第五章　多元函数的微分学

大纲要求

了解 二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质，全微分存在的必要条件和充分条件，全微分形式的不变性，隐函数存在定理，空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念（仅适合数学一）

，二元函数的二阶泰勒公式，二元函数极值存在的充分条件。

会 求全微分，求空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的方程（仅适合数学一），求二元函数的极值，用拉格朗日乘数法求条件极值，求简单多元函数的最大值和最小值，解决一些简单的应用问题.

理解 多元函数的概念，二元函数的几何意义，多元函数偏导数和全微分的概念，方向导数与梯度的概念（仅适合

数学一），多元函数极值和条件极值的概念，

掌握 多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法，多元隐函数的偏导数，多元函数极值存在的必要条件，

一、内容精要

（一）　基本概念

定义 5.1　设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{U}(P_0,d)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，

则该极限值称为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作 $f_x'(x_0,y_0)$ 或 $z'\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$.同理

可给出 $f_y'(x_0,y_0)$ 的定义。

多元函数的偏导数，本质就是求导数，例如 $u=u(x,y,z)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 时，视自变量 y,z 为常数，本质上看成 u 是 x 的函数，这时一元函数的求导公式，四则运算，复合函数的求导都可以使用，但形式上要比求一元函数的导数复杂。

定义 5.2　若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(r)\ \left(r=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0\right)$，其中 A，B 是与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，而仅与 x，y 有关，则称 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微，线性主部 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处的全微分，记作 dz，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y.$

设 $z=z(u,v)$，不论 u，v 是自变量，还是中间变量，若 $z=z(u,v)$ 可微，则 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv.$

换句话说，若 $z=z(u,v)$ 可微，且 $dz=g(u,v)du+h(u,v)dv,$ 则

$$\frac{\partial z}{\partial u} = g(u, v), \frac{\partial z}{\partial v} = h(u, v).$$

上式在求复杂多元函数的偏导数与全微时显得非常重要。

当然多元函数的偏导数与多元函数的全微分也有四则运算和一元情形完全类似，在这里就不再叙述了。

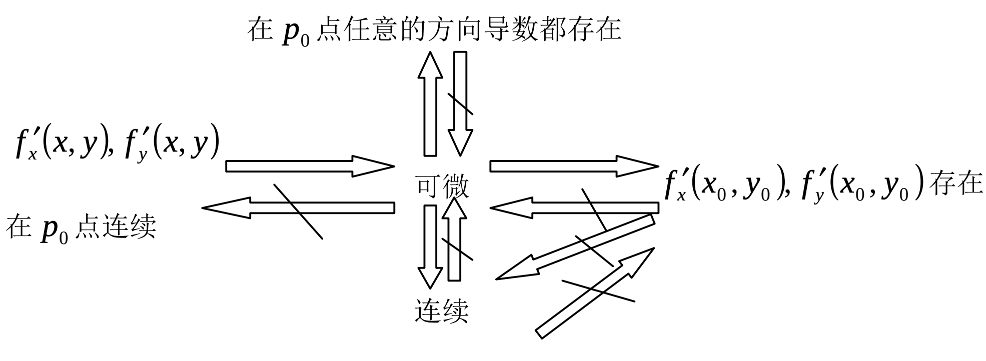
定义 5.3　设函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某区域 $\mathbf{U}(P_0) \subset R^3$ 内有定义，l 为从点 P_0 出发的射线，$P(x, y, z)$ 为 l 上且含于 $\mathbf{U}(P_0)$ 内任一点，r 表示 P_0 与 P 两点间的距离，若极限 $\lim\limits_{r \to 0} \frac{u(P) - u(P_0)}{r} = \lim\limits_{r \to 0} \frac{\Delta_l u}{r}$ 存在，则称此极限为函数 u 在点 P_0 沿方向的 l 方向导数，记作 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}$，由定义知方向导数是一个数量。

容易证明，若 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}$ 存在，则 u 在点 r_0 沿 x 轴正方向的方向导数是 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}$，$u$ 在点 P_0 沿 x 轴负各时的方向导数为 $-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}$.

定义 5.4　设 $u = u(x, y, z)$ 偏导数均存在，称 $\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ 为函数 $u(x, y, z)$ 在点 P 处的梯度，记作 $gradu$，即 $gradu = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. 由定义知 $gradu$ 是一个矢量。

定义 5.5　设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某区域 $\mathbf{U}(P_0)$ 内有定义，$\exists d > 0$，当 $P \in \mathbf{U}(P_0, d)$ 时，都有 $f(P) \le f(P_0)$（或 $f(P) \ge f(P_0)$），则称 $f(P_0)$ 为极大（或极小）值。点 P_0 称为 f 的极大（或极小）值点，极大值、极小值统称为极值。极大值点、极小值点统称为极值点。

