x} = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\cos nx}{n} = 0$$

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\cos 2nx\cos x}{4n\sin^2 x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\frac{\pi}{2}}{4n\sin^2 x} \to 0$$

故 $\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)}{2n-1} + \cdots$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots$$

$(0 < x < \pi)$

注意:最后等式成立还用到交错级数 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$ 的收敛性.

6.2.2 幂级数

6-68 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{x}{2x+1}\right)$ 的收敛域.

解 令 $t = \frac{x}{2x+1}$,考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}t^n$

因为
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}\right| = 1$$

则幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}t^n$ 的收敛半径为 1.

在 $t = 1$ 处,$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛;$t = -1$ 处,$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

则原级数在 $-1 < \frac{x}{2x+1} \leqslant 1$ 收敛,故收敛域为

$x \leqslant -1$ 或 $x > -\frac{1}{3}$.

6-69 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{2^n+(-1)^n}$

本题的关键是端点的讨论.

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 2$$

$$R = \frac{1}{2},$$

或 $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + (-1)^n}{n}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2\sqrt[n]{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}}$$

$$= 2$$

$$R = \frac{1}{2}$$

在 $x - 1 = \frac{1}{2}$ 处，　原级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

又 $$\frac{2^n + (-1)^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n2^n}$$

显然 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ 都收敛，则原幂级数在 $x - 1 = -\frac{1}{2}$ 收敛.

在 $x - 1 = \frac{1}{2}$ 处，原级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\frac{2^n + (-1)^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n2^n}$$

又级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$ 收敛，则原幂级数在 $x - 1 = \frac{1}{2}$ 处发散.

则收敛域为 $-\frac{1}{2} \leqslant x - 1 < \frac{1}{2}$

即 $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{2}$

6-70　求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} (a > 0, b > 0)$ 的收敛域

解　不妨设 $\max(a, b) = a$,

则 $$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} a \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$= a,$$

或 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}$$

$$=a$$

在 $x=a$ 处,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}\neq 0$

则原级数在 $x=a$ 处发散,同理可知原级数在 $x=-a$ 处也发散.

故原级数的收敛域为 $|x|<\max(a,b)$.

6-71 试求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{b^{\sqrt{n}}}$ $(b>0)$ 的收敛域

解 $R=\lim\limits_{n\to\infty}(b^{\sqrt{n}})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}b^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$

当 $x=\pm 1$ 时,级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(\pm 1)^n}{b^{\sqrt{n}}}$

(i) 若 $0<b\leqslant 1$,由于这时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\pm 1)^n}{b^{\sqrt{n}}}\neq 0$,则级数发散 .

(ii) 若 $b>1$ 时,考虑绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{b^{\sqrt{n}}}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\log_b n}{\sqrt{n}}=0$

从而 n 充分大时有 $2\log_b n<\sqrt{n}$

则 $\dfrac{1}{b^{\sqrt{n}}}<\dfrac{1}{b^{2\log_b n}}=\dfrac{1}{n^2}$

故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{b^{\sqrt{n}}}$ 收敛,综上所述当 $0<b\leqslant 1$ 时,原幂级数的收敛域为 $(-1,1)$,当 $b>1$ 时,原幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

6-72 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}x^n$ 的收敛域 .

解 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1$$

本题在几处都用到了 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=+\infty$.

或 $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}}$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{1+1+\cdots+1}}\leqslant\sqrt[n]{a_n}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}}}=1$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

则 $R=1$

在 $x=-1$ 处,原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$

由于 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{n}}$ 单调减少趋于零,则原级数在 $x=-1$ 处收敛.

在 $x=1$ 处,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$

又 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}>\dfrac{1}{1+1+\cdots+1}=\dfrac{1}{n}$

则原级数在 $x=1$ 处发散,故原幂级数的收敛域为 $-1\leqslant x<1$.

6-73 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{n}x^{2n}$ 的收敛域.

解 1 用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{2(n+1)}}{(n+1)}\cdot\frac{n}{2^nx^{2n}}\right|$$
$$=2x^2$$

则 当 $2x^2<1$,即 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时收敛

$2x^2>1$,即 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时发散.

当 $2x^2=1$,即 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.则收敛域为 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

解 2 令 $x^2=t$,原幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{n}t^n$,则 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n}\cdot\dfrac{n+1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$.

这是一个缺奇次项的幂级数.在解 3 中应特别注意求收敛半径时需开平方,故直接用达朗贝尔判别法求收敛半径为好.

$t=\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}t^n$ 发散，则幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}t^n$ 的收敛域为 $|t|<\frac{1}{2}$

则原幂级数的收敛域为 $x^2<\frac{1}{2}$，即

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

解 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$

则原幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，在 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处原级数发散，故原幂级数的收敛域为

$$|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

6-74 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)2^n}$ 的和.

解 考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n+1)}$，易知此幂级数的收敛域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

令 $S(x)=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$，$|x|<1$

则 $S''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}2x^{2n-1}=2x\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2(n-1)}=\frac{2x}{1-x^2}$

$$\int_0^x S''(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x=-\ln(1-x^2)$$

又 $S'(0)=0$

则 $S'(x)=-\ln(1-x^2)$，由 $S(0)=0$ 得

$$S(x)=-\int_0^x\ln(1-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=-x\ln(1-x^2)+2x-\ln\frac{1+x}{1-x},\qquad -1<x<1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)2^n}=\sqrt{2}S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{2}+\sqrt{2}-2\ln(\sqrt{2}+1)\right]$$

$$=2+\ln2-\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

利用幂级数来求常数项级数和是一种常用方法.步骤是这样的，令级数中 $\frac{1}{\sqrt{2}}=x$，则得 $\frac{1}{2^n}=x^{2n}$，之所以如此是因为分母中有因式 $2n+1$ 求导可约去此因式.

6-75 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 的收敛域及和函数.

幂级数求和大都是利用一些基本

解　$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{n+2}{n+1}=1$

在 $x=\pm 1$ 处原级数发散，则原级数的收敛域为 $-1<x<1$. 又

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n+1}x^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1-1}{n+1}x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}\\&=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1\\0, & x=0\end{cases}\end{aligned}$$

展开式和逐项求导与逐项求积. 本题利用了 $\frac{1}{1-x}$ 和 $\ln(1+x)$ 的展开式.

6-76　求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的和函数.

本题主要利用 e^x 的展开式.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{\frac{x}{2}}\\&=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{\frac{x}{2}}\\&=\frac{x^2}{4}e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}\\&=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}},\qquad -\infty<x<+\infty\end{aligned}$$

6-77　求 $\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+2)x^n$ 的和函数.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+2)x^n&=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n\\&=x\frac{d^2}{dx^2}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n+1}\Big)+x\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\Big)\\&=x\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)\\&\quad+x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)\\&=\frac{2x}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x(3-x)}{(1-x)^3},\\&\qquad -1<x<1\end{aligned}$$

6-78　求幂级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n$ 的收敛域及和函数.

解　$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2-1}\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=1$

在 $x=1$ 处,原级数发散.

在 $x=-1$ 处,原级数收敛,收敛域为$[-1,1)$

由于$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\frac{(n+1)+(n-1)}{(n+1)(n-1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right]$

故在$[-1,1)$内

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

$$=\begin{cases}\frac{x}{2}\left(\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)+\frac{1}{2x}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-x-\frac{x^2}{2}\right), & -1\leqslant x<0\text{或}0<x<1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\frac{x}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2x}\left(-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right), & -1\leqslant x<0\text{或}0<x<1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\frac{x}{2}\ln(1-x)-\frac{x}{4}-\frac{\ln(1-x)}{2x}-\frac{1}{2}, & -1\leqslant x<0\text{或}0<x<1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

6-79 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n(x-1)^n$在$x=0$收敛,在$x=2$发散,试确定该幂级数的收敛域并说明理由.

解 根据阿贝尔定理,由原级数在 $x=0$ 收敛可知,原幂级数在 $|x-1|<|0-1|=1$处都收敛;而由原幂级数在 $x=2$处发散,可知原幂级数在$|x-1|>|2-1|=1$处都发散,从而原幂级数的收敛域为$0\leqslant x<2$.

6-80 将 $f(x)=\sqrt{4x^4+x^5}$ 展为 x 的幂级数.

幂级数展开常用间接法,即采用五个已知公式和幂级数的运算法则,本题用到二项式公式.

解 $f(x)=2x^2\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=2x^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\cdots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-3)!!}{n!8^n}x^{2+n}+2x^2+\frac{x^3}{4}$$

$$-4<x\leqslant 4$$

6-81 将 $f(x) = x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 展开成为 x 的幂级数.

解 因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x^2)^2 + \cdots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(x^2)^n + \cdots$$

所以 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$= x + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x| \leqslant 1.$$

则 $$x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\quad |x| \leqslant 1$$

本题用到二项式公式和逐项积分法则.

当 $x = 1$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \times \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \frac{1}{2n+1} = \ln\frac{1+\sqrt{2}}{e}$$

6-82 将 $f(x) = \mathrm{arctg}\,\frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

解 由 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n},\quad -1 < x < 1$

知 $$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

又 $$f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

故 $$\arctan\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad -1 \leqslant x < 1$$

逐项求导和逐项积分是幂级数展开中常用的方法.

讨论端点敛散性还要看被展开函数的定义域.

6-83 将 $f(x) = \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$ 展为 x 的幂级数.

解 因为 $x^2+5x-6 = (x+6)(x-1)$

而 $$\frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \frac{6(x-1)-(x+6)}{(x+6)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{x}{6}} + \frac{1}{1-x}$$

又 $$\frac{1}{1+\frac{x}{6}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{6^n},\qquad \left|\frac{x}{6}\right| < 1$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\qquad |x|<1$$

故 $$\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)x^n,\qquad |x|<1$$

6-84 将 $f(x)=\sin x\cos 2x$ 展为 x 的幂级数.

解
$$\begin{aligned}\sin x\cos 2x&=\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\\&\quad\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(3^{2n+1}-1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\\&\qquad -\infty<x<+\infty\end{aligned}$$

有理函数展开最常用的方法是利用部分分式法将要展开的函数改写成几个简单有理式的和.

6-85 将 $f(x)=\ln(3x-x^2)$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数.

解
$$\begin{aligned}f(x)&=\ln x+\ln(3-x)\\&=\ln[1+(x-1)]+\ln[2-(x-1)]\\&=\ln[1+(x-1)]+\ln 2+\ln\left[1-\frac{x-1}{2}\right]\\&=\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\\&\quad\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{2n-1}\frac{(x-1)^n}{n2^n}\\&=\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^{n-1}-\frac{1}{2^n}\right]\frac{(x-1)^n}{n}\end{aligned}$$

使上式成立的 x 应满足 $-1<x-1\leqslant 1$ 且 $-1<-\frac{x-1}{2}\leqslant 1$,

即 $0<x\leqslant 2$.

本题的关键是第一个等式.

6-86 将 $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ 展开为 x 的幂级数.

解
$$\begin{aligned}\ln(1+x+x^2)&=\ln\frac{1-x^3}{1-x}\qquad (x\neq 1)\\&=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n},\qquad -1\leqslant x<1\end{aligned}$$

本题的关键是第一个等式.

6-87 将 $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$ 展为 x 的幂级数.

解 1
$$\begin{aligned}f(x)&=\ln[(1+x)+x^2(1+x)]\\&=\ln(1+x)(1+x^2)\end{aligned}$$

解 1 是将对数符号内的式子分解因式. 解 2 与上题的

$$= \ln(1+x)+\ln(1+x^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$-1 < x \leqslant 1$$

方法相同.

解 2 $f(x)=\ln\dfrac{1-x^4}{1-x}$

$$= \ln(1-x^4)-\ln(1-x)$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n},\qquad -1<x<1$$

6-88 将 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ 展开成 x 的幂级数.

本题的关键是分子分母同乘以 $(1-x)$.

解 $f(x)=\dfrac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$

$$= \frac{1-x}{1-x^{16}}$$

$$= (1-x)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{16n}\right)\qquad(|x|<1)$$

$$= 1-x+x^{16}-x^{17}+x^{32}-x^{33}+\cdots$$

$$|x|<1$$

6-89 将 $f(x)=\dfrac{x}{1+e^x}$ 展开成 x 的幂级数,展到 x^4 项.

本题采用了幂级数的除法,而除法事实上是采用待定系数.

解 设 $\dfrac{x}{1+e^x}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$

由于 $1+e^x=2+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$

则 $x=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\left(2+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\right)$

右端两个幂级数相乘后,比较等式两端同次幂的系数得:

$$\begin{cases} 2a_0=0 \\ a_0+2a_1=1 \\ \dfrac{a_0}{2!}+a_1+2a_2=0 \\ \dfrac{a_0}{3!}+\dfrac{a_1}{2!}+a_2+3a_3=0 \\ \dfrac{a_0}{4!}+\dfrac{a_1}{3!}+\dfrac{a_2}{2!}+a_3+2a_4=0 \end{cases}$$

则 $a_0=0,a_1=\dfrac{1}{2},a_2=-\dfrac{1}{4},a_3=0,a_4=\dfrac{1}{48}$

故所求展式为$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{48}x^4+\cdots\quad(x\in R)$

6-90 将$f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$展开为x的幂级数

解1 $f(x)=\frac{2-(1-x)}{(1-x)^3}$

$$=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}$$

由于 $$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}$$

而 $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\qquad(|x|<1)$$

所以 $$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

故 $$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1}\qquad(|x|<1)$$

解2 由$(1+x)^a$的展开式知

$$\frac{1}{(1-x)^3}=(1-x)^{-3}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3)(-3-1)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-x)^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=(1+x)\cdot\frac{1}{(1-x)^3}$$

其 x^{n-1}项的系数为 $\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}=n^2$

则 $$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1},\qquad|x|<1$$

6-91 将 $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$ 展开为 x 的幂级数.

解1 由于 $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

那么 $$f(x)=\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'$$

而 $$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}$$

则 $$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n},\qquad |x|<1$$

解2 由 $(1+x)^a$ 展开式知

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x^2)^2}&=(1+x^2)^{-2}\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(x^2)^n\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n}\end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n},\qquad |x|<1$$

解3 $$\begin{aligned}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}&=x^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\\&=x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n},\qquad |x|<1\end{aligned}$$

解4 利用待定系数法

设 $$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

则 $$\begin{aligned}x^2&=(1+x^2)^2\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\\&=(1+2x^2+x^4)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\\&=a_0+a_1x+(2a_0+a_2)x^2+a_3x^3+(a_0+2a_2+a_4)x^4+\\&\quad\cdots+a_{2m-1}x^{2m-1}+(a_{2m-4}+2a_{2m-2}+a_{2m})x^{2m}+\cdots\end{aligned}$$

易得 $a_0=0,a_{2m-1}=0,a_2=1,a_4=-2,\cdots,a_{2m}=(-1)^{m+1}m$

故 $$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n},\qquad |x|<1$$

解1的关键是利用 $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

解2主要是利用了 $(1+x)^a$ **的展开式.**

解3是利用了幂级数的乘法.

解4是利用待定系数法.

6-92　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

求　$f^{(n)}(0)$,　$(n=1,2,\cdots)$.

解　由于 $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$

$$-\infty<x<+\infty$$

所以　$\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots,$

$$(x\neq 0)$$

又当 $x=0$ 时,上式中的幂级数和为 1.

则　$f(x)=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$

故　$f^{2m-1}(0)=0.$

$$f^{2m}(0)=\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\qquad m=1,2,\cdots$$

利用函数在某点的幂级数展开式求函数在该点的各阶导数值是一种常用方法.

6-93　试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)$,其中　$a>1$.

解　考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n$

设　$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n$

则　$S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$

$$=x\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\Big)'$$

$$=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2},\qquad -1<x<1$$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)=S\left(\dfrac{1}{a}\right)$

$$=\frac{\frac{1}{a}}{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{a}{(1-a)^2}$$

本题所求的极限实际上是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{a^n}(a>1)$ 的和. 所以可考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n$.

6-94　试求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解　由于　$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] = \frac{1}{2}$$

6-95 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$.

解 由于在 $x\to 0$ 时, $\sin x^2 \sim x^2$

$$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

则 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\left[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[1-\frac{x^2}{2!}-1-x^2+o(x^2)\right]}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}$$

这里实际上是用局部泰勒公式求极限. 如果用洛必达法则将十分麻烦. 在写出函数的局部泰勒公式的前几项时, 用幂级数展开更方便.

6.2.3 傅里叶级数

6-96 将函数 $f(x) = \arcsin(\sin x)$ 展开为傅里叶级数.

解 函数 $f(x)$ 的周期为 2π, 且

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2} \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \end{cases}$$

$f(x)$ 是奇函数, 则 $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx\right]$$

本题的关键是写出 $f(x)$ 在一个周期内的表达式.

$$=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)^2}, & n=2k-1\end{cases}$$

则 $\arcsin(\sin x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$

$$-\infty < x < +\infty$$

6-97 将 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ x, & -\pi<x<0\end{cases}$ 展开为傅里叶级数.

解

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+1)\mathrm{d}x=1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+1)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=0$$

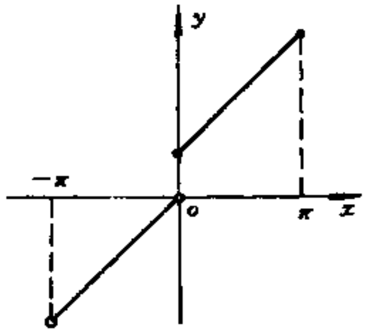


图 6.1

本题中的 $a_n=0$ 事先就能看出来,事实上如图可知若将 x 轴向上平移 $\frac{1}{2}$,则原函数就是奇函数(只差 $x=0$ 这一点).这是傅里叶级数展开中一种常用的技巧.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+1)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{2}{n}, & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{2(\pi+1)}{n\pi}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

则 $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2(\pi+1)}{\pi}\sin x-\dfrac{2}{2}\sin 2x+\dfrac{2(\pi+1)}{3\pi}\sin 3x$

$$-\frac{2}{4}\sin 4x+\cdots,\qquad 0<|x|<\pi$$

在 $x=0$ 处,傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}$;

在 $x=\pm\pi$ 处,傅里叶级数收敛于 $\pi+\frac{1}{2}$.

6-98 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

解

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = 0, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

因此 $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

令 $x = 0$ 得 $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

令 $x = \pi$，得 $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

利用傅里叶级数求常数项级数的和是一种常用方法.

6-99 将 $f(x) = x \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ 展开为傅里叶级数.

解 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \mathrm{d}x = 2\pi$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \cos nx \mathrm{d}x = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \sin nx \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{n}$$

则 $f(x) \sim \pi - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\sin nx = \begin{cases} x, & 0 < x < 2\pi \\ \pi, & x = 0, 2\pi \end{cases}$

6-100 将 $f(x) = 10 - x \quad (5 < x \leqslant 15)$ 展开为周期为 10 的傅里叶级数.

由于区间 $(5,15)$ 长为 10 是一个周期，故将 $f(x)$ 按周期延拓后在 $[5,15]$ 上的

解 由 $f(x) = 10 - x \quad (5 < x \leqslant 15)$ 易知 $f(x)$ 按此周期延拓后为奇函数，所以

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10 - x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x = \frac{10(-1)^n}{n\pi}$$

所以 $f(x)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x,\quad (5<x<15)$

积分与在$[-5,5]$上积分相等.

6-101 将 $f(x)=\cos x$ 在 $0<x<\pi$ 内展开以 2π 为周期的傅里叶正弦级数.并在 $-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上写出该级数的正和函数.

这里应特别注意的是本题是将 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上做奇延拓后的函数展开,则在求其展开式在 $(-2\pi,2\pi)$ 的和函数时应对奇延拓后的函数用收敛定理.

解 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos x\sin nx\,\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\frac{4}{\pi(1-n^2)}, & n\text{ 为偶数}\\ 0, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$\cos x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin 2nx}{1-4n^2},\quad 0<x<\pi$$

令 $S(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin 2nx}{1-4n^2}$

$$S(x)=\begin{cases}\cos x, & -2\pi<x<-\pi\\ -\cos x, & -\pi<x<0\\ \cos x, & 0<x<\pi\\ -\cos x, & \pi<x<2\pi\\ 0, & x=0,\pm\pi,\pm 2\pi\end{cases}$$

6-102 将 $f(x)=x^2$ 在 $0<x<\pi$ 上分别展开为正弦、余弦傅里叶级数.

解 1) 按余弦展开

$b_n=0$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2}$

则 $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi$

2) 按正弦展开

$a_n=0$

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx\,\mathrm{d}x$

$=(-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1]$

则 $x^2=2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3},\quad 0\leqslant x<\pi$

在 $x=\pi$ 处其傅里叶级数收敛于零.

6-103 设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，且 $f(\frac{\pi}{2}+x)=-f(\frac{\pi}{2}-x)$，试证 $f(x)$ 的余弦展开式中 $a_{2n}=0$.

证 $a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$$

令 $t=\frac{\pi}{2}-x$,

则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)\mathrm{d}t$.

令 $t=x-\frac{\pi}{2}$

则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos(n\pi+2nt)\mathrm{d}t$

这里 $f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$

$$\cos(n\pi-2nt)=\cos(n\pi+2nt)$$

故 $a_{2n}=0$

6-104 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，试证 $f(x)$ 的傅里叶系数中 $a_0=a_{2n}=b_{2n}=0$.

证 $a_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$$

令 $x=\pi+t$

则 $\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\pi}^{0} f(\pi+t)\cos 2nt\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos 2nt\mathrm{d}t$$

故 $a_{2n}=0$

同理可证 $b_{2n}=0$

6-105 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=f(x)$，试证其傅里叶系数 $a_{2n-1}=0, b_{2n-1}=0$.

满足 $f(x+\pi)=-f(x)$ 的函数称为反周期函数.

证 $a_{2n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x$$

令 $x = \pi + t$

则 $$\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\pi}^{0} f(\pi+t)\cos(2n-1)t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x$$

故 $a_{2n-1} = 0$

同理可证 $b_{2n-1} = 0$.

第 7 章　向量代数与空间解析几何

7.1　客观题

7.1.1　填空题

7-1　已知 $\boldsymbol{a}=\{1,0,2\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,1,3\}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$.若 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{d}$，则 $\lambda=$ $\underline{\ \dfrac{1}{7}\ }$.

求两向量的向量积一定要熟练掌握.请自己讨论本题的几何意义.

解　因为　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{-2,-1,1\}$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\{-2,5,1\}$

所以　$\boldsymbol{d}\ \{1,0,2\}+\lambda\{-2,5,1\}$

$=\{1-2\lambda,5\lambda,2+\lambda\}$

又　$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{d}$

所以　$1-2\lambda=5\lambda=\dfrac{2+\lambda}{3}$

故　$\lambda=\dfrac{1}{7}$

7-2　一条直线连点$(2,-3,4)$，且垂直于直线 $x-2=1-y=\dfrac{z+5}{2}$和$\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=z-1$ 则该直线方程是$\underline{\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{5}=z-4}$.

解　$\boldsymbol{a}_1=\{1,-1,2\}$，$\boldsymbol{a}_2=\{3,-2,1\}$

用向量积求直线的方向向量.

所以　$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$

$=\{3,5,1\}$

用一点一个方向求直线方程.

故所求直线方程为

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=z-4$$

7-3　经过已知点$(1,-1,4)$和直线$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{1-z}{-1}$的平面方程是$\underline{\ 4x-y-3z+7=0\ }$.

解　已知直线的方向向量为

$\boldsymbol{a}=\{2,5,1\}$

所求平面的法向量为

$\{2,-1,3\}=\{1,-1,4\}-\{-1,0,1\}$由向量积求

$$\boldsymbol{n}=\{2,5,1\}\times\{2,-1,3\}=4\{4,-1,-3\}$$

故平面方程为

$$4(x-1)-(y+1)-3(z-4)=0$$

即 $\quad 4x-y-3z+7=0.$

法向量. 用点法式求平面方程.

7-4 一平面经过两点(1,0,1),(2,1,3)且垂直于平面 $x-2y+3z-2=0$,则该平面方程为 $\underline{\ 7x-y-3z-4=0\ }$.

解 已知平面法向量:$\boldsymbol{n}_1=\{1,-2,3\}$

过已知两点构成的向量:$\boldsymbol{n}_2=\{1,1,2\}$

故所求平面的法向量:$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\{-7,1,3\}$

所求平面方程为: $\quad -7(x-1)+y+3(z-1)=0$

即 $\quad 7x-y-3z-4=0.$

所求平面的法向量垂直于 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 是解本题的要点.

7-5 与两直线 $\begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=1+t\end{cases}$ 及 $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行,且过原点的平面方程为 $\underline{\ x-y+z=0\ }$.

解 $\boldsymbol{a}_1=\{0,1,1\},\boldsymbol{a}_2=\{1,2,1\}$

所以 $\quad \boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\{-1,1,-1\}$

故所求平面方程为: $\quad x-y+z=0.$

正确求出两直线的方向向量 $\boldsymbol{a}_1$ 及 $\boldsymbol{a}_2$,并注意到 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}_1$ 及 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}_2$.

7-6 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+1\\y=3t-3\\z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程是 $\underline{\ x-3y-z+4=0\ }$.

解 所给直线的方向向量为

$$\boldsymbol{a}_1=\{1,-3,-1\}$$

故平面方程是 $\quad (x-1)-3(y-2)-(z+1)=0$

即 $\quad x-3y-z+4=0.$

由直线的参数式方程求出方向向量是解本题的关键.

7-7 已知两条直线的方程是

$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$, $L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$,则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是 $\underline{\ x-3y+z+2=0\ }$.

解 $\boldsymbol{a}_1=\{1,0,-1\},\boldsymbol{a}_2=\{2,1,1\}$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\{1,-3,1\}$$

故所求平面方程为 $\quad (x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$

正确理解 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}_2$ 是关键.

即 $x-3y+z+2=0$

7.1.2 单项选择题

7-8 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为非零向量，则与 $\boldsymbol{a}$ 不垂直的向量是( ). (D)

(A) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ (B) $\boldsymbol{b}-\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}$

(C) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (D) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$

请读者自己画图，理解每种情况的几何意义.

7-9 已知两直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{1-z}{-1}$ 和 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{M}=\dfrac{z+1}{-2}$ 相互垂直. 则 $M=$( ). (A)

(A) 2 (B) 5 (C) -2 (D) -4

解 $\boldsymbol{a}_1=\{2,-2,1\},\boldsymbol{a}_2=\{4,M,-2\}$

由 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=0$

得 $M=2$

这里主要是利用两直线垂直的条件.

7-10 已知两直线 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$ 和 $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{4}$. 则它们是( ). (B)

(A) 两条相交的直线 (B) 两条异面直线

(C) 两条平行但不重合的直线 (D) 两条重合的直线

解 因为 $\boldsymbol{a}_1=\{2,3,5\},\boldsymbol{a}_2=\{-3,2,4\}$

$\boldsymbol{M_1M_2}=\{5,-2,-5\}$

所以 $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{M_1M_2}$

$=\{2,3,5\}\times\{-3,2,4\}\cdot\{5,-2,-5\}$

$=-9$

故选(B).

$M_1(4,-1,-2)$，$M_2(-1,1,3)$ 分别是两条已知直线上的点.

注意利用两直线共面的条件.

7-11 设有直线 $L_1: x+1=\dfrac{y-5}{-2}=z+8$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，则 L_1 与 L_2 的夹角为( ). (C)

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

解 $\boldsymbol{a}_1=\{1,-2,1\}$

$\boldsymbol{a}_2=\{1,-1,0\}\times\{0,2,1\}$

$=\{-1,-1,2\}$

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle$

利用向量积求一般方程表达的直线的方向向量. 两直线的夹角即它们方向向量的夹角.

$$=\frac{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}$$

$$=\frac{1}{2}$$

故 $\quad <\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2>=\frac{\pi}{3}$

7-12 设有直线 $L_1:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$,则直线 L( ). (C)

(A) 平行于 π (B) 在 π 上

(C) 垂直于 π (D) 与 π 斜交

解 因为直线的方向向量

$$\boldsymbol{a}=\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}$$
$$=-7\{4,-2,1\}$$

平面 π 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{4,-2,1\}$$

所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{n}$

故选(C).

$\pi\perp L$ 的充要条件是$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{n}$

7-13 曲线$\begin{cases}x^2+4y^2-z^2=16\\4x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$,在 xoy 坐标面上投影的方程是( ). (C)

(A) $\begin{cases}x^2+4y^2=16\\z=0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}4x^2+y^2=4\\z=0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x^2+y^2=4\\z=0\end{cases}$ (D) $x^2+y^2=4$

由已知方程组消去变量 z 即得投影柱面方程.

7.2 非客观题

7.2.1 向量代数

7-14 已知三角形三个顶点的坐标是 $A(-1,2,3)$,$B(1,1,1)$,$C(0,0,5)$.试证三角形 ABC 是直角三角形,并求角 B.

解 $\boldsymbol{BA}=\{-2,1,2\}$

$\boldsymbol{CA}=\{-1,2,-2\}$,$\boldsymbol{BC}=\{-1,-1,4\}$

又 $\quad \boldsymbol{BA}\cdot\boldsymbol{CA}=(-2)\times(-1)+1\times2+2(-2)=0$

所以 $\quad \boldsymbol{BA}\perp\boldsymbol{CA}$

从而三角形 ABC 为直角三角形.

两向量垂直的充要条件.容易看

$$\cos\angle B = \frac{\boldsymbol{BA}\cdot\boldsymbol{BC}}{|\boldsymbol{BA}||\boldsymbol{BC}|}$$

$$= \frac{2-1+8}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+1+16}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\angle B = \frac{\pi}{4}$$

由 $|\boldsymbol{BA}| = |\boldsymbol{CA}|$，知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.故

$\angle B = \frac{\pi}{4}$.

7-15 证明

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})] = 2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})]$

$= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}]$

$= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$

$= \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$\quad +\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$

$= \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$

$= 2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

本题几何意义是说以平行六面体的任一顶点为起点的三个相邻平行四边形的对角线为棱的平行六面体的体积是原六面体体积之两倍.

7-16 已知 $\boldsymbol{OA} = \{-2,3,-6\}$，$\boldsymbol{OB} = \{1,-2,2\}$，$|\boldsymbol{OC}| = \sqrt{42}$，且 $\boldsymbol{OC}$ 平分 $\angle AOB$，求 $\boldsymbol{OC}$.

解 因为 $\boldsymbol{OA}/|\boldsymbol{OA}|$，$\boldsymbol{OB}/|\boldsymbol{OB}|$ 均为单位向量，所以

$$\frac{\boldsymbol{OA}}{|\boldsymbol{OA}|}+\frac{\boldsymbol{OB}}{|\boldsymbol{OB}|} = \frac{1}{7}\{-2,3,-6\}+\frac{1}{3}\{1,-2,2\}$$

是 $\angle AOB$ 的角平分线向量.依题意存在 $\lambda > 0$，使

$$\frac{\boldsymbol{OA}}{|\boldsymbol{OA}|}+\frac{\boldsymbol{OB}}{|\boldsymbol{OB}|} = \lambda\boldsymbol{OC}$$

即 $\frac{1}{21}\{1,-5,-4\} = \lambda\boldsymbol{OC}$

但 $|\boldsymbol{OC}| = \sqrt{42}$，上式两端取模，得

$$\frac{1}{21}\sqrt{42} = \lambda\sqrt{42}$$

$$\lambda = \frac{1}{21}$$

故 $\boldsymbol{OC} = \{1,-5,-4\}$.

单位向量的和即为它们所夹角的角平分线向量.

7-17 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

解 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$

所以 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}) = 0$

即 $7|\boldsymbol{a}|^2-15|\boldsymbol{b}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \qquad (1)$

又 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$

向量积可用来求两向量间的夹角.

所以 $$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$$
即 $$7|\boldsymbol{a}|^2+8|\boldsymbol{b}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \tag{2}$$
联立方程(1),(2)得
$$|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$
所以 $$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$$
$$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\pi}{3}$$

7-18 如图7.1所示,设已给立方体三边上的向量为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,$A,B,C,D,E,F$ 为各边的中点,求证

注意,这里都是自由向量.

$$\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{DE}+\boldsymbol{FA}=0$$

证 $$\boldsymbol{BC}=\frac{\boldsymbol{b}}{2}-\frac{\boldsymbol{c}}{2}$$
$$\boldsymbol{DE}=-\frac{\boldsymbol{a}}{2}-\frac{\boldsymbol{b}}{2}$$
$$\boldsymbol{FA}=\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}$$
所以 $$\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{DE}+\boldsymbol{FA}$$
$$=\frac{\boldsymbol{b}}{2}-\frac{\boldsymbol{c}}{2}-\frac{\boldsymbol{a}}{2}-\frac{\boldsymbol{b}}{2}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}$$
$$=0$$

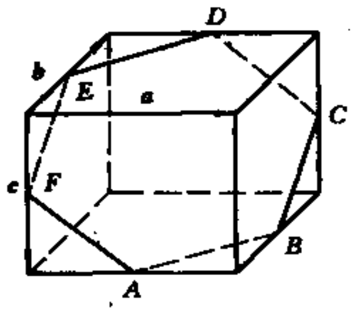


图 7.1

7-19 证明三角形各中线交于一点,且这点是每条中线的三分点.

用向量代数方法证明本题较简便.

证 如图7.2所示,设
$$\boldsymbol{AB}=2\,\boldsymbol{AE}$$
$$\boldsymbol{AC}=2\,\boldsymbol{AD}$$
$$\boldsymbol{BC}=2\,\boldsymbol{BF}$$
又设 CE 交于 BD 于 G 点,则
$$\boldsymbol{AG}-2\,\boldsymbol{GF}=(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BG})-2(\boldsymbol{GB}+\boldsymbol{BF})$$
$$=\boldsymbol{AB}+3\,\boldsymbol{BG}-\boldsymbol{BC}$$
$$=2(\boldsymbol{EB}+\boldsymbol{BG})+\boldsymbol{CG}$$
$$=\boldsymbol{CG}-2\,\boldsymbol{GE}$$
由 $\boldsymbol{AG}-2\,\boldsymbol{GF}=\boldsymbol{CG}-2\,\boldsymbol{GE}$,及 $\boldsymbol{AG}$ 不平行于 $\boldsymbol{CG}$,故有
$$\boldsymbol{AG}-2\,\boldsymbol{GF}=\boldsymbol{CG}-2\,\boldsymbol{GE}=0$$
同理可证

利用三角形两中线不共线证明 $\boldsymbol{AG}-2\,\boldsymbol{GF}=0$

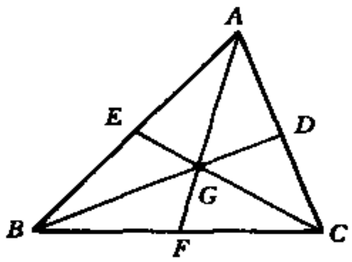


图 7.2

$$\boldsymbol{CG} - 2\,\boldsymbol{GE} = \boldsymbol{BG} - 2\,\boldsymbol{GD} = 0$$

所以，$\boldsymbol{BG} = 2\,\boldsymbol{GD}$， $\boldsymbol{CG} = 2\,\boldsymbol{GE}$

且 $\boldsymbol{AG} = 2\,\boldsymbol{GF}$

这样就证明了三条中线交于一点 G，且 G 点是每条中线的三分点.

7-20 证明一般三角形的余弦定理.

用向量数量积可求一向量的模，这种证明余弦定理最简洁.

证 如图 7.3 所示作 $\triangle ABC$，

则 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{CA} - \boldsymbol{CB}$

令 $|\boldsymbol{BA}| = c$，$|\boldsymbol{CA}| = b$，$|\boldsymbol{CB}| = a < CA$，$CB >= \angle C$

则
$$\boldsymbol{BA}^2 = (\boldsymbol{CA} - \boldsymbol{CB})\cdot(\boldsymbol{CA} - \boldsymbol{CB})$$
$$= \boldsymbol{CA}^2 + \boldsymbol{CB}^2 - 2\,\boldsymbol{CA}\cdot\boldsymbol{CB}$$

即 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$

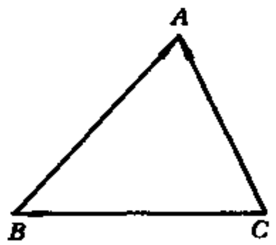


图 7.3

7-21 证明三角形的三条高线交于一点.

两向量相互垂直的充要条件在本题中体现得最清楚.

证 如图 7.4 所示，作

$\boldsymbol{BD} \perp \boldsymbol{AC}$， $\boldsymbol{CD} \perp \boldsymbol{AB}$

因为
$$\boldsymbol{AD}\cdot\boldsymbol{BC} = (\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BD})\cdot\boldsymbol{BC}$$
$$= \boldsymbol{AB}\cdot(\boldsymbol{BD} + \boldsymbol{DC}) + \boldsymbol{BD}\cdot(\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{AB})$$
$$= \boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{BD} - \boldsymbol{BD}\cdot\boldsymbol{AB} = 0$$

所以， $\boldsymbol{AB} \perp \boldsymbol{BC}$，即三条高线交于一点 D.

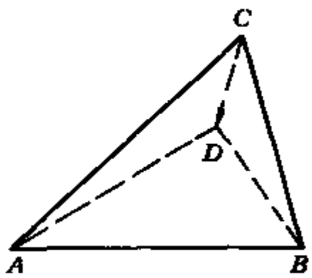


图 7.4

7-22 设 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$，$|\boldsymbol{a}| = 3$，$|\boldsymbol{b}| = 2$，$|\boldsymbol{c}| = 5$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 在等式

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$$

两边依次点乘 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$，得

注意点积满足交换律.

$$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 0$$
$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0$$
$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}^2 = 0$$

以上三式相加并移项得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2)$$
$$= \frac{1}{2}(3^2 + 2^2 + 5^2) = 19$$

7-23 设 $\boldsymbol{a} = \{1,4,5\}$，$\boldsymbol{b} = \{1,1,2\}$，求 λ 使 $\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a} - \lambda\boldsymbol{b}$.

解 1 侧重于抽象运算，具有普遍性.

解 1　欲 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$,则应有

$$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=0$$

即
$$\boldsymbol{a}^2-\lambda^2\boldsymbol{b}^2=0$$

$$\lambda^2=\frac{\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{b}^2}=7$$

故
$$\lambda_1=\sqrt{7},\lambda_2=-\sqrt{7}$$

解 2　因为

$$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\{1+\lambda,4+\lambda,5+2\lambda\}$$

$$\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=\{1-\lambda,4-\lambda,5-2\lambda\}$$

欲 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$,则应有

$$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=0$$

即　$(1-\lambda^2)+(16-\lambda^2)+(25-4\lambda^2)=0$

得　$\lambda_1=\sqrt{7},\lambda_2=-\sqrt{7}$

此解法侧重于具体计算.

7-24　已知三角形 ABC 的顶点是 $A(3,0,5),B(4,3,-5),C(-4,1,3)$,求 BC 边上中线长.

解
$$\boldsymbol{AB}=\{4,3,-5\}-\{3,0,5\}=\{1,3,-10\}$$

$$\boldsymbol{BC}=\{-8,-2,8\}$$

所以 $\boldsymbol{BC}$ 边上中线向量 $\boldsymbol{AD}$ 为

$$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{AB}+\frac{1}{2}\boldsymbol{BC}=\{-3,2,-6\}$$

故 BC 边上中线的长

$$|AD|=\sqrt{(-3)^2+2^2+(-6)^2}=7$$

请读者自己画图.本题一般先求 BC 中点 $D(0,2,-1)$,用两点距离公式 $AD=\sqrt{3^2+2^2+6^2}=7$.

7-25　设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,证明

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},$$

证　在等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ 两边依次叉乘 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=0$$

比较以上两式即得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$$

注意向量自身叉积为零;叉积交换先后次序相差一个负号.请读者指出本题的几何意义.

7-26　求证点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 的距离为 $d=\frac{|\boldsymbol{M_0M_1}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}$,其中 $\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

利用图形的几何直观性可启发我们的思维,有利于

解题.

证 如图 7.5 所示，M_1 到直线 L 的距离 d 为平行四边形 $M_0M_1P_1P_0$ 的高，其中 $\boldsymbol{M_0P_0} = \boldsymbol{a} = \{l, m, n\}$，$M_0$ 的坐标为 (x_0, y_0, z_0)，故

$$d = \frac{\text{平行四边形面积}}{\text{底边长}} = \frac{|\boldsymbol{M_0M_1} \times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}$$

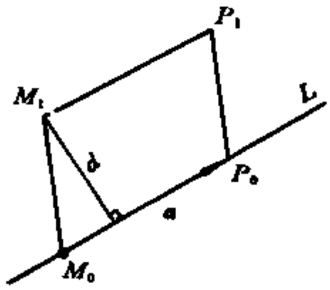


图 7.5

7-27 设两条异面直线为 L_1 与 L_2，其方向向量依次为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$，$M_1$ 为 L_1 上的点，M_2 为 L_2 上的点，求证 L_1 与 L_2 的最短距离为

$$d = \frac{|\boldsymbol{M_1M_2} \cdot \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}$$

证 1 如图 7.6 所示，设 $\boldsymbol{P_1P_2}$ 为 L_1 与 L_2 的公垂线向量，则

$$\begin{aligned} d &= |\boldsymbol{P_1P_2}| \\ &= \left|\boldsymbol{P_1P_2} \cdot \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}\right| \\ &= \left|(\boldsymbol{P_1M_1} + \boldsymbol{M_1M_2} + \boldsymbol{M_2P_2}) \cdot \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}\right| \\ &= \frac{|\boldsymbol{M_1M_2} \cdot \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|} \end{aligned}$$

请比较这两种证法.

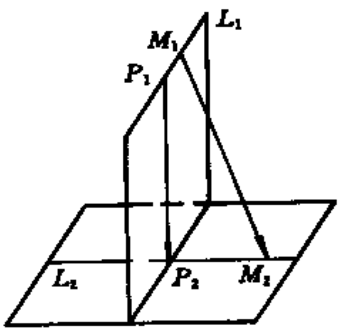


图 7.6

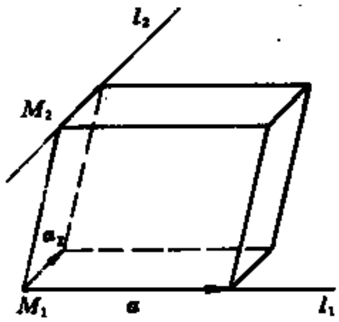


图 7.7

证 2 如图 7.7 所示，由向量运算的几何意义，$|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|$ 是由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 构成的平行四边形的面积，$|\boldsymbol{M_1M_2} \cdot \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|$ 是由 $\boldsymbol{M_1M_2}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 构成的平行六面体之体积，其高即为所要求的距离，故

$$d = \frac{|\boldsymbol{M_1M_2} \cdot \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}.$$

7-28 求向量 $\boldsymbol{a}=\{6,-1,2\}$ 在向量 $\boldsymbol{b}=\{7,-4,4\}$ 上的投影和投影向量.

解 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上投影为

$$Prj_{b}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\{6,-1,2\}\cdot\{7,-4,4\}}{\sqrt{7^2+(-4)^2+4^2}}=6$$

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

$$(Prj_{b}\boldsymbol{a})\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\left\{\frac{14}{3},-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right\}$$

利用公式

注意本题中涉及到的概念.

7-29 求单位向量 $\boldsymbol{c}^0$ 使它与向量 $\boldsymbol{a}=\{5,-6,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,-7,10\}$ 共面,且满足 $\boldsymbol{c}^0\perp\boldsymbol{a}$,然后再求一单位向量 $\boldsymbol{e}^0$,使 $\boldsymbol{e}^0\perp\boldsymbol{a}^0$ 且 $\boldsymbol{e}^0\perp c^0$.

解 令 d 表示 b 在 a 上的投影向量,则

$$\begin{aligned}d&=\frac{a\cdot b}{a^2}a\\&=\frac{\{5,-6,1\}\cdot\{2,-7,10\}}{5^2+(-6)^2+1^2}\{5,-6,1\}\\&=\{5,-6,1\}\end{aligned}$$

那么向量

$$\begin{aligned}c&=b-d=\{2,-7,10\}-\{5,-6,1\}\\&=\{-3,-1,9\}\end{aligned}$$

就是一个与向量 a,b 共面的向量,且 $c\perp a$.将 c 单位化后,得

$$c^0=\left\{-\frac{3}{\sqrt{91}},-\frac{1}{\sqrt{91}},\frac{9}{\sqrt{91}}\right\}$$

或 $$c^0=\left\{\frac{3}{\sqrt{91}},\frac{1}{\sqrt{91}},-\frac{9}{\sqrt{91}}\right\}$$

所以 $$e^0=\frac{a\times c}{|a\times c|}=-\frac{1}{\sqrt{5542}}\{53,48,23\}$$

或 $$e^0=\frac{1}{\sqrt{5542}}\{53,48,23\}$$

请画图理解.

注意所求的 c^0,e^0 都有两个互为反向的向量.

7.2.2 空间平面与直线

7-30 已知直线方程

$$L_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{1}$$

$$L_2:\ \frac{x+1}{-1}=y+2=z+1$$

验证它们相交,并求它们所确定的平面方程.

解 因为 $M_1(1,1,0)$ 是 L_1 上的点,$M_2(-1,-2,-1)$ 是 L_2 上的点.所以

$$\boldsymbol{M_1M_2} = \{-2,-3,-1\}$$

因为 $\boldsymbol{M_1M_2}\cdot\{2,3,1\}\times\{-1,1,1\}=0$

$\{2,3,1\}$不平行于$\{-1,1,1\}$

故 L_1 与 L_2 相交.

设 $M(x,y,z)$ 是所求平面的任一点.那么平面方程为

$$M_1M_2\cdot\{2,3,1\}\times\{-1,1,1\}=0$$

即
$$2x-3y+5z+1=0$$

三向量共面的充要条件.

利用点法式.

7-31 在直线方程$\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+1}{3-A}=\dfrac{z-2}{4+B}$中,如何选取 A 的值才能使直线平行于 XOZ 平面,如何选取 A 和B 的值才能使直线同时平行于平面 $2x+3y-2z+1=0$ 和 $x-6y+2z-3=0$.

解 要使直线平行于 XOZ 平面,必须

$$\{2,3-A,4+B\}\cdot\{0,1,0\}=0$$

即
$$3-A=0$$
$$A=3$$

要使直线同时平行于两已知平面,必须

$$\{2,3-A,4+B\}\cdot\{2,3,-2\}=0$$
$$\{2,3-A,4+B\}\cdot\{1,-6,2\}=0$$

即
$$\begin{cases}3A+2B-5=0\\3A+B-4\end{cases}$$
$$A=B=1$$

本题后半部分也可这样做,因为平行于两平面的直线,就平行于两平面的交线,而交线的方向向量为

$$\{2,3,-2\}\times\{1,-6,2\}=\{-6,-6,-15\}$$

故应有
$$\frac{2}{-6}=\frac{3-A}{-6}=\frac{4+B}{-15}$$
$$A=B=1$$

注意这里的几何意义.

两向量平行的条件.

7-32 求过原点并含直线 L:

$$x=3-t,\qquad y=1+2t,\qquad z=t$$

的平面方程.

解 变换 L 的方程为一般式

$$\begin{cases}x+z-3=0\\y-2z-1=0\end{cases}$$

则过 L 的平面束为

利用平面束求平面方程也是常用的方法.

本题也可这样作: $\{-1,2,1\}$是 L 的方向量,$M(3,1,0)$是 L 上

$$\lambda_1(x+z-3)+\lambda_2(y-2z-1)=0$$

把原点(0,0,0)代入上式得

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=-3$$

故所求平面方程为

$$x-3y+7z=0$$

一点,故所求平面法向量为 $\{-1,2,1\}\times\{3,1,0\}=\{-1,3,-7\}//\{1,-3,7\}$,从而得所求的平面方程.

7-33 已知平面方程 $\pi_1: x-2y-2z+1=0, \pi_2: 3x-4y+5=0$.求平分 π_1 与 π_2 夹角的平面方程.

