哈尔滨工业大学
高等数学A知识整理

————————————————学好微积分，走遍天下都不怕————————————————

目录

第一章　极限与连续

一、函数

1、函数的定义与要素（定义域、对应法则；函数相等的条件）

2、函数的性质：单调性，奇偶性，周期性，有界性

*单调性的定义（以递增为例）：

$\forall x_1,x_2\in D_f$，若$x_1<x_2$时$f(x_1)\le f(x_2)$，则$f(x)$在D_f上单调递增；将$\le$改为$<$，则$f(x)$在D_f上严格单调递增。

*有界的定义：$\exists M>0$，对于$\forall x\in A\subseteq D_f$，都有$|f(x)|\le M$，则$f(x)$在$A$上有界。

（$f(x)\ge m\in R$，则$f(x)$下有界；反之则上有界。只有既上有界又下有界的函数才是有界函数。）

3、函数的运算：四则运算、复合运算、反函数

*题型：判断某个函数由哪些基本初等函数复合而成。

*反函数存在的可能情况：①y 与 x 一一对应；②$f(x)$是某区间上的严格单调函数（反函数的单调性与原来的函数相同）

* $D_{f^{-1}}=R_f$；当$x\in D_f$时，$f^{-1}(f(x))=x$；当$x\in R_f$时，$f(f^{-1}(x))=x$。

4、初等函数：包括 6 大基本初等函数（常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）以及它们的有限次四则、复合运算构成的函数。

二、数列的极限

1、数列的定义及表示方法

2、数列的性质：单调性、有界性

3、数列极限的定义：ε-N 语言（存在性命题要学会寻找充分条件，即增加对 N 的限制，从而找到 N；绝对值不等式与不等式放缩也很重要）

4、极限的四则运算

5、无穷小量的性质

（1） 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$\{a_n-A\}$是无穷小量。（一种证明极限的方法）

（2）有限个无穷小量相加、相乘还是无穷小量。

（3）无穷小量乘以有界量还是无穷小量。

6、收敛数列的性质

（1）收敛数列必然有界

（2）收敛数列的任一子列与该数列收敛于同一极限。（☆逆否命题：如果一个数列有发散子列或是有两个极限不同的收敛子列，则该数列发散。）

（3）夹逼性（注意夹条件与逼条件）

（4）*保号性：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$，则必然存在$N$，当$n>N$时，$a_n>0$.（小于 0 类似）

7、无穷大量的两个定义：

(1) 若$\{\frac{1}{a_n}\}$为无穷小量，则$\{a_n\}$为无穷大量；

(2) $\forall K>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$|a_n|>K$。

8、数列收敛的判定方法与极限的求解

（1）利用极限的定义（先知道极限才能使用，技巧性略强）

（2）单调有界数列必收敛（不能同时求出极限，往往用于递推式）

（3）利用子列的收敛性（可以直接得出极限，逆否命题常用于判断发散）

（4）柯西收敛准则（不能同时求出极限，往往用于求和式）

（5）Stolz 定理：

若$\{b_n\}$严格单调递增且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$。（可以同时求出极限，常常用于比值形式的式子）

（6）递推式求极限：不动点法——$a_{n+1}=f(a_n)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$A=f(A)$。

（7）平均值法：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=A$。

（8）利用定积分的定义求极限。需要配凑 Riemann 和的形式。

9、几个重要数列的极限

(1) $a>0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$，其中$k\ge 0$，$a>1$为常数；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_1^n+a_2^n+...+a_k^n}{k})^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,...,a_k\}$；$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+...+a_k^{\frac{1}{n}}}{k})^n=\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}$.

10、数列极限型函数的表达式：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(n,x)$。

处理方式：对 x 分类讨论，在各种情况下将 x 视为常数，对 n 求极限。

例如：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n+1}{2x^n+1}$，$x\in R^+$。求$f(x)$。

①当$x>1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^n}}{2+\frac{1}{x^n}}=\frac{1}{2}$；

.②当$x=1$时，$f(x)=\frac{2}{3}$；

③当$0<x<1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n+1}{2x^n+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$。

最终结果要写成分段函数。

三、函数的极限

1、函数极限的定义：ε-δ语言（某点 x_0 处）、ε-M 语言（$x\to\infty$时）。

2、数列极限与函数极限的关系：Heine 定理

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow$ 对任一数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。（$a$可以是$\infty$）

逆否命题：

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在$\Leftrightarrow$存在两个数列$\{x_n\},\{y_n\}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，

且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$不都存在或者$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$。

3、极限的性质：

（1）四则运算、连续函数极限的复合运算；

（2）夹逼性；

（3）*保号性；

（4）（函数）局部有界性：若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，则在$a$的一个邻域内，$f(x)$有界。

（5）有序性：

若$f(x)<g(x)$（或者$\le$）在a的一个邻域内成立，则$\lim\limits_{x\to a} f(x)\le\lim\limits_{x\to a} g(x)$。（反过来未必成立）

4、两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。（$x$ 也可以是中间变量）

（求极限时注意配凑出这两个极限）

5、单侧极限（可以用来判断某点极限是否存在）

四、连续函数

1、连续的定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。（左连续、右连续）

2、连续的三个必要条件：$f(x)$在x_0处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

3、连续性在四则运算、复合运算、反函数中的保持。

4、间断点（可去、跳跃间断点为第一类，其余为第二类）

（1）无穷间断点：$f(x)$在此点无定义并且趋向于∞。

（2）*振荡间断点：函数值在此点附近无限快地振荡，如$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在$x=0$处。

（3）可去间断点：对这一个点的函数值进行补充定义或调整，可以使函数在此点连续，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在但不等于$f(x_0)$，或$f(x_0)$不存在。

（4）跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在但不相等。

5、一切初等函数在其定义域内均连续。

6、闭区间上连续函数的性质

（1）有界；（2）存在最大值和最小值；（3）介值定理；（4）零点存在性定理。

7、连续型无穷小的比较

（1）$x\to 0$ 时，若$0<\alpha<\beta$，则$x^{\beta}=o(x^{\alpha})$；

（2）$x\to+\infty$时，若$0<a<b<1$，则$a^{x}=o(b^{x})$。

（3）对任意$p>0$，有$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{p}}=0$，即$x\to+\infty$时有$\dfrac{1}{x^{p}}=o(\dfrac{1}{\ln x})$.

（4）等价无穷小替换：

$x\to 0$时，$\sin x\sim x\sim\tan x,\ln(1+x)\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$，$e^{x}-1\sim x,\arcsin x\sim x\sim\arctan x$。

注：等价无穷小替换只有在乘除运算中才可以随意使用，同号无穷小相减，可能会产生 x 的高阶无穷小。

8、函数图像的渐近线：垂直渐近线 $x=x_0$。斜（水平）渐近线 $y=ax+b$。其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$。注意 $x\to+\infty$与 $x\to-\infty$的情况可能不一样。

第二章 导数与微分

一、导数

1、导数的定义（不能忽视，也是求导的常用方法）：

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$.（如果 f(a)=0 或者 a=0，注意分子分母可能需要补 0）

（注意左导数、右导数的概念）

2、可导必定连续，连续未必可导。

3、导数的四则运算（略）

注意$(f_1f_2\cdots f_n)'=f_1'f_2\cdots f_n+f_1f_2'\cdots f_n+\cdots+f_1f_2\cdots f_n'$.

4、复合函数的导数：$[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)$。（链式法则）

5、反函数的导数：若在点(x_0,y_0)处，$y=f(x)$可导且$f'(x_0)\neq 0$，则$[f^{-1}(y_0)]'=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

6、初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$，　(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$，

(3) $(\sin x)'=\cos x$，　(4) $(\cos x)'=-\sin x$，

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$，　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$，

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$，　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$，　(10) $(e^x)'=e^x$，

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，　(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，

(16) $(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

$(\mathrm{sh}\ x)'=\mathrm{ch}\ x$，$(\mathrm{ch}\ x)'=\mathrm{sh}\ x$，$(\mathrm{th}\ x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$，

$(\mathrm{arsh}\ x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$(\mathrm{arch}\ x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，$(\mathrm{arth}\ x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$.

其中，$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\mathrm{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$

$\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}.$

7、对数求导法

$$f(x)=u(x)^{v(x)}\Rightarrow \ln f(x)=v(x)\ln u(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}u'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=u(x)^{v(x)}[v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}u'(x)].$$

8、几个重要的高阶导数

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$$

$$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot x^{-n}$$

$$(\frac{1}{x})^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$(x^k)^{(n)}=\begin{cases}k(k-1)...(k-n+1)x^{k-n},n\le k\\ 0,n\ge k+1.\end{cases}(k\in N_+)$$

9、高阶导数的莱布尼茨公式：$[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i f^{(i)}(x)g^{(n-i)}(x).$

二、微分

1、微分的实质：在可微的x_0处，$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x=\Delta y-o(\Delta x).$

2、对于一元函数，可微等价于可导。

3、微分的四则运算（略）

4、复合函数的微分——一阶微分形式不变性（Pfaff form）：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$

5、参数方程的微分：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$

6、近似计算：$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$

*7、误差估计：精确值x，近似值x_0，则绝对误差$\Delta x=|x-x_0|$，相对误差$\varepsilon=\dfrac{\Delta x}{|x_0|}$,

Δx上界为绝对误差限δ_x，相对误差限$\delta_x^* = \dfrac{\delta_x}{|x_0|}$。若$y = f(x)$，则$\delta_y = |f'(x_0)|\delta_x$，$\delta_y^* = |\dfrac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}|\delta_x^*$.

