第九章　多元函数积分学(二重积分)

考研大纲要求

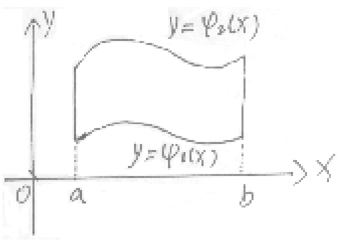
了解 二重积分的性质，了二重积分的中值定理
理解 二重积分的概念.
掌握 二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标）

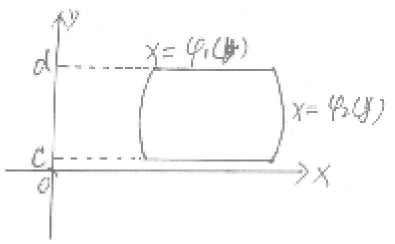
内容精要

（一） 重要定理与公式.

1.在直角坐标系中计算

定义 6.1 若任意一条垂直 x 轴的直线 $x=x_0$ 至多与区域 D 的边界交于两点（垂直 x 的边界除处），则称 D 为 x 一型区域，且 x 一型区域 D 一定可表示为平面点集: $D=\{(x,y): j_1(x)\le y\le j_2(x), a\le x\le b\}$.即曲线 $y=j_1(x)$（下曲线），$y=j_2(x)$（上曲线）及直线 $x=a, x=b$ 所围成的区域，如图所求（特殊情况下，直线段 $x=a, x=b$ 可能为一点即 $j_1(x), j_2(x)$在$x=a$处或$x=b$处相交），此时 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy.$





定义 6.2 若任意一条垂直 y 轴的直线 $y=y_0$ 至多与区域的边界交于两点（垂直于 y 轴的边界除处），则称 D 为 y 一型区域，且 y 型区域一定可表示为平面点集：$D=\{(x,y): y_1(y)\le x\le y_2(y), c\le y\le d\}$.即由线 $x=y_1(y)$（左曲线），$x=y_2(y)$（右曲线）及直线 $y=c, y=d$ 所围成，如图所求（特殊情况下，直线 $y=c, y=d$ 可能为一点），此时 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{y_1(y)}^{y_2(y)} f(x,y)dx.$

许多常见的区域都可分割成有限个无公共内点的 x 一型区域或 y 型区域，利用二重积分的可加性知，即 $D=D_1+D_2+D_3$，且 D_1,D_2,D_3 或者为 x 一型区域或者为 y 型区域，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint_{D_3} f(x,y)dxdy.$$

2.在极坐标系下的计算

设 $x = r\cos q$, $y = r\sin q$. 则 $\iint_D f(x,y)ds = \iint_D f(r\cos q, r\sin q) rdrdq.$

当积分区域是圆域或圆域一部分时，可用极坐标变换，若被积函数中含有 $x^2 + y^2$，更要用极坐标变换。

定义 6.3 若任意射线 $q = q_0$ 与区域 D 的边界至多交于两点（边界是射线段除外），则称 D 为 q 一型区域，且 q 一型区域 D 可表示为平面点集 $\{(r,q): r_1(q) \le r \le r_2(q), a \le q \le b\}$，即由曲线 $r = r_1(q)$（下曲线），$r = r_2(q)$（上曲线），及射线 $q = a, q = b$，围成的区域如图 6-3 所示。（特殊情况下，$q = a, q = b$ 可能为一点）。此时

$$\iint_D f(x,y)ds = \int_a^b dq \int_{r_1(q)}^{r_2(q)} f(r\cos q, r\sin q) rdr.$$

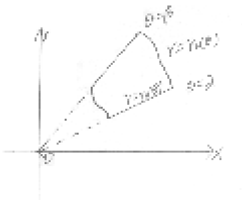


图 6-3

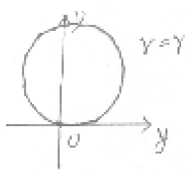


图 6-4

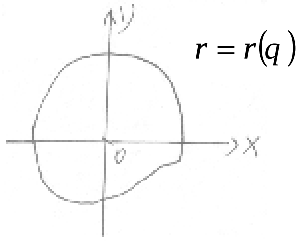


图 6-5

（1）若极点 O 在区域外部，此时区域 D 可表求为 $r_1(q) \le r \le r_2(q), a \le q \le b$，如图 6-3 所示，则有 $\iint_D f(x,y)ds = \int_a^b dq \int_{r_1(q)}^{r_2(q)} f(r\cos q, r\sin q) rdr.$

（2）若极点 O 在区域 D 边界上，且边界曲线 $r = r(q)$ 向外凸，(此时区域 D 可表求为 $D: 0 \le r \le r(q), a \le q \le b$，其中 $[a, b]$ 为边界曲线 $r = r(q)$ 的定义域，如图 6-4 所示，则有

$$\iint_D f(x,y)ds = \int_a^b dq \int_0^{r(q)} f(r\cos q, r\sin q) rdr.$$

（3）若极点 O 在区域 D 的内部，此时区域 D 可表示为 $D: 0 \le r \le r(q), 0 \le q \le 2p$. 如图 6-5 所示，则有 $\iint_D f(x,y)ds = \int_0^{2p} dq \int_0^{r(q)} f(r\cos q, r\sin q) rdr.$