解 1 先利用 π_1,π_2 的法向量

$$\boldsymbol{n}_1=\{1,-2,-2\},\qquad \boldsymbol{n}_2=\{3,-4,0\}$$

求未知平面的法向量.由向量的加、减法原则知

参考 7-16 题并画图理解.

$$\boldsymbol{N}_1=\frac{\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}_1|}+\frac{\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_2|}=\left\{\frac{14}{15},-\frac{22}{15},-\frac{2}{3}\right\}$$

$$\boldsymbol{N}_2=\frac{\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}_1|}-\frac{\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_2|}=\left\{-\frac{14}{15},\frac{2}{15},-\frac{2}{3}\right\}$$

就是要求的两个法向量,然后再求出 π_1 与 π_2 的一个交点 $(-3,-1,0)$,由平面的点法式得所求平面方程为

$$\{x+3,y+1,z\}\cdot\boldsymbol{N}_1=0$$

或 $$\{x+3,y+1,z\}\cdot\boldsymbol{N}_2=0$$

即 $$7x-11y-5z+10=0$$

$$2x-y+5z+5=0$$

解 2 设(x,y,z)为所求平面上的任一点,依题意它到 π_1 的距离应等于它到 π_2 的距离,即

$$\frac{|x-2y-2z+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{|3x-4y+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

去掉绝对值符号,得所求平面方程为

利用点到平面的距离公式有时也会给解题带来方便.

$$7x-11y-5z+10=0$$

或 $$2x-y+5z+5=0$$

7-34 求平行于平面 $x+y+z=100$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程.

解 平行于 $x+y+z=100$ 的平面方程可设为

π: $$x+y+z+D=0$$

注意平面的设法.

因为 π 与 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切,所以

$$\left.\frac{|x+y+z+D|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}=2$$

本题的解题思路是利用点到平面的距离公式.

即 $$|D|=2\sqrt{3}$$

所以要求的平面方程为

$$x+y+z+2\sqrt{3}=0$$

或 $$x+y+z-2\sqrt{3}=0$$

7-35 求证过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且平行于两条既不重合又不平行的直线

$$\frac{x-a_i}{l_i}=\frac{y-b_i}{m_i}=\frac{z-c_i}{n_i}$$

$(i=1,2)$ 的平面方程可写成下列形式

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

利用向量积求法向量.

证 所求的平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{l_1,m_1,n_1\}\times\{l_2,m_2,n_2\}$$

由平面的点法式方程得所求平面方程为

$$\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

即 $$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

7-36 求证过直线 $x=x_1+lt,y=y_1+mt,z=z_1+nt$ 和不在该直线上的点 $M(x_2,y_2,z_2)$ 的平面方程可写成下列形式.

π: $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

证 因为 $M(x_2,y_2,z_2)$ 及 (x_1,y_1,z_1) 均在所求平面 π 上,所以

$$\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}/\!/\pi$$

由已知条件.

又 $$\{l,m,n\}/\!/\pi$$

所以平面 π 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}\times\{l,m,n\}$$

由点法式得 π 的方程为

$$\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

即
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

7-37 求证通过两条平行直线 $x=a_i+lt$, $y=b_i+mt$, $z=c_i+nt$ $(i=1,2)$ 的平面方程可写成下列形式

这里的平行不包括重合的情况.

$$\pi:\quad \begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

证 因为 (a_1,b_1,c_1) 及 (a_2,b_2,c_2) 均在所求平面 π 上,所以
$$\{a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1\}//\pi$$
又
$$\{l,m,n\}//\pi$$
故 π 的法向量为
$$\boldsymbol{n}=\{a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1\}\times\{l,m,n\}$$
所以 π 的方程为

利用点法式即得.

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

7-38 求证过直线 $x=x_0+lt, y=y_0+mt, z=z_0+nt$ 且垂直于平面 $Ax+By+Cz+D=0$(这里直线与平面不垂直)的平面方程可以写成下列形式.

请小结 7-36 ~ 7-39 题的解法.

$$\pi:\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & c \end{vmatrix}=0$$

证 因为所求平面 π 垂直于平面
$$Ax+By+Cz+D=0$$
所以 $\{A,B,C\}//\pi$,又
$$\{l,m,n\}//\pi$$
故 π 的一个法向量为
$$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}\times\{l,m,n\}$$
但 (x_0,y_0,z_0) 在 π 上,故 π 的方程为
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & c \end{vmatrix}=0$$

7-39 求直线 L_1, $\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-1}{0}$ 与 L_2: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=z$ 的公垂线方程.

解 设 L 为所求的直线,则 L 在由 L_1 与 L 产生的平面 π_1 上,且也在由 L_2 与 L 产生的平面 π_2 上.

因为 L 的方向向量为

$$\{2,1,0\}\times\{1,0,1\}=\{1,-2,-1\}$$

而 $\quad \boldsymbol{n}_{\pi_1}=\{1,-2,-1\}\times\{2,1,0\}=\{1,-2,5\}$

$\quad \boldsymbol{n}_{\pi_2}=\{1,-2,-1\}\times\{1,0,1\}=\{-2,-2,2\}$

点(3,0,1)在 L_1 上,(−1,2,0)在 L_2 上,所以

π_1: $\quad \{x-3,y,z-1\}\cdot\boldsymbol{n}_{\pi_1}$

π_2: $\quad \{x+1,y-2,z\}\cdot\boldsymbol{n}_{\pi_2}$

联立 π_1,π_2 即得公垂线 L 的一般方程

$$\begin{cases}x-2y+5z-8=0\\x+y-z-1=0\end{cases}$$

L 既在 π_1 上又在 π_2 上,这是解本题的基本思想,由于 π_1 与 π_2 易求,故 L 也就求出了.请结合几何直观加以理解.

本题也有其它解法.读者可自行一试.

7-40 求与直线 $x-1=\frac{y+2}{3}=\frac{z+5}{-2}$ 关于原点对称的直线方程.

解 因为点(1,−2,−5)在已知直线上,它关于原点的对称点为(−1,2,5).又所求直线必与已知直线平行,所以与已知直线关于原点对称的直线方程为

$$x-1=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{-2}$$

一点、一个方向决定一条直线,所以只要找到一个对称点,由中心对称知两直线平行即得所求直线方程.

7-41 求点 $A(4,1,-2)$ 到直线

$$\begin{cases}x-y+z+5=0\\2x+z-4=0\end{cases}$$

的距离.

解 1 所给直线的方向向量为

$$\boldsymbol{a}=\{1,-1,1\}\times\{2,0,1\}=\{-1,1,2\}$$

任取该直线上一点 $B(2,7,0)$.由公式得所求距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}=2\sqrt{5}$$

利用叉积求方向向量.

参见 7-26 题.

解 2 所给直线的方向向量为

$$\boldsymbol{a}=\{-1,1,2\}$$

过点 $A(4,1,-2)$ 且垂直于 $\boldsymbol{a}$ 的平面方程为

利用点法式.

$$x-y-2z-7=0$$

那么可求得该平面与已知直线的交点为(4,5,-4)

故所求距离为

$$d=\sqrt{(4-4)^2+(5-1)^2+(-4+2)^2}$$
$$=2\sqrt{5}$$

解三元一次方程组.

7-42 求过点 $A(2,-3,1)$ 与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ 垂直相交的直线方程.

解1 过点 A 与已知直线的平面方程为

$$\{x-2,y+3,z-1\}\cdot\{1,-2,-2\}\times\{2,-1,3\}=0$$

即
$$8x+7y-3z+8=0$$

过点 A 且垂直于已知直线的平面方程为

$$\{x-2,y+3,z-1\}\cdot\{2,-1,3\}=0$$

即
$$2x-y+3z-10=0$$

故所求直线方程为

$$\begin{cases}8x+7y-3z+8=0\\2x-y+3z-10=0\end{cases}$$

利用点法式.

解2 过点 $A(2,-3,1)$ 且垂直于已知直线的平面方程为

$$\{x-2,y+3,z-1\}\cdot\{2,-1,3\}=0$$

即
$$2x-y+3z-10=0$$

该平面与已知直线的交点由

$$\begin{cases}2x-y+3z-10=0\\x-1=-2(y+1)\\-3(y+1)=z-3\end{cases}$$

解得 $x=5/7,y=-6/7,z=18/7$. 所以垂线方程为

$$\frac{x-2}{9}=\frac{y+3}{-15}=\frac{z+1}{-11}$$

利用过两点的直线方程.

7-43 求直线 L_1: $\frac{x+5}{6}=1-y=z+3$ 与直线 L_2: $\begin{cases}x+5y+z=0\\x+y-z+4=0\end{cases}$ 之间的最短距离 d.

解1 过 L_2 的平面方程可设为

π:
$$x+5y+z+\lambda(x+y-z+4)=0$$

令 $L_1/\!/\pi$,则应有

$$\{6,-1,1\}\cdot\{1+\lambda,5+\lambda,1-\lambda\}=0$$

解1的基本思路是,先求过其中一条直线且平行于另一条直线的平面. 那么平面外的那条直线到该平面的距

即 $$\lambda = -\frac{1}{2}$$

这时平面方程为

$$x + 9y + 3z - 4 = 0 \tag{1}$$

又$(-5,1,-3)$是L_1上的点,故这点到平面(1)的距离即为所求的d,所以

$$d = \frac{|-5+9+3(-3)-4|}{\sqrt{(-5)^2+9^2+3^2}} = \frac{18\sqrt{115}}{23}$$

解2 L_2的方向向量为

$$a_2 = \{1,5,1\} \times \{1,1,-1\} = \{-6,2,-4\}$$

L_1的方向向量为

$$a_1 = \{6,-1,1\}$$

$(-5,3,-3)$是L_1上的点,$(1,-1,4)$是L_2上的一点,故所求的距离为

$$d = \frac{|\{6,-2,7\} \cdot a_1 \times a_2|}{|a_1 \times a_2|} = \frac{18\sqrt{115}}{23}$$

离即为所求之d.

参考7-27题.

7-44 求直线$L:\begin{cases}3x-2y+4z+1=0\\x+2y-z+2=0\end{cases}$的对称式方程、参数式方程,并用向量的形式表示$L$的方程.

解 直线L的一个方向向量为

$$a = \{3,-2,4\} \times \{1,2,-1\} = \{-6,7,8\}$$

再由方程组

$$\begin{cases}3x-2y+4z+1=0\\x+2y-z+2=0\end{cases}$$

求得L上的一点$(-3,2,3)$,所以L的对称式方程为

$$\frac{x+3}{-6} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-3}{8}$$

直线的参数式方程为

$$x = -3-6t, \quad y = 2+7t, \quad z = 3+8t$$

直线L的向量式方程为

$$\{x,y,z\} = \{-3,2,3\} + t\{-6,7,8\}$$

这是求方向向量的一个常用方法.

请读者熟记直线的这几种表示法.

7-45 求经过点$(2,3,1)$且与两直线

$L_1:\begin{cases}x+y=0\\x-y+z+4=0\end{cases}$和 $L_2:\begin{cases}x+3y-1=0\\y+z-2=0\end{cases}$

相交的直线方程.

解1 先求过 L_1 与(2,3,1)的平面方程 π. 过 L_1 的平面方程可设为

$$\lambda(x+y)+x-y+z+4=0$$

将(2,3,1)代入上式,得 $\lambda=-4/5$,所以

$$\pi: \quad x-9y+5z+20=0$$

然后再求 L_2 与 π 的交点,由

$$\begin{cases}x-9y+5z+20=0\\x+3y-1=0\\y+z-2=0\end{cases}$$

得 $x_0=-76/17, y_0=31/17, z_0=3/17$,故所求直线方程为

$$\frac{x-2}{x_0-2}=\frac{y-3}{y_0-3}=\frac{z-1}{z_0-1}$$

即

$$\frac{x-2}{55}=\frac{y-3}{10}=\frac{z-1}{7}$$

解1的思路是要找出所求直线 L 上的另一点,由于 L 必在(2,3,1)与 L_1 确定的平面 π 上. 所以要找的点就是 π 与 L_2 的交点.

解2 由上面知(2,3,1)与 L_1 确定的平面方程为

$$x-9y+5z+20=0$$

同理可求得(2,3,1)与 L_2 确定的平面方程为

$$x-2y-5z+9=0$$

故所求的直线方程为

$$\begin{cases}x-9y+5z+20=0\\x-2y-5z+9=0\end{cases}$$

所求直线既在(2,3,1)与 L_1 确定的平面上,又在(2,3,1)与 L_2 确定的平面上. 这就是解2的基本思路.

7.2.3 空间曲面、曲线及其方程

7-46 已知准线方程为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{z^2}{3}=1\\y=2\end{cases}$,母线平行于 y 轴,求此柱面方程.

解1 设 $M(x_0,y_0,z_0)$ 是所求柱面上任一点. 则过 M 与 y 轴平行的直线 L 必在该柱面上,而 L 的方程是

$$x=x_0, \qquad z=z_0$$

它和平面 $y=2$ 的交点是 $M_1(x_0,2,z_0)$,又 M_1 点应在所给准线方程上,即

$$\frac{x_0^2}{4}+\frac{2^2}{8}+\frac{z_0^2}{3}=1$$

故所求柱面方程为

解1具有普遍性,是一般的解法.

平行于坐标轴的柱面方程中不含该坐标轴变量.

$$\frac{x^2}{2}+\frac{2z^2}{3}=1$$

解 2 直接利用公式，在准线方程中消去 y 即得所求柱面方程.

$$\frac{x^2}{2}+\frac{2z^2}{3}=1$$

7-47 已知准线为 $\begin{cases}4x^2-y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 及母线的方向数是 0,1,1，求满足此条件的柱面方程.

解 设 $M(x_0,y_0,0)$ 是所给准线上的一点，则过 M 平行于 $\{0,1,1\}$ 的直线 L 必在所求的柱面上，而 L 的方程是

注意 $z_0=0$.

$$\frac{x-x_0}{0}=y-y_0=z$$

即

$$\begin{cases}x_0=x\\ y_0=y-z\end{cases}$$

将上式代入准线方程的第一个方程式.得所求柱面方程为

$$4x^2-(y-z)^2-1=0$$

M 点在已知准线上.

7-48 已知准线方程为 $\begin{cases}x+y-z-2=0\\ x-y+z=0\end{cases}$ 母线平行于直线 $x=y=z$，求此柱面方程.

解 1 设 (x_0,y_0,z_0) 是准线上的任一点，则过该点而平行于母线的直线方程是

$$x-x_0=y-y_0=z-z_0$$

或 $\quad x_0=x-t,\ y_0=y-t,\ z_0=z-t$

（t 为参数），将上式代入准线方程，消去 t 后即得所求柱面方程为

$$y-z-1=0$$

解 1 是一般的求柱面的方法. 而解 2 则是由题目的特殊性来求柱面.

解 2 母线的方向向量为

$$a=\{1,1,1\}$$

而准线是一条直线，故所求柱面方程可设为

π: $\quad x+y-z-2+\lambda(x-y+z)=0$

且应有 $a/\!/\pi$，即

$$\{1+\lambda,1-\lambda,-1+\lambda\}\cdot a=0$$

解之得 $\quad \lambda=-1$

故所求柱面方程为

$$y-z-1=0$$

7-49 求顶点在原点，准线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{z^2}{3}=1\\ y=2\end{cases}$$

的锥面方程.

注意 $y_0=2$.

解 设 $M(x_0,z,z_0)$ 是准线上的一点，则该点与原点构成的直线 L 应在所求锥面上，而 L 的方程为

M 点在已知准线上.

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{2}=\frac{z}{z_0}$$

或
$$x_0=\frac{2x}{y},\quad y_0=2,\quad z_0=\frac{2z}{y}$$

将上式代入准线方程得锥面方程

$$6x^2-3y^2+8z^2=0$$

7-50 求顶点在 $M_0(3,-2,-1)$，准线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x-y+z=0\end{cases}$ 的锥面方程.

在求锥面方程、柱面方程中，首先要求我们能熟练、准确地求出母线方程，这一点读者要注意.

解 设 $M(x_0,y_0,z_0)$ 是准线上的任一点，则直线

L：
$$\frac{x-3}{x_0-3}=\frac{y+2}{y_0+2}=\frac{z+1}{z_0+1}$$

在所求锥面上，变换 L 方程的形式为

$$x_0=3+t(x-3),y_0=-2+t(y+2),z_0=-1+t(z+1)$$

将 (x_0,y_0,z_0) 代入准线方程得

$$[3+t(x-3)]^2+[-2+t(y+2)]^2+[-1+t(z+1)]^2=1$$
$$3+t(x-3)-[-2+t(y+2)]+[-1+t(z+1)]=0$$

消去参数 t，得锥面方程

$$5x^2+13y^2+37z^2+14xy+10xz-18yz+8x-8y+8z-16=0$$

7-51 求曲线 $\begin{cases}x^2+3z^2=9\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

M_0 与 z 轴的距离等于 M 与 z 轴的距离.

解 1 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是给定曲线上的一点，当曲线转动时，点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 转到 $M(x,y,z)$. 由于 $z=z_0$，而

$$\sqrt{x^2+y^2}=|x_0|$$

所以 $x_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}, z_0=z$. 将它们代入曲线的第一个方程式，即得旋转曲面方程

$$x^2+y^2+3z^2=9$$

解2 根据题意由公式可将曲线的第一个方程中 x 以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 换之，即得要求的旋转曲面方程

$$x^2 + y^2 + 3z^2 = 9$$

7-52 求直线 L：$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z+1$ 绕定直线 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 旋转一周所生成的曲面方程.

解 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 L 上的任一点，由于定直线平行于 z 轴，所以当 M_0 转到点 $M(x, y, z)$ 时，应用

$$\begin{cases} z = z_0 & (1) \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2 & (2) \end{cases}$$

但 (x_0, y_0, z_0) 在 L 上，所以

$$\begin{cases} x_0 = 2z_0 + 5 \\ y_0 = 3z_0 + 4 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} (x_0-2)^2 = (2z_0+3)^2 & (3) \\ (y_0-3)^2 = (3z_0+1)^2 & (4) \end{cases}$$

联立方程(1)，(2)，(3)，(4) 得所求曲面方程

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (2z+3)^2 + (3z+1)^2$$

即

$$x^2 + y^2 - 13z^2 - 4x - 6y - 18z + 3 = 0$$

本解法采用了一点小技巧，避开了繁琐的解出 x_0，y_0 的方法，从而轻松地消去了 x_0，y_0. 请读者注意.

7-53 求经过点 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$ 的圆的方程 $(abc \neq 0)$.

解 设过已知三点、球心在 (x_0, y_0, z_0) 处，半径为 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

将已知三点代入得

$$\begin{cases} (a-x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \\ x_0^2 + (b-y_0)^2 + z_0^2 = R^2 \\ x_0^2 + y_0^2 + (c-z_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

特取 $y_0 = 0$，则可解得

$$x_0 = \frac{a^2-b^2}{2a}, \qquad z_b = \frac{c^2-b^2}{2c}$$

$$R^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c^2-b^2}{2c}\right)^2$$

故现求得一个过已知三点的球面方程为

$$\left(x - \frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{c^2-b^2}{2c}\right)^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c^2-b^2}{2c}\right)^2$$

而过已知三点的平面为

一个球面与一个平面的交线是一个圆，这是解答本题的基本思想.

过三点有无限个球面. 这里取 $y_0 = 0$ 的一个球面.

平面的截距式.

注意这不是所求圆的唯一表示法.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

则所求之圆的方程为

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{a^2-b^2}{2a}\right)^2+y^2+\left(z-\dfrac{c^2-b^2}{2c}\right)^2=\left(\dfrac{a^2+b^2}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{c^2-b^2}{2c}\right)^2\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\end{cases}$$

7-54 已知椭球方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad(0<c<a<b)$，求过 x 轴并与椭球面的交线是圆的平面方程.

解 设过 x 轴的平面方程为

$$y-mz=0$$

其中 m 为待定常数，由题意，曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 & (1)\\ y-mz=0 & (2)\end{cases}$$

是一个圆，因为 $0<c<a<b$，且平面过 x 轴，所以圆的半径应为 a，且圆心在 $(0,0,0)$ 处. 设 (x_0,y_0,z_0) 是满足方程(1)，(2)的点，

则

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2+z_0^2=a^2\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1\\ y_0-mz_0=0\end{cases}$$

解之得

$$m^2=\frac{(a^2-c^2)b^2}{(b^2-a^2)c^2}$$

故所求平面为

$$c\sqrt{b^2-a^2}\,y-b\sqrt{a^2-c^2}\,z=0$$

或

$$c\sqrt{b^2-a^2}\,y+b\sqrt{a^2-c^2}\,z=0$$

想到 a 是圆的半径是此解法的关键一步.

7-55 设从椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的中心出发，沿方向余弦为 λ,μ,ν 的方向到椭球面上的一点的距离是 r，证明

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}$$

证 过椭球中心且平行于方向 $\{\lambda,\mu,\nu\}$ 的直线为

$$x=\lambda t,\qquad y=\mu t,\qquad z=\nu t$$

将它代入已知椭球方程得

$$\left(\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}\right)t^2=1$$

因为 λ,μ,ν 为方向余弦，所以

注意一定有 $t_0\neq 0$.

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

又设 t_0 为已知条件中椭球面上那点所对应的参数. 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} &= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\\ &= \frac{1}{(\lambda t_0)^2 + (\mu t_0)^2 + (\nu t_0)^2}\\ &= \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) t_0^2}\\ &= \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\end{aligned}$$

注意利用前面推出的结果.

第 8 章　多元函数微分学及其应用

8.1　客观题

8.1.1　填空题

8-1 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2\sin y}{x^2+y^2}=$ __0__.

解　由于$\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$,故$\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$是一个有界变量;而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin y=0$,说明 $\sin y$ 是一个无穷小量,从而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\sin y}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\sin y\right)=0$$

有界变量与无穷小量的积为无穷小量.

8-2 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^2}=$ __0__.

解　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x\right)+\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\cdot y^3\right)=0$ 这里我们利用了 $x^2\big/(x^2+y^2)$以 $y^2\big/(x^2+y^2)$的有界性,以及 x 和y^3 是无穷小量的事实.

8-3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{2x^2y^2}=$ __1__.

解　显然,当$|x|<1,|y|<1$且 x 与y 不全为零时,$2x^2y^2\leqslant x^4+y^4\leqslant x^2+y^2$,从而

$$1=(x^2+y^2)^0\leqslant(x^2+y^2)^{2x^2y^2}\leqslant(x^2+y^2)^{x^2+y^2}$$

记 $r=x^2+y^2$,则当 $x\to 0,y\to 0$ 时,$r\to 0^+$,又$\lim\limits_{r\to 0^+}r^r=1$,故由夹逼法可得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{2x^2y^2}=1$$

8-4　设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$,则$f'_x(0,0)=$ __0__.

解　$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$

按定义求偏导数.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

8-5 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{\quad\frac{1}{2}\quad}$

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$

故 $$x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

同理

$$y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

因此 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$$

8-6 设 $u=yf(\frac{x}{y})+xg(\frac{y}{x})$，其中函数 f,g 具有二阶连续导数，则 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$ $\underline{\quad 0\quad}$.

解 由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y})-\frac{y^2}{x^3}g''(\frac{y}{x})$ 及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''(\frac{x}{y})-\frac{y}{x^2}g''(\frac{y}{x})$$

可得 $$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$

8-7 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中 f,φ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{\quad yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)\quad}$.

解 记 $g(x,y)=\frac{1}{x}f(xy),h(x,y)=y\varphi(x+y)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}(f'(xy))+\frac{\partial}{\partial y}(y\varphi'(x+y))\\&=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)\end{aligned}$$

当 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 与 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ 都连续时，两者相等，故我们可以选择容易计算的次序来计算混合偏导数.

8-8 已知 $f(x,y)=x^2\arctan(\frac{y}{x})-y^2\arctan(\frac{x}{y})$，则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=$ $\underline{\quad\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad}$.

解 记 $g(x,y)=x^2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$，$h(x,y)=y^2\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$，则

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)=\frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\frac{y^2(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

因此

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

8-9 设 $z=\sin(xy)+\varphi\left(x,\frac{x}{y}\right)$，其中 $\varphi(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\varphi'_v\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}\varphi''_{uv}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}\varphi''_{vv}\left(x,\frac{x}{y}\right)}$.

解 显然 $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)-\frac{x}{y^2}\varphi'_v\left(x,\frac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\varphi'_v\left(x,\frac{x}{y}\right)-$$

$$\frac{x}{y^2}\left[\varphi''_{uv}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}\varphi''_{vv}\left(x,\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\varphi'_v\left(x,\frac{x}{y}\right)-$$

$$\frac{x}{y^2}\varphi''_{uv}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}\varphi''_{vv}\left(x,\frac{x}{y}\right)$$

8-10 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$ $\underline{\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y}$.

解 在原方程的两边求微分，可得

$$yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+yz\mathrm{d}x+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

将 $x=1,y=0,z=-1$ 代入上式，化简后得到

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$$

8-11 设 $z=f(x2-y)+g(x,xy)$，其中 $f(x)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，问 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{-2f''(2x-y)+\frac{\partial g}{\partial v}+x\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}}$.

解 显然 $\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(2x-y)+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot x$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-2f''(2x-y)+\frac{\partial g}{\partial v}+x\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+yx\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

8-12 设 $u=e^{-x}\sin(\frac{x}{y})$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\frac{1}{\pi})$ 处的值为 $\underline{\pi^2/e^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{-x}\cos(\frac{x}{y})$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{e^{-x}}{y^2}\left[(x-1)\cos(\frac{x}{y})+\frac{x}{y}\sin(\frac{x}{y})\right]$$

所以

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\pi^2/e^2$$

8-13 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续，若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，则 $\varphi(0,0)=$ $\underline{\ 0\ }$.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\varphi(0,0)$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=-\varphi(0,0)$$

$$\lim_{y\to0^+}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=\varphi(0,0)$$

$$\lim_{y\to0^-}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=-\varphi(0,0)$$

所以，当且仅当 $\varphi(0,0)=0$ 时，$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 存在.

当 $\varphi(0,0)=0$ 时，$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$,

$$\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)$$
$$=|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)$$

$$\frac{\Delta f}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\varphi(\Delta x,\Delta y)$$

显然 $\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\frac{|\Delta x|+|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant2$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\varphi(\Delta x,\Delta y)=0$$

所以,当且仅当 $\varphi(0,0)=0$ 时,$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

8-14 设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}\mathrm{d}t$,则$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$ $\underline{-2e^{-xy}}$.

用到了变上限积分的求导公式.

解 令 $g(u)=\int_0^{u}e^{-t^2}\mathrm{d}t$,则

$f(x,y)=g(u(x,y))$,其中 $u(x,y)=xy$,视 u 为中间变量,我们有

$$\frac{\partial f}{\partial y}=g'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-u}\cdot x=xe^{-xy}$$

由此可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x^2e^{-xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-xy}(1-xy)$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-y^2e^{-xy}$$

因此

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-xy}$$

8-15 设 $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$,则 $f(x,y)$在区域 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$内的最大值 M 为 $\underline{\frac{3}{2}\sqrt{3}}$,最小值 m 为 $\underline{0}$.

在求函数在某区域上的最值时,要考虑不可导点、驻点以及边界点,不能仅仅看区域内部的驻点就完事.

解 首先将区域内的驻点解出来.从

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x-\sin(x-y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\sin y+\sin(x-y)=0\end{cases}$$

推得

$$\sin y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

又因为$0\leqslant x,y\leqslant\frac{\pi}{2}$,故有 $y=\frac{\pi}{2}-x$,

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x+\cos 2x$$

解得 $x=\frac{\pi}{3},y=\frac{\pi}{6}$,即驻点为$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$,函数在驻点处的值 $f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=3\frac{\sqrt{3}}{2}$.另外,在边界上,$f(x,y)$的最小值为 0,最大值为 $1+\sqrt{2}$.将边界上的

最大值、最小值与区域内部的驻点处的函数值进行比较，得到$f(x,y)$在区域$0\leqslant x,y\leqslant\frac{\pi}{2}$内的最大值为$\frac{3}{2}\sqrt{3}$，最小值为0.

8-16 已知$f(x,y,z)=xy^2z^3(1-x-2y-3z)$，则$f$在第一卦限内的驻点为$\underline{\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)}$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=y^2z^3(1-2x-2y-3z)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2xyz^3(1-x-3y-3z)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=3xy^2z^2(1-x-2y-4z)=0\end{cases}$$

并注意到$x>0,y>0,z>0$的要求，可解出$x=\frac{1}{7},y=\frac{1}{7},z\ \frac{1}{7}$.

8-17 设z是方程$x+y-z=e^z$所确定的x与y的函数，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\underline{-e^z/(1+e^z)^3}$.

解 记$F(x,y,z)=x+y-z-e^z$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{1}{1+e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{1}{1+e^z}$$

从而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{1+e^z}\right)=\frac{-e^z}{(1+e^z)^3}$.

8-18 设变换$\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$，可把方程$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$简化为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，则常数$a=\underline{\ 3\ }$.

解 视u,v为中间变量，由链式法则求出

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

将以上结果代入原方程,整理后得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

依题意有

$$\begin{cases}6+a-a^2=0\\10+5a\neq 0\end{cases}$$

解之得 $a=3$.

8-19 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$在点 $M(1,2,-2)$处的梯度向量 $\mathrm{grad}\boldsymbol{u}\Big|_M$ 为 $\underline{\frac{2}{9}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})}$.

解 由梯度定义

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\boldsymbol{u}&=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{i}+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{j}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

可知

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{u}\Big|_M=\frac{2}{9}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$$

8-20 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点(1,2,0)处的切平面方程为 $\underline{2x+y-4=0}$.

解 记 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$,在点(1,2,0)处,$\frac{\partial F}{\partial x}$,$\frac{\partial F}{\partial y}$和$\frac{\partial F}{\partial z}$分别为 4,2 和 0,故曲面 $F(x,y,z)=0$ 在(1,2,0)处的切平面方程为 $4(x-1)+2(y-2)=0$ 即 $2x+y-4=0$.

$F(x,y,z)=0$ 在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面方程为 $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$.

8-21 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线有 $\underline{\ 2\ }$ 条.

解 点$(t_0,-t_0^2,t_0^3)$处的切线为

$$x-t_0=\frac{y-t_0^2}{-2t_0}=\frac{y-t_0^3}{3t_0^2}$$

当且仅当

$$\{1,2,1\}\cdot\{1,-2t_0,3t_0^2\}=0$$

时,该切线与平面 $x+2y+z=4$ 平行.可解出 $t_0=1$ 或 $t_0=1/3$,故填 2.

平面的法向量为$\{1,2,1\}$,切线的方向向量为$\{1,-2t_0,3t_0^2\}$,当且仅当这两个向量垂直(即点积为 0)时,切线平行于平面.

8-22 由曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $M(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外侧的单位法线向量为 $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}}$.

解 该旋转面的方程为 $3(x^2+z^2)+2y^2=12$. 该旋转面在 M 点指向外侧的法线向量为$\{6x,4y,6z\}\Big|_M=\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}$，单位化后，即得指向外侧的单位法线向量$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

8.1.2 单项选择题

8-23 二元函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数$f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$存在是 $f(x,y)$在该点连续的(　). (D)

(A) 充分条件而非必要条件

(B) 必要条件而非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分又非必要条件

解 因为$f'_x(x_0,y_0)$和$f'_y(x_0,y_0)$存在仅能分别推出 $f(x,y_0)$在 $x=x_0$ 处连续和 $f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处连续，推不出 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续. 反之，$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的连续性，当然推不出两个偏导数$f'_x(x_0,y_0)$和$f'_y(x_0,y_0)$的存在性，所以应选(D).

8-24 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

则 $f(x,y)$在点$(0,0)$处(　). (C)

(A) $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$不存在　　(B) $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$连续

(C) 可微　　(D) 不连续

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=0$

说明$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$存在且为 0；同理可知$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$也存在并为 0. 我们有

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}2x\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当(x,y)沿着 $y=x$ 方向趋于$(0,0)$时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f_x(x,y)$不存在，所以$f'_x$

在做选择题，从简单的做起，把简单的、容易判断的错误的条款排除掉.

(x,y)在$(0,0)$不连续. 另外,很显然有$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$,所以 $f(x,y)$在$(0,0)$连续. 综上所述,(A),(B)和(D)皆被排除了. 仅需要看一看(C)是否正确:由

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

可知 $f(x,y)$在$(0,0)$点可微,且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

8-25 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$,则点 P 的坐标为 (B)

(A) $(1,-1,2)$ (B) $(1,1,2)$

(C) $(-1,1,2)$ (D) $(-1,-1,2)$

解 设 P 点的坐标为(x_0,y_0,z_0),则 P 点处的切平面为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0$$

当且仅当

$$\frac{2x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{1}{1}$$

时,该切平面与 $2x+2y+z=1$ 平行,故应选(B).

8.2 非客观题

8.2.1 重极限

8-26 试求下列极限

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{xy}-1}{\cos^2 x+\sin^2 y}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)-1}{(x-1)^2+y^2}$

解 1) 原式 $=\dfrac{0}{1}=0$

2) 原式 $=\dfrac{\ln 2-1}{1}=\ln 2-1$

8-27 求极限

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt[3]{x}+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

解 1) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt[3]{x}\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}+\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$

$=0+0=0$

本题的关键在于充分利用无穷小量与有界变量之积为无穷小量.

这里假定在$(x,y)\to(0,0)$的过程中只要求通过使

2) 原式 $= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2}{|x| + |y|} + \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{y^2}{|x| + |y|}$

$= 0 + 0 = 0$

函数有定义的点，由于等式右端的两个极限都存在且为零，所以根据极限运算法则原极限为零.

8-28 求极限

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (\sqrt{x^3 + y^3 + x - 1} - \sqrt{x^3 + y^3 - y + 3})$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to +\infty}} \dfrac{xy - 2}{3y + 1}$

解 1) 原式 $= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1}$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x^2 \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} = 0$

这里 x^2 为无穷小量，$\left|\dfrac{y^2}{x^2 + y^2}\right| \leqslant 1$ 为有界变量.

2) 原式 $= \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \dfrac{x - 1 + y - 3}{\sqrt{x^3 + y^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + y^3 - y + 3}}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^3 + y^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + y^3 - y + 3}}$

$+ \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \dfrac{y - 3}{\sqrt{x^3 + y^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + y^3 - y + 3}}$

记式中第一个函数为 $f(x,y)$，第二个函数为 $g(x,y)$，当 x,y 充分大时，

$$0 < f(x,y) < \frac{x - 1}{\sqrt{x^3}}$$

而 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^3}} = 0$

所以 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x,y) = 0$，同理 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} g(x,y) = 0$

3) 原式 $= \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \dfrac{x - \dfrac{2}{y}}{3 + \dfrac{1}{y}} = 1$

8-29 求极限：

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$　　2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$　　4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{|x|+|y|}$

解　1) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4}{x^2+y^2}+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y^4}{x^2+y^2}$$

$$=0+0=0$$

$\dfrac{x^4}{x^2+y^2}=x^2\cdot\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

无穷小乘有界变量为无穷小量.

2) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$

$$=\exp\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=e^0=1$$

3) 由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)=0$

则原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$

$$=0\times 0=0$$

4) 当 $x\to 0,y\to 0$ 时，$x^2+y^2\to 0,\sqrt{1+x^2+y^2}-1\sim\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$

原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{|x|+|y|}=0$

8-30 求极限：

1) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$　　2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2+y^2}$　　4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

解　1) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\dfrac{x^2}{e^xe^y}+\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\dfrac{y^2}{e^x\cdot e^y}$

$$=0+0=0$$

2) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to x}}\dfrac{x}{\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}x^2}$

$$+\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{y}{\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}x^2}$$

$0\leqslant\left|\dfrac{x}{\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}x^2}\right|\leqslant\dfrac{|x|}{\frac{3}{4}x^2}$

$$= 0 + 0 = 0$$

3) 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

则原式 $= \lim\limits_{r \to 0^+} r^{2r^2}$

取对数后 $\lim\limits_{r \to 0^+} 2r^2 \ln r = 0$

原式 $= e^0 = 1$

4) 原式 $= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} [(x^2 + y^2)^{(x^2+y^2)}]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$

$= 1^0 = 1$

8-31 下列极限是否存在?若存在,求极限值.

1) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x^2 + y^2}{1 + (x - y)^4}$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}$, $\quad (x + y \neq 0)$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$

解 1) 令 $y = x$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y = x}} \frac{x^2 + y^2}{1 + (x - y)^4} = \lim_{x \to \infty} 2x^2 = \infty$$

令 $y = 2x$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y = 2x}} \frac{x^2 + y^2}{1 + (x - y)^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{5x^2}{1 + x^4} = 0$$

所以原式极限不存在.

2) 令 $y = -x + x^3$

原式 $= \lim\limits_{x \to 0} (1 - x^2 + x^4)^{\frac{1}{x^3}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} [(1 - x^2 + x^4)^{\frac{1}{x^4 - x^2}}]^{\frac{x^4 - x^2}{x^3}}$

$\lim\limits_{x \to 0} (1 - x^2 + x^4)^{\frac{1}{x^4 - x^2}} = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 - x^2}{x^3}$ 不存在

所以,原式极限不存在.

3) 当 x, y 沿 $y = x$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$$

本题中的 $y = x$ 较为特殊, $y = kx$ $(k \neq 1)$ 则是一般性.

函数在直线 $y = -x$ 上没意义,因此在 $y = -x$ 的附近需要细加考虑,这里 x, y 沿 $y = -x + x^3$ 趋于零就来自于这样一个思想.

当 x,y 沿着 $y=2x$ 趋于零时，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{4x^4+x^2}=0$$

所以原式极限不存在.

4) 当 x,y 沿 $y=kx$ 趋于零时，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+3k^2x^4+2k^3x^4}{(1+k^2)^2x^4}=\frac{1+3k^2+2k^3}{(1+k^2)^2}$$

与 k 有关，则原式极限不存在.

8.2.2 偏导数

8-32 试构造一个函数 $f(x,y)$，使其在原点处可导，但沿除坐标轴以外的方向导数均不存在.

解 令

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x=0\text{ 或 }y=0\\ 0, & x\neq 0\text{ 且 }y\neq 0\end{cases}$$

$f(x,y)$ 在原点处的两个偏导数为零. 而在原点处沿其它方向都不连续，故方向导数不存在.

这里，求 $f'_x(0,0)$ 用比式 $\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$ 当 $\Delta x\to 0$ 的极限较好.

8-33 试构造一个函数 $f(x,y)$，使其在原点处沿任意方向的方向导数存在，但在原点不可微.

解 令 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$f(x,y)$ 在原点处沿任一方向的方向导数都为 1，但 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都不存在，故 $f(x,y)$ 在(0,0) 点不可微.

我们在极坐标下看 $f(r,\theta)=r$，故 $f'_r\equiv 1$，即方向导数为 1.

8-34 设 $z=z(x,y)$ 定义在全平面上，

1) 若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$，试证 $z=f(y)$；

2) 若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$，试证 $z=f(x)+g(y)$.

证 1) 令 $f(y)=z(0,y_0)$

任意固定 y_0，记 $h(x)=z(x,y_0)$

则 $\quad h'(x)=\dfrac{\partial z(x,y_0)}{\partial x}\equiv 0$

所以 $\quad h(x)=C$

从而 $\quad z(x,y_0)=h(x)=h(0)=z(0,y_0)=f(y_0)$

由 y_0 的任意性，知 $z=z(x,y)=f(y)$.

2) 因为 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$

$z=f(y)$ 其实就是说 z 与 x 无关，也就是对于任意的 x_1,x_2,y 有 $z(x_1,y)=z(x_2,y)$，我们这里取定 $x_1=0$，所以只要证 $z(0,y)=z(x,y)$，对任意的 x,y 成立.

由 1) 知$\frac{\partial z}{\partial y} = g_1(y)$

令 $z(x,0) = f(x)$

任意固定 x_0，考虑 $k(y) = z(x_0,y)$

则 $k'(y) = \frac{\partial z(x_0,y)}{\partial y} = g_1(y)$

所以 $k(y) = \int_0^y g_1(t)\mathrm{d}t + k(0)$

记 $\int_0^y g_1(t)\mathrm{d}t = g(y)$，则上式就是

$z(x_0,y) = g(y) + z(x_0,0) = g(y) + f(x_0)$

由 x_0 的任意性知 $z(x,y) = g(y) + f(x)$

8-35 证明方程 $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 的解为 $u = f(x^2 - y^2)$，其中 f 为任一可微函数.

证 令 $v = x^2 - y^2, w = xy$，则将 $u = u(x,y)$ 看成是 $(x,y) \to (v,w) \to u$ 的复合函数，这时

$$0 = y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= y\left(\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + x\left(\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$= (x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial w}$$

$$\frac{\partial u}{\partial w} = 0$$

所以，u 仅与 v 有关，

$$u = f(x^2 - y^2)$$

8-36 设 $u = f(x,y)$ 是可微函数.

1) 如果 $u = f(x,y)$ 满足方程 $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$，试证 $f(x,y)$ 在极坐标系里只与 θ 有关.

2) 如果 $u = f(x,y)$ 满足 $\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}$，试证 $f(x,y)$ 在极坐标系里只是 r 的函数.

证 1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$$u = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

要证 u 在极坐标下与 r 无关，只要证明它对 r 的偏导数为零即可.

则 u 在极坐标系下只与 θ 有关，与 r 无关.

2) 证明与上类似，略.

8-37 设 $z=f(x,y)$ 定义在区域 D 上可微，且$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$，试证 $f(x,y)$ 在 D 上恒为常数.

为什么没有直接引用 8-34 的结论，请读者考虑.

证　在D内取定一点$P_0(x_0,y_0)$，对于D内任意的点$P(x,y)$，则存在 $n+1$ 个点 $p_0,p_1,\cdots,p_n=p$，逐次连结相邻两点，形成由这 n 条线段$\overline{p_{i-1}p_i}$　$(i=1,\cdots,n)$ 组成的含于 D 内的折线，以下证明 $f(x,y)$ 在每一段 p_kp_{k+1} 上为常数，设 p_k,p_{k+1} 两点的坐标分别为 $(x_k,y_k),(x_{k+1},y_{k+1})$，线段 p_kp_{k+1} 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_k+t(x_{k+1}-x_k)\\ y=y_k+t(y_{k+1}-y_k)\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

考虑函数 $\varphi(t)=f(x,y)$

其中 $\begin{cases}x=x_k+t(x_{k+1}-x_k)\\ y=y_k+t(y_{k+1}-y_k)\end{cases}$

$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_{k+1}-x_k)+\frac{\partial f}{\partial y}(y_{k+1}-y_k)\equiv 0$

$t\in(0,1)$,　　$(k=0,1,\cdots,n-1)$

则 $\varphi(t)$ 在$[0,1]$上为常数，即 $f(x,y)$ 在线段 p_kp_{k+1} 上为常数，故 $f(x_0,y_0)=f(x_1,y_1)=\cdots=f(x_n,y_n)=f(x,y)$

由 x,y 的任意性知$f(x,y)$ 在 D 内恒为常数.

8-38 设 $D\subset R^2$ 是开区域，$u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内满足：

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x},u^2+v^2=C$　(C 为常数)

求证　$u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内恒为常数.

证　若 $C=0$，则 $u^2+v^2=0$，由此得 $u=0,v=0$，故结论显然成立，以下证明 $C\neq 0$ 的情形.

由　$u^2+v^2=C\neq 0$ 知

$$\begin{cases}0=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}\\ 0=2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

又　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

则 $\begin{cases}0=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial u}{\partial x} & (1)\\ 0=-2v\frac{\partial u}{\partial x}+2u\frac{\partial v}{\partial x} & (2)\end{cases}$

(1)xv + (2)xu 得

$$2(u^2+v^2)\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

因此 $\frac{\partial v}{\partial x}=0$,同理可证$\frac{\partial v}{\partial y}=0,\frac{\partial u}{\partial x}=0,\frac{\partial u}{\partial y}=0$

故 u v 在D 内恒为常数.

8-39 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微,且$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leqslant M$, $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点,线段 AB 包含在D 内,试证

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|$$

其中$|AB|$表示线段AB 的长度.

证 作辅助函数

$$\varphi(t)=f(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1)),$$

显然 $\varphi(t)$ 在$[0,1]$ 上可导,根据拉格朗日定理,存在 $c\in(0,1)$,使得

$$\begin{aligned}\varphi(1)-\varphi(0)&=\varphi'(c)\\&=\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}(y_2-y_1)\end{aligned}$$

其中 $(\xi,\eta)=(x_1+c(x_2-x_1),y_1+c(y_2-y_1))$

又 $\varphi(1)=f(x_2,y_2),\varphi(0)=f(x_1,y_1)$

所以

$$\begin{aligned}&|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\\&=\left|\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x}(x_2-x_1)-\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}(y_2-y_1)\right|\\&\leqslant\left[\left(\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}\cdot[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2}\\&\leqslant M|AB|\end{aligned}$$

本题证明中利用了不等式 $|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$.

8-40 设 $f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 点连续,$g(x,y)$ 在(x_0,y_0) 点可微,且 $g(x_0,y_0)=0$,试证

$f(x,y)g(x,y)$ 在(x_0,y_0) 点可微.

证 记 $A=f(x_0,y_0),B=\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0),C=\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)$

$d(x,y)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

令 $\varepsilon_1(x,y)=f(x,y)-A,$

$$\varepsilon_2(x,y)=\frac{g(x,y)-B(x-x_0)-c(y-y_0)}{d(x,y)}$$

即 $f(x,y)=A+\varepsilon_1(x,y),$

$$g(x,y)=B(x-x_0)+C(y-y_0)+\varepsilon_2(x,y)\mathrm{d}(x,y)$$

则由题意当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时，$\varepsilon_1(x,y)\to 0,\varepsilon_2(x,y)\to 0$.

所以 $f(x,y)g(x,y)$

$$\begin{aligned}&=(A+\varepsilon_1(x,y))[(B(x-x_0)+C(y-y_0)+\varepsilon_2(x,y)\mathrm{d}(x,y)]\\&=AB(x-x_0)+AC(y-y_0)\\&\quad+\varepsilon_1(x,y)[B(x-x_0)+C(y-y_0)+\varepsilon_2(x,y)\mathrm{d}(x,y)]\\&\quad+A\varepsilon_2(x,y)\mathrm{d}(x,y)\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{\varepsilon_1(x,y)\varepsilon_2(x,y)\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(x,y)}\to 0\quad(x\to x_0,y\to y_0)$

$$\frac{A\varepsilon_2(x,y)\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(x,y)}\to 0\qquad(x\to x_0,y\to y_0)$$

$$\left|\frac{\varepsilon_1(x,y)(B(x-x_0)+C(y-y_0))}{\mathrm{d}(x,y)}\right|$$

$$\leqslant|\varepsilon_1(x,y)|(|B|+|C|)\to 0\quad(x\to x_0,y\to y_0)$$

则 $f(x,y)g(x,y)=AB(x-x_0)+AC(y-y_0)+o(\mathrm{d}(x,y))$

故 $f(x,y),g(x,y)$ 在(x_0,g_0)点可微.

将 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 分别写成几项之和，实际上是分别考虑它们的主要部分，另外也是用式子表述已知条件.

8-41 若函数 $f(x,y,z)$ 对任意的实数 t 满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$，则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数. 设 $f(x,y,z)$ 可微，试证 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数的必要条件是 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$，对任意的$(x,y,z)$成立，反之如何?

证 必要性：任意取定(x_0,y_0,z_0)，考虑函数 $\varphi(t)=f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^kf(x_0,y_0,z_0)$,

显然 $\varphi'(t)=x_0\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx_0,ty_0,tz_0)+$

$$y_0\frac{\partial f}{\partial y}(tx_0,ty_0,tz_0)+z_0\frac{\partial f}{\partial z}(tx_0,ty_0,tz_0).$$

取 $t=1$，得

$$x_0\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+y_0\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+z_0\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=kf(x_0,y_0,z_0).$$

由(x_0,y_0,z_0)的任意性知

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$$

反之并不一定成立.