三、微分学中值定理及其应用

1、一切的大前提：$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导。（证明时要给出这两个条件！）

2、Fermat 引理：可导极值点处导数等于 0。

3、Rolle 中值定理：$f(a) = f(b) \Rightarrow$ 存在$\xi \in (a,b)$使得$f'(\xi) = 0$.

4、Lagrange 中值定理：存在$\xi \in (a,b)$使得$f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

→推论：（1）$f'(x)=0$，则$f(x)=C$。

（2）$f'(x)=g'(x)$，则$f(x)=g(x)+C$。

5、Cauchy 中值定理：存在$\xi \in (a,b)$使得$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

6、使用中值定理的注意点：

（1）要有运用中值定理的意识，将其当成做题时考虑的对象之一；

（2）学会在高阶导数情况下多次运用中值定理；

(3) 在遇到例如$\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$的式子时要构造$g(x)$（如x^2），运用Cauchy中值定理求解。

（4）补 0 是常用方法；

☆（5）构造函数很重要，要熟悉一些常见的变形：

(1) $xf'(x) + nf(x) = \dfrac{[x^n f(x)]'}{x^{n-1}}$;

(2) $f(x) + f'(x) = \dfrac{[e^x f(x)]'}{e^x}$;

(3) $f'(x) - f(x) = e^x[\dfrac{f(x)}{e^x}]'$;

(4) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = [\ln|f(x)|]'$;

(5) $f(x) - f''(x) = f(x) - f'(x) + f'(x) - f''(x) = \dfrac{[e^x(f(x) - f'(x))]'}{e^x}$.

（在看到相关的式子时要有意识地尝试这些构造，实质是对这些式子做积分）

7、L'Hospital法则：用于$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty - \infty, 1^\infty$，$\infty^0, 0^0$等情况，但最终都应回归到$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$。而且，此法则不是万能的。

8、Taylor公式：$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o[(x - x_0)^n]$.（Peano余项）

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.(\xi\text{介于}x\text{与}x_0\text{之间})(\text{Lagrange 余项})$$

估计余项的大小：若 $|f^{(n+1)}(\xi)|\le M$，则 $\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)^{n+1}|$.

Maclaurin 公式：取 $x_0=0$ 即可。

9、几个常用的Maclaurin 公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n});$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+o(x^n)(\alpha\ne 0);$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)(\text{只需知道前几项})。$$

*Taylor 展开对一切中间变量 u 都成立，即对于在 a 处连续的函数 $g(x)$，有

$$f(g(x))=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(g(a))}{i!}(g(x)-g(a))^i+o[(g(x)-g(a))^n].$$

*Taylor 展开的应用：近似计算、求极限、证明一些与高阶导数有关的结论……

★在此总结一下求函数极限的一些方法：

(1) ε-δ语言（较繁琐，极少使用）；

(2) 代数变形，如$x=\frac{1}{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{x^n}$，$a-b=\frac{a^n-b^n}{a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1}}$，$a=a+b-b$，

$a^x=e^{x\ln a}$，$f(x)=\frac{f(x)}{x}\cdot x$，$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，补0等；

(3) 等价无穷小替换（加减法中慎用，避免产生更高阶的无穷小）；

(4) Heine定理：可以用函数极限求对应数列的极限；

(5) 先证明相关数列收敛，再用取整函数夹逼（必须转化为某变量趋向$+\infty$的情况）；

(6) L'Hospital法则：求导之后会变得简单或可以计算时使用，注意不是不定型的不能使用；

(7) Taylor展开：可以自行选择展开的项数以配凑次数。（在确定式子阶数之后，一定要展开到所有能产生该阶小量的项都出现。在处理$\frac{0}{0}$型式子时几乎万能）

四、函数的单调性与凸性

1、用一阶导数的符号判断函数的单调性：注意，可导函数在某区间单调递增（递减）的充要条件是 $f'(x)\ge 0$（≤ 0），等号不能少。另外，<u>极值点是 x 的值</u>而不是一个点。

*一个有趣的结论：对于连续可导函数$f(x)$，若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}$存在，则$f(a)=0$，且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=f'(a)$（再次提醒补0的重要性）。

2、几个概念

（1）极值点：使得$f(x)$在x附近的一个邻域内取得最值的x的值。函数在极值点处不一定可导，但只要可导，则其导数等于0。

（2）临界点（驻点）：在该点处可导且导数为0的x的值。临界点不一定是极值点，可能只是函数变化过程中在此点的瞬时变化率为0，其两侧的单调性可以相同。

3、函数取极值的充分条件：极值点的左右邻域内导数值异号（一边≥0，另一边≤0）。

4、用一阶、二阶导数判断极值点：若$f'(x_0)=0$且$f''(x_0)\neq 0$，则x_0是$f(x)$的极值点。（$f''(x_0)>0$为极小值点，$f''(x_0)<0$为极大值点）

*通过Taylor展开做出的推广：若存在正整数n使得$f(x)$在x_0处的前$(2n-1)$阶导数都等于0，而$2n$阶导数不等于0，则x_0是$f(x)$的极值点。

5、求函数在闭区间上最值的步骤：求极值→求端点值→比较以上各值。

6、凸性的定义：对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$与$\forall x_1$，$x_2\in[a,b]$，

$f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上下凸。反之则为上凸。

*推论：$f(x)$在$[a,b]$上下凸$\Leftrightarrow\forall x_1$，$x_2$,...，$x_n\in[a,b]$，$f(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}$.

7、用二阶导数判断凸性：仍然注意≥与≤的等号不能少。另外，拐点是点而不是x的值。

8、拐点的实质：两侧邻域内凸性相反的点。可以二阶不可导，但一旦二阶可导则二阶导数等于0。

9、函数草图的描画步骤

（1）确定函数$f(x)$的定义域。如果有奇偶性、周期性，也需指出；

（2）计算$f'(x)$，找出所有驻点与不可导点，确定$f(x)$的单调区间与极值（表格）；

（3）计算$f''(x)$，确定$f(x)$的凸性区间与拐点（表格）；

（4）讨论曲线的渐近线；

（5）将极值点、拐点处的函数值求出，如需要增加图像的准确性，可以再取几个特殊点。

（6）最终图像效果的衡量：单调性、凸性是否正确，渐近线是否正确并画全，关键点处函数值是否正确。

*五、用Newton切线法求方程的近似解

1、基本原理：在$f(x)$零点ξ所在小区间$[a,b]$的端点处作切线，此切线与x轴交于$(x_1,0)$；再作$(x_1,f(x_1))$处的切线，此切线与x轴交于$(x_2,0)$；以此类推，数列$\{x_n\}$将收敛于ξ。

2、数列$\{x_n\}$的递推式：$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

3、误差估计：$|x_{n+1}-\xi|\le\dfrac{M}{2m}|x_n-\xi|^2$，其中 M 是$|f''(x)|$在$[a,b]$上的最大值，m 是$|f'(x)|$在$[a,b]$上的最小值。

第三章 一元函数积分学

（本章重难点在于不定积分和非初等定积分，其余的部分稍微简略一些）

一、定积分的概念

1、Riemann 和：对闭区间$[a,b]$做分割 $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$，则

Riemann和$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$. 其中$\triangle x_i=x_i-x_{i-1}$，$\xi_i\in[x_i,x_{i-1}]$（$i=1,2,...n$）。

2、可积：即在 $n\to\infty$（本质上是 $\max\{\Delta x_i\}\to 0$）时 Riemann 和收敛，并且此极限与分割点和ξ_i的选取无关。闭区间上有有限个间断点的有界函数可积；闭区间上的连续函数必定可积。

3、定积分的几何意义：曲边梯形的面积（注意函数图像在 y 轴下方时的情况）

4、定积分的基本性质

(1)$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$;

(2)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$;

(3)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$;

(4)$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

(5) $f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

(6)$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$;

(7) $\forall x\in[a,b]$，$f(x)\ge 0\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge 0$;

(8) （积分中值定理）若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

5、原函数与微积分基本定理

(1) 对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，有$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$，即$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$的一个原函数。

*推论：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$.