注：在区域q 的变化区间$[a,b]$内，过极点作射线，此射线穿过区域 D，穿入点所在的曲线$r=r_1(q)$为下限（下曲线），穿出点所在的曲线$r=r_2(q)$为上限（上曲线）。

有时也可以把 D 表示 r 一型区域：$q_1(r)\le q\le q_2(r), r_1\le r\le r_2$，即由曲线$q=q_1(r), q=q_2(r)$与圆$r=r_1, r=r_2$所围成的区域。在 r 的变化区间$[r_1,r_2]$，以 O 为心，以 r 为半径作圆，曲线按逆时针方向穿过区域 D（图 6-6），穿入点的极角$q=q_1(r)$为下限（称为小角曲线），穿出点的极角$q=q_2(r)$为上限（称为大角曲线），有

$$\iint_D f(x,y)ds=\int_{r_1}^{r_2}dr\int_{q_1(r)}^{q_2(r)}f(r\cos q,r\sin q)rdq.$$

特别地，若区域 D 为：$a\le q\le b, r_1\le r\le r_2$，其中$a,b,r_1,r_2$均为常数，则

$$\iint_D f(x,y)ds=\int_a^b dq\int_{r_1}^{r_2}f(r\cos q,r\sin q)rdr=\int_{r_1}^{r_2}dr\int_a^b f(r\cos q,r\sin q)rdq.$$

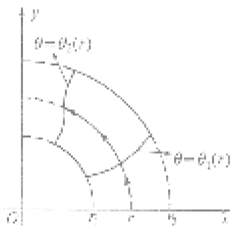


图 6-6

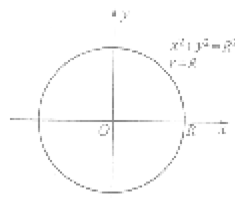
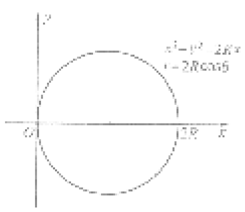


图 6-7

（1）若 D 是由曲线$x^2+y^2=R^2$所围成的区域（图 6-7）。经极坐标变换，方程为：$r=R$，属于 1（3）的情形，有$\iint_D f(x,y)ds=\int_0^{2p}dq\int_0^R f(r\cos q,r\sin q)rdr.$

（2）若 D 是曲线$x^2+y^2=2xR$所围成的区域（图 6-8）。经极坐标变换，方程为：$r=2R\cos q$，属于 1（2）情形，由$D:0\le r\le 2R\cos q,-\frac{p}{2}\le q\le\frac{p}{2}$，知

$$\iint_s f(x,y)ds=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}dq\int_0^{2R\cos q}f(r\cos q,r\sin q)rdr.$$



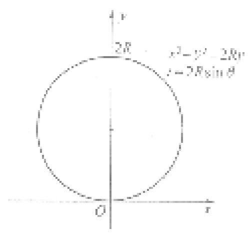


图 6-8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　图 6-9

（3）若 D 是曲线 $x^2+y^2=2Ry$ 所围成的区域（图 6-9）。经极坐标变换，曲线方程为：

$r=2R\sin q$，属于 1（2）情形，由 $D:0\le r\le 2R\sin q, 0\le q\le p$，知

$$\iint_D f(x,y)ds=\int_0^p dq\int_0^{2R\sin q} f(r\cos q, r\sin q)rdr.$$

3.对称区域上二重积分的性质

设 D 为平面区域，若

（i）若 $D=D_1+D_2$，且 D_1,D_2 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)ds=\begin{cases}0, & \text{当}f(x,-y)=-f(x,y),\text{即}f\text{关于}y\text{是奇函数},\\ \iint_{D_1} f(x,y)ds, & \text{当}f(x,-y)=f(x,y),\text{即}f\text{关于}y\text{是偶函数}.\end{cases}$$

（ii）若 $D=D_1+D_2$，且 D_1,D_2 关于 y 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)ds=\begin{cases}0, & \text{当}f(x,-y)=-f(x,y),\text{即}f\text{关于}x\text{是奇函数},\\ \iint_{D_1} f(x,y)ds, & \text{当}f(x,-y)=f(x,y),\text{即}f\text{关于}x\text{是偶函数}.\end{cases}$$

（iii）若 $D=D_1+D_2$，且 D_1,D_2 关于 0 点对称，则

$$\iint_D f(x,y)ds=\begin{cases}0, & \text{当}f-(x,-y)=-f(x,y),\\ \iint_{D_1} f(x,y)ds, & \text{当}f(-x,-y)=f(x,y),.\end{cases}$$