例如 $f(x,y,z)=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}$ 满足

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=3f(x,y,z)$$

k 次齐次函数是一类重要函数，一般 n 元 k 次齐次函数是：$f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,\cdots,x_n)$. 当 $n=2,k=0$ 时，$f(x,y)=f(1,\dfrac{y}{x})=F(\dfrac{y}{x})$.

$x_1u_{x_1}+x_2u_{x_2}+\cdots+x_nu_{x_n}=ku$. 称之为欧拉方程.

如果齐次函数定义中的 t 限定为正数，则 f 满足欧拉方程，$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=k(x,y,z)$ 是 f 为

但 $f(x,y,z)$ 不是 3 次齐次函数,因为此时

$$f(tx,ty,tz) = |t|^3 f(x,y,z)$$

k 次齐次函数的充要条件. 请读者自行证明.

8-42 设 $z = f(x,y)$ 二次可微,且 $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$,,试证对任意的常数 C,$f(x,y) = C$ 为一直线的充要条件是

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

证 由 $f(x,y) = C$ 决定了隐函数 $y = y(x)$,且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$,

则 $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\left(-f''_{xx} - f''_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f'_y + \left(f''_{yx} + f''_{yy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f'_x}{f'^2_y}$$

$$= -\frac{f''_{xx}f'^2_y - 2f''_{xy}f'_x f'_y + f''_{yy}f'^2_x}{f'^3_y}$$

因此 $y = y(x)$,即 $f(x,y) = C$ 为直线的充要条件是 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0$,由我们刚才推导的式子即得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0$$

8-43 设 $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$,求 $f'_x(0,1)$,$f'_y(0,1)$.

算具体点的导数值,往往不要先求导函数. 如本题先求 $f'_x(x,y)$,再以(0,1)的值代得不到 $f'_x(0,1)$ 的值.

解 令 $g(x) = f(x,1)$,$h(y) = f(0,y)$.

则,$f'_x(0,1) = g'(0) = 1$

$f'_y(0,1) = h'(1) = 0$

8-44 设 $\varphi(x,y)$ 连续,$\psi(x,y) = |x-y|\varphi(x,y)$,研究 $\psi(x,y)$ 在原点的可微性.

解 $$\psi'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\psi(x,0) - \psi(0,0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}$$

$$= \begin{cases} \varphi(0,0), & x \to 0^+ \\ -\varphi(0,0), & x \to 0^- \end{cases}$$

同理 $$\lim_{y\to 0}\frac{\psi(0,y) - \psi(0,0)}{y} = \begin{cases} \varphi(0,0), & y \to 0^+ \\ -\varphi(0,0), & y \to 0^- \end{cases}$$

从而可知 $\varphi(0,0) \neq 0$ 时,$\psi(x,y)$ 在原点不可导,故不可微.

若 $\varphi(0,0) = 0$,则 $\psi'_x(0,0) = \psi'_y(0,0) = 0$

且 $\left|\dfrac{\psi(x,y)-\psi(0,0)-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$

$=\left|\dfrac{\psi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$

$\leqslant\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|\varphi(x,y)|$

$\leqslant 2|\varphi(x,y)|\to 0,\quad$ 当$(x,y)\to(0,0)$

故 $\psi(x,y)$ 在$(0,0)$点可微.

8-45 求下列高阶偏导数:

1)$u=(x-x_0)^p(y-y_0)^q$,求$\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$

2)$u=\dfrac{x+y}{x-y}\quad(x\neq y)$,求$\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$

其中 m,n,p,q 均为自然数.

解 1) $\dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}=(x-x_0)^p(q!)$

$\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^q\partial y^q}=(p!)(q!)$

2) $u=\dfrac{2x}{x-y}-1$

$\dfrac{\partial^n n}{\partial y^n}=\dfrac{2x\cdot n!}{(x-y)^{n+1}}=\dfrac{2(x-y)+2y}{(x-y)^{n+1}}n!$

$=\dfrac{2}{(x-y)^n}n!+\dfrac{2y}{(x-y)^n}n!$

$\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\dfrac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)$

$=n(n+1)\cdots(n+m-1)(-1)^m\dfrac{2}{(x-y)^{n+m}}\cdot n!$

$=(-1)^m n\cdot(m+n-1)!\dfrac{2(1+y)}{(x-y)^{n+m}}$

8-46 试作变量代换$\xi=x+t,\eta=x-t$,求解方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解 视 u 为ξ,η的函数,ξ,η为x,t的函数,

则$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\dfrac{\partial n}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\dfrac{\partial\xi}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\dfrac{\partial n}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\dfrac{\partial n}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\dfrac{\partial\xi}{\partial t}$

$=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$

这是波动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的达朗伯解法,当$a=1$时的特例.请读者仿此,令$\xi=x+at$,$\eta=x-at$求波动

同理 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$

故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$， 由此得

$$u=g(\xi)+f(\eta)$$
$$=g(x+t)+f(x-t)$$

其中 f,g 为任意二次可微函数.

方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的通解.

8-47 试将 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 化成极坐标形式.

解 由于 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

将 u 视为 r,θ 的函数.

即 $(r,\theta)\to(x,y)\to u$，由链导法得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\theta\right)-r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)$$

由此三式可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

本题如果将 u 看成是 $(x,y)\to(r,\theta)\to u$ 的复合函数.计算较繁.

8-48 将直角坐标系下坐标分量所满足的方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-x+ky(x^2+y^2)\end{cases}$$

变换成极坐标系下坐标分量的相应方程.

解 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (1)

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ (2)

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ (3)

因此 $\frac{dr}{dt}=\frac{x}{r}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{r}\frac{dy}{dt}$

$$=\cos\theta(r\sin\theta+kr^3\cos\theta)+\sin\theta(-r\cos\theta+kr^3\sin\theta)$$

$$=kr^3$$

$$\frac{d\theta}{dt}\cos\theta=\frac{1}{r}\frac{dy}{dt}-\frac{y}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$=\frac{1}{r}(-r\cos\theta+kr^3\sin\theta)-\frac{\sin\theta}{r}kr^3$$

$$=-\cos\theta$$

整理得 $\begin{cases}\frac{dr}{dt}=kr^3\\ \frac{d\theta}{dt}=-1\end{cases}$

8-49 要求通过线性变换$\begin{cases}\xi=x+\lambda y\\ \eta=x+\mu y\end{cases}$将方程 $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (其中A,B,C为常数,且$AC-B^2<0$)化简成$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$,求$\lambda,\mu$的值.

解 如果A,C都等于零,则不必化简,所以我们不妨假设$C\neq0$,显然方程 $A+2Bt+Ct^2=0$ 有两个相异的实根 λ,μ,我们来证明 λ,μ 就是所要求的值.由根与系数关系得

$$C\lambda\mu=A,\ -C(\lambda+\mu)=2B$$

令 $v=\frac{\partial u}{\partial y}-\lambda\frac{\partial u}{\partial x}$

则 $C\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)$

$$=C\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\lambda\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$=C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

以下,我们来考察$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial y}$,为此,从变换中解出 x、y,得 $x=\frac{\mu\xi-\lambda\eta}{\mu-\lambda}$,$y=\frac{-\xi+\eta}{\mu-\lambda}$.于是

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{1}{u-\lambda}\left(-\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mu-\lambda}v$$

故 $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial y}=\frac{1}{\mu-\lambda}\frac{\partial v}{\partial\xi}=\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)$

由上面已得的结果便知 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial y}=0$.

当$AC-B^2<0$,$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$是双曲型(二阶齐次)方程.这类方程均可令$\xi=x+\lambda y$,$\eta=x+\mu y$而求出通解(见8-46).

8-50 对于 $y = x + \varepsilon\sin y \quad (0 < \varepsilon < 1)$,求出$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 两边对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \varepsilon\cos y\frac{dy}{dx}$$

再求一次导数

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\varepsilon\sin y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \varepsilon\cos y\frac{d^2y}{dx^2},$$

则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$$

8-51 通过$\begin{cases}x = e^{\xi} \\ y = e^{\eta}\end{cases}$,变换方程

$$ax^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2bxy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + cy^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$其中 a,b,c 为常数.

此方法类似于常微分方程中欧拉方程的化简方法.

解 将 ξ,η 看成是中间变量.

则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{1}{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$$

因此 $$a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - a\frac{\partial u}{\partial \xi} - b\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

8-52 证明由方程 $u = y + x\varphi(u)$ 确定的函数 $u = u(x,y)$ 满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]$.

这里假定 φ 具有二阶连续导数.

证 方程两边对 x 求偏导数,得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(u) + x\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

上式两边对 x 再求一次导数得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + x\varphi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + x\varphi'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

因此 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{1-x\varphi'(u)}\left[2\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + x\varphi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{1-x\varphi'(u)}\left[2\varphi'(u)\frac{\varphi(u)}{1-x\varphi'(u)} + x\varphi''(u)\left(\frac{\varphi(u)}{(1-x\varphi'(u))^2}\right)^2\right]$$

另一方面 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 + x\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\varphi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + x\varphi'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right] &= 2\varphi(u)\varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \varphi^2 u\,\frac{x\varphi''(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}}{(1 - x\varphi'(u))^2} \\ &= 2\varphi(u)\varphi'(u)\frac{1}{(1 - x\varphi'(u))^2} \\ &\quad + x\varphi^2(u)\varphi''(u)\frac{1}{(1 - x\varphi'(u))^3}\end{aligned}$$

从而 $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right].$

8-53 试证锥面上任一点处的切平面通过其顶点.

证 设锥面为 Σ,其顶点为 $P_0(a,b,c)$,任意取定 Σ 上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$,($(x_0,y_0,z_0)\neq(a,b,c)$).由于连接 P_0P 的直线 l 仍在 Σ 上,故 Σ 在 P 点的切平面必包含 l 在内,因此 P_0 点在切平面上.

请从几何直观上看这里的证明.

8-54 设 $F(u,v)$ 可微,试证曲面 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任一点处的切平面都通过定点.

首先分析曲面的几何性质要比机械地代公式更好.

证 1 首先说明曲面是以 $P_0(a,b,c)$ 为顶点的锥面,任取曲面上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$,则连接 PP_0 点的直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x = a + t(x_0 - a) \\ y = b + t(y_0 - b) \\ z = c + t(z_0 - c) \end{cases}$$

当 $t\neq 0$ 时,

$$F\left(\frac{a + t(x_0 - a) - a}{c + t(z_0 - c) - c}, \frac{b + t(y_0 - b) - b}{c + t(z_0 - c) - c}\right) = F\left(\frac{x_0 - a}{z_0 - c}, \frac{y_0 - b}{z_0 - c}\right) = 0$$

l 上的点(除 $P_0(a,b,c)$ 外)都在曲面上,所以曲面是以(a,b,c)为顶点的锥面,可知曲面上任一点处的切平面都通过其顶点(a,b,c).

证 2 任取曲面上的一点 $P(x_0,y_0,z_0)$,该点处的切平面为((x,y,z) 是切平面上的点)

$$F'_1\frac{x - x_0}{z_0 - c} + F'_2\frac{y - y_0}{z_0 - c} - \left(F'_1\frac{x_0 - a}{(z_0 - c)^2} + F'_2\frac{y_0 - b}{(z_0 - c)^2}\right)(z - z_0) = 0$$

以 $x = a, y = b, z = c$ 代入满足方程,故点(a,b,c)在此切平面

三个数 a,b,c,出现在方程中,我们首先猜测(a,b,c)就是所求的点,将它代入试算恰好正确.

上.

8-55 设 $F(u,v)$ 可微,试证曲面 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 上各点的法线总垂直于常向量,并指出此曲面的特征.

证 令 $f(x,y,z)=F(cx-az,cy-bz)$,则曲面上一点(x,y,z)处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为$\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial z}\right\}=\{cF'_1,cF'_2,-aF'_1-bF'_2\}$

$$\boldsymbol{n}\cdot\{a,b,c\}=acF'_1+bcF'_2-caF'_1-cbF'_2=0$$

即任一点的法向量垂直于常向量$\{a,b,c\}$.

任取曲面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则过该点的直线 l

$$\begin{cases}cx-az=cx_0-az_0\\cy-bz=cy_0-bz_0\end{cases}$$

在曲面上,而直线 l 的对称式方程为

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

说明曲面是母线平行于$\{a,b,c\}$的柱面.

与上题类似由于 a,b,c 三个数出现在方程中,我们猜测常向量就是$\{a,b,c\}$如果首先判断曲面的形状,可看出曲面是母线平行于$\{a,b,c\}$的柱面,则显然曲面上各点的法向量总垂直于$\{a,b,c\}$.

8-56 求证曲面 $z=x+f(y-z)$ 上任一点处的切平面平行于某定直线.

证 1 任取曲面上一点(x_0,y_0,z_0),则显然直线 l

$$\begin{cases}x=x_0+t\\y=y_0+t\\z=z_0+t\end{cases}$$

也在曲面上,直线 l 的方向为$\{1,1,1\}$,说明曲面是以某条曲线为准线,以$\{1,1,1\}$为母线方向的柱面,从而曲面上任一点的切平面均平行于定矢量$\{1,1,1\}$,当然也就平行于任何一条以$\{1,1,1\}$为方向矢量的直线,我们取定直线 $l_0:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 即可

证 2 任取曲面上一点(x_0,y_0,z_0),该点处的切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,f'(y_0-z_0),-1-f'(y_0-z_0)\}$,故 $\boldsymbol{n}\cdot\{1,1,1\}=0$,说明矢量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于$\{1,1,1\}$,即切平面平行于向量$\{1,1,1\}$.以下同证 1 知任一点处的切平面均平行于定直线$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

8-57 证明曲线 $x=ae^t\cos t,y=ae^t\sin t,z=ae^t$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同.

证 显然曲线在曲面上,过曲线上任一点 $P(ae^t\cos t,\ ae^t\sin t,\ ae^t)$ 的切向量为

事实上本题是上题的特例,我们令 $F(u,v)=u+f(v)$,则曲面方程

$$\{ae^t(\cos t-\sin t),\ ae^t(\sin t+\cos t),\ ae^t\}$$

由于锥面的顶点为原点，因此过 P 点的母线方向向量为 $\{ae^t\cos t,$ $ae^t\sin t,\ ae^t\}$，切向量与母线夹角的余弦为

$$\frac{\{ae^t(\cos t-\sin t),\ ae^t(\sin t+\cos t),\ ae^t\}\cdot\{ae^t\cos t,\ ae^t\sin t,\ ae^t\}}{(ae^t\sqrt{3})(ae^t\sqrt{2})}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

由此说明曲线 $x=ae^t\cos t, y=ae^t\sin t, z=ae^t$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同.

可写为 $F(x-z, y-z)=0$.

8-58 在柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上求一条过点 $(a,0,0)$ 的曲线，使它与柱面的任一母线的夹角为常数.

解 将柱面方程写成 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}$

设柱面上曲线的方程为 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\\ z=z(\theta)\quad (z(\theta)=0)\end{cases}$

则过任一点处的切向量为 $\{-a\sin\theta, a\cos\theta, z'(\theta)\}$，柱面的母线方向为 $\{0,0,1\}$，按题意

$$\frac{\{-a\sin\theta, a\cos\theta, z'(\theta)\}\cdot\{0,0,1\}}{\sqrt{a^2+z'^2(\theta)}}=\text{常数}=\cos\alpha,\qquad (0<\alpha<\pi)$$

即

$$z'(\theta)=\cos\alpha\sqrt{a^2+z'^2(\theta)}$$
$$z'(\theta)=\pm\cot\alpha\cdot a$$
$$z(\theta)=\pm\cot\alpha\cdot a\cdot\theta+c$$

当 $\theta=0$ 时，$z(\theta)=0$

所以 $z(\theta)=\pm\cot\alpha\cdot a\cdot\theta$

记 $a\cdot\cot\alpha=b$

则曲线方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\\ z=\pm b\theta\end{cases}\qquad -\infty<\theta<+\infty$$

关键是曲线方程可以写成 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=z(\theta)$，若用其它参数解起来就麻烦.

8-59 设圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上的两光滑曲线 T_1 和 T_2 在 P 点相交成 α 角，T_1, T_2 与柱面任一母线不相切. 沿不过 P 点的任一母线将柱面 剪开展成平面. 证明：由 T_1 和 T_2 展成的平面曲线在 P 点处的交角仍为 α.

证 T_1 的方程为$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z_1(\theta) \end{cases}$

设 T_2 的方程为$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z_2(\theta) \end{cases}$

交点 P 为$(R\cos\theta_0, R\sin\theta_0, z_1(\theta_0)) = (R\cos\theta_0, R\sin\theta_0, z_2(\theta_0))$

在展开平面上建立坐标系 uov：v 轴为过 P 点的母线，而柱面上的点$(R\cos\theta_0, R\sin\theta_0, 0)$ 为原点，则由 T_1 展开成 T'_1 的方程为

$$\begin{cases} u = R(\theta - \theta_0) \\ v = z_1(\theta) \end{cases}$$

T_2 展开为 T'_2 的方程为

$$\begin{cases} u = R(\theta - \theta_0) \\ v = z_2(\theta) \end{cases}$$

P 在 uv 平面上，坐标为$(0, z_1(\theta_0)) = (0, z_2(\theta_0))$，$T'_1$，$T'_2$ 交角为 α'，则

$$\cos\alpha' = \frac{\{R, z'_1(\theta_0)\} \cdot \{R, z'_2(\theta_0)\}}{\sqrt{R^2 + z'^2_1(\theta_0)}\sqrt{R^2 + z'^2_2(\theta_0)}}$$

$$= \frac{R^2 + z'_1(\theta_0)z'_2(\theta_0)}{\sqrt{R^2 + z'^2_1(\theta_0)}\sqrt{R^2 + z'^2_2(\theta_0)}}$$

$$\text{又 } \cos\alpha = \frac{\{-R\sin\theta_0, R\cos\theta_0, z'_1(\theta_0)\}\{-R\sin\theta_0, R\cos\theta_0, z'_2(\theta_0)\}}{\sqrt{R^2 + z'^2_1(\theta_0)}\sqrt{R^2 + z'^2_2(\theta_0)}}$$

$$= \cos\alpha'$$

故 $\quad \alpha = \alpha'$.

8-60 给定一平面光滑闭曲线 $\Gamma: x = x(t), y = y(t), a \leqslant t \leqslant b$. 点 $A(x_0, y_0)$ 不在 Γ 上，若 $B(x_1, y_1)$ 是曲线 Γ 上与(x_0, y_0)距离最近或最远的点，并且不是曲线端点，试证 AB 是曲线 Γ 在 B 点处的法向量.

证 设 B 点对应的参数为 α，考虑函数

$$\varphi(t) = (x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2, \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

由题意知 $\varphi(\alpha)$ 是 $\varphi(t)$ 的最小值和最大值，又 $a < \alpha < b$，则 $\varphi'(\alpha) = 0$，即

$$(x(\alpha) - x_0) \cdot x'(\alpha) + (y(\alpha) - y_0)y'(\alpha) = 0$$

式中 $x(\alpha) = x_1, y(\alpha) = y_1$，$\{x'(\alpha), y'(\alpha)\}$ 为 Γ 在 B 点的切向量，所以上式即表示 AB 与 T 在 B 点处的切线垂直.

从几何上看是很容易理解的. 以 A 为圆心，$|AB|$ 为半径的圆必于曲线 T 相切.

8-61 已知两不相交平面闭曲线 $T_1: f(x,y)=0$；$T_2:\varphi(x,y)=0$，又 $A(\alpha,\beta)$，$B(\xi,\eta)$ 分别是 T_1, T_2 上的点，试证如果这两点是这两曲线上相距最近或最远的点，则下列关系式成立

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f'_x(\alpha,\beta)}{f'_y(\alpha,\beta)}=\frac{\varphi'_x(\xi,\eta)}{\varphi'_y(\xi,\eta)}$$

证 根据AB 与 T_2 在 B 点的切向量垂直，则

$$\{\xi-\alpha,\eta-\beta\}\cdot\left\{1,-\frac{\varphi'_x(\xi,\eta)}{\varphi'_y(\xi,\eta)}\right\}=0$$

所以
$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{\varphi'_x(\xi,\eta)}{\varphi'_y(\xi,\eta)}$$

同理

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f'_x(\alpha,\beta)}{f'_y(\alpha,\beta)}$$

8-62 在柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上求一曲线，使它通过点 $(R,0,0)$ 且每点处的切向量与 x 轴、z 轴的夹角相等.

解 设曲线方程为 $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta, z=z(\theta)$

则其切向量为

$$\{-R\sin\theta,R\cos\theta,z'(\theta)\}$$

按题意

$$\begin{aligned}&\{-R\sin\theta,R\cos\theta,z'(\theta)\}\cdot\{1,0,0\}\\=&\{-R\sin\theta,R\cos\theta,z'(\theta)\}\cdot\{0,0,1\}\end{aligned}$$

所以
$$z'(\theta)=-R\sin\theta$$
$$z(\theta)=R\cos\theta+C$$

又 $\theta=0$ 时，$z(\theta)=0$，从而 $C=-R$，所以所求曲线为

$$\begin{cases}x=R\cos\theta\\y=R\sin\theta\\z=-R+R\cos\theta\end{cases}$$

8-63 设 D 为平面上有界区域，$f(x,y)$ 在 D 内可微，在 $\overline{D}$ 上连续，在 $\overline{D}$ 的边界上 $f(x,y)=0$，在 D 上 f 满足方程 $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=f$，试证在 $\overline{D}$ 上 $f\equiv 0$.

证 （反证）设 f 不恒为零，则 f 在 $\overline{D}$ 上的最小值、最大值两者至少有一个不为零，不妨假设其最大值不为零，当 $(x,y)\in\overline{D}$ 的边界时，由于 $f(x,y)=0$，所以 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值 M 必在区域 $\overline{D}$ 的内部某点 (ξ,η) 达到，即

$$f(\xi,\eta)=M\geqslant f(x,y),(x,y)\in\overline{D},M>0$$

由极值的必要条件知，$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)=\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)=0$，又$(\xi,\eta)\in D$.

因为 $M=f(\xi,\eta)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)=0$ 与 $M>0$ 矛盾，所以 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上最大值为零，同理 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上的最小值也等于零. 所以 $f(x,y)\equiv 0$.

8.2.3 多元函数的极值及应用

在有界闭域连续的函数必有最大值和最小值.

8-64 设函数 $f(x,y)$ 在点 $0(0,0)$ 及其邻域连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}=A<0$，讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $o(0,0)$ 是否有极值，如果有是极大还是极小.

解 式中的分母可写成

$$x^2-x\sin y+\sin^2 y=\left(x-\frac{1}{2}\sin y\right)^2+\frac{3}{4}\sin^2 y$$

所以分母总是大于零(在$(0,0)$ 的充分小的去心邻域).

又 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}=A<0$，所以存在 $\delta>0$，

当 $0<x^2+y^2<\sigma$ 时

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}<0$$

且 $\quad x^2+1-x\sin y-\cos^2 y>0$

这时 $f(x,y)-f(0,0)<0$

说明 $o(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

8-65 设 $f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2$，A,B,C 不全为零，若对任意实数 d，满足 $f(x,y)=d$ 的点(x,y) 要么是空集，要么是个点，要么是一个椭圆，问 A,B,C 应满足什么条件.

这应当是一道线性代数中二次型的题：对二次型 $f(x,y)$ 有正交变换

$$\begin{cases}x=\xi\cos t-\eta\sin t\\ y=\xi\sin t-\eta\cos t\end{cases}$$

使化为

$f(x,y)=F(\xi,\eta)=\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2$

如 $\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2=\alpha$ 是椭圆，则 λ_1,λ_2 必同号，而 λ_1,λ_2

解 设 $f(x,y)=Ax^2+Bxy+cy^2=d$ 是个椭圆Γ，其内部的域为 D，则在$\overline{D}=D+\Gamma$上，$f(x,y)$ 必有最大值 M 和最小值m，且它们中至少有一个在 D 内取到. 否则，如果在 Γ 上达到，则 $M=m=d$，在整个 $\overline{D}$ 上有$Ax^2+Bxy+Cy^2\equiv d$，这只有 $A=B=C=d=0$ 才成立，与 A,B,C 不全为零相矛盾，不妨设 $f(x_0,y_0)=m$，$(x_0,y_0)\in D$，是 $f(x,y)$ 的极小点.

$$\text{所以}\quad\begin{cases}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=2Ax_0+By_0=0 & (1)\\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=Bx_0+2Cy_0=0\end{cases}$$

而根据 $f(x,y)=d$ 为一椭圆的假定，必有 $4AC-B^2\neq 0$，否则 $Ax^2+Bxy+Cy^2$ 是个完全平方式 $Ax^2+Bxy+Cy^2=A(x+by)^2=d$ 不论 d 为何值不可能是椭圆，故(1)只有唯一零解，即 $x_0=y_0=0$ 为最小值点，这时

$$f''_{xx}(0,0)f''_{yy}(0,0)-[f''_{xy}(0,0)]^2=4AC-B^2\geqslant 0$$

而上面已说明上式等号不成立，故只有 $4AC-B^2>0$，且 $A>0$，$C>0$.

由于(0,0)是 $f(x,y)$ 在 D 内唯一的驻点，故 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 的最大值必在边界，即 $d=M>0$.

同样，若 M 在 D 内达到，则 $f(0,0)=M$，这时有 $4AC-B^2>0$，且 $A<0,C<0$，这时的最小值 $M=d<0$.

总之 A,B,C 的关系是 $4AC-B^2>0$. 详细说又分(1) $A>0$，则 $f(x,y)=d$，当 $d<0$ 解为空集，$d>0$ 是椭圆，$d=0$ 表示一个点. (2) $A<0$，则 $f(x,y)=d$ 的解为：$d>0$ 时，是空集，$d<0$ 时是椭圆，$d=0$ 时表示一个点；当 $f(x,y)=d$ 表示椭圆时，(0,0)是它的中心点.

8-66 求函数 $z=x^2+y^2$ 在 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\leqslant 9$ 上的最大值与最小值.

解1 先求 $z=x^2+y^2$ 在圆内 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2<9$ 的驻点：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2y=0$，(0,0)是驻点，$z(0,0)=0$，显然这是最小值点，最大值必在圆周上达到.

再求 $z=x^2+y^2$ 在圆周上的最大值，圆周方程可写成

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}+3\cos t\\ y=\sqrt{2}+3\sin t\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

代入 $z=x^2+y^2$ 得

$$\begin{aligned}z&=(\sqrt{2}+3\cos t)^2+(\sqrt{2}+3\sin t)^2\\&=13+6\sqrt{2}(\sin t+\cos t)(*)\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=6\sqrt{2}(-\sin t+\cos t)$$

驻点　$t=\frac{\pi}{4},t=\frac{5\pi}{4}$

当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，$z=25$；当 $t=\frac{5\pi}{4}$ 时 $z=1$；端点处，当 $t=0$ 时，$z=13+6\sqrt{2}<25$，当 $t=2\pi$ 时，$z=13+6\sqrt{2}<25$.

所以 z 在圆周上的最大值(也就是 z 在圆盘上的最大值)为 25，最大值点为 $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2},\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$，最小值点为(0,0)，最小值为 0.

是特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-A & -\frac{B}{2}\\ \frac{-B}{2} & \lambda-C\end{vmatrix}=0$$

的两根，即 $\lambda^2-(A+C)\lambda+AC-\frac{B^2}{4}=0$. λ_1,λ_2 同号，故得 $\lambda_1,\lambda_2=AC-\frac{B^2}{4}>0$ 且 A、C 同号故，当 $a>0$ 时，λ_1、$\lambda_2>0$. 从而 $\lambda_1+\lambda_2=A+C>0$，$A>0$，$C>0$；当 $a<0$ 时，$A<0,C<0$. 这里的关键是 $\Delta=4AC-B^2$，为二次型的行列式的 4 倍，$\Delta>0$ 是二次型正定($A>0$)，或负定($A<0$)的充要条件.

请读者试用在条件 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9$ 下求 $z=x^2+y^2$ 的最大值的条件极值的方法求出最大值.

从(*)式由 $\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$ 即得 z 的最大值为 $13+6\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=25$

解 2 显然最小值 0 在(0,0) 点取得((0,0) 点在圆盘内),而连接(0,0) 点与($\sqrt{2}$,$\sqrt{2}$) 点的直线与$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9$在第一象限的交点就是最大值点,可解出交点坐标为$\left(\frac{5}{2}\sqrt{2},\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$,

$z\left(\frac{5}{2}\sqrt{2},\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)=25$

解2完全是从几何意义出发的.

8-67 设 $T: x=x(t), y=y(t)(a<t<b)$ 是区域 D 内的一条光滑曲线,$f(x,y)$ 是定义在 D 上的可微函数,若我们将 $f(x,y)$ 限制在 T 上(即只让点(x,y) 在曲线 T 上变动),而点(x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在 T 内的最大值或最小值点,试证 $f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 的梯度矢量与 T 在该点处的切向量垂直.

证 设点(x_0,y_0) 对应的参数为 t_0,考虑函数 $\varphi(t)=f(x(t),y(t)), a<t<b$. 由题意 t_0 是 $\varphi(t)$ 的最大值或最小值点,从而 $\varphi'(t_0)=0$,即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0))\cdot x'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0))\cdot y'(t_0)=0$$

注意到 $x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0$, $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right\}$是 $f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 点的梯度,$\{x'(t_0),y'(t_0)\}$ 是 T 在(x_0,y_0) 点的切向量,从而我们得出结论:$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 的梯度与 T 在(x_0,y_0) 点处的切线垂直.

8-68 设 D 为区域,$f(x,y),g(x,y)$ 均为 D 上的可微函数,且在 D 内的任一点处,g 的梯度不为零向,设 T 为曲线$g(x,y)=C$,若(x_0,y_0)是曲线 T 上一点,且是 $f(x,y)$ 限制在 T 上的最大值点(或者最小值点),试证存在实数 λ 使

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\end{cases}$$

这就是拉格朗日乘数法的几何意义. 一般情况下的拉格朗日乘数法的证明可由此引入和推广.

证 根据上题知$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right\}$与 T 在(x_0,y_0)点处的切向量$\left\{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0),-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\right\}$垂直,从而

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right\}$$

与 T 在(x_0,y_0)点处的法向量$\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right\}$平行,故存在 λ 使$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right\}=\lambda\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right\}$即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\end{cases}$$

8-69 求由 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 确定的 $z=f(x,y)$ 的极值.

解 1 两边对 x,y 分别求偏导,得

$$\begin{cases}2x+2zz'_x-2-4z'_x=0\\2y+2zz'_y-2-4z'_y=0\end{cases}$$

设在 (x_0,y_0) 达到极值,则在该点 $z'_x=z'_y=0$,代入上式得

这里没有必要将 z'_x,z'_y 解出来.

$$\begin{cases}2x_0-2=0\\2y_0+2=0\end{cases}$$

$x_0=1,y_0=-1$

代入原方程得 $z=6,z=-2$,则最大值为 6,最小值为 -2.

解 2 原方程可改写为

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4^2$$

隐函数为 $z=z_1(x,y)=\sqrt{4^2-(x-1)^2-(y+1)^2}+2$

$$z=z_2(x,y)=-\sqrt{4^2-(x-1)^2-(y+1)^2}+2$$

显然 $x=1,y=-1$ 是 z_1 的最大值点,是 z_2 的最小值点.

可见这里 $z=z(x,y)$ 有两个不同的函数,一个表示上半球面,一个表示下半球面.

8-70 求内接于椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的最大长方体的体积,长方体的各个面平行于坐标面.

解 1 设内接于椭球且各个面平行于坐标面的长方体在第一卦限的顶点的坐标 (x,y,z) 则长方体的体积为

$$V=8xyz$$

拉格朗日函数为

$$F=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

由拉格朗日乘数法知需解下列方程组

$$\begin{cases} yz + \lambda \dfrac{2x}{a^2} = 0 & (1) \\ xz + \lambda \dfrac{2y}{b^2} = 0 & (2) \\ xy + \lambda \dfrac{2z}{c^2} = 0 & (3) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 & (4) \end{cases}$$

$(1) \times x + (2) \times y + (3) \times z$ 可得 $3xyz = -2\lambda$.

将 λ 分别代入(1),(2),(3) 可得

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

根据实际情况必有最大值，所以当长方体在第一卦限内顶点为 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 时体积最大.

$$V_{\max} = \frac{8}{\sqrt{3}}abc$$

解2 任意固定 z_0，$0 < z_0 < c$，先求所有高为 $2z_0$ 的长方体中求体积最大者，因为高是固定的，所以当底面积最大时体积最大，今上底面为内接于椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \dfrac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \dfrac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

边长平行于 x 轴、y 轴的长方形，根据当长方形的两边分别为

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}, 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} b \cdot \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}$$

时长方形面积最大，这样得到当长方体的高为 $2z_0$ 时，体积最大的长方体的体积 $V(z_0)$ 为

$$V(z_0) = 4ab\left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right)z_0$$

$$V'(z_0) = 4ab\left[\left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right) - \frac{2{z_0}^2}{c^2}\right]$$

从而可知 $z_0 = \frac{c}{\sqrt{3}}$ 时，$V(z_0)$ 最大. 这时长方体在第一卦限的顶点坐标为 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

假定我们想知道全校谁个子最高，可以首先看每个班里谁个子最高，然后再看这些高个子中又是谁个子最高.

解 3　作变换：$X=\frac{x}{a},Y=\frac{y}{b},Z=\frac{z}{c}$. 问题变成：$X^2+Y^2+Z^2=1$，求 XYZ 的最大值，易知为立方体，即 $X=Y=Z=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 从而 $X=\frac{a}{\sqrt{3}},Y=\frac{b}{\sqrt{3}},Z=\frac{c}{\sqrt{3}}$.

解 4　即求$\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{z^2}{c^2}$的最大值，而此三个正数和一定，故当 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$ 时积$\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2c^2}$为最大值.

比较起来这个题的最简单方法是解 4 这个初等方法.

第 9 章　多元函数积分学

9.1　客观题

9.1.1　填空题

9-1　已知 D 是长方形域：$a\leqslant x\leqslant b;0\leqslant y\leqslant 1$，且 $\iint\limits_D yf(x)\mathrm{d}\sigma=1$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad 2\quad}$.

解　$\iint\limits_D yf(x)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

故　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2.$

这种长方形上重积分为二定积分之积：$\int_a^b\int_c^d f(x)g(y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_c^d g(y)\mathrm{d}y$. 及一些简单域上的二重积分化为二次积分，一定要十分熟悉.

9-2　若 D 是由 $x+y=1$ 和两坐标轴围成的三角形域，且 $\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x$，那么

$y(x)=$ $\underline{\quad (1-x)f(x)\quad}$.

解　$\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x)\mathrm{d}y=\int_0^1(1-x)f(x)\mathrm{d}x$

故　$\varphi(x)=(1-x)f(x).$

9-3　若 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$ 则

$(x_1(y),x_2(y))=$ $\underline{\quad (y,\sqrt{y})\quad}$.

解　如图 9.1，D 是积分域，交换顺序得原积分 $=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x$

故　$(x_1(y),x_2(y))=(y,\sqrt{y}).$

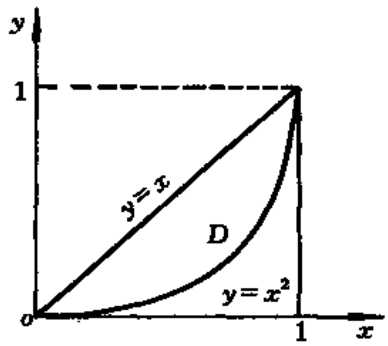


图 9.1

注意交换积分顺序的方法.

9-4 若 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$

则 $(x_1(y), x_2(y)) =$ $\underline{(y^{\frac{1}{3}}, y^{\frac{1}{2}})}$.

解 原积分 $= -\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$= -\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{y^{\frac{1}{3}}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^{\frac{1}{3}}}^{y^{\frac{1}{2}}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

9-5 若 $\int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_0^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

则 $(x_1(y), x_2(y)) = \underline{(y-1, 1-y)}$.

解 如图 9.2,

原积分 $= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

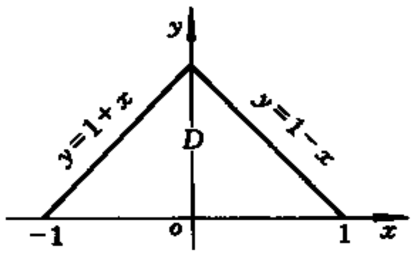


图 9.2

9-6 积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\frac{2}{3}}$.

解 被积函数 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$，由积分域的对称性知 $\iint_D xy\mathrm{d}\sigma = 0$；而 $\iint_D x^2\mathrm{d}\sigma = \iint_D y^2\mathrm{d}\sigma = 4\iint_{D_1} x^2\mathrm{d}\sigma$ 其中 D_1 是 D 在第一象限部分，故

原积分 $= 8\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x^2\mathrm{d}y = 8\int_0^1 (x^2 - x^3)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

注意在重积分计算中，对称性的应用.

9-7 设 D 由 x 轴和 $y=\sin x$ $(x\in[0,\pi])$ 所围成，则积分 $\iint_D y\mathrm{d}\sigma =$ $\underline{\frac{\pi}{4}}$.

解 $\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

$\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ 在重积分中常用到.

9-8 积分 $\int_0^1 dx\int_0^x e^y dy + \int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} e^y dy =$ <u>3(e−2)</u>

先交换积分顺序，再作重积分的方法要总结.

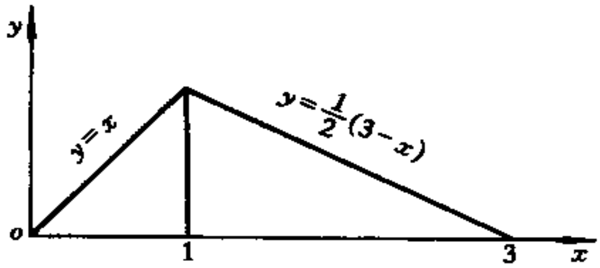


图 9.3

解 先交换顺序，如图 9.3，D 是积分域，故原积分为

$$\int_0^1 dy\int_y^{3-2y} e^y dx = 3\int_0^1 (1-y)e^y dy = 3(e-2).$$

9-9 积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2} dy =$ <u>$\frac{1}{2}(1-e^{-1})$</u>

解 交换积分顺序得原积分为

$$\int_0^1 e^{-y^2} dy\int_0^y dx = \int_0^1 ye^{-y^2} dy = \frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

9-10 积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(2x+y)^2 dxdy =$ <u>$\frac{5\pi}{4}$</u>

注意：在圆内，x^2 与 y^2 的积分对称性，可简化本题计算过程.

解 在圆内，由对称性知：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} xy d\sigma = 0 \text{ 及 } \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} x^2 d\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} y^2 d\sigma,$$

故原积分为

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(4x^2+y^2)d\sigma = \frac{5}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)d\sigma = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^2 dr$$

$$= \frac{5\pi}{4}.$$

9-11 积分 $\iint\limits_{x^2+y^2+2x-2y\leqslant 0}(ax+by)d\sigma =$ <u>$2\pi(b-a)$</u>

用积分可求重心，若重心已知了，反过来可用来计算积分.

解 积分域是圆 $D:(x+1)^2+(y-1)^2$，其面积是 2π，形心 $(\bar{x},\bar{y})=(-1,1)$. 由求质心公式得：$\bar{x}=\iint\limits_D x d\sigma\Big/2\pi$ 故 $\iint\limits_D x d\sigma = -2\pi$. 同样，$\iint\limits_D y d\sigma = 2\pi$. 故原积分值为 $2\pi(b-a)$.

9-12 已知立体 Ω 是椭球体:$4x^2+y^2+z^2-2z\leqslant 3$,记 $I_1=\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v$, $I_2=\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}v$, $I_3=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$.则

$(I_1,I_2,I_3)=$ $\underline{(0,0,\frac{16}{3}\pi)}$.

用重心已知反算三重积分又一例.

解 Ω 是 $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{4}\leqslant 1$,体积 $V=\frac{16}{3}\pi$,而形心为(0,0,1).故 $I_1=I_2=0$,$I_3=\frac{16}{3}\pi$.

9-13 积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(ax+by)^2\mathrm{d}v=$ $\underline{\frac{4}{15}\pi(a^2+b^2)}$

本题用到变元 x,y,z 在球:$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 内的对称性.

解 由积分域对称性知 $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v=0$,$\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$.得,

$$\text{原积分}=\frac{1}{3}(a^2+b^2)\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{a^2+b^2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4}{15}\pi(a^2+b^2).$$

9-14 设 Ω 由 $0\leqslant z\leqslant 1-\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定,则其形心坐标是 $\underline{(0,0,\frac{1}{4})}$.

本题主要是用"先二后一"法算三重积分.

解 由对称性知形心在 z 轴上,只要求 $\bar{z}$.Ω 是高与底面半径皆为 1 的圆锥体,故体积为$\frac{1}{3}\pi$,只要算积分.

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(1-z)^2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12}$$

$\bar{z}=\frac{\pi}{12}\Big/\frac{\pi}{3}=\frac{1}{4}$,因此形心为$(0,0,\frac{1}{4})$.

9-15 密度为 1 的旋转抛物体:$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$(记为 Ω)绕 z 轴的转动惯量 $I=$ $\underline{\frac{\pi}{6}}$.

还是"先二后一"法.

解 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 8^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{6}.$$

9-16 由不等式：$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 2-(x^2+y^2)$，所确定形体 Ω 的体积 $V=$ $\underline{\dfrac{5}{6}\pi}$.

这是在柱坐标下计算三重积分．建议也用"先二后一"法试作本题．

解 $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_r^{2-r^2}r\mathrm{d}z$

$=2\pi\int_0^1(2r-r^3-r^2)\mathrm{d}r=\dfrac{5}{6}\pi$

9-17 设 Ω 由 $0\leqslant z\leqslant 1-\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定，则积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在柱坐标下，可以化为定积分：$\int_0^1\varphi(r)\mathrm{d}r$，那么 $\varphi(r)=$ $\underline{2\pi r(1-r)f(r^2)}$.

在柱坐标下计算三重积分．

解 在柱坐标下得：

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1r\mathrm{d}r\int_0^{1-r}f(r^2)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1r(1-r)f(r^2)\mathrm{d}r.$$

9-18 积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$ 可化为定积分：$\int_0^R\varphi(x)\mathrm{d}x$．则 $\varphi(x)=$ $\underline{4\pi x^2f(x^2)}$.

在球坐标下计算本题较方便．

解 用球坐标计算，得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R\rho^2f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$$

$$=4\pi\int_0^R\rho^2f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$$

故 $\varphi(\rho)=4\pi\rho^2f(x^2)$

9-19 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}f(z)\mathrm{d}v$ 可化为定积分：$\int_{-R}^R\varphi(x)\mathrm{d}x$．则 $\varphi(x)=$ $\underline{\pi(R^2-x^2)f(x)}$.

还是"先二后一"法算这样的题较好．

解 用先二后一法，得

$$\text{原积分}=\int_{-R}^Rf(z)\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_{-R}^R(R^2-z^2)f(z)\mathrm{d}z$$

故 $\varphi(z)=\pi(R^2-z^2)f(z)$

9-20 设 Ω 由不等式 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 2-x^2-y^2$ 所确定，积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}v$ 可化成定积分：

$$\int_0^2 \varphi(x)\mathrm{d}x \text{，则 } \varphi(x)=\underline{\begin{cases}\pi x^2 f(x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \pi(2-x)^2 f(x), & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}}.$$

解 由"先二后一"法得：

注意"先二后一"法算本题时，要分两部分计算.

$$\text{原积分}=\int_0^1 f(z)\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^2 f(z)\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^1 z^2 f(z)\mathrm{d}z+\int_1^2 \pi(2-z)^2 f(z)\mathrm{d}z$$

故 $\varphi(x)=\begin{cases}\pi x^2 f(x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \pi(2-x)^2 f(x), & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

9-21 设 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$ 正向，则积分 $\oint\limits_L (xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-x)\mathrm{d}y=\underline{\ \pi R^2\ }$.

解 用格林公式得

由对称性在圆内 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 有 $\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=0$.

$$\text{原积分}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}[-(x-2)+(2x-1)]\mathrm{d}\sigma=\pi R^2$$

9-22 设 L 为曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 从 $(0,1)$ 至 $(-1,\mathrm{e})$ 的弧段，则积分 $\int\limits_L (y^2-y)\mathrm{d}x+(2xy-x)\mathrm{d}y=\underline{\ \mathrm{e}-\mathrm{e}^2\ }$.

线积分与路径无关的条件.

解 被积表达式 $(y^2-y)\mathrm{d}x+(2xy-x)\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy^2-xy)$ 是全微分. 故

$$\text{原积分}=(xy^2-xy)\Big|_{(0,1)}^{(-1,\mathrm{e})}=\mathrm{e}(1-\mathrm{e}).$$

9-23 设 L 为周长为 a 的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

注意到在 L 上 x,y 间的关系.

则 $\oint\limits_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\underline{\ 12a\ }$.

解 由对称性 $\oint\limits_L xy\mathrm{d}s=0$；而 $3x^2+4y^2=12$，故原积分 $=12a$.

9-24 设 L 是折线 $y=1-|1-x|$ 由 $(0,0)$ 到 $(2,0)$ 的一段. 则积分 $\int\limits_L xy\mathrm{d}y=\underline{\ -\frac{1}{3}\ }$.

本题用到格林公式、重心. 这一类题要练习到仅用"心算"便可得正确答

解 补一段 l 由 $(2,0)$ 至 $(0,0)$ 在 x 轴上. 则 $\int\limits_l xy\mathrm{d}y=0$，而 $L+l$

是闭路反向,它所围成三角形 D 的面积为 1,形心坐标为$(l,\frac{1}{3})$

故 $\int\limits_L xy\mathrm{d}y=\oint\limits_{L+l}xy\mathrm{d}y=-\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=-\frac{1}{3}$

9-25 设 Γ 是 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$ 一周,是线密度为 1 的物质曲线,求其关于 z 轴的转动惯量. $I=$ $\underline{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

解 $I=\oint\limits_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\oint\limits_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{4}{3}\pi R^3$

9-26 记均匀半球面 $\Sigma:z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的质心为$(0,0,\bar{z})$,则 $\bar{z}=$ $\underline{\frac{1}{2}R}$.

解 只要计算 $\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}S$,而

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$ 故

$\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}S=R\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{d}\sigma=\pi R^3,\ \bar{z}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}$

9-27 设 Σ 是介于 $z=0$ 和 $z=h$ 之间的柱面 $x^2+y^2=R^2$ 外侧,则流速场 $\boldsymbol{v}=\{x^2,y^3,z\}$ 单位时间通过 Σ 的流量 $Q=$ $\underline{\frac{3}{4}\pi R^4}$.

解 1 $Q=\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

用高斯公式,补两个面 $\Sigma_1:z=0,x^2+y^2\leqslant R^2$,及 $\Sigma_2:z=h,x^2+y^2\leqslant R^2$ 上侧. 在 Σ_1 上的上述面积为 0;在 Σ_2 上为:

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi R^2h.$

故 $Q=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\pi R^2h$

$=\iiint\limits_\Omega(2x+3y^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\pi R^2h$

$=\frac{3}{2}\int_0^h\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\frac{3}{2}h\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{3}{4}\pi R^4$

解 2 直接计算:

案.

这个题用到在此圆上 x,y,z 的对称性,及曲线方程.

作为多元函数积分的基本功训练,以上 26 题均应练到又准确又快地作出答案来.

解 1、解 2 两种方法对本题而言均是基本方法,特别在解 2 中,要注意,对称性在第 2 类线、面积分中的正确应用. 因为积分曲线或积分曲面都是有向的,不注意它们的方向,很容易出错.