（2）微积分基本定理——Newton-Leibniz 公式：

对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，若$F(x)$是其原函数之一，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)|_a^b$

二、不定积分

1、不定积分的性质

(1) $[\int f(x)\mathrm{d}x]' = f(x)$，即 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，即 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$；

(3) $\int [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int f(x)\mathrm{d}x+\beta\int g(x)\mathrm{d}x.$

☆2、基本不定积分公式（规定所有公式中 a>0）

（1）$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$（$\alpha \neq -1$）；

（2）$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$；

（3）$\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$（$a>0$，$a\neq 1$），$\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x}+C$；

（4）$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x+C$；

（5）$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x+C$；

（6）$\int \dfrac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x = \int \sec^{2}x\,\mathrm{d}x = \tan x+C$；

（7）$\int \dfrac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x = \int \csc^{2}x\,\mathrm{d}x = -\cot x+C$；

（8）$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}\mathrm{d}x = \arcsin\dfrac{x}{a}+C$（$a>0$）；

（9）$\int \dfrac{1}{a^{2}+x^{2}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$（$a\neq 0$）；

（10）$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x|+C$；

（11）$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x|+C$；

（12）$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x+\tan x|+C = \ln\left|\dfrac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right|+C$；

（13）$\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x-\cot x|+C = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+C$；

（14）$\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x+C$；

（15）$\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x+C$；

（16）$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x+C$；

（17）$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x+C$；

（18）$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\right|+C$；

（19）$\int \sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\pm\dfrac{a^{2}}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\right|+C$；

（20）$\int \sqrt{a^{2}-x^{2}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}+\dfrac{a^{2}}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+C$。

注意：最后三个公式都可以用分部积分公式推导，其中只有（18）可以直接使用。

三、积分方法

(1) 有理式：运用Остроградский分解，将真分式$\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$分解为

$\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{k_j}\dfrac{A_{ji}}{(x+x_j)^i}+\sum\limits_{j=1}^{q}\sum\limits_{i=1}^{l_j}\dfrac{B_{ji}x+C_{ji}}{(x^2+\alpha_j x+\beta_j)^i}$的形式（$\alpha_i^2-4\beta_i<0$）。以上分解运用了代数基本定理，即任意$n$次多项式$P_n(x)$可分解为

$(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_p)^{k_p}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{l_1}\dots(x^2+\alpha_q x+\beta_q)^{l_q}$的形式（$\alpha_i^2-4\beta_i<0, 1\le i\le q$）。

（2）三角换元：①万能代换；②出现$\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow$令$x=a\sin t$；③出现$\sqrt{x^2+a^2}\Rightarrow$令$x=\tan t$；④出现$\sqrt{x^2-a^2}\Rightarrow$令$x=\sec t$。（注意$\sec x$与$\tan x$既有导数关系又有平方关系，对于三角函数有理式，可以尝试转化成只含$\sec x$的积分，然后凑微分$\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$，再利用平方关系把$\sec x$通通转化为$\tan x$。）

（3）根式换元：$\sqrt[n]{ax+b}$,$\sqrt[n]{\dfrac{cx+d}{ex+f}}$均可以换元，转化为有理式。

（4）双曲换元：建议熟练者使用。遇到$\sqrt{x^2\pm a^2}$的式子，分别可以令$x=\sinh t$（根号中为$+a^2$）和$x=\cosh t$（根号中为$-a^2$）。

（4）凑微分法：通过代数变形巧妙凑出 $g'(x)\mathrm{d}x$ 的形式，将其化为 $\mathrm{d}g(x)$。
常见的变形：分离常数（有理式），加上再减去，乘上再除去，裂项（因式分解的积累），$\sqrt{f(x)}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{f(x)}}\dots$

（5）分部积分：①凑 $\mathrm{d}v(x)$微分的推荐顺序：三角→指数→幂函数→对数→反三角。
②$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$.在$\int v(x)\mathrm{d}u(x)$容易求的情况下较好用。注意等号右边可能会再次出现$\int u(x)\mathrm{d}v(x)$且无法与左边抵消，此时相当于解关于$\int u(x)\mathrm{d}v(x)$的方程。
备注：不定积分换元求完以后要从其他变量回到关于 x 的表达式；定积分换元以后要注意积分上下限的变化。

（6）其他的常用公式

①若$f(x)$在$[-l,l]$上连续，则$\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=\begin{cases}0，当f(x)为奇函数时，\\ 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x，当f(x)为偶函数时。\end{cases}$

②若$f(x)$是以T为周期的连续函数，则$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

③若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$;

④设$f(x)$连续，则$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$

⑤$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\mathrm{d}x=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$;

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x=\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.（$n\ge 0$）

四、定积分的应用

（1）弧微分：

x_0点附近一小段曲线的弧长$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+f'^2(x_0)}\mathrm{d}x.$

可以用此公式计算$[a,b]$上的弧长$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$

对于参数方程$x=x(t)$，$y=y(t)$，$\alpha\le t\le\beta$，有$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t.$

对于极坐标系中的曲线$r=r(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$，有$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$

曲线的曲率半径$\rho=\dfrac{1}{K}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\left|\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|$，其中$K$为曲率。

（2）平面图形的面积

①在直角坐标系中，若一图形D对应点集$\{(x,y)\mid a\le x\le b，f(x)\le y\le g(x)\}$，则该图形的面积$A=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{f(x)}^{g(x)}\mathrm{d}y=\int_a^b(g(x)-f(x))\mathrm{d}x.$

②在极坐标系中，若一图形由曲线$r=r(\theta)$和直线$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$（$\alpha\le\beta$）包围而成，则图形的面积$A=\int_\alpha^\beta\dfrac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$

（3）立体图形的体积

①在空间直角坐标系中，若一几何体在垂直x轴方向的截面积是x的函数$A(x)$，$a\le x\le b$，则几何体的体积$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$

②旋转体：由曲线$y=f(x),a\le x\le b$绕x轴旋转一周所形成的几何体的体积为$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$

（4）旋转曲面的面积

由曲线$y=f(x)$，$a\le x\le b$绕x轴旋转一周所形成的曲面的面积为$A=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$

（5）平均值：函数在区间$[a,b]$上的平均值$\overline{y}=\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$。可用于等效计算。

, :

五、反常积分（广义积分、瑕积分）

1、定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x;$$

对于$f(x)$在$[a,b]$上的无界点c，有$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$

2、反常积分敛散性的判别

（1）直接利用定义。注意：当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$均收敛时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$才收敛。

（2）比较判别法：①若在$[A,+\infty)$上有$|f(x)|\le g(x)$，则对于 $a<A$，有：

$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛；

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散$\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散。

②若$\exists\varepsilon_0\in(a,b)$，使得$\forall x\in(a,a+\varepsilon_0), |f(x)|\le g(x)$，且$f(x)$与$g(x)$在$b$处无界，则对于$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$也有类似结论。

注：使用此定理要学会对被积函数进行适当放缩。

（3）Cauchy 判别法：

$\exists p>1$，使得$\lim_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = C\ge 0$（不是$+\infty$），则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；

$\exists p\le 1$，使得$\lim_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = C> 0$（可以是$+\infty$），则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散；

对于在a处无界的$f(x)$：

$\exists p<1$，使得$\lim_{x\to a}(x-a)^p|f(x)| = C\ge 0$（不是$+\infty$），则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；

$\exists p\ge 1$，使得$\lim_{x\to a}(x-a)^p|f(x)| = C> 0$（可以是$+\infty$），则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散。

注：使用此定理要适当选取p的值，使得分子分母的阶数恰当，从而得出收敛或发散的结论。注意联系第一章中常见的极限及其阶数。

3、柯西主值积分

(1) 定义：$(\mathrm{CPV})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x.$

(2) 实质：通过某种取极限的方式使得$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$是有限值。它的存在不代表$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$一定收敛，但是该值有一定的实际价值。

4、Γ函数与B函数

（1）Γ函数：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$，$s>0$.

性质：①$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，$\forall s>0$，特别地，对于正整数n，$\Gamma(n)=(n-1)!$；

②$\forall s\in(0,1)$，$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin s\pi}$.特别地，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

（2）B 函数：$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$，$p,q>0$.

性质：①$\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$；

②$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$.

（3）注：遇到一些类似形式的反常积分，要有意识地将其化为Γ函数与B函数，并利用$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$以及题目可能提供的其他函数值进行计算。

第四章 矩阵与线性方程组（仅讲向量与矩阵、行列式、逆矩阵三节）

一、向量及其基本性质

1、行向量与列向量的概念（略）

2、n维向量空间：$\boldsymbol{R}^n=\{\vec{a}\mid\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$，$a_i\in\boldsymbol{R}$，$i=1,2,...,n\}$

在这个空间上定义了向量的一系列运算：

（1）加法；（2）数乘；

（3）取模：$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$；

（4）（在 n 维欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 上定义）内积（点乘，数量积）：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$.

二、矩阵及其运算

1、基本表示：$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}$.

