哈工大网盘计划简介

1.项目初衷

鉴于（1）哈工大各类 QQ 群内学习资料多且繁杂，而文件文字太多会导致文件被 tx 屏蔽或者降低 QQ 群信用星级；（2）校内诚信复印和纸张记忆垄断；（3）很多营销号在卖资料且售价很高；（4）学长学姐的自编材料很好，还想分享给下一届；等问题，网盘计划应运而生！哈尔滨工业大学网盘计划**旨在将窝工的各类学习资料进行归类整理，并且以网盘的形式发出来**，历时一年，现已小成，扫描了上百份校内复印店试题文档，归类整理了近 40 个 G 的学习资料给大家，已经花费上千元，现入不敷出，如果您希望网盘计划继续运营下去的话，可通过以下方式进行捐赠。

QQ支付

推荐使用微信支付

2.网盘计划成就（密码 1920）

哈工大网盘计划
密码1920

微信公众号二维码

群名称:哈工大网盘计划（预）
群　号:953062322

腾讯自动屏蔽以上链接，请用浏览器扫一扫

第一章 函数

一、实数集 $\mathbb{R}$

性质：①完备性（$+,-,\times/\div$）：经运算仍是实数

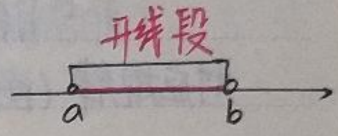
②有序性：$\forall a,b\in\mathbb{R}$，要么 $a<b$，要么 $a>b$，要么 $a=b$.

③阿基米德性，$\forall c>0$，$\exists$ 正整数 n，使 $n>c$.

④稠密性：$\forall a,b\in\mathbb{R}$，$\frac{a+b}{2}$

⑤实数 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 数轴上的点.

二、常见的数集



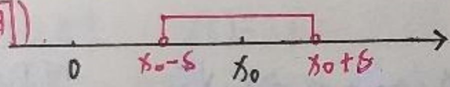
有限区间
① $\forall a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$，开区间 $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$

闭区间 $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a\le x\le b\}$.

半开半闭区间 $(a,b]$，$[a,b)$

无穷区间 $(-\infty,+\infty)$

② 邻域（开区间）



设 $\delta>0$，x_0 点的 δ 邻域是 $\{x\in\mathbb{R}|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$，记为 $U(x_0,\delta)$ 或 $U_\delta(x_0)$.

x_0 点的去心 δ 邻域是 $\{x\in\mathbb{R}|x_0-\delta<x<x_0\}\cup\{x\in\mathbb{R}|x_0<x<x_0+\delta\}$，即 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 或 $\mathring{U}_\delta(x_0)$.

③ 有（无）界集

定义：设 $D\subseteq\mathbb{R}$，若 $\exists$ 实数 $M>0$（或 $\exists a,b\in\mathbb{R}$），使 $\forall x\in D$，有 $|x|\le M$（$a\le x\le b$），则称 D 为有界集（称 a 为 D 的下界，b 为 D 的上界）；否则，称 D 为无界集

D 有界 $\Leftrightarrow$ $D\subseteq[-M,M]$，$M>0$

即对 $\forall M>0$，都 $\exists x_0\in D$，使得 $|x_0|>M$.

区间 $\neq$ 数集，区间是连续的，数集中的元素可以是不连续的.

练1：数集 D 有界，已知 M 为上界，N 为下界：M、N 可能在 D 里，也可能不在.

确界公理：若数集 D 有上（下）界，则必有最小上界（最大下界），称之为 D 的上（下）确界，记为 $\sup D$（$\inf D$）

确界的鉴别：$A=\sup D \Leftrightarrow \forall x\in D$，$x\le A$ 成立

且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in D$，使 $x_0>A-\varepsilon$

（无限小）［极限思想］

无限接近但小于 A 的数.

$A=\inf D \Leftrightarrow \forall x\in D$，都有 $x\geq A$

且 $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_0\in D$，使 $x_0<A+\varepsilon$

二. 函数

1.定义：设在某一问题中，有两个变量 x,y，若对变量 x 所取的每一个数，通过一个规律或对应法则 f，总有唯一变量 y 与之对应，这时我们称 y 为 x 的一元函数，记为 $y=f(x)$；称 x 为自变量，y 为因变量.

注：定义域 $\begin{cases}\text{实际定义域：圆盘 } S=\pi r^2\ (r>0) \\ \text{自然定义域：函数 } y=\pi r^2\ (r\in R)\end{cases}$

对应规律（函数关系）：$\begin{cases}\text{具体：公式法，列表法} \\ \text{抽象：图形法}\end{cases}$

2. 常见函数形式（10）

<1> 数列 $\{a_n\}$：$a_n=f(n)$ —— 整标函数

<2> 基本初等函数（6）

常量函数 $y=C$　　指数函数：$y=a^x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$　　幂函数：$y=x^a$

对数函数 $y=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$　　三角函数：$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$.