$\iint\limits_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$，由 Σ 在 yoz 面上投影为长方形域，但面 $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ 的法向与 x 轴成锐角，而 $x = -\sqrt{R^2 - y^2}$ 相交成钝角. 故正、负相抵，因而积分为 0；而 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ 是因为 Σ 在 xoy 上投影的面积为 0；故只要算

$$\iint\limits_{\Sigma} y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x = 2\iint\limits_{D} (R^2 - x^2)^{3/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

D 是 Σ 在 xoz 面上投影的长方形域：$0 \leqslant z \leqslant h$，$-R \leqslant x \leqslant R$. 因此，所要求的积分为

$$4h\int_0^R (R^2 - x^2)^{3/2} \mathrm{d}x = 4\pi R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^4 t\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\pi R^4 .$$

9-28 向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z) = \{xy^2, ye^z, x\ln(1+z^2)\}$ 在点 $(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{u} =$ __2__ .

解 由 $\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \dfrac{\partial xy^2}{\partial x} + \dfrac{\partial ye^z}{\partial y} + \dfrac{\partial(x\ln(1+z^2))}{\partial z}$

得 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}\Big|_{(1,1,0)} = 1 + 1 + 0 = 2.$

梯度、散度、旋度这三个“度”是场论初步知识中很重要的三个知识点，特别在直角坐标下的表示，要熟悉.

9-29 向量场 $\boldsymbol{u} = \{xy^2, ye^y, x\ln(1+z^2)\}$ 在点 $(1,1,0)$ 处的旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{u} =$ __$\{-1,0,-2\}$__ .

解 由 $\mathrm{rot}\boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ xy^2 & ye^z & x\ln(1+z^2) \end{vmatrix}$

$= \{-ye^z, -\ln(1+z^2), -2xy\}$

得 $\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\Big|_{(1,1,0)} = \{-1,0,-2\}.$

9-30 数量场 $u = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u) = \underline{\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}}$.

解 由 $\mathrm{grad}u = \left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}$

$= \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\{x,y,z\}$

及 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\right] = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ 等得

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u) = \frac{3}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

9.1.2 单项选择题

9-31 记 D 是由 $y=Kx(K>0)$，$y=0$ 和 $x=1$ 围成的域．且 $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{15}$，则 $x=($　$)$．　　(A)

本题若 $K<0$，能否求出 K 的值?

(A) 1　(B) $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$　(C) $\sqrt[3]{\frac{1}{15}}$　(D) $\sqrt[3]{\frac{2}{15}}$

解 原积分 $=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{Kx} y^2\mathrm{d}y=\frac{K^3}{3}\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{K^3}{15}$

$K=1$，选(A)．

9-32 设 D_1 是正方形域，D_2 是 D_1 的内切圆，D_3 是 D_1 的外接圆，D_1 的中心点在 $(-1,1)$ 处，记 $I_1=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{2y-x^2-y^2-2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；$I_2=\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{2y-x^2-y^2-2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；$I_3=\iint\limits_{D_3}\mathrm{e}^{2y-x^2-y^2-2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．则 I_1,I_2,I_3 大小顺序为(　)．　　(B)

作这个题时，最好画个图在草稿上．

(A) $I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$　(B) $I_2\leqslant I_1\leqslant I_3$

(C) $I_3\leqslant I_2\leqslant I_1$　(D) $I_3\leqslant I_1\leqslant I_2$

解 由于三个被积函数一样，均为正值函数，而 $D_3\supset D_1\supset D_2$，故 $I_2\leqslant I_1\leqslant I_3$．选(B)

9-33 设 D_1,D_2,D_3 是如上题中的正方形和圆域，但中心在 $(0,1)$ 点，正方形的边长为 2．记 $f(x,y)=(2y-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$．$I_1=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$；$I_2=\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$；$I_3=\iint\limits_{D_3}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$．$I_1,I_2,I_3$ 的大小顺序是(　)．　　(D)

这个题及一般选择题，在平时练习时，还应想想，其它几个选项错在哪里?

(A) $I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$　(B) $I_2\leqslant I_1\leqslant I_3$

(C) $I_3\leqslant I_2\leqslant I_1$　(D) $I_3\leqslant I_1\leqslant I_2$

解 由 $2y-x^2-y^2=1-x^2-(y-1)^2$ 及 $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}>0$ 知，在 I_2 中 $f(x,y)>0$．在 I_1 中 $f(x,y)$ 在 D_1,D_2 的部分取负值；故 $I_1\leqslant I_2$；而在 I_3 中在 D_3,D_1 部分，$f(x,y)$ 取负值，故 $I_3\leqslant I_1$，选(D)．

9-34 设 D 是第二象限的一个有界闭区域，且 $0<y<1$．记 $I_1=\iint\limits_D yx^3\mathrm{d}\sigma$；$I_2=\iint\limits_D y^2x^3\mathrm{d}\sigma$；$I_3=\iint\limits_D y^{\frac{1}{2}}x^3\mathrm{d}\sigma$．$I_1,I_2,I_3$ 的大小顺序是(　)．　　(C)

(A) $I_1 \leqslant I_2 \leqslant I_3$ (B) $I_2 \leqslant I_1 \leqslant I_3$

(C) $I_3 \leqslant I_1 \leqslant I_2$ (D) $I_3 \leqslant I_2 \leqslant I_1$

解 因$0<y<1$,故 $y^2<y<y^{\frac{1}{2}}$

而 $x^3<0$,从而 $y^{\frac{1}{2}}x^3<yx^3<y^2x^3$,应选(C).

9-35 将极坐标下的二次积分 $I=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r$ 化为直角坐标下的二次积分,则 $I=(\quad)$. (C)

要掌握极坐标下二重积分计算与直角坐标下的关系,也一样要注意其它选项为什么不对?

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{y} f(x,y)\mathrm{d}x +$

$\int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(D) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

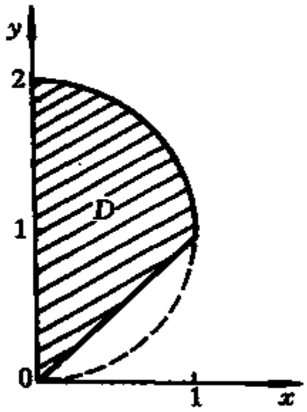


图 9.4

解 如图 9.4 中阴影部分是积分域,故应选(C).

注:从图 9.4 中看出如先对 y 积分的正确结果是 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

9-36 在极坐标下,与二次积分 $\int_{-R}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 相等的是( ). (D)

自己作图.

(A) $\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_{-R}^{R} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r$

(B) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{d}\theta\int_{-R}^{R} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r$

(C) $\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{R} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r$

(D) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{d}\theta\int_0^{R} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r$

解 积分域是圆 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 在第 2,3 象限部分的半圆,故应选(D).

9-37 设 D 是以 $(1,1),(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形域，D_1 是 D 在第 1 象限部分.

则 $\iint\limits_{D}(xy+\sin y e^{-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\quad)$. (A)

(A) $2\iint\limits_{D_1}\sin y e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\sin y e^{-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(D) 0

要搞清楚对称性在这个题中的应用，注意易搞错的地方.

解 如图 9.5，$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$. 由对称性知在 $D_1\cup D_2$ 上及 $D_3\cup D_4$ 上 xy 的积分均为 σ，故 $\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 而，在 $D_3\cup D_4$ 上，$\sin y e^{-x^2-y^2}$ 是关于 y 的奇函数，故积分为 0，在 $D_1\cup D_2$ 上，是关于 x 的偶函数，因此应选 (A).

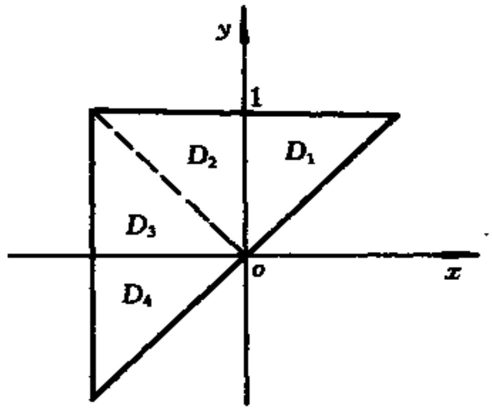


图 9.5

9-38 计算旋转抛物面 $z=1+\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 在 $1\leqslant z\leqslant 2$ 那部分的曲面面积 $S=(\quad)$. (B)

注意曲面 S 在 xoy 上的投影域，是否容易搞错.

(A) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(B) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(D) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，当抛物面在 xoy 平面上投影为圆 $x^2+y^2\leqslant 2$. 应选(B).

9-39 设 Ω 由 $x+y+z\leqslant K, 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, z\geqslant 0$ 所确定，其中 K 是大于 2 的常数及 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{7}{4}$，则 $K=(\quad)$. (C)

想一想，为什么要假设 $K\geqslant 2$.

(A) 5　　(B) 3　　(C) $\dfrac{14}{3}$　　(D) $\dfrac{8}{3}$

解 原积分 $=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{K-x-y}\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1(K-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(x\left(K-\frac{1}{2}\right)-x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}K-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{K}{2}-\frac{7}{12}$$

解得 $K=\frac{14}{3}$,选(C).

9-40 设 Ω_1 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant0$ 确定. Ω_2 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$ 所确定,则( ). (C)

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}v$ (B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$ (D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}v$

解 上述被积函数中,只有 z 在 Ω_1 中是 x,y 的偶函数,故选(C).

试对各选项进行分析,何时它们间关系是对的.

9-41 将在直角坐标下的三次积分:

$$I=\int_0^a\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

化为球坐标下的三次积分,则 $I=$( ). (B)

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\mathrm{d}\rho$

(B) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\mathrm{d}\rho$

(C) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\mathrm{d}\rho$

(D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\mathrm{d}\rho$

解 由直角坐标下三次积分知相应的三重积分的积分域是半球 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant2az,x\geqslant0$. 因此 θ 的取值为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,$\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 而 $\rho\in(0,2a\cos\varphi)$,故选(B).

想一想,本题的各选项为什么只在 θ 和 φ 角的取值范围不同. 在球坐标下,化三重积分为三次积分,各变元 ρ,φ,θ 的限怎样确定.

9-42 设 Ω 是下半球:$-\sqrt{1-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant0$.

记 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}v$; $I_2=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}v$; $I_3=$

$\iiint\limits_{\Omega} z^3 e^{-x^2-y^2} dv$. I_1, I_2, I_3 大小顺序是(　). (D)

(A) $I_3 \leqslant I_1 \leqslant I_2$　　(B) $I_2 \leqslant I_3 \leqslant I_1$

(C) $I_3 \leqslant I_2 \leqslant I_1$　　(D) $I_1 \leqslant I_3 \leqslant I_2$

解　由 $z^2 \geqslant 0, z \leqslant 0, z^3 \leqslant 0$ 便知 I_2 最大. 而由 $-1 \leqslant z \leqslant 0$ 知 $z \leqslant z^3$ 因此 I_1 最小故选(D).

9-43　设积分 $\int_L x\varphi(y)dx + x^2ydy$ 与路径无关. 其中 $\varphi(0)=0$, $\varphi(y)$有一阶连续导数.

则 $\int_{(0,1)}^{(1,2)} x\varphi(y)dx + x^2ydy = ($　$)$. (A)

(A) 2　　(B) 1　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 3

作为选择题,我们可以不求出 $\varphi(y)$即可求得答案,你能这样作吗?

解 1　由 $x\varphi(y)dx + x^2ydy = \frac{1}{2}[\varphi(y)dx^2 + x^2dy^2]$是全微分式,及 $\varphi(0)=0$ 知 $\varphi(y)=y^2$.

从而　$x\varphi(y)dx + x^2ydy = \frac{1}{2}d(x^2y^2)$

故　$\int_{(0,1)}^{(1,2)} = \frac{1}{2}(x^2y^2)\Big|_{(0,1)}^{(1,2)} = 2$　选(A).

解 2　由$\frac{\partial}{\partial y}(x\varphi(y)) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)$得

$\varphi'(y)=2y$ 故 $\varphi(y)=y^2+C$ 即得 $\varphi(y)=y^2$. 计算积分可用(与路径无关):

$$\int_{(0,1)}^{(1,2)} = \int_{(0,1)}^{(0,2)} + \int_{(0,2)}^{(1,2)} = \int_0^1 4x dx = 2$$

9-44　求正数 a 的值,使 $\int_L y^3dx + (2x+y^2)dy$ 的值最小. 其中 L 是沿曲线 $y=a\sin x$ 自$(0,0)$至$(\pi,0)$的那段. 则 $a=($　$)$. (D)

(A) 2　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) 3　　(D) 1

解　原积分 $= \int_0^{\pi}(a^3\sin^3x + 2xa\cos x)dx$

$$= \frac{4}{3}a^3 - 4a$$

令　$\left(\frac{4}{3}a^3 - 4a\right)' = 4(a^2-1) = 0$　得 $a=1$ 选(D).

9-45 设 L 是椭圆 $5x^2+2xy+y^2=1$ 正向,则 $\oint_L y\mathrm{d}x=(\quad)$.

(D)

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $-\pi$ (D) $-\frac{\pi}{2}$

解 1 将 L 写成 $4x^2+(x+y)^2=1$,而令

$x=\frac{1}{2}\cos t,x+y=\sin t,y=\sin t-\frac{1}{2}\cos t$

则 $\oint_L y\mathrm{d}x==-\int_0^{2\pi}(\sin t-\frac{1}{2}\cos t)\frac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}.$

解 2 由格林公式 $\oint_L y\mathrm{d}x=-S$,S 表示椭圆 $5x^2+2xy+y^2\leqslant 1$ 的面积,又二次型 $5x^2+2xy+y^2$ 的特征方程是

$$\begin{vmatrix}\lambda-5 & -1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=0 \quad 解得 \lambda_{1,2}=3\pm\sqrt{5}$$

因此,经正交变换标准方程是

$$(3+\sqrt{5})x'^2+(3-\sqrt{5})y'^2=1$$

面积 $S=\pi\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}\times\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{\pi}{2}$,故选(D).

解 3 我们用条件极值方法来求解,L 是以原点为中心的椭圆,为求它所围的面积 S,只要求长短轴,即求 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最大、最小值,故我们设目标函数为 x^2+y^2,在条件 $5x^2+2xy+y^2=1$ 下的极值,用拉格朗日乘数法,令 $L(x,y;\lambda)=x^2+y^2+\lambda(5x^2+2xy+y^2-1)$

令
$$\frac{1}{2}L_x=x+5\lambda x+\lambda y=0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}L_y=y+\lambda x+\lambda y=0 \tag{2}$$

即可得所求极值点 (x,y),由于 $(x,y)\in L$,故关于 x,y 的齐次线性方程组(1),(2)有非零解.

故
$$\begin{vmatrix}5\lambda+1 & \lambda\\ \lambda & 1+\lambda\end{vmatrix}=0,\quad 或 4\lambda^2+6\lambda+1=0 \tag{3}$$

而从 $(1)\cdot x+(2)\cdot y$ 得 $(x^2+y^2)+\lambda(5x^2+2xy+y^2)=0$. 即 $x^2+y^2=-\lambda$,便是所求极值. 而(3)式恰有两负根,设为 $-\lambda_1>-\lambda_2$,由实际意义,它们正是所求的最大、最小值. 因此,椭圆面积为 $S=\pi\sqrt{(-\lambda_1)\cdot(-\lambda_2)}=\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}=\frac{\pi}{2}$.

解 4 用二重积分计算 $4x^2+(x+y)^2\leqslant 1$ 的面积,作变换 $u=x$,$v=x+y$,则 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$

像这样一种基本题,我们给出多种解法:解 1 是直接计算法;解 2 用格林公式;解 3 用条件极值法;解 4 唯有解 4 是用二重积分的换元法,是超纲的. 读者可以比较,解 2 和解 3 对本题来说,麻烦点,但却综合用到不少知识点. 对客观题,考试时也选择巧妙、简便的方法算,而平时,应设法用多种方法解,并多想,其余的选项错在哪里.

而得 $4u^2+v^2\leqslant 1$，面积 $S=\frac{\pi}{2}$.

9-46 设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1, 0\leqslant z\leqslant 1$ 外侧，$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ( ). (D)

(A) 0 (B) $\pi+1$ (C) 1 (D) π

注意在柱面上积分的特殊性.

解 1 直接算，由柱面 $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ 在 yoz 面上投影域是长方形 $D: -1\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$，而半柱面 $x=\sqrt{1-y^2}$ 法向 x 轴成锐角；$x=-\sqrt{1-x^2}$ 的法向与 x 轴成钝角，由对称性知 $\iint\limits_{\Sigma}(y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，

而 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint\limits_{D}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi$，选(D).

解 2 补 $z=0, x^2+y^2\leqslant 1$ 及 $z=1, x^2+y^2\leqslant 1$ 两个面，在此二面上的相应积分为 0，故

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\pi$$

Ω 是底半径为 1，高为 1 的圆柱体，体积为 π.

解 2 中为什么不用算即知在 $z=0$ 和 $z=1$ 上 $\iint\limits_{\Sigma_{1,2}}(x+y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 均为 0?

9-47 设 Σ 为半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 内的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=$ ( ). (A)

(A) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ (B) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi$ (C) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ (D) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi$

解 Σ 在 xoy 面上投影即是圆 $x^2+y^2\leqslant 2x$，$|y|$ 是关于此域的偶函数，故只须在半圆：$\sigma\leqslant r\leqslant 2\cos\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 上作积分. 而

$$\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}\sigma$$

因此 $$\iint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi$$

应选(A).

本题被积函数如改为 y，即不加绝对值结果如何?

9-48 设 Σ 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧. 积分

$$\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\quad).$$ (C)

(A) 4π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

因为本题的积分域是球面与锥面所围成，故解法要更多些.

解 1 用高斯公式得原积分

$$I = 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v = 2\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v$$
$$= 2[\int_0^1 z\mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^2 z\mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant 2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$
$$= 2[\pi\int_0^1 z^3\mathrm{d}z + \pi\int_1^2 (2z-z^3)\mathrm{d}z]$$
$$= 2\pi[\frac{1}{4} + (3-4+\frac{1}{4})] = \pi$$，选(C)

解 2 用柱坐标算：三重积分得：

$$I = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_1^{\sqrt{2-r^2}} z\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^1 r(2-2r^2)\mathrm{d}r = \pi$$

解 3 用球坐标算三重积分得：

$$I = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\rho = \pi$$

9-49 已知$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$是全微分表达式. 则 $a=$（ ）. (D)

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

解 1 用凑全微分法：由于分母是 $x+y$ 的平方，故分子应凑为 $(x+y)$及 $\mathrm{d}(x+y)$的形式为此考察

$$(x+2y)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=(x+y)\mathrm{d}(x+y)+y\mathrm{d}(x+y)-(x+y)\mathrm{d}y$$

与$(x+y)^{-2}$恰好构成全微分：$\mathrm{d}[\ln|x+y|-\dfrac{y}{x+y}]$

因此 $a=2$ 选(D).

解 2 用$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x+ay}{(x+y)^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{y}{(x+y)^2}$即可得 $a=2$.

解 3 用待定系数法，原函数必为

$$A\ln|x+y|+\frac{Bx+Cy}{x+y}$$的形式

作全微分得

$$\frac{A\mathrm{d}x+A\mathrm{d}y}{x+y}+\frac{(x+y)(B\mathrm{d}x+C\mathrm{d}y)-(Bx+Cy)\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2}$$
$$=\frac{[Ax+(A+B-C)y]\mathrm{d}x+[(A+C-B)x+Ay]\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$$
$$\equiv\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y^2)}$$

比较得 $A=1(B=0,C=-1)$，因而 $a=2$.

凑微分的方法是巧妙的，但要求对基本运算要"倒背如流".

解2其实也比较麻烦，而待定系数法就本题而言是麻烦的，但对有些题，却是一种好方法.

9-50 设当 $x>0$ 时，$\mathrm{grad}\,u=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$，那么 $\lambda=$（ ）. (A)

本题还是凑全微分方法简便，平时多练习凑全微分，

(A) -1 (B) -2 (C) 1 (D) 2

方能掌握这个方法.

解 由$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy(x^4+y^2)^\lambda,\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$知

$$\mathrm{d}u=(x^4+y^2)^\lambda[y\mathrm{d}x^2-x^2\mathrm{d}y]=y^{2\lambda+2}\left(\left(\frac{x^2}{y}\right)^2+1\right)^\lambda\mathrm{d}\frac{x^2}{y}$$

因此 $\lambda=-1$,选(A).

9.2 非客观题

9.2.1 多元函数积分学的概念和基本性质

本题用到连续函数在某点不为0,则在这点的一个邻域内必不为0的性质.本题的结果对三重积分、第一类线、面积分都适用.请读者自行推广之.

9-51 设D是(x,y)面上的有界闭区域,函数$f(x,y)$在D上连续且不变号,又$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$.试证明在区域$D$上$f(x,y)=0$.

证 不妨设在D上$f(x,y)\geqslant 0$,于是在D的任一子域Ω上,$\iint\limits_\Omega f(x,y)\mathrm{d}\sigma\geqslant 0$.下面用反证法证明本题,设存在$(x_0,y_0)\in D$,使$f(x_0,y_0)>0$,由$f(x,y)$的连续性知存在$(x_0,y_0)$的领域$V$,对一切的$(x,y)\in V$,有$f(x,y)\geqslant\frac{1}{2}f(x_0,y_0)>0$.记区域$D\setminus V=\Omega$则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_V f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_\Omega f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$\geqslant\iint\limits_V f(x,y)\mathrm{d}\sigma\geqslant\frac{1}{2}f(x_0,y_0)\cdot S(V)>0$$

(其中$S(V)$表示V的面积)

这与题设$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$矛盾.

本题所用方法与上题雷同,其结果也容易推广到三重积分和第一类线、面积分中去.

9-52 设$f(x,y)$在有界闭域D上连续,若对D内的任一子区域Ω均有$\iint\limits_\Omega f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$,则在区域$D$上$f(x,y)=0$.

证 我们用反证法来证明本题.假设在D内存在一点(x_0,y_0),使$f(x_0,y_0)\neq 0$,不妨设$f(x_0,y_0)<0$,则存在(x_0,y_0)的一个邻域Ω,使对一切$(x,y)\in\Omega$,$f(x,y)\leqslant\frac{1}{2}f(x_0,y_0)<0$,这时

$S(\Omega)$表示Ω的面积.

$$\iint\limits_\Omega f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\frac{1}{2}f(x_0,y_0)S(\Omega)<0$$

这与题设$\iint\limits_\Omega f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$矛盾.

9-53 设 $f(x,y)$ 在有界区域 $\overline{D}$ 上连续.若对任意在 D 的边界 ∂D 取零值且在 $\overline{D}$ 上连续的函数 $\eta(x,y)$,均有 $\iint\limits_D f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$,则 $f(x,y) = 0$, $(x,y) \in D$ 是任一点.

证 为了证明结论只要证明 $\iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$.为此我们这样构思:如图 9.6 设 $|f(x,y)| \leqslant M$,作 $D' \subset D$ 使 $D \setminus D'$ 的面积为 ε,充分小.比如 D 的边界长为 Γ,使 D 与 D' 的边界间的距离处处等于 δ,则 $D \setminus D'$ 的面积 $\varepsilon \leqslant \Gamma\delta$.再作 $\eta(x,y)$,使得 $\eta(x,y) = f(x,y)$ 当 $(x,y) \in \overline{D'}$,再使 $\eta(x,y)$ 在 D 的边界 ∂D 上为零,在 $\overline{D}$ 上连续,于是

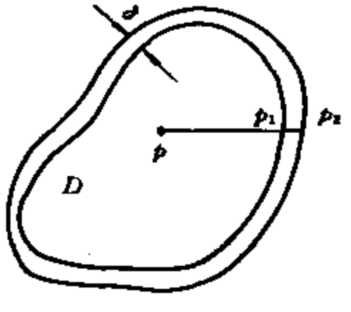


图 9.6

$\iint\limits_D f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D'} f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D\setminus D'} f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$,则 $\left|\iint\limits_{D'} f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| = \left|\iint\limits_{D\setminus D'} f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant M^2\varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$, 得 $\iint\limits_{D'} f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$,故 $f^2(x,y) = 0,(x,y) \in D'$,而 D' 为 D 的任一子区域,故 $f(x,y) = 0$ 对任意的 $(x,y) \in D$ 都成立.

注:以上三题(特别是 9-53 题)的结果是近代分析和计算方法中常用的几个性质,请读者注意.

本题利用了题 9-51 的结论,设法证明 $\iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$. η 可这样作出:如图 9.6,P 是 D 内一点,作射线 $\overline{pp_1p_2}$,在 $\overline{pp_1}$ 上 $\eta = f$,在 $\overline{p_1p_2}$ 上作线性函数,使得 $\eta(p_1) = f(p_1)$, $\eta(p_2) = 0$ 即可.

9-54 设 $f(x)$ 是$[0,1]$上的连续正值函数,且单调减,证明

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

证 1 即要证

$$\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant 0 \text{ 或}$$

$$\iint\limits_D xf(x)f(y)[f(x) - f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 0$$

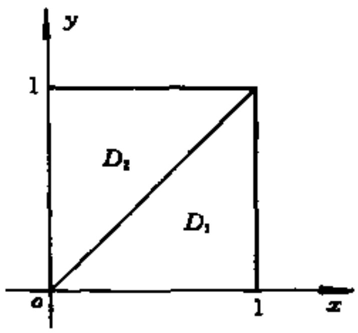


图 9.7

其中 D 如图 9.7 中的正方形 $D = D_1 + D_2$,而

$$\iint\limits_{D_2} xf(x)f(y)[f(x) - f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

用二重积分方法证明定积分性质是个好方法. 本题用到定积分与积分变量符号无关的性质. 本题中的等号可以去掉,参见题 9-51.

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y x f(x) f(y) [f(x) - f(y)] \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x y f(y) f(x) [f(y) - f(x)] \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} y f(y) f(x) [f(y) - f(x)] \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

则 $$\iint_D x f(x) f(y) [f(x) - f(y)] \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} x f(x) f(y) [f(x) - f(y)] \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \iint_{D_2} x f(x) f(y) [f(x) - f(y)] \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} f(x) f(y) (x - y) [f(x) - f(y)] \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leqslant 0.$$

这里由于 $f(x)$ 单调减，所以 $(x - y)[f(x) - f(y)] < 0.$

证 2 $$\iint_D x f(x) f(y) [f(x) - f(y)] \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \iint_D y f(y) f(x) [f(y) - f(x)] \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D f(x) f(y) (x - y) [f(x) - f(y)] \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leqslant 0$$

这里由于 $f(x)$ 单调减，所以 $(x - y)[f(x) - f(y)] < 0.$

9-55 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\left(\int_a^b f(x) \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b - a) \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x$$

本题又是一个用重积分证明定积分不等式的例子．这里关键是将定积分的乘积转化为相应的重积分．

证 由于

$$\left(\int_a^b f(x) \mathrm{d}x\right)^2 = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \int_a^b f(y) \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ a \leqslant y \leqslant b}} f(x) f(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

再注意到 $$f(x) f(y) \leqslant \frac{1}{2}[f^2(x) + f^2(y)]$$

则 $$\left(\int_a^b f(x) \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{2} \iint_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ a \leqslant y \leqslant b}} [f^2(x) + f^2(y)] \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_a^b \mathrm{d}y \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x + \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b f^2(y) \mathrm{d}y\right)$$

$$= \frac{b - a}{2}\left[\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x + \int_a^b f^2(y) \mathrm{d}y\right]$$

$$= (b - a) \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x$$

原题得证.

以上几个用重积分证明定积分性质的方法可以推广到本题. 为了计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$, 变成计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-y^2}dxdy$ 它是 $e^{-x^2-y^2}$ 在全平面上的广义重积分

9-56 计算广义积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

解 $I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-y^2}dxdy$$

这样 I^2 是被积函数 $e^{-x^2-y^2}$ 在全平面 $-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$ 上的二重广义积分. 自然我们可以用圆域来逼近, 令 $R\to\infty$ 即得全平面.

则 $I^2=\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R re^{-r^2}dr$

$$=\lim_{R\to+\infty}\left[\pi e^{-r^2}\right]\Big|_R^0=\pi$$

故 $I=\sqrt{\pi}$.

利用积分性质来估计积分值不论在理论上或实际计算上都很重要. 本题解法的实质是利用函数的幂级数展开来作估计.

9-57 证明不等式: $\dfrac{61}{165}\pi\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}d\sigma\leqslant\dfrac{2}{5}\pi$

证 由于 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}d\sigma=2\pi\int_0^1 r\sin r^3dr$, 因此将问题化为估计定积分 $\int_0^1 r\sin r^3dr$. 从答案分析拟用不等式来估计 $\sin r^3$, 我们知道, 对任意正实数 t 有: $t-\dfrac{t^3}{3!}\leqslant\sin t\leqslant t$, 于是

$$r^3-\frac{r^9}{3!}\leqslant\sin r^3\leqslant r^3$$

$$\int_0^1 r\sin r^3dr\leqslant\int_0^1 r^4dr=\frac{1}{5}$$

$$\int_0^1 r\sin r^3dr\geqslant\int_0^1\left(r^4-\frac{r^{10}}{6}\right)dr=\frac{61}{330}$$

所以 $\dfrac{61}{165}\pi\leqslant2\pi\int_0^1 r\sin r^3dr$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}d\sigma\leqslant\frac{2}{5}\pi$$

注: 本题所用不等式来自正弦函数的幂级数展开式.

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots$$

如被积函数可展开为交错级数, 则容易得到积分的一系列不足近

似值和过剩近似值. 而由交错级数审敛的莱布尼兹法则，不难做出近似积分值的误差估计.

9-58 证明不等式：$\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)<\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2<\frac{16}{25}$

本题与上题类似，不等式右边像是用级数估计，因此我们使用级数的方法，左边不等式中出现了 e^{-1}，还有 $\frac{\pi}{4}$，所以想到化积分平方为二重积分，再用极坐标计算. 这也是个估计积分值的好方法.

证 记 $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$

由 $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\cdots<1-x^2+\frac{x^4}{2!}$

得 $I<\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=\frac{23}{30}<\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$

所以 $I^2\leqslant\frac{16}{25}$，右边不等式得证.

$$2I=\int_{-1}^1 e^{-x^2}dx(2I)^2=\int_{-1}^1 e^{-x^2}dx\int_{-1}^1 e^{-y^2}dy>\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} e^{-x^2-y^2}d\sigma$$

$$=2\pi\int_0^1 re^{-r^2}dr=\pi(1-e^{-1})$$

所以 $I^2>\frac{\pi}{4}(1-e^{-1})$ 左边不等式也得证.

注：从这几个例题中要学会将定积分的乘积化为重积分解决问题的方法.

9-59 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上有二阶连续偏导数，试用重积分的方法证明在 D 内恒有 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

用积分证明微分的性质，在近代分析中常被用到. 办法是：为了证明在一点处的二阶混合导数相等，先证明它们在这点的一个小邻域内的积分值相等，再用积分中值定理并取极限，便证明了本命题.

证 设 $(x_0,y_0)\in D$ 是任一点，作此点的一个正方形邻域 $\Omega=\{(x,y)\mid x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta, y_0-\delta\leqslant y\leqslant y_0+\delta\}$，使 $\Omega\subset D$，则 $f(x,y)$ 在 Ω 上有二阶连续偏导数. 考虑积分

$$\begin{aligned}I_1&=\iint\limits_{\Omega} f''_{xy}(x,y)d\sigma\\&=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}dx\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\partial f_x}{\partial y}dy\\&=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[f_x(x,y_0+\delta)-f_x(x,y_0-\delta)]dx\\&=f(x_0+\delta,y_0+\delta)-f(x_0-\delta,y_0+\delta),\\&\quad-f(x_0+\delta,y_0-\delta)+f(x-\delta,y-\delta);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2&=\iint\limits_{\Omega} f''_{xy}(x,y)d\delta\\&=\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}dy\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\partial f_y}{\partial x}dx\\&=f(x_0+\delta,y_0+\delta)-f(x_0-\delta,y_0+\delta)-\\&\quad f(x_0+\delta,y_0-\delta)+f(x_0-\delta,y_0-\delta)\end{aligned}$$

所以 $I_1 = I_2$，利用积分中值定理知，存在$(x_1, y_1) \in \Omega$ 及$(x_2, y_2) \in \Omega$，使

$$f''_{xy}(x_1, y_1)4\delta^2 = f''_{yx}(x_2, y_2)4\delta^2$$

约去 $4\delta^2$ 并令 $\delta \to O^+$，则由二阶偏导数的连续性知，$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

由(x_0, y_0)的任意性知本题得证.

9-60 设 L 是光滑弧段，弧长为 l，P, Q, R 是在 L 上连续的三个函数，且

$M = \max\limits_{(x,y,z)\in L}[\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}]$，试证明

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\right| \leqslant ML$$

证 由于估计的是线积分的绝对值，因此 L 的方向可随便取，这样化为第 I 型线积分也很容易，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \cos\beta$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \cos r$，分别是曲线 L 的单位切向量的方向余弦.

$$\begin{aligned}\left|\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s\right| \\ &= \left|\int_L \{P, Q, R\}\cdot\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \left|\int_L \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant M\left|\int_L \mathrm{d}s\right| = Ml\end{aligned}$$

这个题首先是将 Ⅱ 型线积分化为 Ⅰ 型线积分，才好估计积分值.

这里用到内积性质，也可说是柯西不等式.

9-61 估计积分 $I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2 + xy + y^2)^2}$ 并证明 $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

解 我们先来看被积式的分母

由 $x^2 + xy + y^2 \geqslant \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{R^2}{2}$

得 $|I_R| \leqslant \frac{4}{R^4} \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}S = \frac{4}{R^4}\cdot 2\pi R^2 = \frac{8\pi}{R^2}$

由 $0 \leqslant |I_R| \leqslant \frac{8\pi}{R^2}$ 得 $\lim\limits_{R\to\infty}|I_R| = 0$，从而 $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

本题也可用题 9-60 的结论来证明. 而这里介绍的方法即先将分母估计好，再用 9-60 题的结果，想起来更自然.

9.2.2 二重积分的计算方法

9-62 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续，D 由不等式 $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant x, y \leqslant 2$ 所确定，试将二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 化为直角坐标下的两种不同次序的累

化重积分为累次积分定限时，就是要确定各积分变元的变化范围. 我们用投影、发射的

次积分.

解 (1)先画出积分域;(2)投影.设我们先对 x 积分,即将 D 在 y 轴上投影,得 $1\leqslant y\leqslant 2$,(图 9.8);(3)发射:对固定的 $y\in(1,2)$ 自左向右作射线,从 $x=y$ 的边界进入 D,从 $x=y^2$ 出,即 $y\leqslant x\leqslant y^2$,于是得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}f(x,y)\mathrm{d}x$$

如果我们先对 y 积分,那么(2)投影应将 D 在 x 轴上投影,得区间 $[1,4]$;(3)发射.应固定 $x\in(1,4)$,由下向上作射线,由本图 9.8 我们发现 $x\in(1,2)$ 时,射线从 $y=\sqrt{x}$ 进入 D,从 $y=x$ 出;$x\in(2,4)$ 时,从 $y=\sqrt{x}$ 进,从 $y=2$ 出.故

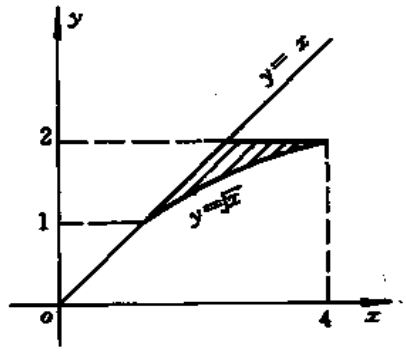


图 9.8

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}y$$

说法来作.如先对 y 后对 x 积分,就将积分域投影在 x 轴上,可得 x 的变化范围;再对固定的 x 自积分域下方作一平行 y 轴射线,则可知 y 的变化范围.这种定限方法较形象直观.

9-63 在极坐标下把二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为两种不同次序的累次积分,其中区域 D 由 $Rx\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$ 所确定,$f(x,y)$ 在 D 上连续.

解 (1)画域:如图 9.9(a),$D_1+D_2+D_3=D$;(2)投影:一般先对 r 积分再对 θ 积分.从图上看出 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$;(3)发射:发现要分开积分,在 D_1+D_2 上即当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,r 从 $r=R\cos\theta$ 进入积分域,从 $r=R$ 出;在 D_3 上即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时,$r=0$ 即进入 D_3,$r=R$ 时出,故 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{R\cos\theta}^{R}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r+$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$$

若先对 θ 积分,再对 r 积分,则也是投影,即找 r 的范围 $0\leqslant r\leqslant R$.这时,发射是固定 $r\in(O,R)$.作圆弧按逆时针转,如本题在 D_1 弧从 $\theta=-\frac{\pi}{2}$ 入,$\theta=-\arccos\frac{r}{R}$ 出;在 D_2 从 $\theta=\arccos\frac{r}{R}$ 入,从 $\theta=$

在极坐标下化重积分为先对 r 后对 θ 的二次积分定限时,我们也用投影、发射的说法,这里说投影是找 θ 的变化范围.也可以令极轴沿逆时针方向转动,看 θ 角为何值时极轴与积分域开始接触,当 θ 为何值时离去;发射就是固定 θ 找 r 的变化范围.由于 $r\geqslant 0$ 故发射时的出发点总是极点.

$\frac{\pi}{2}$ 出；在 D_3 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$，

所以 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^R\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos\frac{r}{R}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta+$

$$\int_0^R\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{r}{R}}^{\frac{\pi}{2}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^R\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\qquad(1)$$

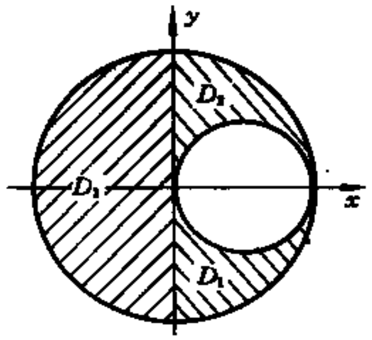


图 9.9(a)

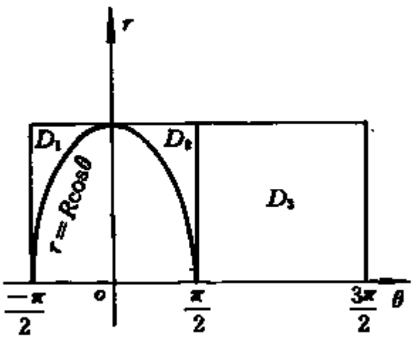


图 9.9(b)

注：在极坐标下，先对 θ，后对 r 的积分定限较困难. 因此，我们介绍另一种方法：在定好了先对 r，后对 θ 的累次积分后，可将 (r,θ) 视为直角坐标. 按直角坐标交换次序即可，如图 9.9(b) 是按二次积分(1) 式画出的在 (θ,r) 直角坐标下的图形. 由此得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^R\mathrm{d}r\int_{-\pi/2}^{-\arccos\frac{r}{R}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^R\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{r}{R}}^{\frac{3\pi}{2}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

避开了极坐标的定限方法.

这说明在极坐标下化二重积分为累次积分，只要熟练掌握先对 r，后对 θ 的这一种顺序就行了.

9-64 更换累次积分的次序：

$$I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

解 先画积分域，将已知的累次积分化为二重积分，从图 9.10 看出要化累次积分为二重积分得先分已知的二次积分为两部分.

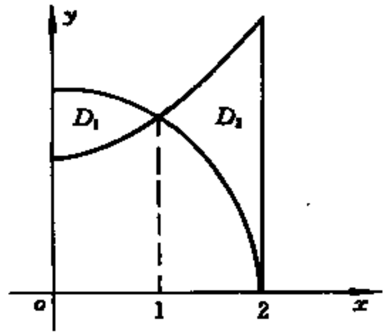


图 9.10

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y-\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2+x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

更换积分次序也是先画域.

从图可以看出当 $x\in[0,1]$ 时双曲线 $y=\sqrt{2+x^2}$ 在圆 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的下方；而 $x\in[1,2]$ 时，双曲线在圆的上方. 所以要将 I 分为两部分才好并为二重积分.

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dy \int_0^{\sqrt{y^2-2}} f(x,y)dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx -$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{2} f(x,y)dx - \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} dy \int_{\sqrt{y^2-2}}^{2} f(x,y)dx$$

9-65 交换积分顺序(如不加说明我们总设被积函数在其积分域上连续)$I = \int_1^2 dx \int_{3-x}^{\sqrt{2x-1}} f(x,y)dy$.

本题与上题一样表示出二次积分与重积分的区别与联系. 尤其是区别：二次积分中两个定积分的下限未必小于上限；但表示重积分的二次积分中每个定积分的下限不能大于上限.

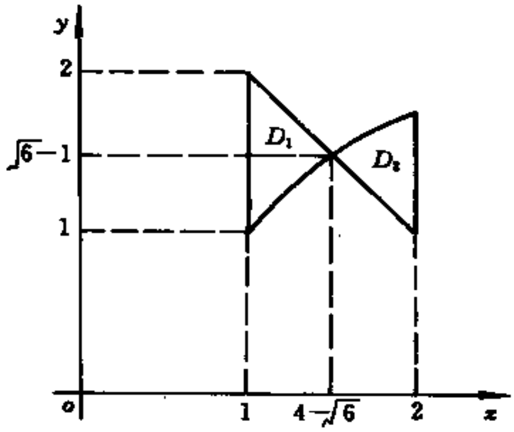


图 9.11

解 先画积分域如图 9.11. 从图中看出，当 $x \in [1, 4-\sqrt{6}]$ 时，$\sqrt{2x-1} \leqslant 3-x$；当 $x \in [4-\sqrt{6}, 2]$ 时，$3-x \leqslant \sqrt{2x-1}$. 所以要将 I 化为二重积分，首先要将 I 分为两部分：

$$I = -\int_1^{4-\sqrt{6}} dx \int_{\sqrt{2x-1}}^{3-x} f(x,y)dy + \int_{4-\sqrt{6}}^{2} dx \int_{3-x}^{\sqrt{2x-1}} f(x,y)dy$$

$$= -\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

$$= \int_1^{\sqrt{6}-1} dy \left[-\int_1^{\frac{y^2+1}{2}} f(x,y)dx + \int_{3-y}^{2} f(x,y)dx \right] +$$

$$\int_{\sqrt{6}-1}^{2} dy \left[-\int_1^{3-y} f(x,y)dx \right] + \int_{\sqrt{6}-1}^{\sqrt{3}} dy \int_{\frac{y^2+1}{2}}^{2} f(x,y)dx$$

$$= -\int_1^{\sqrt{6}-1} dy \int_1^{\frac{y^2+1}{2}} f(x,y)dx - \int_{\sqrt{6}-1}^{2} dy \int_1^{3-y} f(x,y)dx -$$

$$\int_1^{\sqrt{6}-1} dy \int_{3-y}^{2} f(x,y)dx + \int_{\sqrt{6}-1}^{\sqrt{3}} dy \int_{\frac{y^2+1}{2}}^{2} f(x,y)dx$$

9-66 交换积分顺序：$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$

连着三个题都突出了二次积分与

解 如图 9.12 像上两个例子一样，先将二次积分写为

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$$

注：$y=\sin x$ 的反函数不能都写为 $x=\arcsin y$，这样写要求 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。如图 9.12 中弧 $\overset{\frown}{OA}$ 中 x 在主值区间，而弧 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$ 的 x 不在主值范围之内，故用诱导公式 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$，写成反三角式如旁注一样；对弧 $\overset{\frown}{CD}$，则用诱导公式：$y=\sin x=\sin(x-2\pi)$，$x-2\pi\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，即在主值区间，则 $x-2\pi=\arcsin y$，即

$$x=2\pi+\arcsin y$$

二重积分的不同。本题的特殊性还在于如何将 $y=\sin x$ 用反三角函数表示。如图 9.12 中之弧段 $\overset{\frown}{BC}$，$y=\sin x=\sin(\pi-x)$。由于 $x\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，故 $\pi-x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 是反正弦的主值区间，故 $x=\pi-\arcsin y$。

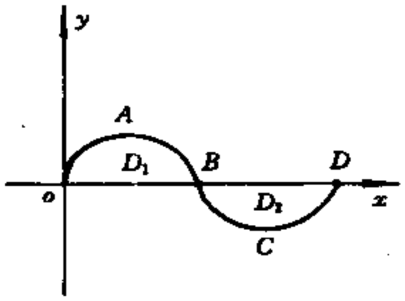


图 9.12

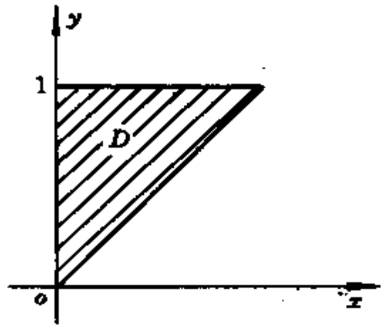


图 9.13

9-67　计算 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 x^2e^{-y^2}\mathrm{d}y$

解　由于 e^{-y^2} 的原函数不是初等函数，故我们交换积分顺序来算图 9.13

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y x^2e^{-y^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t\quad(t=y^2)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

这个例子说明交换积分顺序的作用。多元函数积分的计算技巧不仅受被积函数影响，而且与区域有关。

9-68　计算积分 $I=\iint_D|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是圆 $x^2+y^2\leqslant R$。

解 1　由对称性知只要在第一象限计算

$$I=4\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}xy\mathrm{d}y$$

本题用到对称性的技巧值得留意。当积分域是圆时用极坐标计算未必就最简单。

$$= 2\int_0^R x(R^2 - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}R^4$$

解 2 用极坐标计算

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}R^4$$

9-69 计算积分 $I = \iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 ox 轴和摆线的一拱 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 所围成(图 9.14).

这道题的难点在曲线 $y = y(x)$ 是由参数方程确定的. 注意我们借用它化为二次积分后又将对 x 的积分换元为对 t 的积分. 本质上是用了格林公式,见正文注.

解 $I = \int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)} y^2\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi a} y^3\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}(t-\sin t)$$

$$= \frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}2\sin^8\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2^5a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8 u\mathrm{d}u = \frac{35}{32}\pi a^4$$

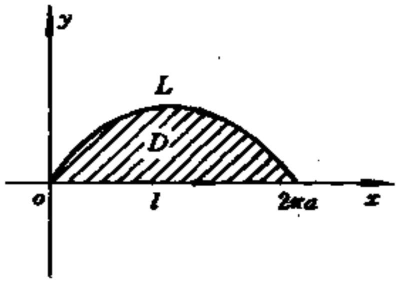


图 9.14

注:这一题的解法本质上是用线积分计算重积分的例题

$$\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oint\limits_{l-L}\frac{1}{3}y^3\mathrm{d}x = -\int\limits_l\frac{1}{3}y^3\mathrm{d}x - \int\limits_{-L}\frac{1}{3}y^3\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_L y^3\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3\mathrm{d}a(t-\sin t)$$

便得到与上面一样的结果.

9.70 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x+y}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 1 是最平凡的解法,但计算麻烦了些.

解 1 用极坐标作(见图 9.15)

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{(\sin\theta+\cos\theta)} r^2(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^4\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1 + 2\sin 2\theta + \mathrm{sing}^2 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

解 2 作变换：$x = u + \frac{1}{2}, y = v + \frac{1}{2}$，则

$$I = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\frac{1}{2}}(1 + u + v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}$$

解2则是作坐标平移. 平移不影响面积的变化，故 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

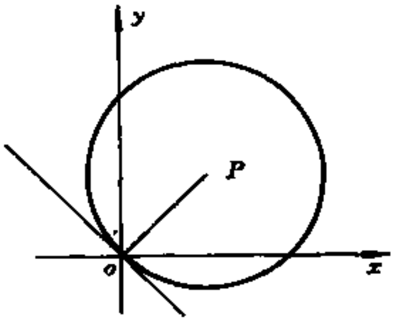


图 9.15

解 3 本题一个简单解法是：

由 x, y 的对称性知

$$I = 2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x+y}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而均匀圆板 $x^2 + y^2 \leqslant x + y$ 的质心为圆心 P：$\overline{x} = \frac{1}{2}, \overline{y} = \frac{1}{2}$

(图 9.15)，但 $\overline{x} = \frac{1}{2} = \dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}\pi}$，所以 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}$

从而 $I = \frac{\pi}{2}$.