2、概念：实矩阵，复矩阵，方阵，主对角线，同型矩阵，零矩阵，单位矩阵，Kronecker 记号（δ_{ij}），对角矩阵，上（下）三角矩阵……

3、矩阵的运算

（1）加法：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$（满足交换律、结合律）；

（2）数乘：$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$（满足分配律）；

（3）转置：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$（行变列，列变行），$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

（4）共轭：$\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})_{m\times n}$，共轭转置$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}=\overline{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}$；

（5）乘法

①条件：$\boldsymbol{AB}$ 存在的条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数。

②公式：对于$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$与$n\times p$矩阵$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}=(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj})_{m\times p}$.$\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列作内积。（满足结合律和分配律，不满足交换

律，左乘右乘不一样；$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）

4、分块矩阵及其运算（略，注意 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$）

二、行列式

1、行列式的本质——与排列有关

（1）排列的逆序数：设 $j_1,j_2,\ldots,j_n$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的一个排列。将满足 $k<l$ 且 $j_k>j_l$ 的数对(k,l)的个数称为 $j_1,j_2,\ldots,j_n$ 的逆序数，记作$\tau(j_1,j_2,\ldots,j_n)$。

（2）n 阶行列式的本质计算式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\ldots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}.$$

（3）余子式算法：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}，\text{其中}A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\text{为代数余子式，}$$

Δ_{ij}为余子式。Δ_{ij}即行列式中去掉第i行与第j列所得的行列式。

2、行列式的性质

（1）$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$；

（2）互换行列式的两行（列），行列式的值变号；

（3）若行列式有两行（列）成比例，则行列式的值为 0；

（4）两个仅有一行（列）不同的行列式的和，等于将该行（列）相加，其余行（列）不变的行列式；

（5）★将行列式的某一行（列）乘以一个数加到另一行（列），行列式的值不变。

（6）三角形行列式的值等于主对角元素的乘积。

注：①在计算阶数已知的行列式时，先看是否有成比例的行（列），如果没有，则不断用其他性质进行化简，如果实在化不成对角行列式，应适时放弃变换，在某一行 0 元素较多时即可直接展开，然后对余子式进行转化，层层递进；

②对于阶数 n 未知的行列式，往往有一定规律（否则难以计算），一般来说需要所有行（列）参与变换，而不是仅仅变换其中某些部分，如将下面的所有行加到第一行，或是将第一行加到下面所有行等等。

（7）（Laplace定理）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$

（8）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$；

（9）对于方阵A,B，有$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

三、逆矩阵

1、逆矩阵的定义：$\boldsymbol{A}^{-1}$ 满足 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$。

2、逆矩阵存在的充要条件：$|\boldsymbol{A}|\neq 0$。

3、逆矩阵的求解

（1）直接计算：$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$，其中$\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})_{n\times n}$（$A_{ji}$是$a_{ji}$的代数余子式）是伴随矩阵；

（2）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

（3）$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

（4）初等变换法： 构造矩阵$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{I})$，对其进行初等行变换（换行，倍乘某一行，将某一行乘以一个数加到另一行），直至左边变为 $\boldsymbol{I}$，此时右边的矩阵就是 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

四、解线性方程组的两种简单方法

1、Cramer 法则：对于 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，如果$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则方程组有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$，且 x 的分量 $x_i=\dfrac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|}$，其中$|\boldsymbol{A}_i|$是将$|\boldsymbol{A}|$的第$i$列换成$\boldsymbol{b}$后的行列式。（计算量略大）

2、Gauss 消元法：构造增广矩阵$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$，对其进行初等行变换，直至：

（1）$\boldsymbol{A}$ 的部分变为三角形矩阵，则可一步步迭代得到结果；

（2）$\boldsymbol{A}$ 的部分变为单位矩阵，则 $\boldsymbol{b}$ 的部分变为解向量。

第五章 线性变换、特征值和二次型（略）

第六章 空间解析几何

一、三维向量的更多运算

1、外积（叉积，矢量积）：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$.

性质：（1）$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cdot\sin\theta$，其中$\theta$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角。

（2）$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$构成右手系。

（3）反交换性

（4）满足分配律与线性性

2、混合积：$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$.

性质：（1）轮换性

（2）反对换性

（3）混合积的几何意义是三个向量张成的平行六面体的体积。

（4）三个三维向量共面的充要条件是它们的混合积等于 0。

二、平面与直线

1、平面的方程

（1）点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。其中法向量为$(A,B,C)$，$(x_0,y_0,z_0)$为平面上一点。

（2）三点式方程：$\begin{vmatrix} x-z_1 & y-z_2 & z-z_3 \\ x_1-z_1 & x_2-z_2 & x_3-z_3 \\ y_1-z_1 & y_2-z_2 & y_3-z_3 \end{vmatrix}=0.$

（3）截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

（4）一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0.$

2、直线的方程

（1）点向式（对称式）方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$，其中$(m,n,l)$为直线方向向量。

（2）参数方程：$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt,(t\in R) \\ z=z_0+lt. \end{cases}$

（3）两点式方程：$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$

（4）一般式方程（转化为两个平面的交线）：$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{cases}$

（在此，直线的方向向量可以选为两平面法向量的外积）

3、距离与夹角公式

(1) 点P到平面π的距离：设π上有一点P_0，π的法向量为$\boldsymbol{n}$，则P到π的距离

$d=\frac{\left|\overrightarrow{PP_0}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\|\boldsymbol{n}\|}$.若$\pi$的方程为$Ax+By+Cz+D=0$，$P(x^*,y^*,z^*)$，则

$d=\frac{|Ax^*+By^*+Cz^*+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$

(2) 点P到直线L的距离：设直线L上有一点P_0，L的方向向量为$\boldsymbol{l}$，

则P到L的距离为$\frac{\left\|\overrightarrow{PP_0}\times\boldsymbol{l}\right\|}{\|\boldsymbol{l}\|}.$

(3) 两平面的夹角；$\theta=\arccos\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{\|\boldsymbol{n}_1\|\cdot\|\boldsymbol{n}_2\|}.$

(4) 两直线的夹角：$\theta=\arccos\frac{\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2}{\|\boldsymbol{l}_1\|\cdot\|\boldsymbol{l}_2\|}.$

(5) 直线与平面的夹角：$\theta=\arcsin\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}|}{\|\boldsymbol{n}\|\cdot\|\boldsymbol{l}\|}.$

(6) 异面直线的距离：设直线l与m异面，$P\in l$，$Q\in m$，向量$\boldsymbol{n}$与两直线都垂直，

则l与m的距离$d=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\|\boldsymbol{n}\|}.$

三、空间曲面与曲线

1、曲面一般方程：$F(x,y,z)=0$。

2、曲面方程的推导

（1）用定义求方程（如球面方程的推导）；

（2）旋转曲面方程：先选择原曲线上一点，再研究它绕某轴旋转时坐标发生的变化。基本原理——绕着某坐标轴旋转，则点的该坐标保持不变；又点离该轴的距离不变，所以另两个坐标的平方和也不变。例如，

平面Oyz上的曲线$f(y,z)=0$绕z轴旋转产生的曲面方程是$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$

3、柱面

（1）定义：给定一条曲线 C 与一条直线 l，则由平行于 l 的直线沿 C 运动得到的曲面叫做柱面，C 称为准线，l 称为母线。

（2）方程中只含两个坐标的曲面是柱面。例如方程 $x^2+y^2=a^2$ 在三维空间内表示圆柱面，方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$在三维空间内表示椭圆柱面。

（3）当准线 C 是直线时，柱面退化为平面。

4、空间曲线方程：（1）看作两个曲面的交线$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$

（2）参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t).\end{cases}$

5、几种重要的二次曲面

（1）球面：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$；

（2）椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，用坐标平面截得的均为椭圆（或圆）；

(3) 单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，用平面$z=z_0$截得的是椭圆，用平面$y=y_0$（$|y_0|>b$）截得的是双曲线，用平面$y=\pm b$截得的是两条直线。

(4) 双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$，用平面$z=z_0$（$|z_0|>c$）截得的是椭圆，用平面$y=y_0$截得的是双曲线。

(5) 锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$。

(6) 椭圆抛物面：$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$，用平面$z=z_0>0$截得的是椭圆，用平面$y=y_0$截得的是抛物线。

(7) 双曲抛物面：$z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$，用平面$z=z_0\neq 0$截得的是双曲线，用平面$z=0$截得两条直线，用平面$x=x_0$或$y=y_0$截得抛物线。（马鞍面）

第七章 多元函数微分学

一、n 维空间中与点有关的基本概念

1、n 维空间中的点与 n 维向量一一对应。

2、空间点的邻域与去心邻域。

3、内点、外点、边界点、内部（$\overset{\circ}{S}$）、边界（∂S）、开集、闭集、补集（余集）、闭包

4、线段、折线、连通、开区域、闭区域、有界与无界点集

二、多元函数的基本概念

1、多元函数的定义域、值域：前者是 n 维向量的集合，后者是数集。

2、等高线：曲线$\begin{cases} z = f(x,y), \\ z = k \end{cases}$是函数 $z=f(x,y)$的一条等高线，它位于空间中，不同的等高线一般不共面。将其投影至 xOy 平面中的曲线 $f(x,y)=k$ 为对应的等位线，所有等位线均共面。（等位线只能取出函数值相同的点，不能体现函数值的大小关系，更不能表示函数的图象）

三、多元函数的极限

1、定义：ε-r 语言。

2、多元函数中，自变量可以从任何方向趋向某点，只有在任意方向均取得同一极限时才有极限存在。（类似于一元函数的 Heine 定理

3、）

4、多元函数连续的充要条件：$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$处有定义，$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$存在且等于$f(\boldsymbol{x}_0)$.

5、多元函数连续性的性质：多元连续函数在四则运算后仍连续；一元连续函数与多元函数复合后的函数仍连续。$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g\circ f(\boldsymbol{x}) = g(\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})) = g(f(\boldsymbol{x}_0)).$

6、n 元初等函数：n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的 n 个分量的初等函数经过四则运算和与一元初等函数复合之后所得的函数是 n 元初等函数。

7、有界闭区域上连续函数的性质：①有界；②有最大值与最小值；③介值定理。

8、向量值函数

（1）定义：对于 $\boldsymbol{f}$：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}$，即 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，它表示将 n 维向量与 m 维向量建立关系。其本质是由 m 个 n 元函数组成的函数组。

（2）向量值函数的极限：$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a} \| = 0.$

（3）向量值函数的连续性：$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0).$

（4）向量值函数连续的充要条件：$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_m)$连续，等价于 $f_1,f_2,\ldots,f_m$ 均连续。

（5）连续向量值函数的复合仍连续。

四、全微分与偏导数

1、全微分的实质：存在线性函数 k 使得 $f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=k(\Delta\boldsymbol{x})+o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|)$，也即存在向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$使得 $\mathrm{d}f=\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{x}=k(\Delta\boldsymbol{x})$.