极值点一定包含在多元函数的驻点或偏导数不存在点之中（若 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$，称 (x_0, y_0) 为驻点或稳定点）。多元函数在一点连续，偏导数存在，可微，方向导数存在，偏导函数在该点连续，这些概念有下面的关系，我们以 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处为例。



注：这里“$\Longrightarrow$”表求推出，“$\not\Longrightarrow$”表示推不出，能推出的，都是定理，推不出的，我们在下面都举了反例。

（二）重要定理与公式

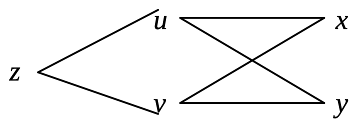
定理 5.1　若累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y), \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$和二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$都存在，则三者相等。

推论5.1.1 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y), \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在且不相等，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在。

定理 5.2（复合多元函数的求偏导定理），若 $z=f(u,v)$ 在 (u,v) 处可微，$u=j(x,y), v=y(x,y)$在(x,y)处的偏导数均存在，则复合函数$z=f(j(x,y),y(x,y))$在(x,y)处的偏导数均存在且

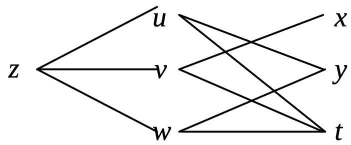
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u'(u,v)\cdot j_x'(x,y)+f_v'(u,v)\cdot y_x'(x,y);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_u'(u,v)\cdot j_y'(x,y)+f_v'(u,v)\cdot y_y'(x,y).$$

可用下面结构图表示：



即$\dfrac{\partial u}{\partial x}$就是$u$分别对那些是$x$函数的中间变量偏导再乘以这些中间变量对$x$偏导，然后再相加

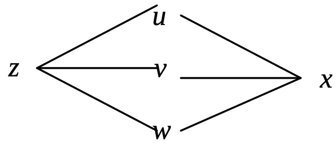
例如



知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y};\qquad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}.$$

例如



$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}.$$

上式称为全导数。求复合多元函数偏导的思想一定要真正搞懂，否则在求复杂形式下的

多元复合函数的偏导就容易出错。

定理 5.3　若函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数 $f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ 都在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，则

$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

定理 5.4　若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，反之不成立。

定理 5.5（可微的充分条件）若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，反之不成立。

定理 5.6　（可微的必要条件）若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数均存在，反之不成立。

定理 5.7　若函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 u 在 P_0 处任意方向的方向导数都存在且 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}\cos a+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0}\cos b+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0}\cos g$，（其中 l 的单位矢量 $l^0=\{\cos a,\cos b,\cos g\}$.）反之不成立。

1.方向导数与梯度的关系

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0},\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0},\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0}\right\}\cdot\{\cos a,\cos b,\cos g\}=gradu(P_0)\cdot l^0=|gradu(P_0)|\,|l^0|\cos q=|gradu(P_0)|\cos q$$

其中 q 是矢量 $gradu(r_0)$ 与的夹角。由此得出下面结论。

（1）u 在点 P_0 处沿方向 l 的方向导数，等于梯度在方向的 l 投影，即 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}=gradu(P_0)\cdot l^0$.

（2）当 $q=0$，即 l^0 的方向梯度方向 $gradu(P_0)$ 一致时，即函数 $u(x,y,z)$ 在 P_0 处沿梯度方向 $gradu(P_0)$ 的方向导数最大，且

$$\max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}\right)=|gradu(P_0)|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0}\right)^2}$$

这就是，当 u 在点 P_0 可微时，u 在点 P_0 的梯度方向是 u 值增长得最快的方向，当 $q=p$，即 i^0 的方向与梯度方向 $gradu(P_0)$ 相反时，即 $u(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿方向 $gradu(P_0)$ 时的方

向导数最小，最小值 $\min\left(\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}\right)=-\left|gradu(P_0)\right|$. 当 $q=\frac{p}{2}$ 时，即在 P_0 点沿着与梯度 $gradu(P_0)$ 垂直的方向的方向导数为零。

定理 5.8（极值的充分条件）　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某区域存在连续的二阶偏导数。如果 $f_x'(x_0,y_0)=0, f_y'(x_0,y_0)=0$，设 $A=f_{xx}''(x_0,y_0), B=f_{xy}''(x_0,y_0), C=f_{yy}''(x_0,y_0)$，

则　（1）当 $B^2-AC<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 一定为极值，并且当 *A*（或 *C*）>0 时，$f(x_0,y_0)$ 为极小值；当 *A*（或 *C*）<0 时，$f(x_0,y_0)$ 为极大值。

（2）当 $B^2-AC>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值。

（3）当 $B^2-AC=0$ 时，还不能断点 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值，需进一步研究。

对于偏导数不存在的点，只有根据定义判断是否为极值点。

2．求带有条件限制的最大（小）值问题，统称为条件极值，可用拉格朗日乘数法去解决。

即求 $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ 在约束条件 $j_k(x_1,x_2,...,x_n)=0(k=1,2,...,m)$ 限制下的最大值或最小值方法是