我们反过来将求重心公式用来计算重积分.

9-71 计算积分 $I = \iint\limits_D(|x| + |y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 D 为 $|x| + |y| \leqslant 1$.

解 由对称性知

$$I = 4\iint\limits_{D_1}(x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (D_1: x + y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0)$$

$$= 8\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$$

注：如上例，D_1 的形心 $\overline{x} = \frac{1}{3} = \dfrac{\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}}$，$\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{6}$ 所以 $I = \frac{4}{3}$

本题用到两个对称性：(1) 积分域 $|x| + |y| \leqslant 1$，及被积函数 $|x| + |y|$ 均同时与 x, y 轴对称；(2) 在 D_1 上的积分中变元 x 与 y 对称.

9-72 计算积分 $\iint\limits_D(x + y)\mathrm{d}\sigma$，$D$ 是由 $y^2 = 2x$，$x + y = 4$，$x + y = 12$ 所围成的区域.

本题采用二个重积分差作较方

解 如图 9.16 知

$$\iint\limits_{D} = \iint\limits_{D_2} - \iint\limits_{D_1}$$

而

$$\iint\limits_{D_2}(x+y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{-6}^{4}\mathrm{d}y\int_{y^2/2}^{12-y}(x+y)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-6}^{4}\left[12^2 - \left(\frac{y^2}{2}+y\right)^2\right]\mathrm{d}y$$

$$= 720 - \frac{1}{2}\int_{-6}^{4}\left(\frac{y^4}{4}+y^3+y^2\right)\mathrm{d}y$$

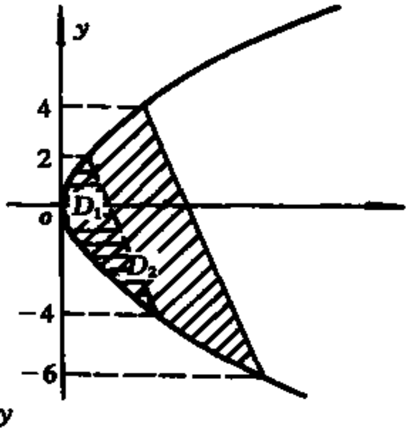


图 9.16

$$\iint\limits_{D_1}(x+y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{2}\left[16 - \left(\frac{y^2}{2}+y\right)^2\right]\mathrm{d}y$$

$$= 48 - \frac{1}{2}\int_{-4}^{2}\left(\frac{y^4}{4}+y^3+y^2\right)\mathrm{d}y$$

所以 $\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}\sigma = 672 - \frac{1}{2}\left[\frac{4^5+6^5}{20}+\frac{4^4-6^4}{4}+\frac{4^3+6^3}{3}\right]+$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2^5+4^5}{20}+\frac{2^4-4^4}{4}+\frac{2^3+4^3}{3}\right]$$

$$= 672 - \frac{1}{2}\left[\frac{2^5(3^5-1)}{20}+\frac{2.4^4-6^4-2^4}{4}+\frac{6^3-2^3}{3}\right]$$

$$= 772 - \frac{968}{5} - \frac{104}{3}$$

$$= 543\frac{11}{15}$$

读者可以看出我们不急于将积分$\int_{-6}^{4}\left(\frac{y^4}{4}+y^3+y^2\right)\mathrm{d}y$ 及类似的一个算出来,主要是它们还要相减,消去一些项后再算要简单些.

便.遇到这样的题很容易想到这个方法,但要注意若要化$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 为累次积分,想用$\iint\limits_{D} = \iint\limits_{D_2} - \iint\limits_{D_1}$时,应注意题目中 $f(x,y)$ 在 D_2 有无定义,是否连续

9-73 计算积分 $I = \iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}$,

其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant a;0\leqslant y\leqslant a$.

解 用极坐标计算,如图 9.17.

$$\iint\limits_{D} = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} = 2\iint\limits_{D_1}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}}\frac{r\mathrm{d}r}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{a} - \frac{\cos\theta}{a\sqrt{2-\sin^2\theta}}\right]\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6a}$$

作多元积分题时,不但要看积分域而且要看被积函数,才能确定用什么坐标系计算为好.

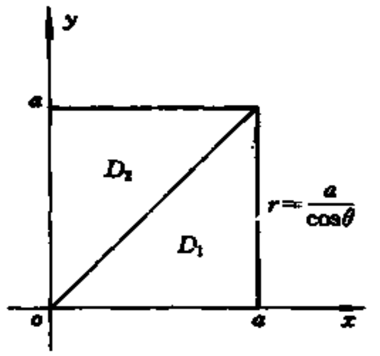


图 9.17

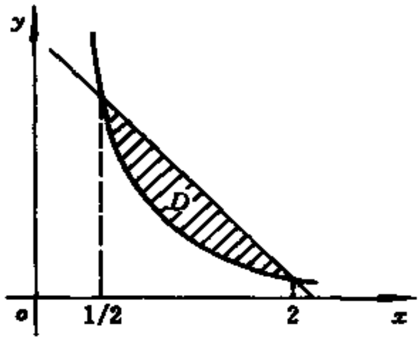


图 9.18

9-74 计算$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由曲线 $xy=1, x+y=\frac{5}{2}$ 所围成的区域.

这个题利用根与系数的关系求交点较简便.

解 如图 9.18,先求交点的横坐标,设 x,y 为某二次方程的根,则两根之积为 1,和为$\frac{5}{2}$,故方程是 $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$,得 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=2$,

所以$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}y\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[x\left(\frac{5}{2}-x\right)^2-\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\frac{25}{4}x-5x^2+x^3-\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=1\frac{37}{128}-\ln 2$$

9-75 计算由曲线 $xy=a^2, x+y=\frac{5}{2}a\quad(a>0)$,所围成图形的面积.

这里又一次展示了二次方程根与系数关系的妙用.

解 1 用二重积分算,如图 9.19,记所围图形为 σ,面积为 S,则

$$S=\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为累次积分,先求图形 σ 在OX轴上的投影区间$[x_1,x_2]$,这里 x_1 及 x_2 是二次方程

$$x^2-\frac{5a}{2}x+a^2=0$$

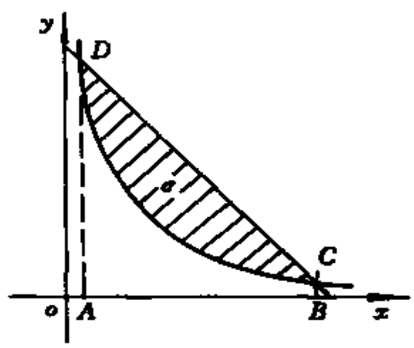


图 9.19

的两个根.易知 $x_1 = \dfrac{a}{2}, x_2 = 2a$ 于

是,$S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} \mathrm{d}x \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x} \mathrm{d}y = \left(\dfrac{15}{8} - \ln 4\right)a^2$

解2 用定积分计算,S 等于梯形 $ABCD$ 的面积 S_1 减去以 $\overset{\frown}{DC}$ 为顶的曲边梯形 $ABCD$ 的面积 S_2:

这里只要用初等方法算梯形 S_1 的面积.

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(2a + \frac{a}{2}\right)\left(2a - \frac{a}{2}\right) = \frac{15}{8}a^2$$

$$S_2 = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} \frac{a^2}{x}\mathrm{d}x = a^2 \mathrm{lin}4$$

$$S = \left(\frac{15}{8} - \mathrm{lin}4\right)a^2$$

9-76 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}} |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

像这样带有绝对值的函数的积分,主要是分割区域,使 $\cos(x+y)$ 在各区域内不变号.所以我们采取了如图 9.20 的分法.

解1. 由对称性知(参阅图 9.20)

$$\iint\limits_{D_1} |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_4} |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_{D_2} |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_3} |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

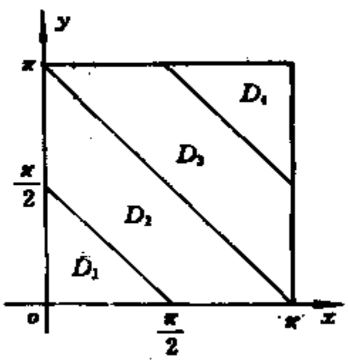


图 9.20

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\left[\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\
&= 2\left[2\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_1+D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\
&= 2\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y - \int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y\right] \\
&= 2\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\right] \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

解2 作变换 $\begin{cases} x = t \\ x + y = u \end{cases}$ 则 $J = 1$

$$\iint\limits_{D_1} \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} -$$

$$\iint\limits_{D_2} \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}t\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$$

所以 $$\iint\limits_{\substack{0\le x\le\pi \\ 0\le y\le\pi}} |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$

这里，$J = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 是变换的雅可比行列式的绝对值.

9-77 在半径为 R 的半圆形薄片的直径上，接上一个边与直径重合的矩形薄片，(如图 9.21)，设薄片的面密度为 1，要使重心在圆心，间接上的矩形的另一边的长 h 应为多少？

解决有关重心的问题，主要是计算好静矩.

解 不管 h 多长，总有 $\overline{x} = 0$. 取定坐标系如图 9.21，那么只要 $\overline{y} = 0$

即

$$\iint\limits_{D_1+D_2} y\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} y\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\mathrm{d}y + \int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-h}^{0} y\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{3}R^3 - Rh^2 = 0$$

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

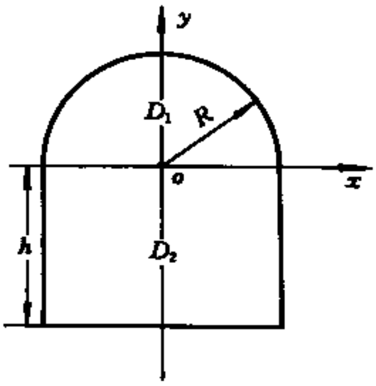


图 9.21

9-78 求面密度为 1 的，由 $y^2 = x$ 及 $x = 1$ 所围成的均匀薄板，绕一过原点的直线 l 的转动惯量，并求转动惯量的最大值和最小值.

解 设直线 l 为 $y = kx$，则绕 l 的转动惯量为

$$I_e = \iint\limits_{D} \frac{(y-kx)^2}{1+k^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{1+k^2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{1}(kx-y)^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3k(1+k^2)}\int_{-1}^{1}[(k-y)^2 - (ky^2-y)^3]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{4}{7} - \frac{32}{105(1+k^2)}$$

任一点到 $y = kx$ 的距离为 $\dfrac{|y-kx|}{\sqrt{1+k^2}}$.

化成这一形式为求最大和最小值提供了方便.

当 $k = 0$ 时，即绕对称轴的转动惯量最小，最小值为 $I_x = \dfrac{4}{7} - \dfrac{32}{105} = \dfrac{4}{15}$.

当 $k=\infty$,即绕 oy 轴的转动惯量最大,最大值为 $I_y=\frac{4}{7}$.

9-79 计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\operatorname{sgn}x$ 为符号函数.

符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

先化为算在 D_1 上的积分,再化为在 D_1 的第一象限部分上积分之两倍.(图 9.22)

解 参阅图 9.22

$$I=\iint\limits_{D_4}\mathrm{d}\sigma-2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}\sigma-4\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma$$

$$=4\pi-8\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=4\pi-8\int_0^1[\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2+x^2}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}\pi+8\ln(1+\sqrt{3})-4\mathrm{lin}2.$$

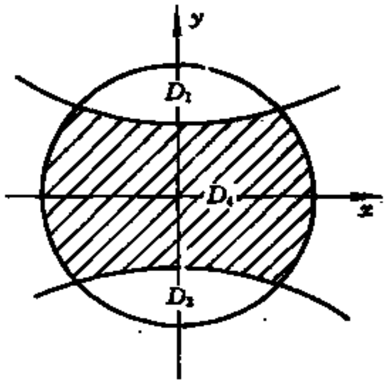


图 9.22

9-80 设 $f(u)$ 连续,试证明

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u$$

解 1 积分域是图 9.23 所示正方形 $ABCD$.用直线族 $y+x=u_i$ 和 $y-x=v_k(i=0,1,\cdots,n)$、$(k=0,1,\cdots,m)$ 来分割.其中 $y+x=u_0=-1,u_n=1;y-x=v_0=-1,v_m=1$.记 $\Delta u_i=u_i-u_{i-1}$,$\Delta u_k=v_k-v_{k-1}\Delta u_i\Delta v_k$ 表示分割所得相应的小长方形.其面积记为 $\Delta\sigma_{ik}$

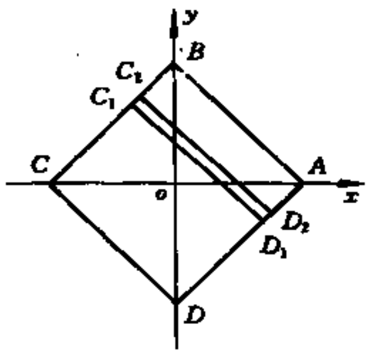


图 9.23

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u_i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta v_i=\frac{1}{2}\Delta u_i\Delta v_o$;$\lambda$ 表示 $\Delta u_i\cdot\Delta v_i$ 对角线的最大值.则

$$\sum_{k=1}^{m}\Delta v_k=2$$

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}f(x+y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}f(u_i)\Delta\sigma_{ik}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}f(u_i)\Delta u_i\right]\sum_{k=1}^{m}\Delta v_k$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(u_i)\Delta u_i=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u$$

这个解法的实际意义是:若 $f(x+y)$ 表示面密度;则此积分表示正方形的质量,先求 $\mathrm{d}M$ 如图设 C_1D_1 为 $x+y=u$,C_2D_2 $x+y=u+\mathrm{d}u$ 则 $\mathrm{d}M=f(u)\cdot\mathrm{d}u$ 故 $M=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u$.这是一般物理和工程技术书上的作法.

此即 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u$$

解 2 作变换 $x+y=u, x-y=v$

则 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u$$

解 2 虽简单，但超出大纲的要求.

9-81 将 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ (a^2+b^2\neq 0)$，化成单积分.

解 1 作特殊分割，以直线 $\dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=t, t\in(-1,1)$，分割圆(图 9.24). $|t|$ 是原点到此直线的距离，先固定 t 求和，得

$$\mathrm{d}I = f(\sqrt{a^2+b^2}t+c)\cdot 2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$$

所以

$$I = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}f(\sqrt{a^2+b^2}t+c)\mathrm{d}t$$

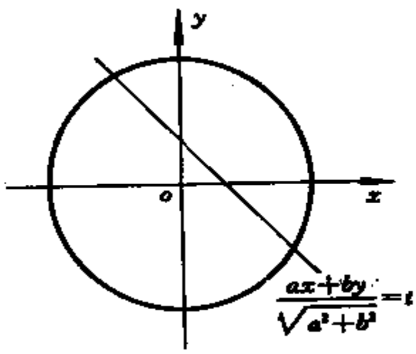


图 9.24

注意：总设 $f(u)$ 连续，这里的直线 $\dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=t$ 的参数 $|t|$ 即是原点到它的距离，因此 $2\sqrt{1-t^2}$ 是对应的弦长. $2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ 是弦 $\dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=t$ 与 $\dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=t+\mathrm{d}t$ 间面积的微分元素.

解 2 作转轴变换

$$\begin{cases} t = \dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ u = \dfrac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \qquad |J|=1$$

单位圆仍是单位圆 $t^2+u^2\leqslant 1$.

$$\text{原式} = \iint\limits_{t^2+u^2\leqslant 1} f(\sqrt{a^2+b^2}t+c)\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}f(\sqrt{a^2+b^2}t+c)\mathrm{d}t$$

9-82 设 $F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $F'(t)$.

解 作平移 $\begin{cases} x = u+t \\ y = v+t \end{cases}$ 雅可比行列式 $|J|=1$

这里参变量在积分域上，作变换变在被积函数上.

在积分号下求导的可行性要参考

所以
$$F(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$F'(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{(u+t)+(v+t)}{\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

再平移　$u=x-t, v=y-t$，得

$$F'(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

数学分析课本.

9-83　设 $f(x,y)$ 在 $D=\{0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上有四阶连续的偏导数，$f(x,y)$ 在 D 的边界上恒为零，且 $\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right|\leqslant 3$，试证明 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\frac{1}{48}$.

证　考虑辅助函数 $g(x,y)=xy(1-x)(1-y)$ 则 $\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}=4$，

$$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{36}$$

而
$$\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y\int_0^1 x(1-x)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y\left[x(1-x)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y^2}\bigg|_0^1-\int_0^1(1-2x)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\right]$$
$$=-\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y\left[(1-2x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_0^1+2\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}x\right]$$
$$=-2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y$$
$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(1-2y)\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$
$$=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=4\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

所以
$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|=\frac{1}{4}\left|\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}\sigma\right|$$
$$\leqslant\frac{3}{4}\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{48}$$

设辅助函数 $g(x,y)$ 的思路是这样的，已知 $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}$ 的估计，要估计 $f(x,y)$ 的积分，由

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}y\left[xf(x,y)\bigg|_0^1-\int_0^1 xf'_x\mathrm{d}x\right]$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x\mathrm{d}(1-x)=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1-x(1-x)f_{xx}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(1-x)f_x\mathrm{d}x$$

而 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f_x\mathrm{d}x=0$.

所以 $\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma=\frac{-1}{2}\iint\limits_D(1-x)f''_{x^2}\mathrm{d}\sigma$. 如此下去再对 y 分部积分即得 g.

9-84　证明若 $a>0,b>0$，则有 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}$

由牛顿——莱布尼兹公式，一般地有

解 $\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$ （不妨设 $b>a$）

得
$$\int_0^T \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^T dx\int_a^b e^{-xy}dy$$
$$=\int_a^b dy\int_0^T e^{-xy}dx$$
$$=\int_a^b \frac{1-e^{-Ty}}{y}dy$$
$$=\ln\frac{b}{a}-\int_a^b \frac{e^{-Ty}}{y}dy$$

又
$$0\leqslant\int_a^b \frac{e^{-Ty}}{y}dy<\frac{e^{-Ta}}{a}(b-a)$$

由夹逼定理知 $\underset{T\to+\infty}{\mathrm{lin}}\int_a^b \dfrac{e^{-Ty}}{y}dy=0$

所以 $\underset{T\to+\infty}{\ln}\int_0^T \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\mathrm{lin}\dfrac{b}{a}$

$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx$ 要求 $F'(x)$ 连续，这一方法常被用到 $\dfrac{f(ax)-f(bx)}{x}=\int_a^b f'(xy)dy$ 上.

9.2.3 三重积分与重积分应用

9-85 计算 $I=\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 V 由 $x+y+z=1$，$x=0,y=0,z=0$ 所围成(图 9.25).

解 $I=\iint\limits_D dxdy\times$

$\int_0^{1-x-y}\dfrac{dz}{(1+x+y+z)^3}$

$=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\left[\dfrac{1}{(1+x+y)^2}-\dfrac{1}{4}\right]dxdy$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\dfrac{dx}{(1+x+y)^2}-\dfrac{1}{16}$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{2}\right)dx-\dfrac{1}{16}$

$=\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{5}{16}$

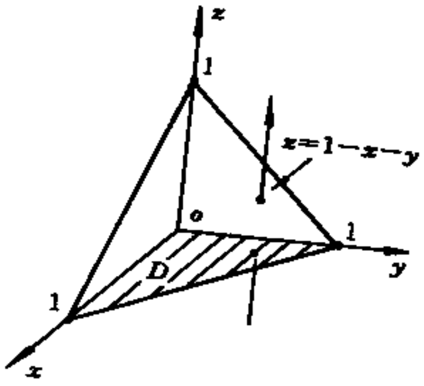


图 9.25

计算三重积分一般也是按画域、投影、发射三个步骤化为累次积分后再计算.

9-86 设均匀物体由曲面 $z=x^2+y^2$，$z=1$ 和 $z=2$ 围成，求其重心的坐标.

解 1 由对称性知重心为$(0,0,\bar{z})$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\,dxdydz}{V}$$

而

这里用 V 既表示这个形体，又表示它的体积. 这个题用“先二后一”的方法化三重积分为累次积分较为简便.

$$\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_1^2 z^2\mathrm{d}z = \frac{7}{3}\pi$$

$$V = \iiint_V \mathrm{d}v = \int_1^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_1^2 z\mathrm{d}z = \frac{3}{2}\pi$$

所以
$$\bar{z} = \frac{14}{9}$$

即重心为
$$\left(0,0,\frac{14}{9}\right).$$

解 2 以计算$\iiint_V z\mathrm{d}V$为例，设 V_1 是由 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2$ 所围形体；V_2 为由 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 1$ 所围．

则
$$\iiint_V = \iiint_{V_1} - \iiint_{V_2}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant 2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^2 z\mathrm{d}z - \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1 z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 2} [4-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$

$$\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} [1-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\pi - \frac{\pi}{2} - \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^5\mathrm{d}r + \pi\int_0^1 r^5\mathrm{d}r = \frac{7}{3}\pi$$

这实际上就是三重积分在柱坐标下的计算．

9-87 设 Ω 由曲面 $x^2 = z^2 + y^2$，$x = 2$，$x = 4$ 所围成，计算$\iiint_\Omega (1 + x^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$．

解
$$\iiint_\Omega (1 + x^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_2^4 \mathrm{d}x \iint_{y^2+z^2\leqslant x^2} (1 + x^4)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \pi\int_2^4 (x^2 + x^6)\mathrm{d}x = 2\,340\frac{20}{21}\pi$$

又一次用到“先二后一”方法，主要是被积函数与 y,z 无关，故先对 y,z 积分．

9-88 设 Ω 是由 $z = 16(x^2 + y^2)$，$z = 4(x^2 + y^2)$ 和 $z = 64$ 围成，计算$\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\mathrm{d}v$．

本题还是“先二后一”，再次说明多元积分的计算不仅要看被积函数还要看区域．

解 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{64}\mathrm{d}z\iint\limits_{\frac{z}{16}\leqslant x^2+y^2\leqslant\frac{z}{4}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{64}\mathrm{d}z\left(2\pi\int_{\frac{\sqrt{z}}{4}}^{\frac{\sqrt{z}}{2}}r^3\mathrm{d}r\right)=2\ 560\pi$$

9-89 设 $f(x,y,z)$ 连续,试将三次积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$ 改变为先对 y、次对 x、后对 z 的三次积分.

解 先研究二次积分,如图 9.26.

$$\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_x^1\mathrm{d}z\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y$$

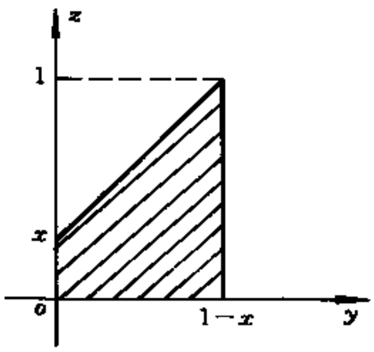


图 9.26

所以

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}z\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_z^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}x\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y$$

本题解法与一般解法不同,我们突出的是二重积分及其与三重积分的联系,不用作立体图,便可以将三次积分的顺序改变过来.

9-90 将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为先对 y,再对 x,最后对 z 的三次积分.其中 Ω 是由 $x+y+z=1,x+y=1,x=0,y=0$ 和 $z=1$ 所围成的闭区域,$f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续.

解 分析:这个题如先对 z 积分,好定限

$$I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V$$

$$=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{1-x-y}^1f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_{1-x-y}^1f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

然后交换积分次序,先看二次积分(图 9.27)

$$\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_{1-x-y}^1f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

这个题如就三重积分作,画域后定限,不太容易.但我们发现,如先对 z 积分,化为累次积分,就较简便.然后再交换顺序,这样我们不必画立体图,便解答了这一问题.

$$= \iint\limits_{D_1} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_{1-x-z}^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_{1-x}^{1}\mathrm{d}z\int_0^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y$$

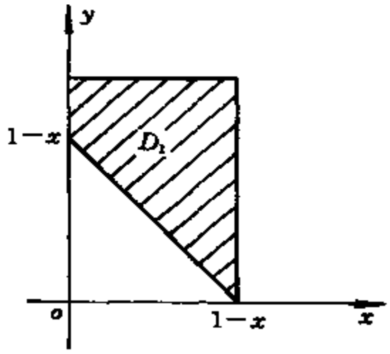


图 9.27

所以 $I = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_{1-x-z}^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{1}\mathrm{d}z\int_0^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}x\int_{1-x-z}^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{d}z\int_{1-z}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y$$

9-91 求均匀球体 $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z$（体密度为 1）绕 oz 轴的转动惯量.

本题的解 1 显得"繁"了，但请你仔细读. 我们提供了一种推导三重积分在球坐标系下计算公式的新方法. 从直角坐标系导向柱坐标系再至球标系用的主要是二重积分在极坐标下的计算公式.

解 1 即求 $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

我们试用球坐标来计算，但不直接套用公式，先从直角坐标化起：

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}} r^3\mathrm{d}z$$

用极坐标算 $\int_0^1\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}} r^3\mathrm{d}z$，

设 $\begin{cases} r = \rho\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

则 $\int_0^1\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}} r^3\mathrm{d}z$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin^3\varphi\mathrm{d}\rho$$

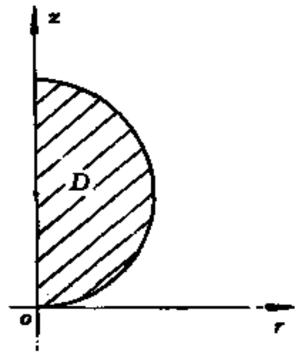


图 9.28

这正是球坐标下的三次积分.

所以 $I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin^3\varphi\mathrm{d}\rho$

$$= \frac{2^6\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\ \sin^3\varphi\ \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{-2^6\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5\varphi - \cos^7\varphi)\mathrm{d}\cos\varphi = \frac{2^6\pi}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right) = \frac{8}{15}\pi$$

解 2 用"先二后一"的方法：

"先二后一"做本题更简单.

$$\iiint (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant 2z-z^2} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} r^3 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^2 (4z^2-4z^3+z^4)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{8}{15}\pi$$

9-92 计算积分 $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z} (ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解 1 由对称性知：$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z} x\mathrm{d}V = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z} y\mathrm{d}V = 0$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z} z\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$

所以 $$I = \frac{4c}{3}\pi$$

这是在球坐标系下的计算.

解 2 用先二后一：

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z} z\mathrm{d}V = \int_0^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant 2z-z^2} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_0^2 (2z^2-z^3)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$

所以 $$I = \frac{4c}{3}\pi$$

先二后一的算法更简单.

解 3 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$ 的形心在$(0,0,1)$，所以 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z} z\mathrm{d}V = V = \frac{4}{3}\pi$，其中 V 是单位球体的体积，所以 $I = \frac{4c}{3}\pi$

用形心反过来计算积分最简单.

9-93 求由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=h$ 围成立体的形心$(h>0)$.

解 这是个圆锥体，底半径为 h，高为 h，故体积 $V=\frac{1}{3}\pi h^3$，又

像这样的三重积分一般都用"先二后一"的方法.

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant z^2} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \pi\int_0^h z^3\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}h^4$$

所以重心的纵坐标 $\bar{z} = \frac{\pi}{4}h^4 \cdot \frac{3}{\pi h^3} = \frac{3}{4}h$.

即重心为 $\left(0,0,\frac{3}{4}h\right)$.

9-94 求 $y^2 + z^2 = px$ 和 $x = h$ 所围成立体的形心($p,h > 0$).

解 由对称性知形心坐标为($\bar{x}$,0,0),先求静矩:

$$I = \iiint_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^h \mathrm{d}x \iint_{y^2+z^2\leqslant px} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= p\pi\int_0^h x^2\mathrm{d}x = \frac{p\pi}{3}h^3,$$

再求体积:

$$V = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi p\int_0^h x\,\mathrm{d}x = \frac{p\pi}{2}h^2$$

所以 $\bar{x} = \frac{2}{3}h$

则形心的坐标为 $\left(\frac{2}{3}h,0,0\right) = \frac{p\pi}{3}h^3$

像这样的积分仍用"先二后一"的方法作,注意这里 $y^2 + z^2 \leqslant px$ 的半径为 $\sqrt{px}$.

9-95 求椭圆 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \leqslant 1$ 的面积(其中 $A > 0, \Delta = AC - B^2 > 0$).

解 1 $S = \iint_{Ax^2+2Bxy+Cy^2\leqslant 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

由 $Ax^2 + 2Bxy + cy^2 = A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}y^2$

作变换:$u = \sqrt{A}x + \frac{B}{\sqrt{A}}y, v = \sqrt{\frac{AC - B^2}{A}}y$

则 $J^{-1} = \begin{vmatrix} \sqrt{A} & \frac{B}{\sqrt{A}} \\ 0 & \sqrt{\frac{AC - B^2}{A}} \end{vmatrix} = \sqrt{\Delta}$

所以 $S = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$

这里虽超出基本要求,但并不太难理解.

注意: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$

解2 我们用条件极值的方法来作.为此,求此椭圆的长、短半轴,即求原点到椭圆的最大、最小距离.设目标函数为 x^2+y^2——距离的平方.用拉格朗日乘数法:

$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 是以原点为中心的椭圆,故长、短半轴分别是原点到椭圆上点距离的最大、最小值.

设 $L=x^2+y^2+\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1)$

令
$$\frac{1}{2}L_x=x+\lambda(Ax+By)=0 \tag{1}$$
$$\frac{1}{2}L_y=y+\lambda(Bx+Cy)=0 \tag{2}$$

$(1)\times x+(2)\times y$ 得 $(x^2+y^2)+\lambda=0$
$$x^2+y^2=-\lambda$$

这表示 $-\lambda$ 即是要求的极值,将(1)、(2)改写为
$$\begin{cases}(1+A\lambda)x+By=0\\ \lambda Bx+(1+C\lambda)y=0\end{cases}$$

这是关于 x,y 的线性齐次方程组,由条件知 $(x,y)\neq(0,0)$,即有非零解,得

这个方程组的解 x,y 是稳定点,但仅有两个稳定点,正好对应最大点与最小点,故 $x^2+y^2=-\lambda_1$,或 $-\lambda_2$ 便是最大或最小值.

$$\begin{vmatrix}1+A\lambda & B\lambda\\ \lambda B & 1+C\lambda\end{vmatrix}=0$$

即 $(AC-B^2)\lambda^2+(A+C)\lambda+1=0$

此方程的两个负实根正是 $-(x^2+y^2)$ 的最大与最小值.

所以 $\lambda_1\lambda_2=\dfrac{1}{\triangle}$ 为长短半轴平方积,则椭圆的面积为
$$\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}=\frac{\pi}{\sqrt{\triangle}}$$

9-96 求由以下平面围成的平行六面体的体积.
$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3\end{cases}\quad \triangle=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$$

解 作变换
$$\begin{cases}u=a_1x+b_1y+c_1z\\ v=a_2x+b_2y+c_2z\\ w=a_3x+b_3y+c_3z\end{cases}$$

则雅可比行列式为
$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\triangle}$$

以上变换将原平行六面体变为长方体:
$$u=\pm h_1,v=\pm h_2,w=\pm h_3$$

所以
$$V=\iiint\limits_{V} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} \frac{1}{|\Delta|} dw$$

$$= \frac{8}{|\Delta|} h_1 h_2 h_3$$

9-97 求椭球体

$(a_1 x, + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2 \leqslant 1$ 的体积,其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

这也表示中心在原点的一个椭球体.

这个题也可仿题 9-95 用条件极值的方法作.

解 作变换

$$\begin{cases} u = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ v = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ w = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \frac{1}{|\Delta|}$$

所以 $V = \iiint\limits_{V} dx dy dz = \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2 \leqslant 1} \frac{1}{|\Delta|} du dv dw = \frac{4\pi}{3|\Delta|}$

9-98 求两个半径均为 a,对称轴垂直相交的正圆柱相贯所得立体的体积和表面积.

两个柱面相贯,这样的积分区域照理说用柱坐标系好算,但这一特例由于被积函数的特殊性,我们用直角坐标系计算反到方便.

细心的读者会看到,由于运用对称性,立体 $D - OABC$ 在 xoy 上投影 $OABC$ 是正方形.

解 取定坐标系,设两柱面方程分别为 $x^2 + z^2 = a^2$ 和 $y^2 + z^2 = a^2$. 由对称性,我们只要算相贯体在第一卦限部分的体积和表面积,再由对称性只要计算在 xoy 上投影为 $\triangle OAB$ 的那部分的体积和 ABD 这块曲面的面积(如图 9.29),它们分别是所求体积和面积的$\frac{1}{16}$,记 $D - OABC$ 这个立体为Ω,$\triangle OAB$ 为(σ),则

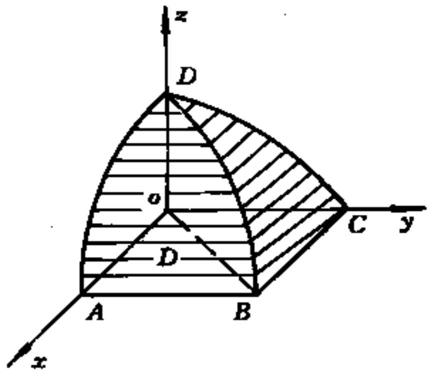


图 9.29

$$\frac{V}{16} = \iiint\limits_{\Omega} dv = \iint\limits_{\sigma} dx dy \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dZ$$

$$= \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dy = \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^3}{3}$$

$V = \frac{16}{3}a^3$

设相贯体表面积为 S,则

$$\frac{S}{16} = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= a\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = a^2$$

$S = 16a^2$

9-99 三个有相同半径 a 的正圆柱,其对称轴两两正交,求它们相贯所得立体的体积和表面积.

解 设选如图 9.30 的坐标系后,三个柱面的方程分别为: $x^2 + y^2 = a^2$; $y^2 + z^2 = a^2$; $z^2 + x^2 = a^2$. 图中是相贯部分在第一卦限的草图,与上题类似只要求所求体积的 $\frac{1}{16}$,即

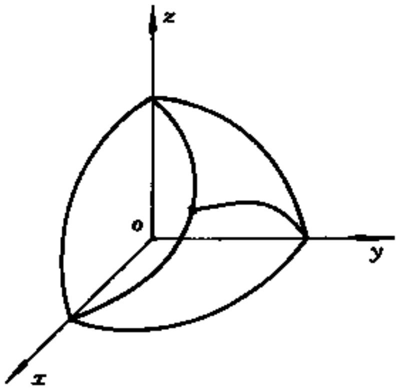


图 9.30

这个题有这种启示:用对称性不仅可简化积分的计算,而且使图形更简单,好分析.

画一个三圆柱相贯图不容易,但仅画第一卦限部分就容易多了.

$$\frac{V}{16} = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v = \iint\limits_{D_1 + D_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}z$$

$$\iint\limits_{D_1} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \mathrm{d}x\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}y = \frac{2\sqrt{2} - 1}{6\sqrt{2}}a^3$$

$$\iint\limits_{D_2} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^a \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}y = \frac{4\sqrt{2} - 5}{6\sqrt{2}}a^3$$

$$V = 8(2 - \sqrt{2})a^3$$

注意图 9.30 所示在求表面积时,第一卦限中有三块一样的表面部分,

所以,$\frac{S}{24} = \iint\limits_{D} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}x\int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}y + \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^a \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= (2 - \sqrt{2})a^2$$

$$S = 24(2 - \sqrt{2})a^2$$

9-100 设 A 是半径为 R 的圆内一定点，它与圆心 O 的距离为 $OA = a$，过圆周上任一点 Q 作圆的切线，再过 A 作此切线的垂线，垂足为 P，当 Q 取遍圆周各点时，求 P 点的轨迹所围成平面图形的面积.

解 如图9.31我们要先确定 P 点的轨迹方程，才好求所要求的面积. 先从几何上看，如设 $\angle PAC = \theta$，$PA = r$，则过 A 作 AB 与 $\overline{PQ}$ 平行，那么容易得到 $r = R - a\cos\theta$. 由这个几何关系，我们可取 A 为极点，$\overrightarrow{AC}$ 为极轴的方向，那么，曲线的极坐标方程即为

$$r = R - a\cos\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

设 P 点轨迹所围域为 D，面积为 S.

则 $$S = \iint_D \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R-a\cos\theta} r\mathrm{d}r$$

$$= \pi R^2 + \frac{\pi}{2}a^2$$

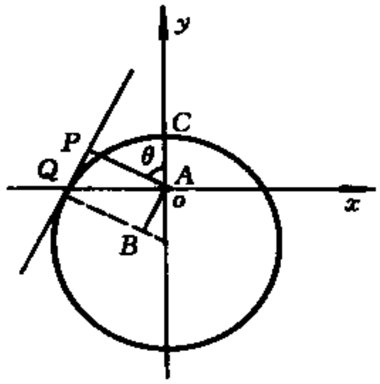


图 9.31

9-101 设 A 为半径为 R 的球内一定点，过 A 作球面任一点 Q 处的切平面作垂线，垂足为 P. 当 Q 在球面上变动时，P 点轨迹形成一封闭曲面. 求此曲面所围立体的体积，又问点 A 沿什么方向变化时，这个体积变化率最大？最大变化率等于什么？

解 1 如图 9.31-1 以 A 为极点，作球坐标系，$oA = a$，则 P 点的轨迹方程为 $\rho = R - a\cos\varphi$. 这样所求体积为：

$$v = \iiint_v \mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R-a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(R - a\cos\varphi)^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{3}R(R^2 + a^2)$$

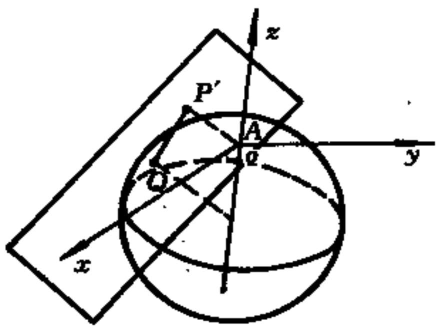


图 9.32-1

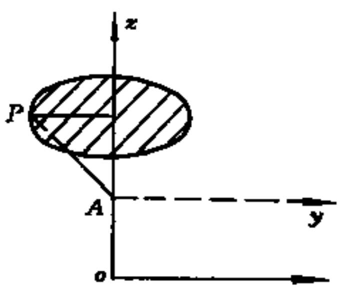


图 9.32-2

解 2 我们也可以用定积分求旋转体体积的方法来解本题(图 9.32-2)，即以 A 为原点，这时垂直于 oA 的断面半径为：

这个题是上例的推广，作法也类似，通过这两个例题说明，在解决应用问题时，选择坐标系是重要的，本题选择球坐标，而且以 A 为极点，使问题迎刃而解.

一般容易考虑到用定积分作. 但这里还有一个问题，即 $\mathrm{d}z = (R\sin\theta - a\sin2\theta)\mathrm{d}\theta$ 有正有负，怎么积分正好是所求体积值？原来是这样如图 9.32-3.

$$y=(R-a\cos\theta)\sin\theta$$

而 $\mathrm{d}z=-\mathrm{d}(R-a\cos\theta)\cos\theta$

$$=(R\sin\theta-a\sin2\theta)\mathrm{d}\theta$$

所以

$$v=\pi\int_0^{\pi}(R^2+a^2\cos^2\theta-2aR\cos\theta)\sin^3\theta(R-2a\cos\theta)\mathrm{d}\theta,\quad (令\cos x=t)$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}(R^2+a^2t^2-2aRt)(R-2at)\quad(1-t^2)\mathrm{d}t,\quad(t=\cos\theta)$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}[R(R^2+a^2t^2)(1-t^2)+4a^2Rt^2(1-t)]\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\left[\frac{2}{3}R^3+\frac{2}{3}Ra^2\right]=\frac{4\pi}{3}R(R^2+a^2).$$

由弧段 CDE 绕 z 轴旋转得的体积是 DE 转出的体积减去 CD 的体积.

当 A 点移动时，函数 $v(a)=\frac{4\pi}{3}R(R^2+a^2)$ 的等位面是 $a=$ 常数的球面，故变化率最大是沿等位面的法向(即半径方向)指向 $V(a)$ 增加的一面. 最大变化率即：

$$V'(a)=\frac{8\pi}{3}Ra$$

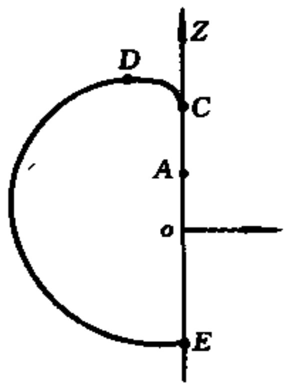


图 9.32-3

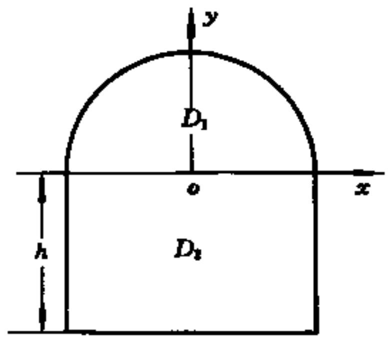


图 9.33

9-102 在均匀的半圆形薄板下接一个宽与圆的直径相同的长方形均匀薄板，要求重心在圆心处，求圆的半径与矩形的高之比.

解 设半圆板的面密度为 ρ_1，长方形薄板的面密度为 ρ_2，圆半径为 R，长方形高为 h，并定坐标系如图 9.33. 对称形的重心为$(0,0,\bar{y})$，现在是要选择 R 与 h 之比，使 $\bar{y}=0$，即

这里因题中未说明半圆板与长方形板是否同一材料，因此，分别设面密度为 ρ_1 和 ρ_2.

$$\iint\limits_{D_1+D_2}\rho y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\rho_1y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\rho_2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\rho_1\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho_1\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}y\mathrm{d}y=\frac{2\rho_1}{3}R^3$$

$$\rho_2\iint_{D_2} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho_2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-h}^{0}y\mathrm{d}y = -\rho_2 Rh^2$$

所以 $\quad \dfrac{2}{3}\rho_1 R^3 = \rho_2 Rh^2,\quad \dfrac{R}{h} = \sqrt{\dfrac{3\rho_2}{2\rho_1}}$

9-103 在均匀半球下接一个与之半径相同的均匀圆柱体，要使其重心在球心处，求圆柱半径与其高之比.

解 设球的体密度为 ρ_1，柱的体密度为 ρ_2，并取定坐标系如图 9.34，球半径为 R，柱高为 h，

则 $\quad \rho_1\iiint_{V_1} z\mathrm{d}V + \rho_2\iiint_{V_2} z\mathrm{d}V = 0$

而 $\quad \iiint_{V_1} z\mathrm{d}V = \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z = \dfrac{\pi}{4}R^4 \iiint_{v_2} z\mathrm{d}V$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-h}^{0} z\mathrm{d}z = -\frac{h^2}{2}\cdot\pi R^2$$

所以，$\dfrac{\pi}{4}\rho_1 R^4 = \dfrac{\pi}{2}\rho_2 R^2 h^2$

$$\frac{R}{h} = \sqrt{\frac{2\rho_2}{\rho_1}}$$

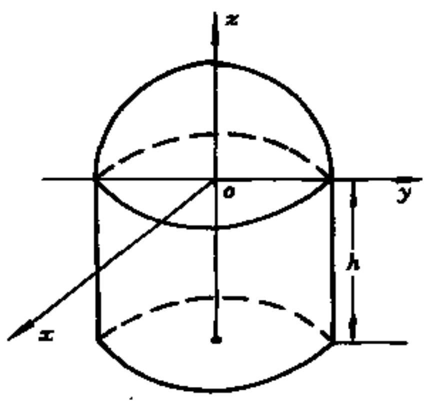


图 9.34

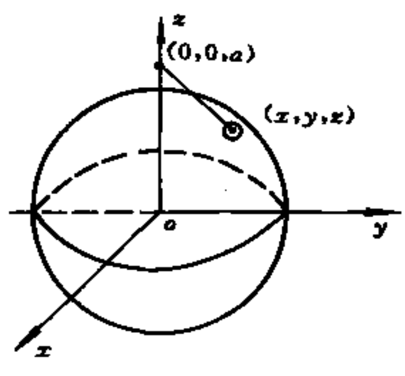


图 9.35

9-104 求半径为 R，体密度为 1 的均匀球体对空间一单位质点的引力.

解 取坐标系如图 9.35，球心为原点，单位质点 M 在 z 轴上坐标为 $(0,0,a)$，设任一点 (x,y,z) 在球内，$\mathrm{d}V$ 是含 (x,y,z) 的一体积微光，视 $\mathrm{d}V$ 为一质点，因 F 表示所求的力. $F = \{F_x, F_y, F_z\}$，由对称性可知 $F_x = F_y = 0$，以 $\mathrm{d}F$ 表示 $\mathrm{d}V$ 对 M 的引力，则由万有引力定律知：

将定点放在坐标轴上，将使问题大为简化.

注意引力为向量， $\dfrac{G\mathrm{d}V}{r^2} =$

$$|\mathrm{d}F| = \frac{G\mathrm{d}V}{r^2}$$

其中 G 是引力常数，$\boldsymbol{r} = \{x, y, z - a\}$，$r = |\boldsymbol{r}|$.

所以 $$\mathrm{d}F_z = \frac{G(z-a)}{r^3}\mathrm{d}V$$

$$F_z = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} \frac{G(z-a)}{r^3}\mathrm{d}V$$

$$= G\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2 - z^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2})^3}$$

$$= 2\pi G\int_{-R}^{R}\left[\frac{z-a}{|z-a|} - \frac{z-a}{\sqrt{R^2+a^2-2az}}\right]\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi G\left\{|R-a| - |R+a| + \int_{R+a}^{|R-a|}\frac{R^2 - a^2 - u^2}{a^2}\mathrm{d}u\right\}$$

（积分中令 $u = \sqrt{R^2 + a^2 - 2az}$）

$$= \begin{cases} -\dfrac{4\pi GR^3}{3a^2}, & a > R \\ -\dfrac{4\pi}{3}Ga, & a \leqslant R \end{cases}$$

即当 $a > R$ 时，$F = \left\{0, 0, -\dfrac{4\pi GR^3}{3a^2}\right\}$

说明均匀球对球外一点的引力如同球的质量集中于球心对这一点的引力.

当 $a \leqslant R$ 时，$F = \left\{0, 0, -\dfrac{4\pi}{3}Ga\right\}$ 与 R 无关，相当于半径为 a 的均匀球对球面上一点的引力，而球壳 $a^2 < x^2 + y^2 \leqslant R^2$ 对此点的引力不起作用（为零）.

$|\mathrm{d}F|$ 不是 $\mathrm{d}F$ 本身，这是容易弄错的，不少人由此得 $F = \iiint \dfrac{G\mathrm{d}V}{r^2}$ 的错误结果.

分析所得结论的物理意义，对数学方法是个检验. 我们将在曲面积分中再提此问题（见题 9-149）.

9.2.4 曲线积分

计算曲线积分时要化为定积分. 关键是找到积分曲线的参数方程.

第 Ⅰ 型线积分化为定积分，其积分下限总小于上限.

9-105 计算 $\int_c y^2 \mathrm{d}s$，c 是摆线 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的一拱.

解 $$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2[(1-\cos t)^2 + \sin^2 t]$$

$$= 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

所以 $$\mathrm{d}s = 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$\int_c y^2\mathrm{d}s = 2a^3\int_0^{2\pi} 4\sin^5\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\mathrm{d}u = 32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\mathrm{d}u$$

$$= 32a^3\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3} = \frac{256}{15}a^3$$

9-106 计算$\int_c(x^2+y^2)\mathrm{d}x$, c 为曲线 $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 $x^2+y^2 = a^2(1+t^2)$

$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = a^2(t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t) = a^2t^2$

$\mathrm{d}s = at\mathrm{d}t$

$$\int_c(x^2+y^2)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}a^3(t+t^3)\mathrm{d}t = 2a^3\pi^2(1+2\pi^2)$$

本题的积分曲线是圆的渐开线.

$\mathrm{d}s = at\mathrm{d}t$ 有明显的几何意义: $a\mathrm{d}t$ 是圆的弧微分, t 是伸展系数.