2、全微分的定义式：$\mathrm{d}f=k(\Delta\boldsymbol{x})=a_1\Delta x_1+a_2\Delta x_2+...+a_n\Delta x_n=a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_2+...+a_n\mathrm{d}x_n$.

3、偏导数：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}_0}=f_{x_i}'(\boldsymbol{x}_0)=\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{f(x_1^0,x_2^0,...,x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_i^0,...,x_n^0)}{\Delta x_i}$.（使其中一个变量变化，其余变量可以看作常数，然后对那一个变量求导数）

4、连续不一定可微，也不一定可偏导。多元函数中可偏导不一定连续（不能保证别的任意方向都连续），也就不一定可微。可微一定在任意方向连续并且可偏导。

*全微分与偏导数的关系：$\mathrm{d}f=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$.

*$f(\boldsymbol{x})$在某点处可偏导且偏导数都连续，等价于 $f(\boldsymbol{x})$在该点处可微。

4、近似计算：在点(x_0,y_0)附近，$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$.

5、高阶偏导数：$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}=f''_{x_ix_j}(\boldsymbol{x})$.（注意几种写法中$x_i$与$x_j$的顺序）

*Schwarz 定理：f''_{xy}与f''_{yx}在(x_0,y_0)处连续$\Rightarrow f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

6、向量值函数的微分与偏导数

⑴ 函数值变化量与微分：$\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{J}\Delta\boldsymbol{x}+o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|)$，其中$o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|)$是$m$维向量，$\boldsymbol{J}$为$m\times n$矩阵（Jacobi矩阵）；微分$\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{J}\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{J}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。可记$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ $=\boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{x}_0)$为此向量值函数的导数。

（2）向量值函数$\boldsymbol{f}$可微等价于$\boldsymbol{f}$的每一个分量均可微。$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$.

7、多元复合函数求导的链式法则：$u=f(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$，则$(f\circ\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x})=f'(\boldsymbol{y})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$，即$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial u}{\partial y_j}\cdot\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}$.

从而有全微分的形式不变性：$\mathrm{d}u=\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial u}{\partial y_j}\cdot\mathrm{d}y_j=\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial u}{\partial y_j}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)$.

8、复合映射的求导：$(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{y})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$.

e.g.平面直角坐标与极坐标转化：$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

空间直角坐标与柱坐标转化：若$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z,\end{cases}$则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

空间直角坐标与球坐标转化：若$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\varphi,\end{cases}$则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

五、隐函数微分法

1、一元隐函数存在定理——能否由二元方程得到一元隐函数

(1) 隐函数存在的条件：二元函数$F(x,y)$有零点(x_0,y_0)，在其邻域上$F_x{}'$与$F_y{}'$连续，且$F_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$.(有零点，显含y)

(2) 隐函数f的性质：$F(x,f(x))=0$；$f(x_0)=y_0$；$f'(x)=-\frac{F_x{}'}{F_y{}'}$.

(3) 定理的实质：只要y对x的导数存在，则微分方程在(x_0,y_0)附近可解，从而有对应的函数。

2、多元隐函数存在定理

(1) 隐函数存在的条件：$n+1$元函数$F(x_1,x_2,...,x_n,y)$有零点$\boldsymbol{x}_0$，在其邻域上F各偏导数连续，且$F_y{}'(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$.

(2) 隐函数f的性质：$F(\boldsymbol{x}_0)=0$；$f(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)=y_0$；$\frac{\partial f}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}{}'}{F_y{}'}(i=1,2,...,n)$.

3、多元函数组隐函数存在定理

(1) 隐函数存在的条件：m个$n+m$元函数$F_i(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)$有同一零点$\boldsymbol{x}_0(i=1,2,...,m)$，在其邻域上$F_i$各偏导数连续，且Jacobi行列式

$$\frac{D(F_1,F_2,...,F_m)}{D(y_1,y_2,...,y_m)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ ... & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}\neq 0.$$

(2) 隐函数组$\{f_i\}_{i=1}^n$的性质：$F(\boldsymbol{x}_0)=0$，$y_i^0=f_i(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)(i=1,2,...,m)$，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

4、逆映射定理

⑴ 逆映射存在的条件：对于n元函数$f_i(i=1,2,...,n)$，存在点$\boldsymbol{x}_0$使得

$y_i^0 = f_i(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0)$，$f_i(i=1,2,...,n)$在$\boldsymbol{x}_0$处可偏导，Jacobi行列式$\left.\frac{D(f_1, f_2,..., f_n)}{D(x_1, x_2,..., x_n)}\right|_{x_0} \neq 0.$

（2）逆映射$g_i(i=1,2,...,n)$的性质：$x_i^0 = g_i(y_1^0, y_2^0,..., y_n^0)$，$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1}.$

六、方向导数与梯度

1、向量的方向余弦：$\boldsymbol{l}_0 = \frac{\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2,..., \cos\alpha_n).$

2、方向导数：多元函数沿某一向量 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率。

⑴ 定义式：$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(P_0) = \lim_{\|PP_0\|\to 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\|PP_0\|}$.（2）偏导数表达：$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\cos\alpha_i.$

3、梯度：位于多元函数变化最快的方向。在梯度方向，多元函数的方向导数取最大值。

⑴ 梯度对应的方向：与向量$\boldsymbol{g} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2},..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$同向。此向量就被称为梯度$\mathrm{grad}\, f$。

（2）梯度大小：$\|\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{x})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}.$

⑶ 梯度与方向导数的关系：$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(P_0) = (\mathrm{grad}\, f(P_0), \boldsymbol{l}_0).$

⑷ 等值面任一点处的法向量$\boldsymbol{n}$与该处梯度向量共线。$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}.$

4、势量场

（1）数量场：在 n 维空间某一区域内每一个点对应一个函数值，这一仅和位置有关的关系即成为一个数量场。

（2）势量场：处处存在梯度的数量场。其梯度称为势函数。

七、多元函数的 Taylor 公式

1、二元函数 Taylor 公式：

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x_0,y_0)+o[(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})^n].\text{其中}$$

$o[(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})^n]$为Peano余项。对应Lagrange余项为

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), 0<\theta<1.$$

*若$\left|\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^i\partial y^{n+1-i}}\right|\le M(i=0,1,2,...,n+1)$，则余项的绝对值$|R_n|\le\frac{M}{(n+1)!}(|\Delta x|+|\Delta y|)^{n+1}$

$\le\frac{2^{\frac{n+1}{2}}M}{(n+1)!}[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{n+1}{2}}$.（最后一步由Cauchy不等式得来）由此可以进行近似计算与误差估计。

2、n元函数Taylor公式：

$$f(x_1^0+\Delta x_1,...,x_n^0+\Delta x_n)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(x_1^0,...,x_n^0)+o(\sqrt{(\Delta x_1)^2+...+(\Delta x_n)^2}).$$

Lagrange余项为$\frac{1}{(m+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{m+1} f(x_1^0+\theta\Delta x_1,...,x_n^0+\theta\Delta x_n)$，其中$0<\theta<1$.

另一写法：$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta\boldsymbol{x},\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{(m+1)!}\left(\Delta\boldsymbol{x},\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m+1} f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}).$

当$m=1$时，上一行的Lagrange余项可写为$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f(x_1^0+\theta\Delta x_1,...,x_n^0+\theta\Delta x_n)\Delta x_i\Delta x_j$

$=\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{H}\big|_{x_0+\Delta x}(\Delta\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}$.其中$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \cdots & & & \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$为Hesse矩阵。

八、多元函数的极值与最值

1、无条件极值

（1）多元函数极值的定义：函数值不小于或不大于邻域内其他函数值的点为多元函数的极值点。

（2）多元函数极值点的必要条件：极值点处各个偏导数均为 0。

（与一元函数类似，多元函数也有驻点/临界点的概念。）

（3）多元函数极值点的充分条件：Hesse 矩阵非奇异且正定或负定的驻点为极值点。正定则为极小值点，负定则为极大值点。

（4）用主子式推极值点

设$\boldsymbol{H}_k=\left.\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & \cdots & f''_{x_1x_k} \\ \cdots & & \\ f''_{x_kx_1} & \cdots & f''_{x_kx_k} \end{pmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$.

$\left|\boldsymbol{H}_k\right|>0(k=1,2,...,n)\Rightarrow \boldsymbol{x}_0$为极小值点。

$(-1)^k\left|\boldsymbol{H}_k\right|>0(k=1,2,...,n)\Rightarrow \boldsymbol{x}_0$为极大值点。

$\left|\boldsymbol{H}_n\right|\neq 0$且上述两条件均不满足，则$\boldsymbol{x}_0$不是极值点。

（5）用判别式推极值点

判别式$\Delta=f''_{xx}(\boldsymbol{x}_0)f''_{yy}(\boldsymbol{x}_0)-[f''_{xy}(\boldsymbol{x}_0)]^2$.