（1）作拉格朗日函数

$$L(x_1,x_2,...,x_n,l_1,...,l_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{k=1}^{n}l_k j_k(x_1,x_2,...,x_n),$$

其中 $l_1,l_2,...,l_m$ 称为拉格朗日乘数。

（2）若 $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ 是函数 $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 的最大（小）值点，则一定存在 *m* 个常数 $(l_1^0,l_2^0,...,l_m^0)$，使 $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,l_1^0,...,l_m^0)$ 是函数 L 的稳定点，因此函数 *f* 的最大（小）值点一定包含在拉格朗日函数 L 的稳定点前几个坐标所构成的点之中，在具体应用时，往往可借助于物理意义或实际经验判断所得点是否为所求的最大（小）值点。

定理 5.9 有界闭区域上的连续函数一定能取到最大值与最小值，且最大值与最小值点一定包含在区域内部的稳定点或内*部*偏导不存在点或边界函数值最大与最小点之中.

把这些怀疑点求出来，其中函数值的最大值就是区域上的最大值、最小值就是区域上的最小值，而边界上的最大与最小值点可用拉格朗日乘数法去求。

泰勒定理 5.10　若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $\mathbf{U}(P_0)$ 内有直到 $n+1$ 阶的连续偏导，则对 $\mathbf{U}(P_0)$ 内任一点 x_0+h, y_0+k，存在 $q\in(0,1)$，使

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{z!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+qh,y_0+qk).$$

上式称为二元函数 f 在点 p_0 处的 n 阶泰勒公式。

注：$\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_n^i h^{n-i}\cdot\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，

推论 5.10.1 设 $f(x,y)$ 在区域 G 上具有连续的一阶偏导数，

（1）若 $f_x'(x,y)\equiv 0,(x,y)\in G,$ 则 $f(x,y)$ 在 G 上仅是 y 的函数；

（2）若 $f_y'(x,y)\equiv 0,(x,y)\in G,$ 则 $f(x,y)$ 在 G 上仅是 x 的函数；

（3）若 $f_x'(x,y)\equiv 0,\ f_y'(x,y)\equiv 0(x,y)\in G,$ 则 $f(x,y)$ 在 G 是常值函数。

1. 设 $F(x,y,z)$ 在点 P_0 处具有连续的一阶偏导数且 $F_x'(P_0),F_y'(P_0),F_z'(P_0)$ 不同时为零，则曲面 $\sum$：$F(x,y,z)=0$ 在曲面上 r_0 点的切平面方程为

$F_x'(r_0)(x-x_0)+F_y'(r_0)(y-y_0)+F_z'(r_0)(z-z_0)=0.$

其中 $\{F_x'(P_0),F_y'(P_0),F_z'(P_0)\}$ 或 $-\{F_x'(P_0),F_y'(P_0),F_z'(P_0)\}$ 是曲面 $\sum$ 在点 P_0 处的法矢量。

曲面 $\sum$ 在点 P_0 处的法线方程为 $\frac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P_0)}.$

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处具有连续的一阶偏导数，则曲面 $z=f(x,y)$ 即 $f(x,y)-z=0$ 在曲面上点 (x_0,y_0,z_0) $(z_0=f(x_0,y_0))$ 的切平面方程为

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

在 (x_0,y_0,z_0) 处的法线方程为 $\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$

2．设 $x'(t),y'(t),z'(t)$ 在 $t=t_0$ 处连续，且 $x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$ 不同时为零。则曲线 $\Gamma: x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 在 $t=t_0$ 对应曲线上点

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $(x_0 = x(t_0), y = y(t_0), z = z(t_0))$ 处的切线方程为 $\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)}$.

其中 $\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ 或 $-\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ 为曲线 Γ 在 P_0 点切线的方向向量，而曲线 Γ 在点 P_0 处的法平面方程为 $x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$.

设 $F(x, y, z), G(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处具有连续的一阶偏导，且

$\{F'_x(P_0), F'_y(P_0), F'_z(P_0)\} \prod \ G'_x(P_0), G'_y(P_0), G'_z(P_0)\}$，则曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$

在曲线上点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为

$$\begin{cases} F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0, \\ G'_x(P_0)(x - x_0) + G'_y(P_0)(y - y_0) + G'_z(P_0)(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

事实上，曲线 Γ 的切线既在曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在 r_0 的切平面上又在曲面 $G(x, y, z) = 0$ 在 P_0 的切平面上，故该切线为两切平面的交线，故切线方程为两切平面方程的联立。

由切线的方向向量为 $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F'_x(P_0) & F'_y(P_0) & F'_z(P_0) \\ G'_x(P_0) & G'_y(P_0) & G'_z(P_0) \end{vmatrix}$，而曲线 Γ 在 P_0 点的法平面的法矢量为 $\vec{v}$，用点法式可写出曲线 Γ 在 P_0 点的法平面方程。