9-107 计算$\int_c(x^{4/3}+y^{4/3})\mathrm{d}s$, c 为星形线 $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$ 一周.

解 c 的参数方程为 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

所以 $x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}} = (x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2 - 2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

$= a^{\frac{4}{3}} - 2a^{\frac{4}{3}}\cos^2 t\sin^2 t$,

$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = 9a^2\sin^2 t + \cos^2 t$.

由对称性,只要求出 $t\in[0,\pi/2]$ 一段弧上积分的 4 倍,即

$$\int_c(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a^{\frac{7}{3}}(1-2\sin^2 t\cos^2 t)\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\frac{7}{3}}\left(1-\frac{\sin^2 2t}{2}\right)\sin 2t\mathrm{d}2t$$

$$= 6a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{\sin^2 u}{2})\sin u\mathrm{d}u$$

$$= 3a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 u)\sin u\mathrm{d}u = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

应当熟悉这个常见曲线的参数方程和它的图形

$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\mathrm{d}s = 3a\,|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t$ 中的绝对值符号便可省去.

9-108 计算$\int_c e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$, c 是由 $r = a, \theta = 0$ 和 $\theta = \pi/4$ 所围平面域的边界. 这里(r,θ)是极坐标.

解 如图 9.36 $\int_c = \int_{l_1}+\int_{l_2}+\int_{l_3}$,

l_1 的方程为 $y = 0, x = x$.

$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$

针对不同的曲线选择不同的参数方程. 在直角坐标系下, 曲线 $y = f(x)$ 的参数可选 x.

$$\int_{l_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^x dx = e^a - 1$$

l_3 的方程为 $y = x, x = x$.

所以 $\quad dx = \sqrt{1+1}dx = \sqrt{2}dx$

$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}x$

$$\int_{l_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} d\sqrt{2}x = e^a - 1$$

在 l_2 上, $x = a\cos t$,

$$y = a\sin t, \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a$$

$$\int_{l_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = e^a \frac{\pi a}{4}$$

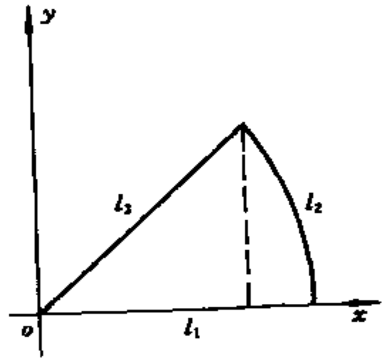


图 9.36

$\pi a/4$ 是 l_2 的弧长.

故 $$\int_c e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = (\frac{\pi}{4}a + 2)e^a - 2$$

9-109 求 $I = \int_c |y| ds$, c 是双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 的一周 $(a > 0)$.

解 双纽线(图 9.37)的极坐标方程为 $r^2 = a^2\cos 2\theta$,

所以, $2r\dot{r} = -2a^2\sin 2\theta$.

$$\dot{r}^2 = \frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$(ds)^2 = (\dot{r}^2 + r^2)(d\theta)^2 = \frac{a^2(d\theta)^2}{\cos 2\theta}$$

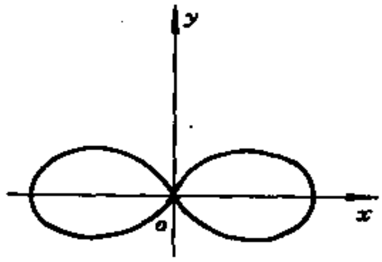


图 9.37

在极坐标下曲线 $r = r(\theta)$ 选 θ 为参数. 则 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 + \dot{r}^2$. 这个公式应当经过推导而记住,不要死记.

由对称性只要算相应于 $\theta \in [0, \pi/4]$ 一段上积分的 4 倍,

故 $$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= 2a^2(2 - \sqrt{2})$$

9-110 计算空间曲线 $x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t, z = e^{-t}$ $(0 < t < +\infty)$ 的弧长.

这是圆锥螺线.

解 设弧长为 L, 弧为 c.

则 $$L = \int_c ds$$

$$\dot{x} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$$

$$\dot{y} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t, \quad \dot{z} = -e^{-t}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 3e^{-2t}$$

$$ds=\sqrt{3}e^{-t}dt$$

$$L=\sqrt{3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\sqrt{3}$$

9-111 计算曲线$(x-y)^2=a(x+y)$,$x^2-y^2=9z^2/8$从$0(0,0,0)$到$A(x_0,y_0,z_0)$一段的弧长$(a>0)$.

解 由曲线方程(联立的)可知$x>0$及关于z的对称性,不妨设$z>0$. 为了找参数方便我们将曲线的联立方程化一化,并令$z=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}t^{\frac{3}{2}}$,得

$$x-y=\frac{1}{2}3^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}}t$$

$$x+y=a^{-\frac{1}{3}}t^2,\qquad (0<t<\frac{(3z_0)^{\frac{2}{3}}}{2})$$

由于 $2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=a^{\frac{2}{3}}+4a^{-\frac{2}{3}}t^2$

$2\dot{z}^2=4t$

所以 $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\frac{(a^{\frac{1}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}t)^2}{2}$

令$t_0=(3z_0)^{2/3}/2$,那么所求弧长

$$L=\int_c ds=\int_0^{t_0}\frac{a^{\frac{1}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}t}{\sqrt{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(a^{\frac{1}{3}}t_0+a^{-\frac{1}{3}}t_0^2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{a^{\frac{1}{3}}(3z_0)^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{(3z_0)^{\frac{4}{3}}}{4a^{\frac{1}{3}}}\right]$$

当空间曲线用二曲面之交给出时,可以任选一个变量为参数. 但为了计算简便,先作变换,使$(ds)^2$容易计算为好.

化简初等方程的技巧在这里显示出重要性.

9-112 计算$\int_c(x^2+y^2+z^2)ds$,c为螺线$x=a\cos t$,$y=a\sin t$,$z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的一段.

解 $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=a^2+b^2$

$ds=\sqrt{a^2+b^2}dt$,$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2t^2$

$$\int_c(x^2+y^2+z^2)ds=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt$$

$$=2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4b^2}{3}\pi^2\right)$$

一质点一方面沿圆柱面作匀速圆周运动,一方面匀速上升,故速率$ds/dt=\sqrt{a^2+b^2}$是均匀的.

9-113 计算$\int_c x^2ds$,c为由$x^2+y^2+z^2=R^2$与$x+y+z=0$所表示的圆的一周.

解 1 先找 c 的一个较易积分的参数方程. 为此, 于其方程中消去 z 得

$$x^2+xy+y^2=\frac{R^2}{2}$$

或
$$\frac{3x^2}{4}+\left(y+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{R^2}{2}$$

令 $x=\sqrt{2}R\cos t/\sqrt{3}, y+x/2=R\sin t/\sqrt{2}$

则 $\dot{x}=-\sqrt{\frac{2}{3}}R\sin t$

$$\dot{y}=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t-\frac{\dot{x}}{2}=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}R\sin t$$

$$\dot{z}=-\dot{x}-\dot{y}$$

所以 $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{x}\dot{y})=R^2$

$$\int_c x^2\mathrm{d}s=R\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^2\cos^2t\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}R^3$$

一般二次曲线还是以角作为参数较好. 尤其是圆, 找到圆心角为参数, 则 $\mathrm{d}s=R\mathrm{d}t$ 在意料之中.

解 2 由 x,y,z 变元间对称性知

$$\int_c x^2\mathrm{d}s=\int_c y^2\mathrm{d}s=\int_c z^2\mathrm{d}s$$

所以
$$\int_c x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_c(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$
$$=\frac{R^2}{3}\int_c\mathrm{d}s=\frac{2\pi}{3}R^3$$

利用对称性的技巧来解第 Ⅰ 型线、面积分往往有事半功倍之效.

9-114 求摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的弧段 $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 的形心.

解 $\dot{x}=a(1-\cos t)=2a\sin^2\frac{t}{2}$

$$\dot{y}=a\sin t=2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

所以 $t\in[0,\pi]$ 的一段弧长为

$$L=\int_0^{\pi}2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a$$

$$M_y=\int_c x\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}a(t-\sin t)\times 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{16}{3}a^2$$

$$M_x=\int_c y\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}2a^2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

做第 1 型的线积分时, 首先应尽可能把 $\mathrm{d}s$ 化简.

$$= \frac{16}{3}a^2$$

故重心坐标为$(4a/3,4a/3)$.

9-115 计算球面上的三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2, x>0, y>0, z>0$ 的边界线的形心坐标.

解 由对称性知,重心为$(\overline{x},\overline{x},\overline{x})$,边界的周长为 $3\pi a/2$

$$\int_c x\mathrm{d}s = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$$

在 c_1 上

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\mathrm{d}s = a\mathrm{d}t$$

$(x=a\cos t, y=a\sin t)$

所以 $\int_{c_1} x\mathrm{d}s = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t = a^2$

而 $\int_{c_1} x\mathrm{d}s = \int_{c_2} x\mathrm{d}s$

$$\int_{c_3} x\mathrm{d}s = 0$$

故 $\int_c x\mathrm{d}s = 2a^2$

所以重心坐标为$(4a/3\pi,4a/3\pi,4a/3\pi)$.

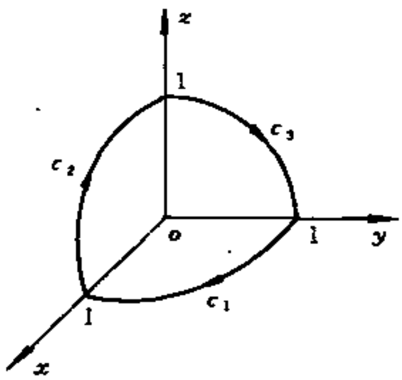


图 9.38

用对称性知 $\overline{x}=\overline{y}=\overline{z}$,这样只要算一个坐标就行了.

$\int_{c_1} x\mathrm{d}s = \int_{c_2} x\mathrm{d}s$ 又省去了一半的计算量.

9-116 计算$\int_c (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y$,其中 c 为曲线 $y=1-|1-x|$ 从对应于 $x=0$ 的点到 $x=2$ 的点(图 9.39).

解 $\int_c = \int_{c_1} + \int_{c_2}\int_{c_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y$

$$= 2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

在 c_2 上 $y=2-x, \mathrm{d}x=-\mathrm{d}y$

所以 $\int_{c2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$

$$+ (x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$= -2\int_1^0 y^2\mathrm{d}y = \frac{2}{3}$$

所以 $\int_c (x^2+y^2)\mathrm{d}x$

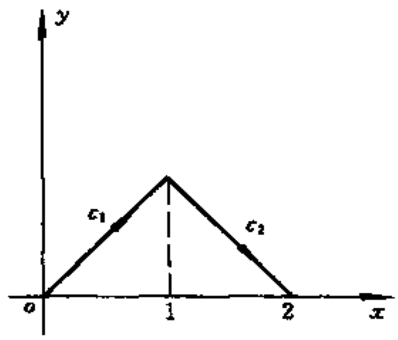


图 9.39

这样的题用一点技巧就更简单. 在 c_1 上 $x=y$, $\int_{c_1}(x^2-y^2)\mathrm{d}y=0$,选 x 为参数. 在 c_2 上,$y=-x$, $\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$, 所以 $\int_{c_2} x^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$.

$+ (x^2 - y^2)\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$

9-117 计算$\int_c (2a - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$，其中 c 为摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 按 t 增加方向的一拱.

解 $\int_c 2a\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi a} 2a\mathrm{d}x = 4\pi a^2$

$$y\mathrm{d}x = a^2(1 - \cos t)^2\mathrm{d}t = a^2(1 + \cos^2 t - 2\cos t)\mathrm{d}t$$

所以 $\int_c (-y)\mathrm{d}x = -\int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos^2 t - 2\cos t)\mathrm{d}t = -3\pi a^2$

$$x\mathrm{d}y = a^2(t - \sin t)\sin t\mathrm{d}t$$

所以 $\int_c x\mathrm{d}y = a^2\left(\int_0^{2\pi} + \sin t\mathrm{d}t - \pi\right) = -3\pi a^2$

$$\int_c (2a - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = -2\pi a^2$$

9-118 计算$\int_c y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，$c$ 为按参数增加方向前进的螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

解 $y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = (-a^2\sin^2 t + abt\cos t + ab\cos t)\mathrm{d}t$

$$\int_c y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}(-a^2\sin^2 t + abt\cos t + ab\cos t)\mathrm{d}t = -a^2\pi$$

9-119 计算$\int_c y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$. c 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，$x^2 + y^2 = ax$ $(z \geqslant 0, a > 0)$ 的交线(图 9.40). 从 ox 正向看过去为逆时针方向.

解 c 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}\sin t \\ z = a\sin\frac{t}{2} \end{cases}$$

t 从 0 到 2π.

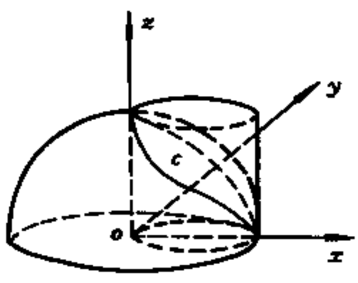


图 9.40

$$y^2\mathrm{d}x = -\frac{a^3}{8}\sin^3 t\mathrm{d}t$$

$$z^2\mathrm{d}y = \frac{a^3}{4}(1 - \cos t)\cos t\mathrm{d}t$$

像这样一项一项计算也有好处. $\int_c 2a\mathrm{d}x$ 就用 x 作参数即可.

我们不只一次用到$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t = \pi$. 希望能把它记住.

参数 t 是圆 $x^2 + y^2 = ax$ 的圆心角，它从 0 到 2π 正好 c 沿逆时针方向一周.

$$x^2\mathrm{d}z = \frac{a^3}{8}(1+\cos t)^2\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

所以，$\int_c y^2\mathrm{d}x = 0$，$\int_c z^2\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}a^3$，$\int_c x^2\mathrm{d}z = 0$

$$\int_c y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{4}a^3$$

9-120 计算$\int_c (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$，$c$ 为球面三角 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0$ 的边界线．沿它的正向前进时，球面三角形总在右方．

对称性一定既要考虑区域对称又要被积函数对称．

解 由对称性，我们只要计算在 c_1 上积分的三倍(图 9.41)．c_1 的方程为

$$x^2 + y^2 = 1, z = 0$$

则参数方程为

$x = \cos t, y = \sin t$，（t 从 $\pi/2$ 到 0）

$y^2\mathrm{d}x = -\sin^3 t\mathrm{d}t$，$-x^2\mathrm{d}y = -\cos^3 t\mathrm{d}t$

$$\int_c = 3\int_{c_1} = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t + \cos^3 t)\mathrm{d}t = 4$$

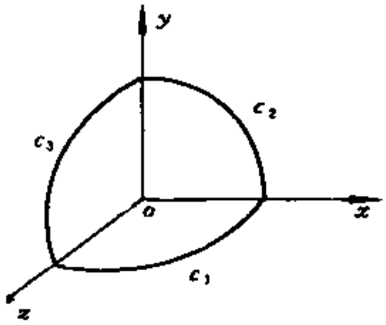


图 9.41

9-121 设 D 是平面区域，$P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 内具有连续偏导数，试证明以下四个条件等价：

(1) $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}u$；

(2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$；

(3) c 是 D 内任一简单闭曲线，$\oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$；

(4) $\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与$\overset{\frown}{AB}$是什么路径无关，只要$\overset{\frown}{AB} \subset D$，且

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = u\Big|_A^B = u(B) - u(A).$$

这个定理是平面曲线积分与路径无关问题最全面的一个概括，一般高等数学书中不讲．故我们作为例子介绍给读者．

证明几个条件等价，采用这一方法好．

注意区域是指单连通的开域．这个提法与复变函数论中的提法一致．

证 为了证明以上四命题等价，我们只要由(1) 推得(2)、(2) 推得(3)、(3) 推得(4)、(4) 推得(1) 即可．下面依次证明．

(1)⇒(2)．因为 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}u$，

所以　$P = u'_x, Q = u'_y$.

又　$P'_y = u''_{xy}, Q'_x = u''_{yx}$ 连续，

所以　$P'_y = Q'_x$.

(2)⇒(3) 由格林公式

$$\oint P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_{(\sigma)}(Q_x' - P_y')\mathrm{d}\sigma = 0,$$

这里(σ)是以 c 为边界的区域.

(3)⇒(4) 先设 c_1 与 c_2 不相交,

则 $$\oint\limits_{c_1^- + c_2^+} = 0,$$

所以 $$\int_{c_1} = \int_{c_2}.$$

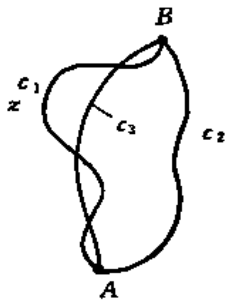


图 9.42-1

其次设 c_3 与 c_1 有 n 个交点,则作 c_2 与 c_1、c_3 都不交(如图 9.42-1),于是

$$\int_{c_1} = \int_{c_2}, \quad \int_{c_3} = \int_{c_2}$$

所以 $$\int_{c_1} = \int_{c_3}.$$

总之$\int_{AB}$与路径无关.

(4)⇒(1) 在 D 内任取一定点 $M(x_0, y_0)$(图 9.42-2) 由于积分与路径无关,故对任一点 $A(x,y) \in D$,有

$$F(x,y) = \int_M^A P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$F(x,y)$ 是(x,y)的二元函数.

以下我们证明

$\mathrm{d}F = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$

考虑

$$F(x+\Delta x, y) - F(x,y)$$
$$= \int_M^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_M^{x,y} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

由于 D 是开域,故连(x,y)和$(x+\Delta x, y)$的直线段只要 $|\Delta x|$ 充分小就有$\overline{AB} \subset D$,再根据积分与路径无关性得

$$F(x+\Delta x, y) - F(x,y)$$
$$= \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_x^{x+\Delta x} P\mathrm{d}x$$
$$= P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

所以 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x} = P(x,y)$$

即说明 $F_x' = P$.同理 $F_y' = Q$.由 P、Q 的连续性,得

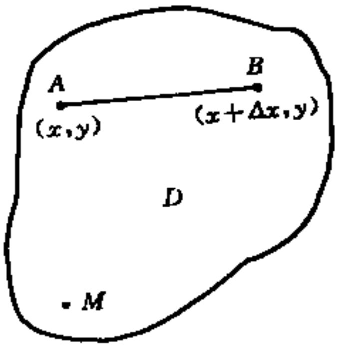


图 9.42-2

(4)⇒(1) 的证法是最值得注意的一种方法.用线积分构造一个函数 $F(x,y)$,再证明 $\mathrm{d}F = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$.

这里用到了 D 是开区域,故 Δx 充分小时$\overline{AB} \subset D$.

偏导数连续是可微的充分条件.

$$dF = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

像证明牛顿 - 莱布尼兹公式一样，由 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}F$ 知 $F = u + c$. 于是可得

$$\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = u\,|_A^B = u(B) - u(A)$$

9-122 设 $\mathrm{d}u = (x^2 + 2xy - y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy - y^2)\mathrm{d}y$, 求原函数 $u(x,y)$.

先判断是否为全微分是不可少的.

解 1 用线积分法. 由

$$\frac{\partial(x^2 + 2xy - y^2)}{\partial y} = 2(x - y)$$

$$\frac{\partial(x^2 - 2xy - y^2)}{\partial x} = 2(x - y)$$

所以，$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2 + 2xy - y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy - y^2)\mathrm{d}y + c$

$$= \int_0^x x^2\mathrm{d}x + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2)\mathrm{d}y + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C$$

解 2 用偏积分法. 由

$$u'_x = x^2 + 2xy - y^2,$$

对 x 积分得

$$u = \frac{1}{3}x^2 + x^2y - y^2x + \varphi(y)$$

$$u'_y = x^2 - 2xy + \varphi'(y) = x^2 - 2xy - y^2$$

$\varphi(y)$ 是待定的函数. 这一方法也必须先判别原积分是否为全微分.

所以 $$\varphi(y) = -\frac{1}{3}y^3 + C$$

所以 $$u(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C$$

解 3 凑全微分法. 此方法不必先验证原表达式是否为全微分.

凑微分法是个好方法，希望读者能掌握.

$(x^2 + 2xy - y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy - y^2)\mathrm{d}y$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3\right) + (2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y) - (y^2\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y)$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3\right) + \mathrm{d}(x^2y) + \mathrm{d}(-xy^2)$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3 + x^2y - xy^2\right)$$

所以，$u(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3 + x^2y - xy^2 + C$

9-123 设 $du=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$，求 $u(x,y)$.

解 我们仅用凑全微分法做.

$$\frac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}=\frac{ydx-xdy}{y^2}\frac{1}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{2x}{y}+3}$$

$$=\frac{d\frac{x}{y}}{3\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{d}\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)$$

所以，$u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3}\right)+C.$

请注意这种凑全微分的方法.这样作既证明了原表达式是全微分，其原函数也同时找到了.

9-124 计算积分 $I=\int_c e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$，$c$ 是沿 $x=y^3$ 由(0,0)到(1,1)点的弧段.

解 我们先来凑全微分，最后作积分.为此我们先看被积表达式

$$\begin{aligned}&e^x[e^y(x-y-2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy\\
&=e^{x+y}(x-y)dx+e^{x+y}(x-y)dy+2e^{x+y}dx+ye^xdx+e^xdy\\
&=e^{x+y}(x-y)d(x+y)+2e^{x+y}dx+de^xy\\
&=-e^{x+y}(x+y)d(x+y)+2(xde^{x+y}+e^{x+y}dx)+dye^x\\
&=d[e^{x+y}-(x+y)e^{x+y}+2xe^{x+y}+ye^x]\end{aligned}$$

故所求积分与路径无关，且

$$\begin{aligned}I&=[e^{x+y}-(x+y)e^{x+y}+2xe^{x+y}+ye^x]_{(0,0)}^{(1,1)}\\
&=e^2+e-1\end{aligned}$$

用凑全微分的办法作线积分一般书上不太讲，但却是一种很好的技巧.

9-125 已知 $du=\dfrac{(x^2+2xy+5y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}$，求原函数 $u(x,y)$.

解 我们还是用凑全微分的方法来求原函数.

$$\begin{aligned}du&=\frac{(x^2+2xy+y^2)dx+(x^2+2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}+\frac{4y^2dx-4xydy}{(x+y)^3}\\
&=\frac{d(x+y)}{x+y}+\frac{4y(ydx-xdy)}{y^3\left(1+\frac{x}{y}\right)^3}\\
&=d\ln|x+y|-2d\frac{1}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2}\\
&=d\left[\ln|x+y|-\frac{2y^2}{(x+y)^2}\right]\end{aligned}$$

$$u(x,y)=\ln|x+y|-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+C$$

凑微分首先要熟悉微分公式.为了掌握这一技巧，还是要靠多凑，熟能生巧.

9-126 计算 $\oint_{ABCDA}\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，$ABCDA$ 是以 $A(1,0),B(0,1)$，$C(-1,0),D(0,-1)$ 为顶点的正方形的周线.

解 如图 9.43 所示，此正方形边界线方程即

$$|x|+|y|=1$$

故

$$\oint_{ABCDA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$$

$$=\oint_{ABCDA}\mathrm{d}(x+y)=0$$

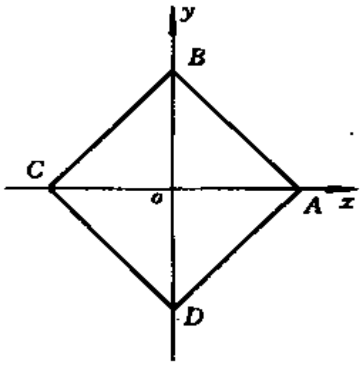


图 9.43

先用 $|x|+|y|=1$ 代入积分式，使被积表达式成了全微分.

9-127 计算 $\int_{AB}\sin y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$，$AB$ 是由 $A(0,\pi)$ 到 $B(\pi,0)$ 的直线段(图 9.44).

解 AB 的方程是

$x+y=\pi$

所以在直线上有 $\sin x=\sin y$，故

$$\int_{AB}\sin y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{AB}\sin x\mathrm{d}(x+y)=0$$

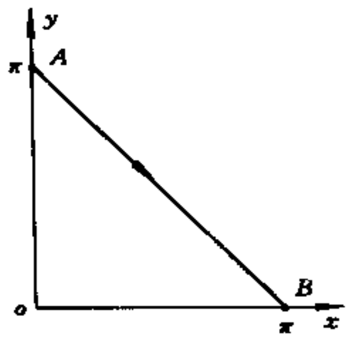


图 9.44

注意线积分中被积表达式的变量 x,y 应满足积分曲线的方程.

9-128 计算 $I=\oint_{OMANO}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$，$OMANO$ 是从 O 沿抛物线 $y=x^2$ 到 A，ANO 为直线段 $y=x$.

解 如图 9.45 所示.

用格林公式得

$$I=\iint_D\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1[\ln(x^2+x^4)-\ln x^2-\ln 2]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}-1$$

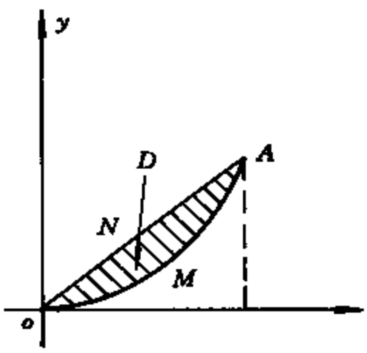


图 9.45

注意：本题是一道广义积分题. 严格说应当用极限的方法求最后一个积分：即用一以 O 为中心，ε 为半径的小扇形挖去奇点再令 $\varepsilon\to 0$.

9-129 计算 $I=\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$.

凑出了原函数，便可用与路径无关的方法代.

解 $(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{1}{5}x^5-y^5\right)+2(2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y)$$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{1}{5}x^5-y^5+2x^2y^3\right)$$

$$I=\left[\frac{1}{5}x^5-y^5+2x^2y^3\right]_{(-2,-1)}^{(3,0)}=62$$

9-130 计算 $I=\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$，其积分路径为沿不与直线 $y=x$ 相交的路径.

当我们凑微分时，应有 $y\neq 0$. 因此，积分结果应理解为当 $y\to 0$ 的极限.

解 $$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{y^2\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}=-\frac{\mathrm{d}\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}$$

$$=\mathrm{d}\frac{1}{\frac{x}{y}-1}=\mathrm{d}\frac{y}{x-y}$$

$$I=\left.\frac{y}{x-y}\right|_{(0,-1)}^{(1,0)}=1$$

9-131 计算

$$I=\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y,$$

沿不与 y 轴相交路径.

本题用凑微分方法作简便. 否则得先证明被积表达式为全微分，再选特殊路径来积分.

解 $$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{d}x+\sin\frac{y}{x}\mathrm{d}y+\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}y\cos\frac{y}{x}$$

$$=\mathrm{d}x+\sin\frac{y}{x}\mathrm{d}y+y\mathrm{d}\sin\frac{y}{x}$$

$$=\mathrm{d}\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)$$

$$I=\left[x+y\sin\frac{y}{x}\right]_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}=\pi+1$$

9-132 计算 $I=\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y)$.

熟悉了凑微分后，本题只要两步便完成.

解 $I=\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\cos y)=\mathrm{e}^a\cos b-1$

9-133 计算 $I=\oint_{c^+} xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$，$c$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解 用格林公式

$$\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}-\frac{\partial(-x^2y)}{\partial y}=x^2+y^2$$

所以 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi a^4$

注意：化为二重积分后，x^2+y^2 就不能用 a^2 代.

9-134 计算 $I=\oint_{c^+}\mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]$，其中 c 为 $0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant \sin x$ 的边界线.

解

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]\\
&=\mathrm{d}\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}y-\mathrm{e}^x y\mathrm{d}y\\
&=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\cos y)-\mathrm{e}^x y\mathrm{d}y\\
&I=\oint_{c^+}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\cos y)-\oint_{c^+}\mathrm{e}^x y\mathrm{d}y\\
&=-\iint\limits_D y\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-\int_0^\pi \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}y\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}(1-\mathrm{e}^\pi)
\end{aligned}$$

对较复杂的被积表达式，可以先凑微分，凑成了多少全微分的项，问题便能简化多少. 所以应多练习凑全微分.

注意：最后一个积分是循环积分.

9-135 求 $I=\int\limits_{AMB}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y$，其中 $\varphi'(y)$ 连续，AMB 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任一路径. 但与线段 AB 围成面积为定值 S，且 $AMBA$ 为闭路正向.

解 $[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y$

$$=\mathrm{d}[\mathrm{e}^x\varphi(y)-my]-my\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
I&=[\mathrm{e}^x\varphi(y)-my]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}+mS-m\int\limits_{AB}y\mathrm{d}x\\
&=\mathrm{e}^{x_2}\varphi(y_2)-\mathrm{e}^{x_1}\varphi(y_1)+\\
&\quad m(y_1-y_2)+mS\\
&\quad-\frac{m(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2}
\end{aligned}$$

注：如图 9.46 所示，I 等式右端最后一项，$\int\limits_{AB}y\mathrm{d}x$ 积分计算的结果按几何意义为梯形 $ABCD$ 的面积，故可直接写出答案：

$$\int\limits_{AB}y\mathrm{d}x=\frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2}.$$

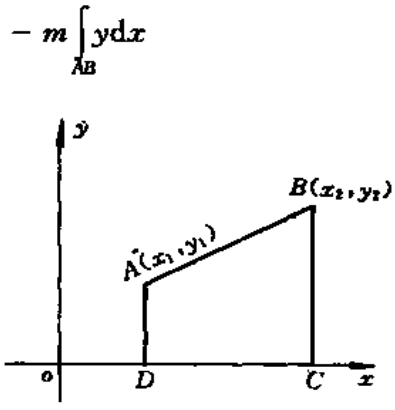


图 9.46

采用先凑全微分，再补一直线段 AB，用格林公式的方法使本题解起来十分简便.

9-136　设 $F(x,y)$ 具有连续偏导数，积分 $\int_c F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$ 与路径无关，问 $F(x,y)$ 是怎样的函数？

一种是凑全微分的办法；另一种是用判别全微分的等价条件，得到的结果应是等价的。

注中便证明了确实等价。

解 1　$\int_c F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\int_c F(x,y)\mathrm{d}(xy)$，

故
$$F(x,y)=f(xy).$$
$f(u)$ 是有连续导数的任一函数.

解 2　由 $\dfrac{\partial(yF)}{\partial y}=\dfrac{\partial(xF)}{\partial x}$

即
$$y\frac{\partial F}{\partial y}=x\frac{\partial F}{\partial x}$$
为所求条件.

注：解 1 和解 2 得到形式上不同的条件，我们来证明它们是等价的. 显然
$$F(x,y)=f(xy)$$
时，有
$$yF'_y=xF'_x$$
成立. 反之，设上面方程成立，作变换
$$x=u,\qquad xy=v,$$
则
$$F'_x=F'_u+yF'_v,\qquad F'_y=xF'_v$$
于是 $yF'_y=xF'_x$ 变为 $F'_u=0$. 即 $F(u,v)$ 不依赖于 u.

所以
$$F(x,y)=f(v)=f(xy)$$

9-137　设 L 是分段光滑的简单闭曲线，$(2,0)$、$(-2,0)$ 两点不在 L 上，试就 L 的不同情形分别计算曲线积分.
$$I=\oint_{L^+}\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y$$

当 $(2,0)$ 或 $(-2,0)$ 有一个在 L 所围域内时，被积函数便有一个奇点.

用圆扣去一个奇点的作法是常用方法.

解
$$\frac{y\mathrm{d}x}{(2-x)^2+y^2}+\frac{(2-x)\mathrm{d}y}{(2-x)^2+y^2}$$
$$=\frac{y\mathrm{d}(x-2)-(x-2)\mathrm{d}y}{y^2}\frac{1}{1+\dfrac{(2-x)^2}{y^2}}$$
$$=\mathrm{d}\left(\operatorname{arctg}\frac{x-2}{y}\right)$$
是全微分，同样
$$\frac{y\mathrm{d}x}{(x+2)^2+y^2}-\frac{(x+2)\mathrm{d}y}{(x+2)^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+2}{y}\right)$$
故有

(1) 当 $(2,0)$、$(-2,0)$ 均在闭曲线 L 所围域的外部时，

$$I = 0$$

(2) 当(2,0)、(-2,0) 均在闭曲线 L 所围域的内部时，作两个圆 c_1, c_2 分别以此两点为圆心，ε 为半径.

则
$$\oint_{L^+} = \oint_{c_1^+} + \oint_{c_2^+}.$$

$$\oint_{c_1^+} = \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{c_1^+} y\mathrm{d}x - (x-2)\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{2}{\varepsilon^2}\pi\varepsilon^2 = -2\pi$$

同样$\oint_{c_2^+} = -2\pi$

所以
$$I = -4\pi$$

(3) 当(2,0) 和(-2,0) 有一个点在外部，一个点在内部时，
$$I = -2\pi$$

9-138 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $f(1) = f'(1) = 1$，
$\oint_L \left[\frac{y^2}{x} + xf\left(\frac{y}{x}\right)\right]\mathrm{d}x + \left[y - xf'\left(\frac{y}{x}\right)\right]\mathrm{d}y = 0$，其中 L 是任一不与 y 轴相交的简单光滑闭曲线，试求 $f(x)$.

解 由题意知
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{x} + xf\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[y - xf'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

即 $\frac{2y}{x} + f'\left(\frac{y}{x}\right) = -f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)$

令 $t = y/x$，得
$$tf''(t) - 2f'(t) = 2t$$

即 $\left[\frac{1}{t^2}f'(t)\right]' = \frac{2}{t^2}$

$$\frac{1}{t^2}f'(t) = -\frac{2}{t} + C_1$$

$$f'(t) = -2t + C_1t^2$$
$$= -2t + 3t^2 \qquad (f'(1) = 1)$$
$$f(t) = -t^2 + t^3 + C_2$$
$$= -t^2 + t^3 + 1 \qquad (f(1) = 1)$$

即 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

由此得到关于 $f(x)$ 的二阶常微分方程.

我们只是用积分方法解此方程.

9-139 设 L 是圆 $x^2 + y^2 = a^2$，求
$$I = \oint_{L^+} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} \qquad (A > 0, AC - B^2 > 0).$$

解 容易验证被积表达式是全微分，(0,0) 是奇点. 作椭圆 $Ax^2 +$

由被积表达式分母的特殊性，我们用一个椭圆 $Ax^2 + 2BXy + Cy^2 = 1$

$2Bxy + Cy^2 = 1$，记为 c，则由格林公式得

$$I = \oint_{L^+} = \oint_{c^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

又 $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A\left(x + \frac{By}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)y^2$$

令 $$x + \frac{B}{A}y = \frac{1}{\sqrt{A}}\cos t,\quad y = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\sin t$$

所以 $$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}}\mathrm{d}t$$

$$I = \oint_{c^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{AC - B^2}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$$

来扣去奇点(0,0).

按定义计算第Ⅱ型线积分也可以用格林公式.但要算椭圆面积.

9.2.5 曲面积分

9-140 计算$\iint\limits_S (x + y + z)\mathrm{d}S$，$S$ 是半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，$z \geqslant 0 (a > 0)$.

解1 由对称性知

$$\iint\limits_S x\mathrm{d}S = \iint\limits_S y\mathrm{d}S = 0$$

只要计算$\iint\limits_S z\mathrm{d}S$. 因为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$z_x' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$z_y' = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

所以 $$\mathrm{d}S = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}s = a \iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant a^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^3$$

$$\iint\limits_S (x + y + z)\mathrm{d}S = \pi a^3$$

对称性在多元积分中很有用，但用时一定要仔细.

第Ⅰ型面积分的计算方法：将 S 在 xoy 面上投影时，$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解2 对球面

$$\mathrm{d}S = a^2 \sin\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi,\qquad z = a\cos\varphi$$

所以 $$\iint\limits_S (x + y + z)\mathrm{d}S = \iint\limits_S z\mathrm{d}s$$

在球坐标下 $\mathrm{d}S = a^2 \sin\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$.

$$= a^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= \pi a^3$$

9-141 计算$\iint\limits_S |xyz|\mathrm{d}S$，$S$ 是 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 所割下的有限部分.

解 由对称性，只要算 $x > 0, y > 0$ 的部分，

对称性又一次被用到了.

所以 $$I = \iint\limits_S |xyz|\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}S$$

由 $z = x^2 + y^2$，得

$$z_x' = 2x, z_y' = 2y, \mathrm{d}S = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\sin\theta\cos\theta\sqrt{1 + 4r^2}\mathrm{d}r$$

要完成多元积分的计算，首先还得计算定积分.

$$= \int_0^1 r^4\sqrt{1 + 4r^2}\mathrm{d}r^2$$

$$= \int_0^1 u^2\sqrt{1 + 4u}\mathrm{d}u \quad (\text{令 } r^2 = u)$$

$$= \frac{1}{23}\int_1^{\sqrt{5}}(t^4 - 2t^2 + 1)t^2\mathrm{d}t \quad (\text{令}\sqrt{1 + 4u} = t)$$

$$= \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}$$

9-142 计算$\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{\rho}$，$S$ 是椭球面$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$，$\rho$ 为椭球中心到切平面的距离.

先算被积函数 ρ^{-1}.

解 设(x, y, z)是椭球面上一点，则切平面方程是

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} - 1 = 0$$

再算 $\mathrm{d}S$.

(X, Y, Z)是平面上的动点

所以，$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

设 S 在 xoy 上投影是$D: x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1$. 由对称性，我们只要算上半面上积分的 2 倍，这时 $z = c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$，

暂不代 z，写起来方便.

所以 $$\mathrm{d}S = \frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{\rho} = 2c^2\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_D \frac{2c^2x^2}{a^4z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \frac{2c^2y^2}{b^4z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \frac{2z}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_3 = \frac{2ab}{c}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\sqrt{1-u^2-v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \frac{4\pi abc}{3c^2}$$

由对称性知

$$I_1 = \frac{4\pi abc}{3a^2},\qquad I_2 = \frac{4\pi abc}{3b^2}$$

$$I = \frac{4\pi abc}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

比较起来先算 I_3 方便一点. 这里令 $x = au, y = bv$.

9-143 试证明, 若 $\varphi(x,y,z)$ 连续, 则

$$\iint\limits_S \varphi(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$= \iint\limits_\Omega \varphi[x,(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中 S 由 $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ 给出, $(u,v)\in\Omega$. 三个函数有连续偏导数, 且三个相应雅可比行列式不同时为零.

$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2, F = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v', G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$.

证 我们只需证

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

为此, 用 $u =$ 常数和 $v =$ 常数来分割曲面 S(图 9.47). 当 $\mathrm{d}S$ 的直径很小时, 我们将 $\mathrm{d}S$ 视为平行四边形. 其中一边为固定 v 时, 曲线

$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v)$ 的弧微分向量 $\{x_u', y_u', z_u'\}\mathrm{d}u$,

另一边是向量 $\{x'_v, y'_v, z'_v\}\mathrm{d}v$,

因此 $(\mathrm{d}S)^2 = |\{x'_u, y'_u, z'_u\}\times\{x'_v, y'_v, z'_v\}|^2(\mathrm{d}u)^2(\mathrm{d}v)^2$

$= (EG-F^2)(\mathrm{d}u\mathrm{d}v)^2$

所以, $\mathrm{d}S = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$\iint\limits_S \varphi\mathrm{d}S = \iint\limits_\Omega \varphi\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

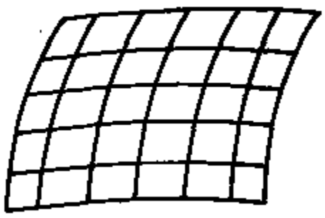


图 9.47

这里给出一个由参数方程给出曲面的面积微元 $\mathrm{d}S = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 的公式.

$u = u_0$ 为曲面上的曲线 $x = x(u_0,v)$, $y = y(u_0,v)$, $z = z(u_0,v)$, 同样有 $v = v_0$ 的另一族曲线, 它们构成曲面 S 上的曲线网.

用到公式. $|a\times b|^2 = a^2b^2 - (a\cdot b)^2$.

9-144 计算 $\iint\limits_S z\mathrm{d}S$, S 为螺旋面 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$ $(0\leqslant u\leqslant a; 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$ 的一部分.

解 利用 9-143 题的结果, 由

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v + 0 = 1$$
$$G = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1 + u^2$$
$$F = 0, \mathrm{d}S = \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

所以 $$\iint_S z\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} v\mathrm{d}v\int_0^a \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u$$
$$= \pi^2[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a+\sqrt{1+a^2})]$$

9-145 求 $I = \iint_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，$S$ 为 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2 = 2ax$ 所割下部分.

本题一开始即可由对称性知 $\iint_S xy\mathrm{d}S = \iint_S yz\mathrm{d}S = 0$

解 S 在 xoy 上投影为 $D: x^2+y^2 \leqslant 2ax$

$$z_x' = \frac{x}{z}, z_y' = \frac{y}{z}，所以，\mathrm{d}S = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $$I = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r^3(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta + \sin\theta)\mathrm{d}r$$
$$= 4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos^5\theta + \cos^5\theta + \sin\theta\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$$

9-146 求面密度为 1 的均匀半球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2, z \geqslant 0$ 对 oz 轴的转动惯量.

解 1 因为

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}, \mathrm{d}S = \frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $$J = \iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} a\frac{x^2+y^2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t \quad (令\ r = a\sin t)$$
$$= \frac{4}{3}\pi a^4 = \frac{Ma^2}{3}(M\ 为半球面的质量).$$

此定积分还是用三角代换简单.

解 2 它是全球面绕 oz 轴转动惯量的一半，而

$$\oiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

在全球面 S 上有 $\iint_S x^2\mathrm{d}S = \iint_S y^2\mathrm{d}S$

$$= \frac{2}{3} \oiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$= \frac{2}{3}a^2 \oiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2} \mathrm{d}S = \frac{8}{3}\pi a^4$$

所以，$J = \frac{4}{3}\pi a^4 = \frac{M}{3}a^2$　（M 是质量）.

$= \iint_S z^2 \mathrm{d}S$，这样计算大为简化了.

9-147　求 $F(t) = \oiint_{x+y+z=t} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ 0, & x^2+y^2+z^2 > 1 \end{cases}$$

解　当 $|t| \geqslant \sqrt{3}$ 时，平面 $x+y+z=t$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切或不相交. 这时总有

$$\oiint_{x+y+z=t} f(x,y,z)\mathrm{d}S = 0$$

故我们考虑 $|t| < \sqrt{3}$ 的情况，此时

$f(x,y,z) = 1-\rho^2$，$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 是球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$，与平面 $x+y+z=t$ 所交成的圆域上的任一点 (x,y,z) 到原点的距离. 积分域就是此圆域，此圆域到原点的距离为 $\frac{|t|}{\sqrt{3}}$. 由对称性，我们可以将此坐标系作一旋转，使平面 $x+y+z=t$ 上的积分域旋转到 $z = \frac{t}{\sqrt{3}}$ 这一平面上.

被积函数只在单位球内不取零值，故先考虑平面与球的关系.

被积函数与积分域要同时考虑到. 这是计算多元函数积分技巧的基础.

这里所用对称性等价于作了一个转轴的变换，但又可以不写出变换式来. 可见对称性在积分学中非常有用.

则：$F(t) = \iint_{z=t/\sqrt{3}} f(x,y,z)\mathrm{d}S$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1-t^2/3} \left(1 - \frac{t^2}{3} - x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2 - \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}} r^3\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$$

所以，$F(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2, & |t| < \sqrt{3} \\ 0, & |t| \geqslant \sqrt{3} \end{cases}$

9-148　求面密度为 1 的均匀锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ $(0 \leqslant z \leqslant b)$ 对直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$ 的转动惯量.

空间点到直线

解 空间任一点(x,y,z)到此直线距离的平方为

$$d^2 = y^2 + (z-b)^2$$

而 S 为锥面 $z = b\sqrt{x^2+y^2}/a \quad (0 \leqslant z \leqslant b)$

所以 $J = \iint\limits_S [y^2 + (z-b)^2]\mathrm{d}S$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}[y^2+(z-b)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left[\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\left(\frac{b}{a}r - b\right)^2\mathrm{d}r\right]$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{12}(3a^2+2b^2)a\pi$$

的距离，一般采用叉乘积求方便.

锥面面积与锥面在 xoy 坐标面上的投影面面积之比总是常量.

9-149 求半径为 R 的均匀球面(设面密度为 1)对空间一单位质点的引力.

解 在球面上的任取一点(x,y,z)和含此点的面积微元 $\mathrm{d}S$(取定坐标系如图 9.48 所示,定点在$(0,0,a)$处.

注意引力是一个向量. 向量的叠加不能用模去加，必须用分量去加.

则 $|\mathrm{d}F| = \dfrac{G\mathrm{d}S}{r^2}$

$\mathrm{d}F$ 的三个分量为

$$\mathrm{d}F_x = \frac{Gx\mathrm{d}S}{r^3}, \mathrm{d}F_y = \frac{Gy\mathrm{d}S}{r^3}$$

$$\mathrm{d}F_z = \frac{G(z-a)\mathrm{d}S}{r^3}$$

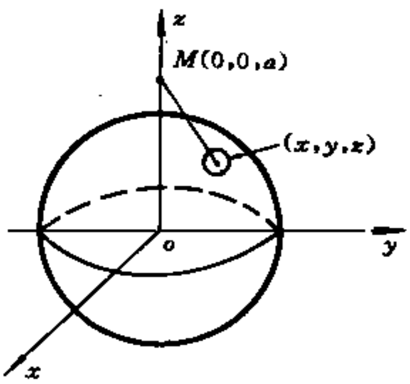
所求力 $F = \{F_x, F_y, F_z\}$.

则由对称性知

$$F_x = F_y = 0$$

又一次用了对称性.

而 $$F_z = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{G(z-a)}{r^3}\mathrm{d}S$$



球面参数方程为

$x = R\cos\theta\sin\varphi, y = R\sin\theta\sin\varphi$

$z = R\cos\varphi$

所以 $\mathrm{d}S = R^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$,

图 9.48

故 $$F_z = G\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\varphi(R\cos\varphi - a)}{(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi GR^2\int_0^{\pi}\frac{(R\cos\varphi - a)\sin\varphi}{(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi$$

令 $a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi = t^2$

$\mathrm{d}S = R^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 的推导可见题 9-143,但作为球面也可这样想:$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \times \mathrm{d}S = r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

所以 $\mathrm{d}S = r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}y$.

则 $F_z=\dfrac{GR\pi}{a^2}\displaystyle\int_{|a-R|}^{a+R}\left(\dfrac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$

$$=\begin{cases}0, & a<R\\ -\dfrac{4\pi R^2G}{a^2}, & a>R\end{cases}$$

所以 $F=\begin{cases}\{0,0,0,\} & a<R\\ \left\{0,0,-\dfrac{4\pi R^2G}{a^2}\right\}, & a>R\end{cases}$

此结果表明：当质点在球内，引力为零；当质点在球外，引力如同球面的质量集中于球心时对该点的引力.

注：我们可以在此题基础上，对题 9-104 给出另一种解法，即求均匀球体对单位质点的引力. 不妨只就 $a<R$ 的情况来做，我们用 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 来分割球体. 当 $\Delta r\to 0$ 时，认为球壳 $r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant(r+\Delta r)^2$ 为均匀球面，半径为 r. 则只考虑 $r\leqslant a$. 这个球壳的面密度在数值上为 $\mathrm{d}r$（体密度为 1）. 于是这一层对定点的引力为

$$-\frac{4\pi Gr^2\mathrm{d}r}{a^2}$$

所以 $F_z=-\dfrac{4\pi G}{a^2}\displaystyle\int_0^a r^2\mathrm{d}r=-\dfrac{4}{3}\pi Ga \quad (a\leqslant R)$

所得结果与题 9-104 完全一致. 读者不难仿此得到当 $a>R$ 的情况.

见题 9-104 如将两个题联在一起，那么只要解一个题立即可解得另一题. 这也可说明面积分与体积分的联系.