①$\Delta>0$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是极值点。此时，若 $f''_{xx}(\boldsymbol{x}_0)>0$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 为极小值点；若 $f''_{xx}(\boldsymbol{x}_0)<0$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 为极大值点。

②$\Delta<0$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 不是极值点。

2、多元函数在定义域上无附加条件的最值：先求极值，再将其与定义域边界处的各函数值比较，得出最大与最小值（假如存在）。

*3、最小二乘法——线性回归方程最优解的计算

⑴ 线性回归方程最优解的条件：直线$y=ax+b$使得总体偏差

$\Delta(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2$最小。因此，$\frac{\partial\Delta}{\partial a}=\frac{\partial\Delta}{\partial b}=0$.

⑵ 最优解表达式：$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2},b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}$.

4、条件极值——对自变量有适当约束的极值问题

⑴ 条件极值简略记法：$\begin{cases}\min F(x_1,x_2,...,x_n)(\text{或}\max) \\ G(x_1,x_2,...,x_n)=0.\end{cases}$

⑵ 基本思想：通过G的约束减少变量个数，转化为无条件极值问题。

⑶ Lagrange乘数法：令Lagrange乘数$\lambda=-\frac{\partial F}{\partial x_n}\Big/\frac{\partial G}{\partial x_n}(\frac{\partial G}{\partial x_n}\neq 0)$.

Lagrange函数$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda)=F(x_1,x_2,...,x_n)+\lambda G(x_1,x_2,...,x_n)$.

显然L取极值等价于F取极值，故$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial F}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial G}{\partial x_i}=0(i=1,2,...,n), \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=G(x_1,x_2,...,x_n)=0.\end{cases}$

对于多个约束条件$G_i(i=1,2,...,m)$，$L=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_iG_i$，且

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial F}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(j=1,2,...,n), \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=G_i(x_1,x_2,...,x_n)=0(i=1,2,...,m).\end{cases}$$

（4）条件极值的实质：函数的定义域由于约束条件而发生维数上的退化。Lagrange 乘数法则是用 L 的非条件极值恰好取得 F 的条件极值（并且做好约束）。

九、多元函数微分学在空间解析几何中的应用

1、空间曲线的切平面与法线

（1）切平面的定义：任取空间曲面 $z=f(x,y)$ 上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，则曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ x=x_0 \end{cases}$ 和曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0 \end{cases}$ 在 P 处的切线构成的平面即为曲面在 P 处的切平面。

（2）切平面的方程：$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+(z-f(x_0,y_0))=0.$

其法向量 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0,y_0) \end{vmatrix}=-f'_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}-f'_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$

*当曲面方程为隐函数 $F(x,y,z)=0$ 时，切平面方程为

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{F'_z}(F'_x\boldsymbol{i}+F'_y\boldsymbol{j}+F'_z\boldsymbol{k})\bigg|_P.$

*当曲面方程为 $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v) \end{cases}$ 时，切平面方程为

$$\left.\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|_P(x-x_0)+\left.\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|_P(y-y_0)+\left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_P(z-z_0)=0.$$

法向量 $\boldsymbol{n}=\left.\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|_P\boldsymbol{i}+\left.\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|_P\boldsymbol{j}+\left.\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_P\boldsymbol{k}.$

（3）曲面的法线：过曲面上一点 P 且与 P 处切平面垂直的直线为曲面在 P 处的法线。

曲面方程为 $z=f(x,y)\Rightarrow$ 法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}.$

曲面方程为 $F(x,y,z)=0\Rightarrow$ 法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$

曲面方程为 $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v) \end{cases}\Rightarrow$ 法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|_P}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|_P}=\dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_P}.$

2、空间曲线的切线与法平面

（1）光滑曲线：x,y,z 都可以用参数 t 统一表示且关于 t 均有一阶连续导数，而三者的导数不全为 0。

（2）光滑曲线的切线方程：设空间曲线上一点 P 对应的参数为 t_0，则 P 处的切线方

程为$\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$.如果曲线的方程为交线形式$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$则切线方

程为$\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_P}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_P}=\dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_P}$.

（3）法平面：过曲线上一点 P 且与 P 处切线垂直的平面为曲线在 P 处的法平面。

曲线为参数方程形式$\Rightarrow$其方程为$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0.$

曲线为交线形式$\Rightarrow$其方程为$\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}(x-x_0)+\dfrac{D(F,G)}{D(z,x)}(y-y_0)+\dfrac{D(F,G)}{D(x,y)}(z-z_0)=0.$

3、向量导数

⑴ 基本法则：若$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$，则定义$\boldsymbol{r}^{(n)}(t)=\dfrac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=x^{(n)}(t)\boldsymbol{i}+y^{(n)}(t)\boldsymbol{j}+z^{(n)}(t)\boldsymbol{k}.$

（2）性质：①$(\alpha\boldsymbol{r}_1+\beta\boldsymbol{r}_2)'=\alpha\boldsymbol{r}_1'+\beta\boldsymbol{r}_2'$;

②$(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\cdot\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2'$;

③$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2'$.

4、空间曲线弧微分

⑴ 若一段曲线由参数方程决定，参数$t\in(\alpha,\beta)$，则该段曲线的弧长

$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\|\boldsymbol{r}'(t)\|\mathrm{d}t.$

（2）可以以曲线上一点为基点，以有向弧长$s(t)=\int_{t_0}^t\|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\mathrm{d}\tau$将曲线上的点唯一确定，

$\boldsymbol{r}(s)=x(s)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j}+z(s)\boldsymbol{k}.$

流数记法：$\dot{\boldsymbol{r}}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},\ddot{\boldsymbol{r}}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}$.从而$s=\int_0^s\|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$

由$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^s\|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\mathrm{d}\tau=\|\boldsymbol{r}'(s)\|=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s)=1$，可知$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(s)=1$，故$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}(s)=0,\dot{\boldsymbol{r}}(s)$与$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$垂直。

5、空间曲线的曲率与挠率

⑴ 曲率：$\kappa(s)=\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|$.$\varphi$为曲线的转角。曲率反映了曲线的弯曲程度。

（2）曲率向量：即$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$。

曲率半径：$R(x)=\dfrac{1}{\kappa(s)}$.

⑶ 单位切向量：$\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$.它沿着曲线的切线方向。

主法向量：$\boldsymbol{N}(s)=\dfrac{1}{\kappa(s)}\dot{\boldsymbol{T}}(s)$.它是单位向量，指向曲率圆的圆心。

副（从）法向量：$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$.它也是单位向量，与曲率圆所在平面垂直。

$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{B}$构成的右手系称为Frenet标架。

三个向量分别对应切线、主法线、副法线。过切线、主法线的平面为密切平面；过主法线、副法线的平面为法平面；过切线、副法线的平面为从切平面。

（5）挠率：$\tau(s)=-\dot{\boldsymbol{B}}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)$.挠率反映了曲线从密切平面内扭出的程度。

（6）曲率、挠率与Frenet标架的关系（曲线论基本公式）：$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}(s)=\kappa(s)\boldsymbol{N}(s),\\ \dot{\boldsymbol{N}}(s)=-\kappa(s)\boldsymbol{T}(s)+\tau(s)\boldsymbol{B}(s),\\ \dot{\boldsymbol{B}}(s)=-\tau(s)\boldsymbol{N}(s).\end{cases}$

（7）以上各量在任意参数t下的表达式：

$$\boldsymbol{T}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|}，\ \boldsymbol{B}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\|}，\ \boldsymbol{N}(t)=\boldsymbol{B}(t)\times\boldsymbol{T}(t)，\ \kappa(t)=\frac{\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\|}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|^3},$$

$$\tau(t)=\frac{[\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)]\cdot\boldsymbol{r}'''(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\|^2}.$$

写成直角坐标的参数方程：$\kappa(t)=\dfrac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{|y''(x)|}{[1+y'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}$.

6、曲面的两大基本形式

（1）第一基本形式：用弧微分刻画曲面的度量性质。

表达式：$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$.其中$E=\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_u=x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u$，$F=\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_v$ $=x'_u x'_v+y'_u y'_v+z'_u z'_v$，$G=\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{r}'_v=x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v$.

（2）第二基本形式：用 Taylor 公式量度某点附近的点到该点处切平面的距离，体现曲线的弯曲程度。

①表达式：$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$.其中$L=\boldsymbol{r}''_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{n}'_u$，$M=\boldsymbol{r}''_{uv}\cdot\boldsymbol{n}$ $=-\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{n}'_v=-\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{n}'_u$，$N=\boldsymbol{r}''_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{n}'_v$。$\boldsymbol{n}$为曲线的法向量。

②根据弯曲程度对曲面上点的分类：$\begin{cases}LN-M^2>0\Rightarrow \text{椭圆点}\\ LN-M^2=0\Rightarrow \text{抛物点}\\ LN-M^2<0\Rightarrow \text{双曲点。}\end{cases}$

7、对曲面弯曲程度的进一步刻画

（1）法曲率：$\kappa_n=\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\Big|_{s=0}\cdot\boldsymbol{n}=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\dfrac{L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}$.

切向量：曲面上过P点的任一曲线在P处的切向量都是曲面在P处的切向量。这些切向量的全体构成曲面在P处的切平面$T_P\Sigma$。切向量可以用$\boldsymbol{r}'_u\,\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}'_v\,\mathrm{d}v$表示。

法截面：过曲面上一点P且与曲面在P处的切平面垂直的平面。其方向与切向量的选取有关。

法截线：法截面与原曲面的交线。曲面在P处沿$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$方向的法曲率与法截线在$P$处的曲率具有相同的绝对值。

（2）主曲率：曲面在P处各个法曲率中的最值（既有最大，也有最小）。取得最值的方向称为主方向。两个主曲率κ_1与κ_2满足关于κ的方程

$$(EG-F^2)\kappa^2-(GL+EN-2FM)\kappa+LN-M^2=0.$$

（3）平均曲率：$H=\dfrac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=\dfrac{GL+EN-2FM}{2(EG-F^2)}.$

Gauss曲率：$K=\kappa_1\kappa_2=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}.$

用H与K表示主曲率：$\kappa_{1,2}=H\pm\sqrt{H^2-K}.$

第八章 多元函数积分学

一、重积分的概念

1、多元函数的 Riemann 和：将高维（至少二维）空间内的有界闭区域Ω分割成 n 个小区域$\Delta\Omega_i(i=1,2,...,n)$，对应面积$\Delta\sigma_i$。在每个$\Delta\Omega_i$中取一个点 P_i。作和：

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i.$$

2、重积分的定义：在$\lambda=\max\{\Delta\sigma_i\}\to 0$（即 $n\to\infty$）时 Riemann 和的极限。

$$\int_{\Omega}f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i$$

Ω为二维空间时，此积分为二重积分$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

Ω为三维空间时，此积分为三重积分$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

3、重积分的几何意义：二重积分表示曲顶柱体的体积，该曲顶柱体底面为Ω，侧面为以Ω边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面，顶面为曲面 $z=f(x,y)$。

类似地，n 重积分表示对应 $n+1$ 维几何体的 $n+1$ 维测度。

二、二重、三重积分的计算

1、直接转化为一元函数定积分的计算

⑴ 二重积分：若$\Omega=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$，则先积$y$再积$x$。

$$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

若$\Omega=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$，则先积$x$再积$y$。

$$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

（思路：第一次积分算各处的平行截面积，第二次积分积得体积。）

（2）三重积分：若$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,a\le x\le b,y_1(x)\le y\le y_2(x),z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$，

则$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$

2、变量代换法

(1) 二重积分变量代换法：令$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \end{cases}(u,v)\in\Omega'$，则

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

e.g.二维直角坐标与极坐标的变换：$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$

(2) 三重积分变量代换法：令$\begin{cases} x=x(u,v,w), \\ y=y(u,v,w),(u,v,w)\in\Omega', \\ z=z(u,v,w), \end{cases}$则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

e.g.柱坐标变换：$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$

球坐标变换：$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$

3、重积分的性质

(1) 线性性：$\int\limits_{\Omega}(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}\sigma=\alpha\int\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma+\beta\int\limits_{\Omega} g\mathrm{d}\sigma;$

(2) 可加性：若$\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2$，$\Omega_1\bigcap\Omega_2=\varnothing$，则$\int\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{\Omega_1} f\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Omega_2} f\mathrm{d}\sigma;$

(3) 保序性（单调性）：$f\le g\Rightarrow\int\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma\le\int\limits_{\Omega} g\mathrm{d}\sigma.\left|\int\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma\right|\le\int\limits_{\Omega}|f|\mathrm{d}\sigma;$

(4) 若在Ω上$M_1\le f\le M_2$，$m(\Omega)$为Ω的同维测度（二维时为面积，三维时为体积），则$M_1 m(\Omega)\le\int\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma\le M_2 m(\Omega).$

(5) 重积分中值定理：对于Ω上的连续函数f，存在$P\in\Omega$使得$\int\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma=f(P)m(\Omega).$

4、重积分的应用：计算转动惯量，质心位置，引力大小……

三、反常重积分

1、反常重积分的定义：

(1) 无界区域上的反常重积分：对于无界区域Ω，$\iint\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{d(\Gamma)\to+\infty}\iint\limits_{\Omega_\Gamma} f\mathrm{d}\sigma$.其中$\Omega_\Gamma$是用封闭曲线$\Gamma$分割出的$\Omega$的子区域，$d(\Gamma)$为$\Gamma$上的点原点的最小距离。

*直积记法：

记$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$为$[a,b]$与$[c,d]$的直积。

由 $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，可记 $\iint\limits_{(-\infty,a]\times[b,+\infty)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{a}\int_{b}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其余反常重积分类似。

(2) 无界函数的反常重积分：对于有界区域Ω上在P_0处无界的函数f，$\iint\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{\rho(\gamma)\to 0}\iint\limits_{\Omega\setminus D} f\mathrm{d}\sigma$.其中$\gamma$为$\Omega$内过$P_0$的封闭曲线，$\gamma$包围的区域为$D$，$\rho(\gamma)$为$D$中的点到$P_0$的最大距离。

类似地可以定义在一条曲线Γ上无界的函数的反常重积分。

2、反常二重积分敛散性的判别（以无界区域为例）

（1）子区域列定理（类似于一元函数 Heine 定理）：

对于无界区域Ω，若任给一列封闭曲线$\{\Gamma_n\}$，它们分割出的Ω的有界子区域$\{\Omega_n\}$满足$\Omega_1\subset\Omega_2\subset\ldots\subset\Omega$且$\lim\limits_{n\to\infty} d(\Gamma)=+\infty$，则$\iint\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma$收敛$\Leftrightarrow$数列$\{\iint\limits_{\Omega_n} f\mathrm{d}\sigma\}$收敛，且$\iint\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n} f\mathrm{d}\sigma$.（任意满足条件的$\{\Omega_n\}$均取同一极限）

（2）比较判别法

①对于无界区域Ω上的二重积分，$\iint\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma$可积等价于$\iint\limits_{\Omega}|f|\mathrm{d}\sigma$可积。

②如果$0\le f\le g$，则：$\begin{cases}\iint\limits_{\Omega} g\mathrm{d}\sigma\text{收敛}\Rightarrow\iint\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma\text{收敛；}\\ \iint\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\sigma\text{发散}\Rightarrow\iint\limits_{\Omega} g\mathrm{d}\sigma\text{发散。}\end{cases}$

（3）Cauchy 判别法

令$r=\sqrt{x^2+y^2}$.

①$\exists p>2$与$M>0$，使得在Ω上有$|f(x,y)|\le\dfrac{M}{r^p}$，则$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$收敛；

②$\exists p\le 2$与$m>0$，使得在Ω上有$|f(x,y)|\ge\dfrac{m}{r^p}$，则$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$发散。

四、曲线积分与曲面积分

1、第一类曲线积分：积分区域为一条平面或空间曲线。

(1) 定义：将光滑曲线L任意分割成n个小段Δs_i，在每个小段上任取一个点P_i，则$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$.其中$\lambda=\max\{\Delta s_i\}$.

(2) 性质：线性——$\int_L(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}s=\alpha\int_L f\mathrm{d}s+\beta\int_L g\mathrm{d}s$.

可加性——若L由曲线L_1与L_2组成，则$\int_L f\mathrm{d}s=\int_{L_1} f\mathrm{d}s+\int_{L_2} f\mathrm{d}s$.

(3) 计算方法：由于曲线只有一个自由度，所以第一类曲线积分一定可以转化

为一元函数定积分。

对于三维空间内的光滑曲线L:$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$且$t\in[\alpha,\beta]$，则

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

对于平面曲线L:$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$且$t\in[\alpha,\beta]$，$x\in[a,b]$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

2、第二类曲线积分：在一条曲线上的向量值函数的“积分”。

(1) 定义：在有向曲线段L（以A,B为端点）上取n个点$P_i(i=0,1,2,...,n$，$P_0=A$，$P_n=B)$，向量$\Delta\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$。在每个小弧段$P_{i-1}P_i$上取一点$Q_i$，则对于同维向量值函数$\boldsymbol{F}$，有$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^n\boldsymbol{F}(Q_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i$.（分割与取点方式是任意的）

*若$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，则$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$

*若L是封闭曲线，则该积分可记为$\oint_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$

*注：因为第二类曲线的积分本质是向量内积的积分，所以积分的值与积分方向有关。

(2) 性质：线性性——$\int_L(\alpha\boldsymbol{F}+\beta\boldsymbol{G})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\alpha\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\beta\int_L\boldsymbol{G}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$

可加性——若L由两条同向曲线L_1与L_2组成，则

$$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{L_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{L_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

有向性——若L^-与L反向，则$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_{L^-}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$

(3) 计算方法：利用参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$且$t\in[a,b]$，有

$$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_a^b[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t.$$

3、两类曲线积分的关系

若用方向余弦表示有向曲线L在某点的切向量$\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$.