9-150 求 $I=\displaystyle\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分下侧.

解 1 本题用高斯公式做十分简便. 要注意积分曲面是上半椭球面的下侧，补一椭圆 S_1：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, z=0$$

要取上侧

故 $I=-\displaystyle\oiint_{S+S_1}-\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi abc$

第 Ⅱ 型曲面积分，要特别注意曲面的方向.

用高斯公式不要忘了补一个面.

解 2 直接用定义做

$$\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= - abc \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} \cdot \sqrt{1-u^2-v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\frac{2}{3}\pi abc$$

由对称性便知

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\pi abc$$

所以 $$I = -2\pi abc$$

9-151 求 $I = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ 的上半部分之上侧.

解1 利用高斯公式. 补 $z = c$ 的圆 $S_1:(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2$ 的下侧，所以，

$$I = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1} = 3\iiint_V \mathrm{d}V + \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} c\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 2\pi R^3 + c\pi R^2$$

解2 直接算

$$\oiint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} [c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= c\pi R^2 + \iint_{u^2+v^2\leqslant R^2} \sqrt{R^2-u^2-v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= c\pi R^2 + \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\substack{(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2\\ c\leqslant z}} [a+\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2}]\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{\substack{(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2\\ c\leqslant z}} [a-\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2}]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= 2\iint_{\substack{u^2+v^2\leqslant R^2\\ 0\leqslant v}} \sqrt{R^2-u^2-v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

同样 $$\iint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi R^3$$

所以 $$I = c\pi R^2 + 2\pi R^3$$

算 $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 时，要将 S 分为前半部分和后半部分. 两曲面的方向相反.

9-152 求 $I = \iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外表面.

解 用高斯公式，补一个 S_1：

高斯公式很有效.

$$z = h, \quad x^2 + y^2 \leqslant h^2$$

则 $$I = \oiint\limits_{S+S_1} - \iint\limits_{S_1} = 0 - \iint\limits_{x^2-y^2\leqslant h^2} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

9-153 求 $I = \oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 的外表面.

解 用高斯公式得

$$I = 2\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}V$$

这里(V)：$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant R^2$.

而积分$\iiint\limits_V x\mathrm{d}V$ 是静矩，我们知道球的形心即球心

$$\bar{x} = a, \quad \bar{y} = b, \quad \bar{z} = c$$

所以 $$\frac{\iiint\limits_V x\mathrm{d}V}{\frac{4\pi R^3}{3}} = a, \quad \text{即} \quad \iiint\limits_V x\mathrm{d}V = \frac{4\pi R^3}{3}a$$

所以 $$I = \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)$$

算此三重积分并不难. 但我们将计算重心的公式反过来用，更容易得到正确结果.

9-154 求 $I = \oiint\limits_S \left(\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}\right)$，$S$ 为椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外表面.

解 因为

$$\oiint\limits_S \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z} = \frac{2}{c}\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \frac{2}{c}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$= \frac{4\pi abc}{c^2}$$

由对称性得

$$I = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

由于 $x=0, y=0, z=0$ 是间断面，故本题不能用高斯公式.

9-155 叙述空间曲线积分与路径无关的条件.

解 设 V 是空间区域，且对任一闭曲线 $\Gamma \subset V$，均有一以 Γ 为边界的曲面 $S \subset V$. 函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 V 中有连续偏导数. 则下列四个条件等价：

(1)$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \mathrm{d}u(x,y,z)$.

在高等数学中，斯托克斯公式只要求知道，不要求证明. 因为这四个等价命题只是用到此

(2) $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$.

(3) 对任一简单光滑闭曲线 $\Gamma\subset V$，有 $\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$.

(4) $\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}Z$ 与路径无关. 且若 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$，则

$$\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}Z=u(B)-u(A)$$

其中 A、B 是 V 中的两点. $AB\subset V$ 是任一分段光滑的曲线段.

应用司托克斯公式，本题的证明与平面线积分完全一样(见题 9-121).

公式，所以不但不超纲，而且它与平面线积分与路径无关一样重要(参看题 9-121).

9-156 计算(1) $I=\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$.

(2) $I=\int_{(1,0,-1)}^{(1,2,0)}(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$.

解(1) 用凑全微分法.

$yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=\mathrm{d}(xyz)$

所以 $I=\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}\mathrm{d}(xyz)=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}=0$

解(2)

$$\begin{aligned}&(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z\\&=\mathrm{d}\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-2(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)\\&=\mathrm{d}\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-2xyz\right)\end{aligned}$$

所以 $I=\left[\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-2xyz\right]_{(1,0,-1)}^{(1,2,0)}=3$

凑全微分对三元函数来说，也应熟悉.

如果能把被积表达式凑成全微分，那末也就找到了原函数.

9-157 设 $\mathrm{d}u=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z$，求原函数 $u(x,y,z)$.

解

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z\\&=\mathrm{d}x-\left(\frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)+\frac{y}{z}\mathrm{d}x+\frac{x}{z}\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z\\&=\mathrm{d}\left(x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}\right)\end{aligned}$$

所以 $u(x,y,z)=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$

凑全微分主要是拆开原来的表达式，再适当组合.

9-158 设 $du = \dfrac{(x+y-z)(dx+dy)+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$ 求 $u(x,y,z)$.

解

$$du = \frac{(x+y)(dx+dy)+zdz+(x+y)dz-z(dx+dy)}{(x+y)^2+z^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}d[(x+y)^2+z^2]}{(x+y)^2+z^2} + \frac{(x+y)dz-zd(x+y)}{(x+y)^2\left[1+\frac{z^2}{(x+y)^2}\right]}$$

$$= d\left[\frac{1}{2}\ln[(x+y)^2+z^2]+\arctan\frac{z}{x+y}\right]$$

$$u(x,y,z) = \ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\arctan\frac{z}{x+y}+C$$

有分母时一定要看准分母去拆分子的微分表达式.

本题与前题均可用偏积分或线积分方法做,但做之前必须先验证表达式确是全微分.

9-159 计算 $I = \oint\!\!\!\oint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解 用高斯公式得

$$I = 3\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}(x^2+y^2+z^2)dV = 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{a}r^4dr$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^5$$

注意:用高斯公式后,$x^2+y^2+z^2$ 不能用 a^2 代换.

9-160 求 $I = \oint\!\!\!\oint_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x-y)dxdy$. S 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧.

解 设 S 所围平行八面体为 V.

则
$$I = 3\iiint_V dxdydz$$

作变换

$$u = x-y+Z, v = y-z+x, w = z-x+y$$

则

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

所以 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \dfrac{1}{4}$

$$I = 3\iiint_V dxdydz = \frac{3}{4}\iiint_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1} dudvdw$$

先用高斯公式变成求平行八面体之体积.

注意雅可比行列式.

利用对称性计算在第一卦限的体

$$= \frac{3}{4} \times 8\int_0^1 du\int_0^{1-v} dv\int_0^{1-u-v} dw = 1$$

积之 8 倍.

9-161 求 $I = \iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$, S 为圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 界于 $0 \leqslant z \leqslant h$ 部分. $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为此曲面法线向量的方向余弦, 且 $\cos\gamma < 0$.

解 $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$

$$= \iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

第 1 型曲面积分与第 2 型曲面积分的关系.

这里 S 是锥面的外表面, 补一张曲面 S_1, $S_1: z = h, x^2 + y^2 \leqslant h^2$ 上侧,

则 $I = \oiint\limits_{S_1+S_1} - \iint\limits_{S_1} = 2\iiint\limits_V (x + y + z)dV - \pi h^4$

由对称性知

对称性又一次被用上.

$$\iiint\limits_V xdV = \iiint\limits_V ydV = 0$$

而 $\iiint\limits_V zdV = \int_0^h z\left(\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2} dxdy\right)dz$

$$= \pi\int_0^h z^3 dz = \frac{\pi}{4}h^4$$

$$I = -\frac{\pi}{2}h^4$$

9-162 证明公式 $\iiint\limits_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\oiint\limits_S \cos(r, n)dS$, S 是空间区域 V 的光滑边界闭曲面, n 为 S 上动点 (ξ, η, ζ) 处外法向单位向量. $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, $r = \{\xi - x, \eta - y, \zeta - z\}$, $(x, y, z) \in S$, 为一定点.

证 $\cos(r, n) = \dfrac{(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma}{r}$

用两向量的内积表示它们夹角的余弦.

所以

$$\cos(r, n)dS = \frac{(\xi - x)d\eta d\zeta + (\eta - y)d\zeta d\xi + (\zeta - z)d\xi d\eta}{r}$$

由高斯公式得

$$\oiint\limits_S \cos(r, n)dS$$

$$= \iiint\limits_V \left[\left(\frac{\xi - x}{r}\right)'_\xi + \left(\frac{\eta - y}{r}\right)'_\eta + \left(\frac{\zeta - z}{r}\right)'_\zeta\right]d\xi d\eta d\zeta$$

注意: $r'_\xi = \frac{\xi - x}{r}$. 这里 ξ, η, ζ 是积分变量, 而 (x, y, z) 是定点坐标.

而
$$\left(\frac{\xi-x}{r}\right)'_{\xi}=\frac{1}{r}-\frac{(\xi-x)^2}{r^3}$$
$$\left(\frac{\eta-y}{r}\right)'_{\eta}=\frac{1}{r}-\frac{(\eta-y)^2}{r^3}$$
$$\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)'_{\zeta}=\frac{1}{r}-\frac{(\zeta-z)^2}{r^3}$$
将以上三个等式代人相应的积分式中,经整理即得
$$\iiint\limits_{V}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_{S}\cos(r,n)\mathrm{d}S$$

9.2.6 多元积分杂例

9-163 设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,其等值线 $f(x,y)=v$ 是简单闭曲线,此闭曲线围成区域的面积是 $F(v)$,$F(v)$ 有连续导数,D 是由 $f(x,y)=v_1$ 和 $f(x,y)=v_2$ $(v_1<v_2)$ 围成的区域.证明 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{v_1}^{v_2}vF'(v)\mathrm{d}v$.

证 我们这样来分割 D:以一系列 $f(x,y)=v$ 的曲线及各曲线上的法线(l_i)分 $f(x,y)=v$ 到 $f(x,y)=v+\mathrm{d}v$ 之间的区域.先固定 v 对 l_i 求积分和得
$$f(x,y)\cdot[F(v+\mathrm{d}v)-F(v)]=vF'(v)\mathrm{d}v$$
这里我们简化了"积分和"的表示.

再对 v 从 v_1 到 v_2 求和,取极限便得
$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{v_1}^{v_2}vF'(v)\mathrm{d}v$$

注:今举个简单例子:计算 $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$D:1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,$x^2+y^2=v$,则 $F(v)=\pi v$,$F'(v)=\pi$,

所以 $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_1^4 v\mathrm{d}v=\frac{15}{2}\pi$

这个题用到可积函数的积分,可以用任意一种分割和取点相应的和式极限得到.

严格说这一公式应从重积分定义严加证明,我们采用的是简化证法,读者请用此法重作题9-71.

9-164 设 $f(x,y,z)$ 具有一阶连续偏导数,等值面是 $f(x,y,z)=V$ 的简单闭曲面,所围立体的体积等于 $F(V)$,$F(\overline{V})$ 具有连续导数,设 Ω 是由 $f(x,y,z)=V_1$ 和 $F(x,y,z)=V_2$ $(V_1<V_2)$ 围成的立体,试证 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{V_1}^{V_2}VF'(V)\mathrm{d}V$ 并计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的值,Ω 是 $a_1\leqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant a_2$ $(a_1>0)$ 确定的球形.

本题与上题一样,不同之处仅在于一个是二重积分,另一个是三重积分.

解 像上例一样用一系列等值面

$f(x,y,z) = V$ 和 $f(x,y,z) = V + \mathrm{d}V$ 分割 Ω，即得 $\mathrm{d}I = VF'(V)\mathrm{d}V$.

所以，$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{V_1}^{V_2} VF'(V)\mathrm{d}V$$

对具体的例子 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = V$，则 $F(V) = \frac{4}{3}\pi abcV^{\frac{3}{2}}$，

$F'(V) = 2\pi abcV^{\frac{1}{2}}$

所以 $$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\pi abc\int_{a_1}^{a_2} V^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}V = \frac{4}{5}\pi abc(a_2^{5/2} - a_1^{5/2})$$

9-165 物体在椭圆面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ 上压强分布为 $p = p_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$，求物体在平面上的平均压强.

解 平均压强即总压力与面积之比. 记椭圆域为 D，面积 $S = \pi ab$，平均压强为 $\overline{P}$.

则 $$\overline{p} = \frac{P_0}{\pi ab}\iint\limits_{D}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = p_0 - \frac{p_0}{\pi ab}\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

我们用 9-164 题的结论来计算后一个积分，$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = V$，则 $F(V) = \pi abV$，$F'(V) = \pi ab$，

所以 $$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi ab\int_0^1 V\mathrm{d}V = \frac{\pi ab}{2}$$

所以 $$\overline{p} = \frac{p_0}{2}\pi ab/\pi ab = \frac{1}{2}p_0.$$

9-166 设 $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $f(x)$ 可微，求 $F'(t)$.

本题化为累次积分之后，仅是一个一般变上限函数的求导问题.

解 用球坐标化为三次积分.

$$F(t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2 f(r^2)\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^t r^2 f(r^2)\mathrm{d}r$$

所以 $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$

$F''(t) = 8\pi t(f(t^2) + t^2 f'(t^2))$

9-167 设 $F(t) = \iiint\limits_{\substack{0\le x\le t\\0\le y\le t\\0\le z\le t}} f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $f(x)$ 有一阶连续导数，求 $F'(t)$.

解 $F(t) = \int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^t f(xyz)\mathrm{d}z$

$= \int_0^t \varphi(x,t)\mathrm{d}x$

其中 $\varphi(x,t) = \int_0^t \mathrm{d}y\int_0^t f(xyz)\mathrm{d}z$

所以 $F'(t) = \varphi(t,t) + \int_0^t \varphi'_t(x,t)\mathrm{d}x$

其中 $\varphi(t,t) = \int_0^t \mathrm{d}y\int_0^t f(tyz)\mathrm{d}z$

而记 $\psi(t,x,y) = \int_0^t f(xyz)\mathrm{d}z$

则 $\varphi(x,t) = \int_0^t \psi(t,x,y)\mathrm{d}y$

所以 $\varphi'_t = \psi(t,x,t) + \int_0^t \psi'_t(t,x,y)\mathrm{d}y$

$\psi(t,x,t) = \int_0^t \psi_t(t,x,y)\mathrm{d}y$

$\psi'_t = f(xyt)$

所以 $F'(t) = \int_0^t \mathrm{d}y\int_0^t f(tyz)\mathrm{d}z +$

$\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t tf(xzt)\mathrm{d}z$

$+ \int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t f(xyt)\mathrm{d}y$

若 $f'(u)$ 连续，我们考虑：

$\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^t xyzf'(xyz)\mathrm{d}z$

$= t\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t f(xyt)\mathrm{d}y - \int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^t f(xyz)\mathrm{d}z$

所以 $\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t f(xyt)\mathrm{d}y$

$= \frac{1}{t}\left[F(t) + \iiint\limits_{\substack{0\le x\le t\\0\le y\le t\\0\le z\le t}} xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]$

利用变上限和含参变量的积分求导，解这个问题一层一层往里求导比较清楚.

这个答案已经可以了，只是不对称.

从这一结果看出 xyz 变元是对称的，但要求 $f'(t)$ 连续.

这里用到 $f'(u)$ 连续的条件.

而 $\int_0^t dx\int_0^t f(xyt)dy = \int_0^t dx\int_0^t f(xtz)dz = \int_0^t dy\int_0^t f(tyz)dz$

所以，$F'(t) = \frac{3}{t}\left[F(t) + \iiint\limits_{\substack{0\le x\le t\\0\le y\le t\\0\le z\le t}} xyzf'(xyz)dxdydz\right]$

9-168 设 $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，则称有二阶连续导数的函数 $u = u(x,y)$ 为调和函数. 证明 u 是调和函数的充要条件是对任意的简单闭曲线 c，有 $\oint_c \frac{\partial u}{\partial n}ds = 0$，其中 n 是 c 的外法向单位向量.

证 $\oint\limits_c \frac{\partial u}{\partial n}ds = \oint\limits_c \frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx = \iint\limits_D \Delta u dxdy$

故当 u 调和，即 $\Delta u = 0$，便有 $\oint\limits_c \frac{\partial u}{\partial n}ds = 0$

反之，$\forall c$ 有 $\oint\limits_c \frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint\limits_D \Delta u dxdy = 0$ 则表示对任意域 D 有

$\iint\limits_D \Delta u dxdy = 0$

由 Δu 的连续性知 $\Delta u \equiv 0$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为拉普拉斯算子，$\Delta u = 0$ 为拉普拉斯方程.

这是格林公式的一种变形，在数学物理方程中有用.

9-169 设 $u = u(x,y)$ 具有二阶连续导数，试证明

$$\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy = -\iint\limits_D u\Delta u dxdy + \oint\limits_c u\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

C 是 D 的边界，n 是 C 的外法向单位向量.

证 由 $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx$

$$\oint\limits_c u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \oint\limits_c u\frac{\partial u}{\partial n}dy - u\frac{\partial u}{\partial n}dx$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial(uu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(uu_y)}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + \iint\limits_D u\Delta u dxdy$$

$$\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$= -\iint\limits_D u\Delta u dxdy + \oint\limits_c u\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

这个公式也是格林公式的一种变形，它的应用见题 9-170.

9-170 证明在有界区域 D 上狄利克雷问题解的唯一性，即：

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & \forall (x,y) \in D\\ u|_c = f(x,y), & (x,y) \in c = \partial D\end{cases}$$

若有解 u 在 D 内调和，在边界上取已知值 $f(x,y)$，则这个函数是唯一

这个问题叫解的唯一性问题. 应当注意. 解的存在问题这里并未证

的.

证 设还有调和函数 $v=v(x,y)$ 也满足上述条件,则令 $w=u-v$,$\Delta w=\Delta u-\Delta v=0$

$$w|_c=0$$

我们只需证明 $w\equiv 0$, $(x,y)\in D$

因为 $\displaystyle\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-\iint\limits_D w\Delta w+\oint\limits_c w\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}s=0$$

由 $\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y}$ 的连续性知,对一切的 $(x,y)\in D$,$\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial y}=0$,所以,$w$ 在 D 内取常数值,又由 w 在 $\overline{D}$ 上连续,及 w 在 c 上为零.

所以 $w=0$, $(x,y)\in D$

故 $v=u$

明.只是假设解存在则解是唯一的.

9-171 证明平面的格林第二公式

$$\iint\limits_D\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_c\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s$$

其中 u,v 在 D 上有二阶连续导数,$c=\partial D$,n 为 c 的外法线单位向量.

证 $$\oint\limits_c\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s=\oint\limits_c\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$$

$$\oint\limits_c v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$$

$$=\oint\limits_c v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_D\left[\frac{\partial(vu_x)}{\partial x}+\frac{\partial(vu_y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D\left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同样 $$\oint\limits_c u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s=\iint\limits_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $$\oint\limits_c\left(v\frac{\partial v}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\iint\limits_D(v\Delta u-u\Delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

即 $$\iint\limits_D\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_c\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s$$

格林公式是多元积分学中最重要的公式,它在数学物理方法中很有用,所以要变形为各种形式,以便使用起来方便.

9-172 设 u 是有界闭域 $\overline{D}$ 内的调和函数，则 $u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_c\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$ 式中 $c=\partial D$，n 是 c 的外法向单位向量，(x,y) 是 D 内的点，$(\xi,\eta)\in c$，$\boldsymbol{r}=\{\xi-x,\eta-y\}$，$r=|\boldsymbol{r}|$.

这个题反映了调和函数的一个重要性质：可用其在边界上的取值及在边界上的外法向导数的取值来确定，而且给出了确定的公式.

$\ln r$ 是方程 $\Delta u=0$ 的一个特殊解，它很有用，所以也称之为 $\Delta u=0$ 的基本解.

证 容易验证 $\Delta(\ln r)=0$，但 (x,y) 是奇异点. 如图 9.49，用 (x,y) 为圆心，足够小的正数 ε 为半径作圆 Γ，使 $\Gamma\subset D$，则在 $D\setminus D_1$（D_1 是圆域）上 u 和 $\ln r$ 皆是具有二阶连续导数的调和函数，$c+\Gamma$ 是其边界，对 $D\setminus D_1$ 说 n 是向 D_1 内的法向量. 格林第二公式成立.

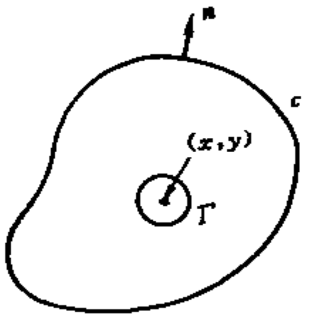


图 9.49

$$\oint_{c+\Gamma}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial(\ln r)}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}ds=0$$

即 $$\oint_c\left[(\ln r)\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}\right]ds-\oint_\Gamma\left[(\ln r)\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}\right]ds=0$$

而在 Γ 上 $r=\varepsilon$，$\ln r=$ 常量，而 $\oint_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$（见题 9-169）；

$\left.\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right|_\Gamma=\frac{1}{\varepsilon}$ （这里 $\oint_\Gamma$ 内的 $\frac{\partial}{\partial n}$ 是沿 Γ 的外法向方向求导）.

所以 $$\frac{1}{\varepsilon}\oint_\Gamma u\,ds=\oint_c\left[u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-(\ln r)\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds$$

令 $\varepsilon\to0$，得 $$2\pi u=\oint_c\left[u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-(\ln r)\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds$$

即 $$u=\frac{1}{2\pi}\oint_c\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-(\ln r)\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

9-173 证明对调和函数 u 的中值定理

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi R}\oint_c u(\xi,\eta)ds,$$

c 是以 (x,y) 为中心，R 为半径的圆周.

这是很有趣的结果，调和函数在任一点的值等于以此点为圆心的任意一圆周上取值的平均值.

解 利用题 9-172 例的结果，取 c 为圆周，则在 c 上 $\ln r=\ln R$，$\oint_c\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$，而

$\frac{\partial \ln r}{\partial n}=\frac{1}{R}$，以此代入题 9-172 的结果得

$$u=\frac{1}{2\pi}\oint_c\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$
$$=\frac{1}{2\pi R}\oint_c u\,ds$$

9-174 证明在有界闭区域内调和但不为常数的函数 $u(x,y)$ 在此区域内的点不能达到其最大值或最小值(极值原理).

证 用反证法.若 $u=u(x,y)$ 在 D 的某内点 $M(x_0,y_0)$ 达到其最大值,则由平均值定理知,以此点为中心,以 $d(M,c)$ 为半径的圆内各点都应达到最大值,$P(x,y)$ 为任一点时,可以取 PM 的连线与图 9.50 中的圆交于 M_1 点,如 $d(M,c)>\overline{PM_1}$,则由于 M_1 点也取到最大值,故以 M_1 为中心,以 $d(M_1,c)$ 为半径的圆内也都取到最大值,那么,$u(x,y)=u(x_0,y_0)$,则 $u(x,y)$ 在 D 内为常数,与题设矛盾,如 $\overline{PM_1}>\mathrm{d}(M_1,c)$.我们可以取 M_2 为 PM_1 与以 M_1 为中心,$\mathrm{d}(M_1,c)$ 为半径的圆的交点,进行同样的讨论,最后必导致矛盾,同样证明 u 不可能在 D 的内点达到最小值.

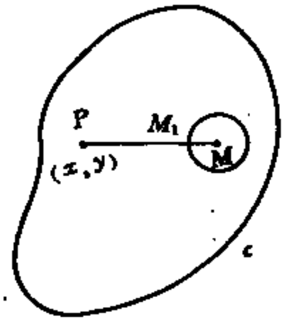


图 9.50

9-175 在空间,证 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,设 u 在空间有界闭域 $\overline{V}$ 上有二阶连续导数,S 是 V 的边界面,n 是 S 的外法向单位向量,证明:

(1) $\displaystyle\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V \Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V (u_x^2+u_y^2+u_z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V u\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

证 这个题与题 9-170 一样,不过是三维的情况.所以,我们只证其中(1).

因为 $\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

所以
$$\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V\left[\frac{\partial(uu_x)}{\partial x}+\frac{\partial(uu_y)}{\partial y}+\frac{\partial(uu_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}V$$
$$=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$+\iiint_V u\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

9-176 证明空间第二格林公式

$\displaystyle\iiint_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial u}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S$,其中 $S=\partial V$,n 是 S

本题的证明只是描述性的证明,很不严格,请读者注意.

我们可用极值原理来证明 9-170 的结论.

这里高斯公式也叫空间格林公式,与二维情况一样,高斯公式在数学物理中有广泛的应用.

这个公式与二维公式一样,而且这个公式可以推广至 n 维的空间情

的外法线单位向量，$\vec{V}$ 是有界闭域，uV 在 $\vec{V}$ 上有二阶连续导数.

证　由题 9-175 例之(1) 得

$$\iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS = \oint\!\!\oint_S v\frac{\partial u}{\partial x}dydz + v\frac{\partial u}{\partial y}dxdz + v\frac{\partial u}{\partial z}dxdy$$

$$= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$$

$$+ \iiint_V u\Delta u dxdydz$$

所以

$$\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS = \iiint_V (v\Delta u - u\Delta v)dxdydz$$

$$= \iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdydz$$

况，是数学物理中经常用到的公式.

9-177　函数 $u = u(x,y,z)$ 在某一区域内有二阶连续导数，且 $\Delta u = 0$，就称 u 是调和函数. 若 V 是有界闭域，S 是其边界面，n 是 S 的外法线单位向量.

证明　(1) $\iint_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n}dS = 0$

(2) $\iiint_V [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2]dxdydz = \iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS$

证　我们仅证(1)，可直接运用题 9-176 之(1).

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_V (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)dxdydz + \iiint_V u\Delta u dxdydz$$

由 $\Delta u = 0$ 知，$\iiint_V u\Delta u dxdydz = 0$

所以

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_V (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)dxdydz$$

二维与三维情况一样. 用这个题也同样可以证明三维狄利克雷问题解的唯一性，即设 $\Delta u = 0$，当 $(x, y, z) \in V$. $u|_S = f(x,y,z)$ 则此问题如有解，解是唯一的.

9-178　证明若 $u = u(x,y,z)$ 在有界闭域 $\overline{V}$ 上调和，S 是 V 的边界面，

则　$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[u\frac{\cos(r,n)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS$

$(x,y,z) \in V$，$(\xi,\eta,\zeta) \in S$，$r = \{\xi - x, \eta - y, \zeta - z\}$，$r = [r, n]$，是 S 上 (ξ,η,ζ) 点处的外法线单位向量.

证　因为 $\cos(r \cdot n) = \frac{(r \cdot n)}{r}$

$$= \frac{(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos r}{r}$$

这个结果与二维一样，不同的是在三维空间 $\Delta u = 0$ 的基本解是 $u = \frac{1}{r}$. $\frac{\cos(r,n)}{r^2} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}$ 看出这一点非常重要.

所以 $\dfrac{\cos(r,n)}{r^2}\mathrm{d}S=\dfrac{(\xi-x)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+(\eta-y)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi+(\zeta-z)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{r^3}$

$$=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\mathrm{d}S$$

用一个球挖去 $\frac{1}{r}$ 的一个奇异点，是常用方法.

由于 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$，除 $(\xi,\eta,\zeta)=(x,y,z)$ 之外成立. 因此，像在二维情况一样，以 (x,y,z) 为中心. 适当小的 ε 为半径，作一球 S_1，球体记为 V_1，使 $V_1\subset V$，则在 $V\setminus V_1$ 上用第二格林公式得

$$\iint\limits_{S+S_1^-}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\\ u & \frac{1}{r}\end{vmatrix}\mathrm{d}S=0$$

即 $\displaystyle\iint\limits_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}+u\frac{\cos(r,n)}{r^2}\right]\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\cdot u\right]\mathrm{d}S$

在 S_1 上 $r=$ 常量，$\dfrac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=-\dfrac{1}{r^2}=-\dfrac{1}{\varepsilon^2}$

所以 $\displaystyle\iint\limits_S\left[u\frac{\cos(r,n)}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_1}u\mathrm{d}S$

令 $\varepsilon\to0$ 得 $\displaystyle u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[u\frac{\cos(r,n)}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$

9-179 设 $u=u(x,y,z)$ 是调和函数，S 是以 (x,y,z) 为中心 R 为半径的一球面，

则 $\displaystyle u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_S u(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S.$

这是空间调和函数的平均值定理. 由此定理，即可像在二维一样得到调和函数的极值原理(见推论).

证 由题 9-178 知

$$u=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[u\frac{\cos(r,n)}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

在 S 上，$r=R$

所以 $\displaystyle\iint\limits_S\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\frac{1}{R}\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0$

而 $\cos(r,n)=1$

所以，$\displaystyle u=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_S u(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S.$

推论： 设 $u=u(x,y,z)$ 在有界闭域 $\overline{V}$ 上调和，则要么 $u\equiv$ 常数，要么 u 只能在边界上取到最大值和最小值.

9-180 设物体 V(表面 S 光滑)沉浸在液体中,试从帕斯卡定律出发,证明阿基米德定律.

证 帕斯卡原理是说:物体浸人液体中表面各点所受的压力 $p = \rho h$. h 是此点距液体表面的深度,ρ 是液体的密度,设选择坐标系如图 9.51,则物体表面各点的压力为 $p = \rho z$,物体表面所受总压力为

$$F = -\rho\oiint_S z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\rho\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= -\rho V = -W$$

这里 V 即物体的体积,也就是它排开液体的体积,W 是被排开液体的重量. 阿基米德原理:沉浸在液体中的物体受到的浮力等于该物体所排除液体的重量.

注:如物体不是全部浸人水中,此定律仍成立,不过此时要加上一个平面域:$z = 0$ 与 V 相交部分 S_2,但在 S_2 上$\iint_{S_2} z\mathrm{d}S = 0$,故仍有

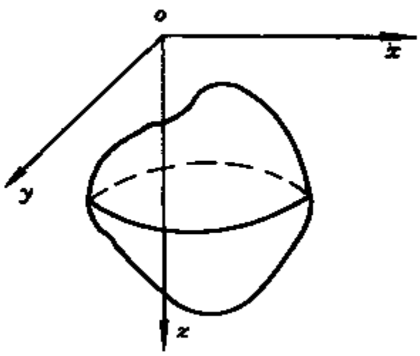


图 9.51

$$\iint_S z\mathrm{d}S = \iint_{S_1+S_2} z\mathrm{d}S = \rho V_1 = W$$

故阿基米德原理仍成立.

帕斯卡定律和阿基米德定律在物理上是两个重要的定律,我们运用高斯公式,便可以建立两个定律的联系,实际问题进一步验证了数学公式的正确性和概括性.

9-181 计算曲面面分

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} (2x+3y+6z)^{-2/3}\mathrm{d}S.$$

解 我们采用特殊分割法来解这个题:以 $2x+3y+6z = t$ 的平面来分割单位球面,则在 t 至 $t+\mathrm{d}t$ 两面之间有二平面之间的距离 $\mathrm{d}h$,$\mathrm{d}h = \frac{\mathrm{d}t}{7}(7 = \sqrt{2^2+3^2+6^2})$.

在两个平面之间的曲面带的

$$\mathrm{d}S = 2\pi\mathrm{d}h = \frac{2\pi}{7}\mathrm{d}t$$

在相应平面 $2x+3y+6z = t$ 上的被积函数为 $t^{-\frac{2}{3}}$,

所以 $\iint_{x^2+y^2+z^2=1} (2x+3y+6z)^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}S$

这个题如套一般解法就是作旋转变换,既超出大纲要求又麻烦.

这里用到半径为 R,高为 h 的球带面积为 $2\pi Rh$,这个也可用积分算得.

$$= \int_{-1}^{1} t^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{2\pi}{7} dt = \frac{4\pi}{7}\int_{0}^{1} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{12}{7}\pi$$

9-182 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且对任意实数 x_0, y_0 和 R 皆有

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

L 是半圆 $y = y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$，试证明

$P(x,y) \equiv 0, \quad Q_x' \equiv 0.$

证 如图 9.52，(x_0, y_0) 是平面上任一点，我们只要证明 $P(x_0, y_0) = 0, \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$ 即可，作半圆 $y = y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$ 则由题设

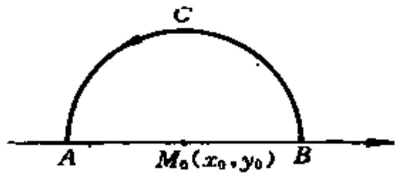


图 9.52

$$\int_{\overset{\frown}{ACB}} Pdx + Qdy = 0,$$

所以，$\oint_{ABCA} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx.$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

由积分中值定理得

$P(\xi_1, y_0) \cdot 2R = \frac{\pi}{2}R^2(Q_x - P_y)|_{(\xi,\eta)}$，其中 $\xi_1 \in [x_0 - R, x_0 + R]$；$(\xi,\eta) \in D$，约去 R，并令 $R \to 0$ 得 $P(x_0, y_0) = 0$，即 $P(x,y) \equiv 0$，所以 $(Q_x - P_y)|_{(x_0,y_0)} = 0$，

即 $Q_x = 0$，从而 $Q_x \equiv 0$.

这是格林公式的一种应用.由 P，Q_x，P_y 连续性，可知一边是 R^2 级的无穷小，另一边是 R 级的，故得 $P = 0$.

第 10 章 常微分方程

10.1 客观题

10.1.1 填空题

10-1 通解为 $y=ce^x+x$ 的微分方程是 $\underline{y'=y-x+1}$.

解 $y'=ce^x+1=y-x+1$.

通解中含一个待定常数的方程是一阶的;含两个独立的待定常数,相应方程应是二阶的.

10-2 通解为 $c_1e^x+c_2x$ 的微分方程是 $\underline{(x-1)y''-xy'+y=0}$.

解 $y'=c_1e^x+c_2$

$y''=c_1e^x$

消去 c_1,c_2 得 $(x-1)y''-xy'+y=0$.

10-3 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为 $\underline{(x-4)y^4=cx}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(4-x)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4-x}\right)\mathrm{d}x$

故 $\ln y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{cx}{x-4}$ 即 $(x-4)y^4=cx$.

可分离变量的方程,也可以说本题有积分因子 $\dfrac{1}{y(x^4-4x)}$.

10-4 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $\underline{y=(x+c)\cos x}$.

解 1 这是一阶线性方程,可以代公式得解:

$$y=e^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left[\left(\int e^{\int\tan x\mathrm{d}x}\cdot\cos x\mathrm{d}x\right)+c\right]$$

$$=(x+c)\cos x.$$

解 2 齐次方程的通解是 $c\cos x$;用常数变易法,或观察法易得非齐次方程的一个特解为 $x\cos x$,故通解是 $x\cos x+c\cos x$.

解 3 用 $\cos x$ 除方程两边得

$\sec xy'+\sec x\tan xy=1$

$[(\sec x)y]'=1\quad(\sec x)y=x+c$

即得 $y=(x+c)\cos x$.

一阶线性方程,通常也是用解 3 式的找积分因子法较好.

10-5 曲线 $y=f(x)$ 过 $(0,-\frac{1}{2})$ 点，其上任一点 (x,y) 处切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$，则

$$f(x)=\underline{\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}$$

解 $f(x)=\int_0^x x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-x^2]-\frac{1}{2}.$$

本题实质是个积分题.

10-6 方程 $y''+y=-2x$ 的通解为

$y=\underline{\quad -2x+c_1\cos x+c_2\sin x\quad}$.

这几个题应当练到"随手"即可写出答案的程度.

10-7 方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为

$y=\underline{\quad e^x(c_1\cos x+c_2\sin x+1)\quad}$.

10-8 方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为

$y=\underline{\quad e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)\quad}$.

10-9 方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为

$y=\underline{\quad c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}\quad}$.

解 此题特解应设为 $y=cxe^{2x}$

则 $y''-4y=4ce^{2x}$ 即得 $y=\frac{x}{4}e^{2x}$，因此通解为

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}.$$

注意设特解的问题.

10-10 $y''+2y'+y=e^{-x}$ 的通解是

$y=\underline{\quad (\frac{1}{2}x^2+c_1x+c_2)e^{-x}\quad}$.

解 齐次方程的通解是 $(c_1x+c_2)e^{-x}$，设非齐次方程的特解是：$y=Ax^2e^{-x}$

则 $y''=(2A-4Ax+Ax^2)e^{-x}$

$2y'=(4Ax-2Ax^2)e^{-x}$

$y=Ax^2e^{-x}$

解得 $A=\frac{1}{2}$，故通解为 $(\frac{1}{2}x^2+c_1x+c_2)e^{-x}$.

本题的特解设为 Ax^2e^{-x}；下题为 $Ax\cos x+Bx\sin x$，是为什么?

10.1.2 单项选择题

10-11 方程 $y''+y=\cos x$ 的一个特解的形式为 $Y=($ $)$. (D)

(A) $Ax\cos x$ (B) $Ax\cos x+B\sin x$

(C) $A\cos x+Bx\sin x$ (D) $Ax\cos x+Bx\sin x$

解 因 $\pm i$ 是相应齐次方程的特征方程的两个根,故特解应设为 $x(A\cos x+B\sin x)$.

如设 $Y=Axe^{ix}$,可以吗,怎样定常数 A?

10-12 微分方程 $xy\cdot y'=x^2+y^2$,满足 $y\Big|_{x=e}=2e$ 的特解为 $($ $)$. (C)

(A) $y^2=2x^2(\ln x+1)$ (B) $y^2=2x^2(\ln|x|+1)$

(C) $y=x\sqrt{2(\ln x+1)}$ (D) $y=x\sqrt{2(\ln|x|+1)}$

解 原方程可化为 $x^2\dfrac{dy^2}{dx^2}-y^2=x^2$.

令 $y^2=u,x^2=t$ 得

$$t\frac{du}{dt}-u=t \text{ 或 } \frac{1}{t}\frac{du}{dt}-\frac{u}{t^2}=\frac{1}{t}$$

$$d\frac{u}{t}=\frac{dt}{t}$$

所以 $\dfrac{u}{t}=\ln|t|+c$ 或 $y^2=2x^2\ln|x|+cx^2$

令 $x=e$ 得 $4e^2=2e^2+ce^2$ 故 $c=2$.

$$y^2=2x^2(\ln|x|+1)$$

这个解有两支:$y=\pm\sqrt{2x^2(\ln|x|+1)}$,由于 $y\Big|_e=2e>0$,故只取 $y>0$ 的分支,又函数定义域为 $|x|\geqslant\dfrac{1}{e}$ 故 $x\in(-\infty,-\dfrac{1}{e})$ 或 $x\in[\dfrac{1}{e},+\infty)$. 由于,给定 $x=e$ 时 $y=2e$. 故这个初始条件只能给出特解为 $x\in[\dfrac{1}{e},+\infty)$ 的解:

$$y=x\sqrt{2(\ln x+1)}.\text{选(C)}.$$

这是个初始条件问题,因为在 $x=e$ 点给出条件,故它的特解只在 e 的一个邻域中存在. 通解的定义域是 $|x|>e$. 因此特解要排除 $x<-e$ 的一段;又 $y\Big|_{x=e}=2e>0$,故对函数而言,又应排除 $y=-\sqrt{2x^2(\ln x+1)}$ 这一支.

10-13 满足方程 $f(x)+2\int_0^x f(x)dx=x^2$ 的解是 $f(x)=($ $)$. (B)

(A) $-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+x+\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}e^{-2x}+x-\dfrac{1}{2}$

(C) $ce^{-2x}+x-\dfrac{1}{2}$ (D) $ce^{-2x}+x+\dfrac{1}{2}$

解 由于 $f(0)=0$,两边求导得

注意,这里实际上还给定了初始条件:$f(0)=0$.

$$f'(x)+2f(x)=2x \text{ 即 } (f(x)e^{2x})'=2xe^{2x}$$

故 $$f(x)e^{2x}=xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

由初始条件得 $c=\frac{1}{2}$,故

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}.$$

10-14 设 $y=f(x)$是 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解,若 $f(x_0)>0$ 且 $f'(x_0)=0$,则 $f(x)$在点 x_0 处( ). (A)

(A) 取得极大值 (B) 取得极小值

(C) 某个邻域内单增 (D) 某邻域单减

解 由 $y''\Big|_{x=x_0}=-4y\Big|_{x=x_0}<0$,故选(A).

对这个题我们可以设 $f(x)=e^x\sin\sqrt{3}x$,$x_0=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

10-15 设线性无关函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程:$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解,c_1,c_2 是待定常数,则此方程的通解是( ). (D)

(A) $c_1y_1+c_2y_2+y_3$

(B) $c_1y_1+c_2y_2-(c_2+c_3)y_3$

(C) $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$

(D) $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$

解 由 y_1-y_3 和 y_2-y_3 是相应齐次方程的解,且若 $\lambda_1(y_1-y_3)+\lambda_2(y_2-y_3)=0$

则 $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2-(\lambda_1+\lambda_2)y_3=0$ 所以 $\lambda_1=\lambda_2=0$

说明 y_2-y_3 与 y_1-y_3 线性无关.故通解为

$$y_1+c_1(y_1-y_3)+c_2(y_2-y_3) \quad \text{选(D)}.$$

这是线性方程解的结构性性质.

10-16 设 a,b,A,φ 均是待定常数,则方程 $y''+y=\cos x$ 的一个特解具有形式( ). (B)

(A) $ax\cos x+b\sin x$ (B) $Ax\sin(x+\varphi)$

(C) $x\cos(Ax+\varphi)$ (D) $x\sin(Ax+\varphi)$

解 由 $\pm i$ 是相应齐次方程的特征根,故特解形式为:

$$x(c_1\cos x+c_2\sin x)=Ax\sin(x+\varphi)$$

故选(B).

就物理意义来讲,谐振动 $y''+y=0$的通解,还是写成 $y=A\sin(x+\varphi)$或 $y=A\cos(x+\varphi)$更好.

10-17 微分方程:$y''-y=\text{sh}x+1$ 的一个特解应具有形式( ). (D)

由 $y''-y=1$ 的一个特解为 -1,故只要写 $y''-y=$

(A) $c_1x\text{sh}x+c_2$ (B) $c_1x\text{ch}x+c_2$

(C) $1-c_1xe^{x}-c_2xe^{-x}$ (D) $c_1xe^{x}+c_2xe^{-x}-1$

解 相应齐次方程的特征方程根是±1.因此,特解有形式 $c_1xe^{x}+c_2xe^{-x}+c_3$,但 $y=-1$ 即是 $y''-y=1$ 的一个特解,故 $c_3=-1$,因此选(D).

shx 的特解形式,这个特解也可写为: $x(A\text{sh}x+B\text{ch}x)$的形式.

10-18 设 $y=y(x)$满足条件

$$y''+4y'+4y=0$$
$$y(0)=2 \quad y'(0)=2$$

则 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=(\quad)$. A)

(A) 2 (B) -2 (C) 1 (D) -1

解 易知,方程的通解有形式:

$$y=(c_1x+c_2)e^{-x}$$

因此 $\int_0^{+\infty}y\mathrm{d}x,\int_0^{+\infty}y'\mathrm{d}x,\int_0^{+\infty}y''\mathrm{d}x$ 均收敛,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}y'=0$.

$$\text{故}\quad \int_0^{+\infty}y\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}y'\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}y''\mathrm{d}x$$
$$=2-\frac{1}{4}y'\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{4}y\Big|_0^{+\infty}=2$$

选(A).

只要从形式上知道方程的解是 $y=(c_1x+c_2)e^{-x}$ 即可知当 $x\to+\infty$ 时 $y,y'\to0$. 没有必要定出 c_1,c_2 求出 y 再算广义积分.

10-19 若有界可积函数满足关系式

$$f(x)=\int_0^{3x}f(\frac{t}{3})\mathrm{d}t+3x-3$$

则 $f(x)=(\quad)$. (B)

(A) $-3e^{-3x}+1$ (B) $-2e^{3x}-1$

(C) $-e^{3x}-2$ (D) $-3e^{-3x}+1$

解 $f'(x)=3f(x)+3$

即 $[e^{-3x}f'(x)]'=3e^{-3x}$

$f(x)=ce^{3x}-1$ 又 $f(0)=-3$,选(B).

只要方程这样给定,就要留意已给定了初始条件. 又设 $f(x)$可积由这个式子就可知 $f(x)$无限次可导.

10-20 若 $y=y(x)$是方程 $x^2y'+xy=y^2$ 的满足条件 $y\Big|_{x=1}=1$ 的解,则 $\int_1^3y(x)\mathrm{d}x=(\quad)$. (A)

(A) ln6 (B) ln3 (C) ln2 (D) ln7

解 方程两边用 y^2 除得

比较本题与 10-18 题解法上的不同处.

$$x^2\frac{\mathrm{d}\frac{1}{y}}{\mathrm{d}x}-x\cdot\frac{1}{y}=-1$$ 两边用 x^3 除得

$$\mathrm{d}\frac{1}{xy}=-\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x,\quad \frac{1}{xy}=\frac{1}{2x^2}+c$$

由 $x=1,y=1$ 得 $c=\frac{1}{2}$,故 $y=\frac{2x}{1+x^2}$

$$\int_1^3 y(x)\mathrm{d}x=\ln(1+x^2)\Big|_1^3=\ln5$$,选(A).

10-21 设 $y=y(x)$是满足方程$(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0$和初始条件 $y(0)=1$ 的解,则

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y(x)\mathrm{d}x=(\quad).$$ (B)

(A) $-\ln3$ (B) $\ln3$ (C) $\frac{1}{2}\ln3$ (D) $-\frac{1}{2}\ln3$

解 原方程左边$=x^2\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}(\sin x+y)=0$,得通解:

$yx^2-y-\sin x=c\quad c=-1$

$$y=\frac{1-\sin x}{1-x^2}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln3$$,故选(B).

这里用到全微分方程的通解,又一次用"凑微分"法;及奇函数在对称区间的积分.

10-22 设 $f(x)$具有一阶连续导数,$f(0)=0$,且积分$\int_L[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关.则 $f(x)=(\quad)$. A)

(A) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$ (B) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x)$

(C) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-1$ (D) $1-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$

解 f 满足方程$f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x$ 及$f(0)=0$得

$f=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$,选(A).

与路径无关条件的应用.

10-23 设 $y=y(x)$是方程 $y''-y'-\mathrm{e}^{\sin x}=0$ 的解,且 $y'(x_0)=0$,则 $y(x)$在(\quad). (C)

(A) x_0 某邻域单增 (B) x_0 某邻域单减

(C) x_0 处取得极小值 (D) x_0 处取极大值

解 $y''\Big|_{x=x_0}=\mathrm{e}^{\sin x_0}>0$,故选(C).

比较本题和 10-14 题.

10-24 设 $y=y(x)$在点$(0,1)$处与抛物线:$y=x^2-x+1$ 相切，并满足方程 $y''-3y'+2y=2e^x$,则 $y=y(x)=($ $)$. (C)

(A) $e^{2x}-xe^x$ (B) $2e^{2x}-e^x+xe^x$

(C) $(1-2x)e^x$ (D) $(1-x)e^x$

解 由 $y(0)=1, y'(0)=-1$,及解方程,设特解为 Axe^x 代入得 $A=-2$.通解为

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}-2xe^x,\quad c_1=1, c_2=0$$

$y=(1-2x)e^x$ 选(C).

本题把方程和导数应用结合在一起了.

10-25 函数 $y=y(x)$在点 x 处的增量满足

$$\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$$

且 $y(0)=\pi$,则 $y(1)=($ $)$. (D)

(A) 2π (B) π (C) $e^{\frac{\pi}{4}}$ (D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

解 令 $\Delta x\to 0$ 得 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x^2}\Rightarrow y=ce^{\arctan x}, c=\pi, y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$ 选(D).

本题包含有微分的概念.