从而$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s.$

4、第一类曲面积分

⑴ 曲面的面积：对于三维空间内的曲面$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v),(u,v)\in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$，则曲面面积为

$\iint_D \mathrm{d}S = \iint_D \|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中$E, F, G$的意义同曲面第一基本形式。

转化成直角坐标：$\iint_D \mathrm{d}S = \iint_D \sqrt{1 + z'^2(x) + z'^2(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

（2）第一类曲面积分的定义：将曲面Σ任意分割成n小块$\Delta\Sigma_i$，并在每一块上任取一点P_i。若Σ_i的面积为ΔS_i，则积分$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$，其中$\lambda = \max\{d(\Delta\Sigma$

$d(\Delta\Sigma_i)$指$\Delta\Sigma_i$的直径，是$\Delta\Sigma_i$上两点间的最大距离。

（3）性质：线性性——$\iint_\Sigma (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}S = \alpha\iint_\Sigma f\mathrm{d}S + \beta\iint_\Sigma g\mathrm{d}S.$

可加性——若$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$，$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$，则$\iint_\Sigma f\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f\mathrm{d}S.$

（4）计算方法：若Σ的方程为$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), 且(u,v)\in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$，则

$\iint_\Sigma f\mathrm{d}S = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$。

若$(x,y)\in D'$，则$\iint_\Sigma f\mathrm{d}S = \iint_{D'} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z'^2(x) + z'^2(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

5、第二类曲面积分

⑴ 曲面的侧：若选定法向量的统一朝向后，点在曲面内运动一圈回到初位置时法向量朝向不变，则曲面为双侧曲面（与涂色类比，双侧曲面的正反面无法一次涂完），反之则为单侧曲面（如莫比乌斯带）。在此只考虑双侧曲面的第二类曲面积分。

（2）曲面的 6 种侧

法向量方向余弦	符号	名称
$\cos(\boldsymbol{n},x)$	+	前侧
	-	后侧
$\cos(\boldsymbol{n},y)$	+	右侧
	-	左侧
$\cos(\boldsymbol{n},z)$	+	上侧
	-	下侧

（3）曲面$z = f(x,y)$在某点的法向量$\boldsymbol{n} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}(-f'_x, -f'_y, 1).$

（4）第二类曲面积分的定义——在曲面上进行的向量值函数的“积分”。

对于$\boldsymbol{R}^3$上的有向光滑曲面Σ，在其上定义向量值函数$\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$。将Σ分成n个

–

同侧小块$\Delta\Sigma_i$，对应面积ΔS_i，单位法向量$\boldsymbol{n}_i$。记有向面积$\Delta\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{n}_i\Delta S_i$，并在每个$\Delta\Sigma_i$上任取一点$P_i$，则积分$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(P_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i$，其中$\lambda=\max\{d(\Delta\Sigma_i)\}$.

*称Φ为$\boldsymbol{F}$通过Σ指定侧的通量。当Σ为封闭曲面时，记$\Phi=\oiint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

（5）性质：线性性——$\iint\limits_{\Sigma}(\alpha\boldsymbol{F}+\beta\boldsymbol{G})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\alpha\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\beta\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{G}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

可加性——若$\Sigma=\Sigma_1\bigcup\Sigma_2$，$\Sigma_1\bigcap\Sigma_2=\varnothing$，且$\Sigma_1,\Sigma_2$和$\Sigma$同侧，则

$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{\Sigma_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint\limits_{\Sigma_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

有向性——若Σ^+与Σ^-反向，则$\iint\limits_{\Sigma^+}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint\limits_{\Sigma^-}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

（6）计算方法：基本原理——$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$.

转化成二重积分：若Σ的方程为$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),且(u,v)\in D,(x,y)\in D',\\ z=z(u,v),\end{cases}$则

$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\pm\iint\limits_{D}(PA+QB+RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.其中

$PA=P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$，$QB=Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$,

$RC=R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

转化成直角坐标：如果选择Σ的上侧，则

$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{D'}[-P(x,y,z(x,y))z'(x)-Q(x,y,z(x,y))z'(y)+R(x,y,z(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

选择Σ下侧，则上式右边乘以-1.

6、线积分与面积分的联系——两个重要公式

⑴ Green公式：若平面区域D的边界∂D为封闭光滑曲线，且∂D取正向，则

$\oint\limits_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.（概念：单连通，复连通）

*意义：将线积分与二重积分互化，可以通过适当的分割用线积分计算二重积分。

*推论：对于以上闭区域D，其面积$A=\oint\limits_{\partial D}x\mathrm{d}y=-\oint\limits_{\partial D}y\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\oint\limits_{\partial D}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$.

（2）Stokes公式

①诱导定向：对于曲面Σ的封闭边界$\partial\Sigma$，若右手四指按$\partial\Sigma$的某方向弯曲时拇指指向Σ的法向，则此方向为诱导方向。

②公式内容：对于以上的曲面与诱导方向上的积分，有

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos(\boldsymbol{n},x)+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos(\boldsymbol{n},y)+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos(\boldsymbol{n},z)]\mathrm{d}S.$$

其中$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\cos(\boldsymbol{n},x)\mathrm{d}S$，$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\cos(\boldsymbol{n},y)\mathrm{d}S$，$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S$，是带有符的面积微元。

简写：$\displaystyle\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z)\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S.$

五、向量场的性质

1、环量、旋度

(1) 环量：向量值函数$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$沿有向封闭曲线L（内部为曲面Σ）的环量

$$\Gamma=\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

（2）旋度：向量值函数$\boldsymbol{F}$在场中一点$M(x,y,z)$处的旋度

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\boldsymbol{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\boldsymbol{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

*Stokes公式的变形：$\displaystyle\oint_{\partial\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.（$\boldsymbol{F}$沿$\partial\Sigma$的环量等于$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}$通过$\Sigma$的通量）

*旋度的运算性质：线性性——$\mathbf{rot}(\alpha\boldsymbol{F}+\beta\boldsymbol{G})=\alpha\mathbf{rot}\boldsymbol{F}+\beta\mathbf{rot}\boldsymbol{G}$.

与数值函数φ的结合——$\mathbf{rot}(\varphi\boldsymbol{F})=\varphi\mathbf{rot}\boldsymbol{F}+\mathbf{grad}\,\varphi\times\boldsymbol{F}$.

（3）环量面密度：对于曲面Σ上一点M，$\boldsymbol{F}$在M处的环量面密度$\displaystyle\sigma=\lim_{\Sigma\to M}\frac{\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{m(\Sigma)}$

$=\mathbf{rot}\boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{n}$，其中$\Sigma\to M$表示$\Sigma$向$M$点收缩。

意义：表示环量随面积的变化率，反映环量的强弱。

（4）无旋场：旋度为0的向量场。

保守场：积分只与初末位置有关，与路径无关的向量场。保守场与无旋场本质上是一致的。

*在一维单连通区域中，无旋场、保守场、势量场是等价的：

$$\int_{AB}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\text{只与}A\text{和}B\text{有关}\Leftrightarrow\text{存在势函数}U\text{使}\mathbf{grad}\,U=\boldsymbol{F}\Leftrightarrow\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}\text{即}\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y},\\ \dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}.\end{cases}$$

（5）原函数：若 dU=Pdx+Qdy+Rdz，即 Pdx+Qdy+Rdz 是 U 的全微分，则 U 是 Pdx+Qdy+Rdz 的原函数。

可以用原函数计算对应积分的值：$\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = U(B) - U(A).$

2、散度

(1) Gauss公式：对于三维有界闭区域Ω，若其边界$\partial\Omega$为封闭曲面，则对于函数P,Q,R，有

$$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint_{\partial\Omega}[P\cos(\boldsymbol{n},x) + Q\cos(\boldsymbol{n},y) + R\cos(\boldsymbol{n},z)]\mathrm{d}S$$

$$= \iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

*推论：空间闭区域的体积$V = \iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\partial\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 散度：若向量值函数$\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$，则定义散度$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$

(3) 散度的运算性质：线性性——$\mathrm{div}(\alpha\boldsymbol{F} + \beta\boldsymbol{G}) = \alpha\mathrm{div}\boldsymbol{F} + \beta\mathrm{div}\boldsymbol{G}.$

与数值函数φ结合：$\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{F}) = \varphi\mathrm{div}\boldsymbol{F} + \mathbf{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{F}.$

*Gauss公式的变形：$\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega}\mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V.$

(4) 在流速场中的应用：对于流体流速$\boldsymbol{v}\begin{cases}\mathrm{div}\boldsymbol{v} > 0 \Rightarrow \text{流体净流出（源）}\\ \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \text{总体不流出也不流入}\\ \mathrm{div}\boldsymbol{v} < 0 \Rightarrow \text{流体净流入（汇）}\end{cases}$

(5) 无源场：$\mathrm{div}\boldsymbol{F} \equiv 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$为闭区域$\Omega$中的无源场$\Leftrightarrow \iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 0.$

*无源场必为某一向量场的旋度场（$\mathrm{div}(\mathbf{rot}\boldsymbol{F}) = 0$).

3、数量场、向量场性质的算符表示

(1) Hamilton算符：$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$

①数量场的梯度$\mathbf{grad}f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$;

②向量场的旋度$\mathbf{rot}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\boldsymbol{k}$;

③向量场的散度$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$

(2) Laplace算符：$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$

对于数量场f，$\Delta f=\nabla\cdot\nabla f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\mathrm{div}(\mathbf{grad}f)$.

（3）调和函数：满足$\Delta f=0$的函数f.

*调和函数极值原理：若函数u在有界闭区域Ω上连续且为调和函数，则在u非常数函数时，其最大值与最小值只能在Ω的边界$\partial\Omega$上取到。

（4）Green恒等式：$\iiint\limits_{\Omega}(f\Delta g-g\Delta f)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega}(f\dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}-g\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}})\mathrm{d}S$.