10.2 非客观题

10.2.1 一阶微分方程及可降阶的高阶微分方程

10-26 消去下列各式中的任意常数 C, C_1, C_2,写出相应的微分方程.

1) $y=cx+c^2$ 2) $y=x\tan(x+c)$

3) $xy=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 4) $(y-c_1)^2=c_2x$

解 1) 由 $y=cx+c^2$,两边对 x 求导得 $y'=c$,代入原方程得所求微分方程.

$(y')^2+xy'=y$.

2) 由 $y=x\tan(x+c)$ 两边对 x 求导得:

$y'=\tan(x+C)+x+x\tan^2(x+c)$,用 $\tan(x+c)=y/x$,代入上式消去 c 得

$$y'=\frac{y}{x}+x+\frac{y^2}{x}$$

化简得 $$xy'=x^2+y+y^2$$

3) 在 $xy=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 两边对 x 求导得

$$y+xy'=c_1e^x-c_2e^{-x}$$

含一个任意常数及两个变量的关系式对应于一阶微分方程;含两个独立的常数的式子对应于二阶微分方程.

上式两边再求导得 $2y' + xy'' = xy$，故相应的微分方程是

$$xy'' + 2y' = xy$$

4) 在 $(y - c_1)^2 = c_2 x$ 两边求导得

$$2(y - c_1)y' = c_2$$

用 $c_2 = (y - c_1)^2 / x$ 代入上式，可得

$$2xy' = y - c_1 \qquad (y \neq c_1)$$

上式对 x 求导，得相应的微分方程是

$$y' + 2xy'' = 0$$

请注意本题的解法.

10-27 解方程 $xy\mathrm{d}x + (x^2 + 1)\mathrm{d}y = 0$.

解 1 这是可分离变量的方程

$$-\frac{x}{x^2 + 1}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

$$\ln|y| = \ln\frac{|C_1|}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y\sqrt{x^2 + 1} = C \qquad (C \text{ 可以为零}).$$

可分离变量方程的解法是微分方程的基本内容.

解 2 原方程变形为

$$y\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt{x^2 + 1}\mathrm{d}y = 0$$

即

$$y\mathrm{d}\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}\mathrm{d}y = 0$$

$$\mathrm{d}(y\sqrt{x^2 + 1}) = 0$$

$$y\sqrt{x^2 + 1} = C$$

这是乘了积分因子 $1/\sqrt{x^2 + 1}$，使方程变为全微分方程.

10-28 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x+y}$ 的通解.

解 1 用可分离变量法得

$$\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$-\mathrm{e}^{-y} = e^x + c$$

或

$$(\mathrm{e}^x + c)e^y + 1 = 0$$

解 2 令 $x + y = u$，则 $u' = 1 + y'$. 代入原方程得

$$u' = 1 + \mathrm{e}^u$$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{1 + \mathrm{e}^u} = x + c$$

$$u - \ln(1 + \mathrm{e}^u) = x + c$$

即

$$\ln(1 + \mathrm{e}^{x+y}) = y - c$$

$$1 + \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{y-c}$$

这里令 $u = x + y$ 和下一题中令 $u = x - y + 1$ 的变量替换方法，是解微分方程的常用方法.

10-29 求 $y' = \sin^2(x-y+1)$ 的通解.

解 令 $u = x-y+1$,则 $u' = 1-y'$

$$1-u' = \sin^2 u$$
$$\sec^2 u\,du = dx$$
$$\tan u = x+c$$

即 $\tan(x-y+1) = x+c$

10-30 求 $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$ 的通解.

解 1 这是齐次方程,令 $y = xu$,则 $y' = u+xu'$.代入原方程可得

$$u + xu' = u\ln u$$
$$\frac{du}{u(\ln u-1)} = \frac{dx}{x},\ln|\ln u-1| = \ln|cx|$$
$$\ln u = 1+cx$$

故通解为 $$y = xe^{1+cx}$$

解 2 将原方程变形为

$$\frac{dy}{y} = (\ln y-\ln x)\frac{dx}{x}$$

或 $$d\ln y = (\ln y-\ln x)d\ln x$$

令 $$u = \ln y, t = \ln x$$

$$\frac{du}{dt} - u = -t,\quad d(ue^{-t}) = -te^{-t}dt$$
$$ue^{-t} = te^{-t} + e^{-t} + c$$

故 $$u = t+1+ce^t$$

即 $$y = xe^{1+cx}$$

注意利用原方程变形后的結果.

10-31 求$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$ 的通解.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-4}{x-y-6} = \frac{(y+5)+(x-1)}{-(y+5)+(x-1)}$$

令 $y+5 = (x-1)u$,则 $y' = (x-1)u'+u$

代入得 $$(x-1)u'+u = \frac{1+u}{1-u}$$

即 $$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x-1}$$

积分得 $\arctan u - \dfrac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|c(x-1)|$

故原方程通解为

这个变换的实质是作平移 $x = 1, y = -5$ 是两直线:
$x+y+4 = 0$
$x-y-6 = 0$ 的交点.

$$\arctan\left(\frac{y+5}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln|c(x-1)|\quad (x\neq 1).$$

10-32 求 $x(x+2y)y'-y^2=0$ 及初始条件为 $y(1)=0$ 的特解.

解 这是齐次方程,令 $y=xu$,则 $y'=u+xu'$.代入方程得

$$\frac{(1+2u)\mathrm{d}u}{u+u^2}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|u+u^2|=\ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

故
$$\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{c}{x}$$

将初始条件 $y(1)=0$ 代入上式,得 $c=0$.故所求特解为 $y=0$.

10-33 求方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{xy}}+\left(\frac{2}{y}-\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

此方法的实质是化为以 $\sqrt{x}$ 为未知函数,y 为自变量的贝努利方程.

解 用 $\sqrt{y}/\mathrm{d}y$ 乘以原方程,得

$$\frac{2\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}y}-\frac{\sqrt{x}}{y}+\frac{2}{\sqrt{y}}=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}y}-\frac{\sqrt{x}}{2y^{3/2}}=-\frac{1}{y}$$

$$\mathrm{d}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

故
$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\ln\left|\frac{c}{y}\right|$$

即
$$ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}}=c$$

10-34 求方程 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=y\mathrm{d}y$ 的通解.

解 1 用齐次方程的解法,令 $y=xu$,则 $\mathrm{d}y=x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x$,代入原方程得

原方程两端除以 x 后再代入.

$$x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x-u\mathrm{d}x=u(x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x)$$

即
$$\frac{1-u}{u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

所以
$$ue^{\frac{1}{u}}=\frac{1}{c_1x}$$

故
$$ye^{\frac{x}{y}}=c$$

解 2 用 $1/\mathrm{d}y$ 乘以方程各项得

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=-y$$

联系上一题的解法,在解微分方

这是以 x 为函数，y 为自变量的一阶线性微分方程，以 $1/y^2$ 乘以各项得

$$\mathrm{d}\frac{x}{y}=-\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解之得
$$ye^{\frac{x}{y}}=c$$

程时，将变量 x,y 视为平等的变量，即也可视 y 为自变量，解起来更方便.

解 3 将原方程变形为

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{y^2}=-\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

即
$$\mathrm{d}\frac{x}{y}+\mathrm{d}\ln|y|=0$$

故
$$ye^{\frac{x}{y}}=c$$

体会乘积分因子的方法.

10-35 求方程 $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y+3xy\mathrm{d}x=0$ 满足 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

解 用 $1/x^2$ 乘以方程两边得

$$\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2-3\right]\mathrm{d}y+3\frac{y}{x}\mathrm{d}x=0$$

故方程是齐次的，令 $y=xu$，则 $\mathrm{d}y=x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x$，代入得

$$x(u^2-3)\mathrm{d}u+u^3\mathrm{d}x=0$$

即
$$\frac{3-u^2}{u^3}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分得
$$ue^{\frac{3}{2u^2}}=\frac{1}{c_1x}$$

$$ye^{\frac{3x^2}{2y^2}}=c$$

将 $y|_{x=0}=1$ 代入上式得 $c=1$，故特解为

$$ye^{\frac{3x^2}{2y^2}}=1$$

10-36 求方程 $2x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2y^2\mathrm{d}y$ 的通解.

解 1 以 $\mathrm{d}y$ 除方程两边得

$$-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+2x=2y^2$$

它变成了以 x 为 y 的函数的一阶线性微分方程，我们用 $-1/y^3$ 乘以方程两边，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2}{y}$$

解之得
$$y^2e^{\frac{x}{y^2}}=c$$

将方程中变量 x,y 视为平等变量，而用积分因子法化为全微分的方程，是解方程的一般方法，要求有熟练的凑全微分技巧.

解 2　用 y 乘以原方程两边得

$$2xy\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x = 2y^3\mathrm{d}y$$

或
$$x\mathrm{d}y^2 - y^2\mathrm{d}x = y^2\mathrm{d}y^2$$

令 $u = y^2$

有
$$x\mathrm{d}u - u\mathrm{d}x = u\mathrm{d}u$$

$$\frac{x\mathrm{d}u - u\mathrm{d}x}{u^2} = \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{u}\right) = -\mathrm{d}\ln|u|$$

$$\frac{x}{u} = \ln\left|\frac{c}{u}\right|$$

故有
$$y^2 e^{\frac{x}{y^2}} = c$$

10-37　求方程 $(2xy^{-3} - 3x^2)\mathrm{d}x + 3(1 - x^2)y^{-4}\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

解 1　原方程可化为

$$(2xy^{-3} - 3x^2)\mathrm{d}x - (1 - x^2)\mathrm{d}y^{-3} = 0$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y^{-3}}{\mathrm{d}x} - \frac{2x}{1 - x^2}y^{-3} = -\frac{3x^2}{1 - x^2}$$

这是以 y^{-3} 为 x 的函数的一阶线性方程.在此方程两边同乘以 $1 - x^2$ 后可得

$$\frac{\mathrm{d}[(1 - x^2)y^{-3}]}{\mathrm{d}x} = -3x^2$$

$$(1 - x^2)y^{-3} = -x^3 + c$$

解 2　将原式化为

$$2xy^{-3}\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y^{-3} - 3x^2\mathrm{d}x - dy^{-3} = 0$$

即
$$\mathrm{d}(x^2y^{-3} - y^{-3} - x^3) = 0$$

$$x^2y^{-3} - y^{-3} - x^3 = c$$

10-38　求 $y' - y = e^x$ 的通解.

解 1　这是一阶线性非齐次方程,$y = xe^x$ 是一个特解.而齐次方程的通解是

$$y = ce^x$$

故此非齐次线性方程的通解为

$$y = (x + c)e^x$$

解 2　以 e^{-x} 乘以原方程两边得

$$\frac{\mathrm{d}e^{-x}y}{\mathrm{d}y} = 1$$

故
$$ye^{-x} = x + c$$

即
$$y = (x + c)e^x$$

解一阶线性方程,如学会凑全微分法,就不用去生套公式.

此解法为全微分法.

注意线性微分方程解的结构.

10-39 求 $x\cos x\dfrac{dy}{dx}+y(x\sin x+\cos x)=1$ 的通解.

解 这显然是一阶线性方程,故用 $1/\cos^2 x$ 乘两边得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{xy}{\cos x}\right)=\sec^2 x$$

$$\frac{xy}{\cos x}=\tan x+c$$

即

$$xy=\sin x+c\cos x$$

这种方法本质上都是乘积分因子凑全微分的方法.

10-40 求 $y'+y=x\sqrt{y}$ 的通解.

解 用 $1/\sqrt{y}$ 乘以方程两边可得

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}+\sqrt{y}=x$$

即

$$\frac{d\sqrt{y}}{dx}+\frac{\sqrt{y}}{2}=\frac{x}{2}$$

$$d(\sqrt{y}e^{\frac{x}{2}})=\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}dx$$

$$\sqrt{y}e^{\frac{x}{2}}=xe^{\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+c$$

即

$$y=(x-2+ce^{-\frac{x}{2}})^2$$

这是贝努里方程,解法本质是先乘个积分因子化为线性方程,再乘个积分因子便可得通解.

10-41 求 $y'=\dfrac{4x^3y}{x^4+y^2}$ 的通解.

解 变化原方程为

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{4y}=\frac{y}{4x^3}$$

即

$$\frac{dx^4}{dy}-\frac{x^4}{y}=y$$

两边乘以 $1/y$ 后可得

$$d\left(\frac{x^4}{y}\right)=dy$$

$$\frac{x^4}{y}=y+c$$

故

$$x^4=y^2+cy$$

视 x 为 y 的函数便得贝努里方程.

通解不一定包括方程的所有解,如这两题中 $y=0$ 满足方程,但不在通解表达式中.

10-42 求方程 $x(e^y-y')=2$ 的通解.

解 原方程可化为

$$xe^y\left(1-e^{-y}\frac{dy}{dx}\right)=2$$

即

$$x\frac{de^{-y}}{dx}+2e^{-y}=x$$

$$dx^2e^{-y}=x^2dx$$

故通解为 $$x^2e^{-y}=\frac{1}{3}x^3+c$$

10-43 求方程 $y'=e^{2x-y}$ 满足 $y(0)=0$ 的特解.

本题用分离变量法解也很简单.

解 令 $u=2x-y$,则 $u'=2-y'$,代入原方程可得

$$\frac{du}{dx}+e^u=2$$

所以, $$\frac{de^{-u}}{2e^{-u}-1}=-dx$$

积分得 $$2e^{-u}-1=ce^{-2x}$$

$$2-e^{2x-y}=ce^{-y}$$

将初始条件 $y(0)=0$ 代入上式得 $c=1$,所以特解为

$$2e^y-e^{2x}=1$$

10-44 求方程 $xdy-ydx=(x^2+y^2)dx$ 的通解.

解 将原方程化为

$$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=dx$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x+c$$

或 $$y=x\operatorname{tg}(x+c)$$

10-45 求方程 $(x-y^2)dx+2xydy=0$ 的通解.

解 将原方程化为

$$xdy^2-y^2dx=-xdx$$

上式两边乘以 $1/x^2$ 得

$$d\frac{y^2}{x}=-\frac{dx}{x}$$

$$\frac{y^2}{x}=\ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

即 $$x=ce^{-\frac{y^2}{x}}$$

注意:

乘积分因子凑全微分方法.

10-46 求方程 $(y-xy^3)dx+xdy=0$ 的通解.

解 这是伯努利方程.

$$x\frac{dy}{dx}+y=xy^3$$

变形 $$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{x}\frac{1}{y^2}=1$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^2}\right)-\frac{2}{x^3}\frac{1}{y^2}=-\frac{2}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2y^2}\right)=-\frac{2}{x^2}$$

积分得 $$\frac{1}{x^2y^2}=\frac{2}{x}+c$$

或 $$2xy^2+cx^2y^2=1$$

10-47 求方程 $(x^2y^2-y)dx+(2x^3y+x)dy=0$ 的通解.

解 将原方程化为

$x^2y^2dx+2x^3ydy+xdy-ydx=0$,用 $1/x^2$ 乘上式各项得

$$y^2dx+xdy^2+d\frac{y}{x}=0$$

$$d\left(xy^2+\frac{y}{x}\right)=0$$

故得解 $$x^2y^2+y=cx$$

10-48 求方程 $(x^2-y^2+a^2)dx+2xydy=0$ 的通解.

解 变方程为

$$(x^2+a^2)dx-y^2dx+xdy^2=0$$

用 $1/x^2$ 乘以上式两边得

$$\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx+d\frac{y^2}{x}=0$$

即 $$d\left(x-\frac{a^2}{x}+\frac{y^2}{x}\right)=0$$

$$x^2+y^2-a^2=cx$$

10-49 求方程 $2dx+\sec x\cos y\,dy=0$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解.

解 原方程等价于

$$d(2\sin x+\sin y)=0$$

$$2\sin x+\sin y=c$$

代入初始条件得 $c=0$,所以特解为

$$y=\arcsin(2\sin x)\qquad\left(-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$$

10-50 求方程 $(e^x+3y^2)dx+2xydy=0$ 的通解.

解 将原方程化为

$$e^xdx+3y^2dx+2xydy=0$$

$$x^2e^xdx+d(x^3y^2)=0$$

故 $$x^3y^2+x^2e^x-2xe^x+2e^x=C$$

以 x^2 乘上 $3y^2dx+2xydy$ 即得 $d(x^3y^2)$,而 x^2e^xdx 总是个微分项.

10-51 求方程$(y\cos x - x\sin x)dx + (y\sin x + x\cos x)dy = 0$的通解.

解 因为

$$\frac{\partial(y\cos x - x\sin x)}{\partial y} - \frac{\partial(y\sin x + x\cos x)}{\partial x}$$
$$= \cos x - (y\cos x + \cos x - x\sin x)$$
$$= -(y\cos x - x\sin x)$$

故此方程存在与 x 无关的积分因子,设为 $\mu(y)$,则应有

$$(y\cos x - x\sin x)\mu'(y)$$
$$= \mu(y)\left[\frac{\partial(y\sin x + x\cos x)}{\partial x} - \frac{\partial(y\cos x - x\sin x)}{\partial y}\right]$$

故
$$\mu'(y) - \mu(y) = 0$$
$$\mu(y) = e^y$$

且原方程乘以 e^y 后得

$$de^y(y\sin x + x\cos x - \sin x) = 0$$

故所求的通解为

$$e^y(y\sin x + x\cos x - \sin x) = C$$

注意:判断微分方程有积分因子 $\mu(y)$ 或 $\mu(x)$ 的方法,以及它与判断是否为全微分方程之间的联系.

10-52 求方程$1 + (y')^2 = 2yy''$的通解.

解 令 $y' = p$,则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}p$.代入原方程得

$$2yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2$$

分离变量
$$\frac{2p\,dp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y}$$

积分得
$$\ln(1 + p^2) = \ln|c_1 y|$$
$$1 + y'^2 = c_1 y$$
$$\frac{dy}{\pm\sqrt{c_1 y - 1}} = dx$$
$$\pm\sqrt{c_1 y - 1} = \frac{1}{2}c_1 x + c_2$$

故
$$y = \frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_2\right)^2 + \frac{1}{c_1}$$

方程中不显含 x,故化 y'' 为 $y'' = p\frac{dp}{dy}$,使方程降为以 p 为未知函数,y 为自变量的一阶方程.

10-53 求方程$x^3\frac{d^2x}{dt^2} + 1 = 0$满足初始条件$x(1) = 1, x'(1) = 0$的特解.

解 $\frac{d^2x}{dt^2} = -x^{-3}$

令$\frac{dx}{dt} = p$,则$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dx}p$,代入上式得

$$\mathrm{d}p^2 = \mathrm{d}x^{-2}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = x^{-2} + C_1$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\left(\frac{1}{x^2} + C_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

将初始条件代入上式得 $C_1 = -1$,

所以 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

解之得 $$x^2 = 1 - (t + c_2)^2$$

再将 $x(1) = 1$ 代入上式得 $c_1 = -1$,所以方程的特解为

$$x^2 = 1 - (t - 1)^2$$

对于初始问题,先确定 C_1 再往下作更好.

利用分离变量法.

注意:这个解只是半圆:

$x = \sqrt{2t - t^2}$

$(0 < t < 2)$.

10-54 求方程 $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$ 的通解.

解 令 $y' = p$,则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,再令 $p = ux$,则 $y'' = xu' + u$,从而得

$$xu' = u(\ln u - 1)$$

或 $$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$u = \mathrm{e}^{c_1x+1}$$

即 $$y' = x\mathrm{e}^{c_1x+1}$$

$$y = \frac{1}{c_1}x\mathrm{e}^{c_1x+1} - \frac{1}{c_1^2}\mathrm{e}^{c_1x+1} + c_2$$

要学会并习惯用微分法来验证所得解是原方程的解.

10-55 求方程 $(y''')^2 - y''y^{(4)} = 0$ 的通解.

解 令 $y^{(3)} = p, y^{(4)} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y''}p$.则原方程可化为

$$p^2 - y''p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y''} = 0$$

$$p\left(p - y''\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y''}\right) = 0$$

由 $p = 0$,直接积分得

$$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$$

为原方程的一族解,由

$$p - y''\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y''} = 0$$

得 $$p = b_1y''$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = b_1y''$$

此方程既不显含自变量 x,也不含 y,故含 $y''' = p$, $y^{(4)} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y''}\cdot\frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y''}$.使之降为关于变量 P 与 y'' 的一阶方程.

$$y'' = b_2 e^{b_1 x}$$

$$y = \frac{b_2}{b_1^2} e^{b_1 x} + b_3 x + b_4$$

故此方程的通解为

$$y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

或 $$y = \frac{b_2}{b_1^2} e^{b_1 x} + b_3 x + b_4$$

其中 $b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3$ 为任意常数.

10.2.2 微分方程的应用

请比较两种解法.对应用问题,首先应当选择好的坐标系.

10-56 已知曲线的切线和切点的矢径相交成定角 α,求此曲线.

解 1 如图 10.1 设 $M(x,y)$ 是曲线上任一点.PM 是切线,倾角为 β,矢径 OM 的倾角为 θ,则

$$\beta = \theta + \alpha,$$

且 $\tan\beta = y'$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

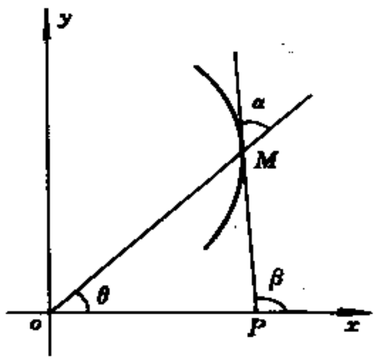


图 10.1

记 $a = \mathrm{tg}\alpha$,则由

$$\tan\beta = \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha}$$

得 $$y' = \frac{\frac{y}{x} + a}{1 - a\frac{y}{x}}.$$

令 $y = xu$,代入上式得

$$\frac{(1 - au)}{a(1 + u^2)}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\frac{1}{a}\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln|c_1 x|$$

即 $$\frac{2}{a}\arctan\frac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2) = \ln|C|$$

这里 a,θ 定义同上,C 为任意常数.

解 2 建立极坐标系,可得方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{a}$$

$$\ln\left|\frac{r}{c}\right| = \frac{\theta}{a}$$

故 $$r = ce^{\frac{\theta}{a}}$$

10-57 求曲线方程,使其法线段的长度为常数 a(如图 10.2 中所示 $\overline{MP}$ 之长为法线长,而 $\overline{MQ}$ 称为切线长).

解 如图 10.2,法线方程为

$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$.

令 $Y = 0$,得

$X = y'y + x$

所以,$\overline{MP}^2 = (y'y)^2 + y^2$

依题意得$(y'y)^2 + y^2 = a^2$

$y' = \pm\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$

$\pm\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \mathrm{d}x$

$\pm\sqrt{a^2 - y^2} = x + c$

即 $y^2 + (x + c)^2 = a^2 \quad (1)$

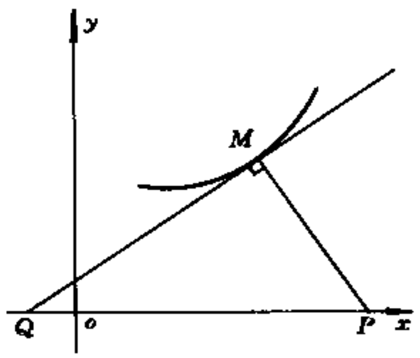


图 10.2

请注意怎样将几何问题化为微分方程的问题.

通解表示的积分曲线是一族圆,你能用初等几何方法来验证这一结果是正确的吗?试画出(1) 式的图形来考虑.

10-58 求曲线方程,使其切线长为常数 a.

解 切线方程为(见图 10.2)

$Y - y = y'(X - x)$

令 $Y = 0$,得 $X = x - y/y'$

所以
$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2 = a^2$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - y^2}\mathrm{d}y}{y} = \pm\mathrm{d}x$$

这个方程解的曲线称为曳物线.

令 $y = a\sin t$,得

$$\int\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\mathrm{d}y = a\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$= a\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t} - a\int\sin t\mathrm{d}t$$

$$= a[\ln|\csc t - \operatorname{ctg} t| + \cos t] + c_1$$

$$= a\left[\ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right| + \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}\right] + c_1$$

故所求的曲线方程为

$$a\ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right| + \sqrt{a^2 - y^2} = \pm x + c$$

$$(|y| \leqslant a, y \neq 0).$$

10-59 求经过点(0,2) 的曲线,使对应于区间$[0,x]$上曲边梯形的面积等于该段弧长的两倍.

解 由题意得

为建立微分方

$$\int_0^x y\mathrm{d}x = 2\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

程先建立了积分方程.

上式两边求关于 x 的导数得

$$y = 2\sqrt{1+y'^2}$$

变形可得

$$\frac{2\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-4}} = \pm\,\mathrm{d}x$$

$$\ln\left|\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{C}\right| = \pm\, x$$

在得到的特解中,解其代数方程即得左式.

即

$$y+\sqrt{y^2-4} = C\mathrm{e}^{\pm x}$$

由 $x=0, y=2$ 得 $C=2$,故得曲线方程

$$y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$$

10-60 求过点(0,0)的曲线方程,使曲线上任一点的法线段中点(参见图 10.2)位于抛物线 $2y^2 = x$ 上.

解 利用 10-57 题前半部得到的结果,法线段$\overline{MP}$的中点坐标为 $\left(x+\frac{yy'}{2},\frac{y}{2}\right)$,它应在抛物线上,故得

$$2\left(\frac{y}{2}\right)^2 = x + \frac{1}{2}yy'$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x} - 2y^2 = -4x$$

$$\mathrm{d}(y^2\mathrm{e}^{-2x}) = -4x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$$

$$y^2\mathrm{e}^{-2x} = 2x\mathrm{e}^{-2x} + e^{-2x} + C$$

由 $x=0, y=0$ 得 $C=-1$. 故所求曲线方程为

$$y^2 = 1 + 2x - \mathrm{e}^{2x}$$

10-61 求立方抛物线族 $y=ax^3$ 的正交轨线(即求一曲线族,这族曲线中的每一曲线与 $y=ax^3$ 中每一条相交成直角).

注意:利用两族曲线及其正交关系消去参数 a,而得到要求的曲线族.

解 设所求曲线族中曲线为 $y=y(x)$,则 y' 是 $y=ax^3$ 斜率的负倒数,而对应 x 点的 $y=ax^3$ 的斜率为

$$y' = 3ax^2 = \frac{3y}{x}$$

故正交轨线方程为

$$y' = -\frac{x}{3y}$$

即

$$x^2 + 3y^2 = C$$

10-62 求双曲线族 $x^2 - 2y^2 = a^2$ 的正交轨线.

解 曲线族方程两边对 x 求导得

$$x - 2yy' = 0$$

这里已消去了所给曲线族的参数 a.

$$y' = \frac{x}{2y}$$

因此,所求正交轨线的方程为

$$y' = -\frac{2y}{x}$$

$$\ln|y| = \ln\frac{|C|}{x^2}$$

即 $x^2y = C$ 为所求正交轨线.

10-63 证明曲率处处相等的曲线是圆弧.

曲率表示曲线弯曲程度,圆弧也仅有圆弧的曲率处处相等.

解 设曲线方程是 $y = y(x)$,

则 $$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \pm\frac{1}{R}$$

即 $$y'' = \pm\frac{1}{R}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

令 $y' = p$

则 $$\frac{\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{3/2}} = \pm\frac{\mathrm{d}x}{R}$$

故 $$\frac{p}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{1}{R}(x-a)$$

$$p = \frac{\pm\frac{1}{R}(x-a)}{\sqrt{1-\frac{1}{R^2}(x-a)^2}}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\pm(x-a)\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-(x-a)^2}}$$

即 $$y - b = \pm\sqrt{R^2-(x-a)^2}$$

或 $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

上式表示曲线是以 R 为半径的圆,即证明了本题的正确性.

10-64 物体冷却速度与该物体和周围介质的温差成正比.具有温度为 T_0 的物体放在保持常温为 a 的室内,求温度 T 与时间 t 的关系.

请注意化物理问题为微分方程问题的方法.

解 设在 t 时的温度为 $T = T(t)$,

则 $$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T-a)$$

$$T = c\mathrm{e}^{-kt} + a$$

k 为比例常数.

由 $t = 0, T = T_0$,得 $C = T_0 - a$

所以 $$T = T_0\mathrm{e}^{-kt} + a(1-\mathrm{e}^{-kt})$$

10-65 设室温为20℃,一物体加热到100℃,在10min内冷却到60℃,问此物体从100℃降到25℃需要经过多少时间?

解 由题设知 $a = 20, T_0 = 100$,则由题10-64结果得

$$T = 80e^{-kt} + 20$$

将 $t = 10, T = 60$ 代入上式,得

$$k = \frac{1}{10}\ln 2$$

依题意,再将上面求出的 k 值及 $T = 25$ 代入时间与温度的关系式,得

$$t = 40(\text{min})$$

即物体从100℃降到25℃要经过40min

10-66 在液体中旋转的圆盘,由于摩擦而使转速减慢,而这种影响与旋转的角速度成正比.若已知圆盘开始时的角速度 $\omega_0 = 10\pi s^{-1}$,经过25min后角速度 $\omega' = 6\pi s^{-1}$.试求角速度与时间的关系.经过多少时间其角速度 $\omega = 2\pi s^{-1}$.

解 设角速度为 $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

则
$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega$$

$$\omega = ce^{-kt}$$

由 $t = 0, \omega_0 = 10\pi$,得 $c = 10\pi$,

故
$$\omega = 10\pi e^{-kt}$$

依题意,将 $t = 25, \omega = 6\pi$ 代入上式,得

$$25k = \ln\frac{10\pi}{6\pi} = \ln\frac{5}{3} \tag{1}$$

而当 $\omega = 2\pi$ 时,有

$$kt = \ln 5 \tag{2}$$

联立(1)与(2)得

$$t = \frac{25\ln 5}{\ln\frac{5}{3}}(\text{s}) \approx 79(\text{s})$$

这即为题意所求的时间.

10-67 水从容器经小孔流出的速度由公式 $v = 0.6\sqrt{2gh}$ 所确定,h 是从孔到水面的高度,g 是重力加速度,现有一直径为 $2R = 1$m,高 $H = 1.5$m的圆柱形容器装满了水,其底部有一直径为 $2r = 0.05$m的小孔,问经过多少时间,才能使水从孔中全部流出?

解 我们用微元法来建立微分方程,设当 $h = h(t)$,在 t 到 $t + dt$ 的时间内,从孔中流出的水量为 $vdt \cdot \pi r^2$,而高度 h 下降为 dh 时,下降

的水量为 $\pi R^2 \mathrm{d}h$，这两个水量应相等，故得微分方程

$$\pi R^2 \mathrm{d}h = -\pi r^2 \cdot 0.6\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t$$

$$t + c = -\frac{R^2\sqrt{h}}{0.3r^2\sqrt{2g}}$$

当 $h = H = 1.5$ 时，$t = 0$，代入上式得

$$C = -\frac{R^2\sqrt{1.5}}{0.3r^2\sqrt{2g}}$$

故水全部流出时，即 $h = 0$ 时所需时间为

$$t = -C \approx 367(s)$$

10-68 船在河中行驶时所受水的阻力与船的速度成正比.设将船视为一质点，初速为 1.5m/s，经 4s 后速度为 1m/s，问何时速度减为 1cm/s?到小船停止时它走过多少路程?

解 由题设及牛顿第二运动定律知

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}v$$

这里 m 是船的质量，k 是比例常数，令 $a = k/m$，

则
$$v = Ce^{-at}$$

当 $t = 0$ 时，$v_0 = 1.5$，得 $C = 1.5$；又经过 $4s$ 后 $v = 1$，故有

$$a = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$$

当速度减为 1cm/s = 0.01m/s 时有

$$0.01 = 1.5e^{-at}$$

$$t = 4\frac{\ln 150}{\ln 1.5} \approx 49.43(s)$$

这就是船速减为 1cm/s 所需的时间，到小船停止时它走过的路程为

这里用到广义积分.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\infty v(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty 1.5e^{-\left(\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}\right)t}\mathrm{d}t \\ &\approx 14.80(\mathrm{m}) \end{aligned}$$

10-69 子弹以速度 $v_0 = 400$m/s 打进一厚为 $h = 20$cm 的墙壁，穿过后以速度 100m/s 而飞出.假定墙壁对子弹运动阻力和速度平方成正比，求子弹穿过墙壁所需的时间.

解 由题意及牛顿第二定律知

a 是比例常数.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -av^2 \qquad (a\ 是正常数)$$

$$\frac{1}{v} = at + C_1$$

这里 x 是子弹

由 $t=0, v=400$ 得 $C_1=1/400$,

所以
$$\frac{1}{v}=\frac{400at+1}{400} \tag{1}$$

即
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{400at+1}{400}$$

$$\ln(400at+1)=ax+C_2$$

由 $t=0, x=0$,得 $C_2=0$. 当 $x=0.2$ 时,得所需时间 t_1

$$400at_1=\mathrm{e}^{0.2a}-1$$

又当 $v=100$ 时,$t=t_1$. 由(1)式得

$$400at_1=3$$

子弹穿过墙壁所需时间为

$$t_1=\frac{3}{4000\ln 2}\approx 0.001(\mathrm{s})$$

在墙壁中运动的路程,故
$0\leqslant x\leqslant 0.2$.

顺便可求出
$a=10\ln 2$.

10-70 在电阻为 R,电感为 L 的电路中,通过的电流 i 与电动势 u 满足如下方程

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=u$$

如果 $u=E\sin\omega t$(L,R,E,ω 是常数),且当 $t=0$ 时,$i=0$,求 $i=i(t)$.

解 我们可用积分法来解此方程. 在方程两边乘以$\frac{1}{L}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}$ 得

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}i)=\frac{E}{L}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

由 $t=0$ 时,$i=0$,得

$$\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}i=\frac{E}{L}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$i=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t+L\omega\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})$$

10-71 一质量为 m 的物体,在常力 p 的作用下沿直线运动,设开始时速度和路程都等于零,而阻力与速度的平方成正比,试求速度、路程与时间的函数关系.

解 由牛顿第二运动定律知

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=p-kv^2$$

即
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a^2-b^2v^2$$

这里 $a^2=p/m, b^2=k/m$ 均为常数,

所以
$$\frac{1}{2ab}\ln\frac{a+bv}{a-bv}=t+C_1$$

由于 $t=0$ 时，$v=0$，故 $C_1=0$，所以速度与时间的函数关系为

$$v=\frac{b}{a}\tan abt$$

设在运动开始后经过时间 t 所走过的路程为 x，上式也可写为

$$\mathrm{d}x=\frac{b}{a}\frac{\mathrm{sh}abt}{\mathrm{ch}abt}\mathrm{d}t$$

$$x=\frac{1}{a^2}\ln(\mathrm{ch}abt)+C_2$$

$t=0$ 时，$x=0$ 得 $C_2=-1/a^2$。所以路程与时间的函数关系为

$$x=\frac{1}{a^2}\ln(\mathrm{ch}abt)$$

10-72 一质量为 m 的物体，以速度 v_0 垂直上升，假定空气阻力与物体速度平方成正比．试求物体上升高度和从最高点返回到原处的速度，以及物体上升和下降的时间．

注意：物体上升与下降的两个过程的方程不同．

解 当物体上升时，取开始运动点为原点，x 轴铅直向上，则运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg-kv^2$$

令 $a^2=g,b^2=k/m$，则上式变为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-(a^2+b^2v^2)$$

$$\frac{1}{ab}\mathrm{arctg}\frac{b}{a}v=-t+C_1$$

$t=0$ 时，$v=v_0$，得

$$C_1=\frac{1}{ab}\arctan\frac{b}{a}v_0$$

$$\arctan\frac{b}{a}v=\arctan\frac{b}{a}v_0-abt$$

物体上升到最高点时 $v=0$，代入上式得所需时间

$$t_1=\frac{1}{ab}\arctan\frac{b}{a}v_0$$

所以物体上升的速度与时间的关系为

$$v=\frac{a}{b}\tan(abt_1-abt)\qquad(0\leqslant t\leqslant t_1)$$

从而物体上升的高度为

$$H=\int_0^{t_1}v\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2b^2}\ln\left(1+\frac{b^2}{a^2}v_0^2\right)$$

当物体下降时，我们取开始下落的点为原点，x 轴铅直向下，这时

运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv^2$$

即
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a^2-b^2v^2$$

$$\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bv}{a-bv}\right|=t+C_2$$

$t=0$ 时,有 $v=0$,所以 $C_2=0$,故物体下降的速度与时间的关系为

$$v=\frac{b}{a}\mathrm{th}(abt)$$

下降的路程与时间的关系为

$$x=\int_0^t v\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\ln(\mathrm{ch}abt)$$

回到原处,即 $x=H$,所用时间为 t_2,

$$H=\frac{1}{a^2}\ln(\mathrm{ch}abt_2)$$

即
$$t_2=\frac{1}{ab}\ln(\mathrm{e}^{a^2H}+\sqrt{\mathrm{e}^{a^2H}-1})$$

10.2.3 线性方程

10-73 已知 $y_1=\cos x, y_2=\mathrm{e}^{-x}$ 是一二阶齐次线性方程的两个解,试建立此方程.

解 由解的结构知,$y=C_1\cos x+C_2\mathrm{e}^{-x}$ 是方程的通解.

故
$$y'=-C_1\sin x-C_2\mathrm{e}^{-x}$$
$$y''=-C_1\cos x+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

消去 C_1,C_2 得

$$(\cos x-\sin x)y''+2\cos xy'+(\cos x+\sin x)y=0$$

为所求方程.

$\cos x$ 与 e^{-x} 线性无关,故可得通解.请读者验证 y_1,y_2 确是方程的解.

10-74 已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$、$y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 是二阶非齐次线性微分方程的解,求此方程.

解 由解的结构知,$y=x\mathrm{e}^x+C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$ 是通解.且可以看出,这是常系数方程,2 和 -1 是特征方程的两个根,$x\mathrm{e}^x$ 是非齐次方程的特解,故所求方程为

$$y''-y'-2y=\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x$$

注意常系数二阶微分方程解的结构,请读者用题 10-74 的方法消去 C_1,C_2 看所得方程是否一样.

10-75 求方程

$(\cos x-\sin x)y''+2\cos xy'+(\cos x+\sin x)y=0$ 的通解(此即题

在线性方程 $Ay''+By'+Cy=0$

10.48 中的方程).

解 由方程系数:$(\cos x-\sin x)-2\cos x+(\cos x+\sin x)=0$知:$y=e^{-x}$是方程的一个解,我们来求另一个与之线性无关的解.设另一个解是$y=u(x)e^{-x}$.

则 $$y''=u''(x)e^{-x}-2u'(x)e^{-x}+u(x)(e^{-x})'' \quad (1)$$

$$y'=u'e^{-x}+u(x)(e^{-x})' \quad (2)$$

$$y=u(x)e^{-x} \quad (3)$$

代入方程得

$$(\cos x-\sin x)u''-2(\cos x-\sin x)u'+2\cos xu'=0$$

即 $$(\cos x-\sin x)u''+2\sin x\cdot u'=0$$

我们只需求u的一个特解,易得$u'=e^x(\cos x-\sin x)$.

所以 $$u=e^x\cos x$$

即 $$y=\cos x$$

为此方程另一特解.所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2\cos x$$

中、差$A+B+C=0$,则$y=e^x$是一个解;若$A-B+C=0$,$y=e^{-x}$是一个解.

对u'说这是一个一阶线性齐次方程.求出u'再积分得u.这样的方法叫常数变易法.如果$u(x)$是常数,则$u(x)e^{-x}$是与e^{-x}线性相关的解.$u(x)$不是常数,可求得$u'(x)$的一阶方程.

10-76 试用常数变易法求方程

$$y''-y'-2y=e^x-2xe^x$$

的一个特解(此方程即题10-74中的方程).

解 相应齐次方程的通解是

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$$

要得到非齐次方程的通解,C_1、C_2不能是常数,而令$y=u_1(x)e^{2x}+u_2(x)e^{-x}$,出现两个待定函数$u_1(x)$、$u_2(x)$,需要两个独立方程,其中一个是$y$应当满足原题所给方程.另一个可以由我们自由确定.由

$$y'=u'(x)e^{2x}+u'_2(x)e^{-x}+2u_1(x)e^{2x}-u_2(x)e^{-x}$$

令 $$e^{2x}u'_1(x)+e^{-x}u'_2(x)=0 \quad (1)$$

这时,$y'=2u_1(x)e^{2x}-u_2(x)e^{-x}$,

$$y''=4u_1(x)e^{2x}+u_2(x)e^{-x}+2u'_1e^{2x}-u'_2e^{-x}$$

代入题中的非齐次方程,得

$$2u'_1e^{2x}-u'_2e^{-x}=e^x-2xe^x \quad (2)$$

联立(1)、(2),解之得

$$3e^{2x}u'_1=e^x-2xe^x$$

$$3e^{-x}u'_2=2xe^x-e^x$$

求得u_1,u_2各一特解为

$$u_1=\frac{2}{3}xe^{-x}+\frac{1}{3}e^{-x}$$

$$u_2=\frac{1}{3}xe^{2x}-\frac{1}{3}e^{2x}$$

题10-76介绍求二阶线性非齐次方程特解的常数变易法.请与上题比较两种常数变易方法的异同点,并用待定系数法求本题的通解.

故得所求方程的一个特解为

$$y=\left(\frac{2}{3}xe^{-x}+\frac{1}{3}e^{-x}\right)e^{2x}+\left(\frac{1}{3}xe^{2x}-\frac{1}{3}e^{2x}\right)e^{-x}$$
$$=xe^{x}$$

10-77 试用常数变易法推导一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=f(x)$ 的求解公式.

解 齐次方程的通解是

$$y_0(x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}P(\xi)d\xi}=Cy_1(x)$$

令非齐次方程的一个特解为

$$y=u(x)y_1(x)$$

则
$$y'=u'(x)y_1+uy'_1$$

代入原方程,并由 y_1 是齐次方程的解得

$$u'(x)=f(x)/y_1(x)=f(x)e^{\int_{x_0}^{x}P(\xi)d\xi}$$

所以,
$$u=\int_{x_0}^{x}[f(t)e^{\int_{x_0}^{t}p(\xi)d\xi}]dt$$

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}P(\xi)d\xi}\cdot\int_{x_0}^{t}[f(t)e^{\int_{x_0}^{x}P(\xi)d\xi}]dt$$

是非齐次方程的一个特解,

故
$$y=\left[C+\int_{x_0}^{x}[f(t)e^{\int_{x_0}^{t}P(\xi)d\xi}]dt\right]\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}P(\xi)d\xi}$$

为原方程的通解.

10-78 设已知二阶线性微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

相应齐次方程两个线性无关的解是 $y_1(x)$、$y_2(x)$,试用常数变易法,求非齐次方程的一个特解.

解 令所求特解为 $y=u_1y_1+u_2y_2$

并令
$$u'_1y_1+u'_2y_2=0 \qquad (1)$$

则
$$y'=u_1y'_1+u_2y'_2$$
$$y''=u'_1y'_1+u'_2y'_2+u_1y''_1+u_1y''_2$$

将 y,y',y'' 代入题给方程得

$$u'_1y'_1+u'_2y'_2=f(x) \qquad (2)$$

y_1,y_2 线性无关,故 $J=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}\neq 0$

联立解(1)、(2)得

$$u'_1=-\frac{1}{J}y_2f(x);\qquad u'_2=\frac{1}{J}y_1f(x)$$

我们反复用常数变易法,目的是要读者掌握这一方法,而不是要大家去记住这些公式.

积分可得 u_1 及 u_2 各一个特解. 代入 $y = u_1y_1 + u_2y_2$ 即可得所求特解.

10-79 常系数二阶方程

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

的一个特解可表示为:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

其中 $\varphi(x)$ 是相应(1) 的齐次方程,且满足条件

$$\varphi(0) = 0 \text{ 及 } \varphi'(0) = 1$$

的特解,试证明之.

本题所导出的求解公式,得自于拉氏变换,$y(x)$ 是 $\varphi(x)$ 和 $f(x)$ 的卷积. 一般情况下,可取 $x_0 = 0$,主要看 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点是否连续.

解 $y' = \int_{x_0}^{x} \varphi'(x-t)f(t)\mathrm{d}t$

$$y'' = \varphi'(0)f(x) + \int_{x_0}^{x} \varphi''(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$= f(x) + \int_{x_0}^{x} \varphi''(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$y'' + ay' + by$$

$$= f(x) + \int_{x_0}^{x} [\varphi''(x-t) + a\varphi'(x-t) + b\varphi(x-t)]f(t)\mathrm{d}t$$

$$= f(x)$$

故 $y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 是所求的一个特解.

10-80 分别用常数变易法和题 10-79 中的卷积方法,求方程 $y'' + y = \sec x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的通解.

解 1 先用常数变易法求特解.

令 $y = u_1\sin x + u_2\cos x$

$$u'_1\sin x + u'_2\cos x = 0 \tag{1}$$

及 $y' = u_1\cos x - u_2\sin x$

$$y'' = u'_1\cos x - u'_2\sin x - u_1\sin x - u_2\cos x$$

所以 $u'_1\cos x - u'_2\sin x = \sec x$ (2)

解(1)、(2) 得 $u'_1 = 1, u'_2 = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$

故 $u_1 = x, u_2 = \ln(\cos x)$

故所求方程的一个特解是 $x\sin x + \cos x\ln(\cos x)$,从而方程的通解为

$$y = x\sin x + \cos x\ln(\cos x) + C_1\cos x + C_2\sin x$$

解 2 由齐次方程的通解得满足初始条件 $\varphi(x)=0,\varphi'(x)=1$ 的解为 $\varphi(x)=\sin x$. 因此非齐次方程的一个特解为

$$
\begin{aligned}
y &= \int_0^x \sin(x-t)\sec t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x (\sin x\cos t - \cos x\sin t)\sec t\,\mathrm{d}t \\
&= x\sin x + \cos x\cdot\ln(\cos x),\text{以下同解 1.}
\end{aligned}
$$

10-81 试求方程 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$ 的通解.

解 令 $x=\mathrm{e}^t$,原方程可化为

$$
\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - 2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3\mathrm{e}^{2t} \qquad (1)
$$

方程(1)是一个线性常系数非齐次微分方程,其特征方程为

$$
\rho^3 - 2\rho^2 - 3\rho = 0
$$

特征根为 $\rho_1=0,\rho_2=3,\rho_3=-1$.

故对应(1)的齐次方程通解为

$$
y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{3t} + C_3\mathrm{e}^{-t}
$$

设(1)的一个特解为 $\overline{y} = A\mathrm{e}^{2t}$

代入(1)得 $$\overline{y} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$$

所以(1)的通解为 $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{3t} + C_3\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$

将 $t=\ln x$ 代入上式,得原方程通解为:

$$
y = c_1 + c_2x^3 + \frac{c_3}{x} - \frac{1}{2}x^2
$$

本题所求解的微分方程为欧拉方程. 求解欧拉方程的一般方法是令 $x=\mathrm{e}^t$ 将欧拉方程化为线性常系数微分方程,从而求得原方程的解.

10-82 试求微分方程 $(x-1)^2y''' + (x-1)y'' + y' = 1$ 的通解.

解 给方程 $(x-1)^2y''' + (x-1)y'' + y' = 1$ (1)

两边同乘以 $(x-1)$,令 $x-1=\mathrm{e}^t$,则方程(1)化为

$$
\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - 2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^t \qquad (2)
$$

方程(2)是一个线性系数非齐次方程,

解之得 $y = c_1 + (c_2\cos t + c_3\sin t)\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t$

将 $t=\ln(x-1)$ 代入得

$$
y = c_1 + [c_2\cos\ln(x-1) + c_3\sin\ln(x-1)](x-1) + (x-1)
$$

为原方程的通解.

本题中所求解的方程本质上仍是欧拉方程,它只是将欧拉方程的标准形式作了个平移变换.

责任编辑/叶 涛 封面设计/伍 胜

21世纪大学课程辅导丛书

ISBN 7-5605-1220-8

9 787560 512204 >

ISBN 7-5605-1220-8/O · 150

定价：29.50元