反三角函数：$y=\arcsin x\ (x\in[-1,1],\ y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$，$y=\arccos x\ (x\in[-1,1],\ y\in[0,\pi])$.
$y=\arctan x\ (x\in \mathbb{R},\ y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$，$y=\operatorname{arccot} x\ (x\in \mathbb{R},\ y\in(0,\pi))$.

图象相同

补充[反函数]：已知 $y=f(x)$，则其反函数为 $x=\Phi(y) \rightarrow y=\Phi(x)$

要存在，y 与 x 必需一一对应.　　↳图象关于 $y=x$ 对称

因此 $y=\sin x\ (x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$ 才具有反函数.

<3> 初等函数.

基本初等函数经四则运算、复合运算所得.

<4> 反函数　　<5> 复合函数：$y=f(t)$，$t=g(x)$ 则 $y=f(g(x))$.

<6> 参数函数：$\begin{cases}x=\Phi(t) \\ y=g(t)\end{cases}$

<7> 隐函数．$x^2+y^2=1 \longrightarrow$ 隐函数.

$y=\pm\sqrt{1-x^2} \longrightarrow$ 显函数.

<8> 分段函数

任何非零有理数都是它的周期；所以它无基本周期

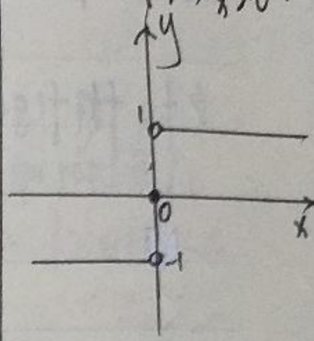
(狄利克雷函数)

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$$

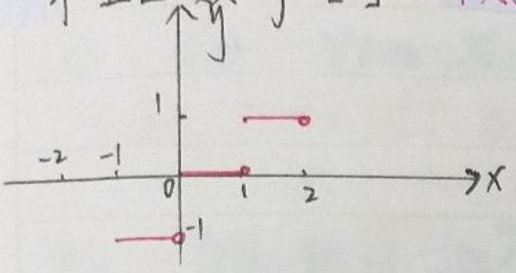
并不是每个函数都有基本周期

克罗内克函数：

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0.\end{cases}$$



取整函数 $y=[x]$ (不大于x的最大整数) (如 $[\sqrt{2}]=1$)

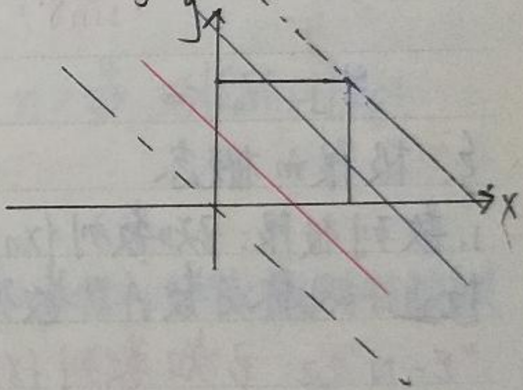


3. 计算函数值及函数值的表示 (自变量→点； 因变量→函数值).

比如求 $y=f(x)$ 在x_0点的函数值，即 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$

4. 函数图形.

例：设平面上有一正方形 D：$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，又有直线 $l: x+y=t\ (-\infty<t<+\infty)$. $S(t)$ 表示正方形 D 在直线 l 左下方的面积，求 $S(t)$？



解：① 当 $t\ge 2$ 时：$S(t)=1$

② 当 $1\le t<2$ 时：$S(t)=1-\frac{1}{2}(2-t)^2$

③ 当 $0\le t<1$ 时：$S(t)=\frac{1}{2}t^2$

④ 当 $t<0$ 时：$S(t)=0$.

综上：

$$S(t)=\begin{cases}1, & t\ge 2\\ 1-\frac{1}{2}(2-t)^2, & 1\le t<2\\ \frac{1}{2}t^2, & 0\le t<1\\ 0, & 0.\end{cases}$$

例2. 设 $f(x)$ 满足 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，求 $f(x)$.

解：将 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x\ldots(1)$ 中 x 换成 $-x$.

即 $f(1-\sin x)-3f(1+\sin x)=-8x\ldots(2)$

$3\times(1)+(2)$ 得：$f(1-\sin x)=-2x$.

令 $t=1-\sin x$，则 $t\in[0,2]$ ∴ $x=\arcsin(1-t)$

∴ $f(t)=-2\arcsin(1-t)$

即 $f(x)=-2\arcsin(1-x)$，$x\in[0,2]$.

任何一个定义域关于原点对称函数 $y=f(x)$ 均可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和，因为

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

例：设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\ge 0\\ \sin x, & x<0\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$　求 $f(g(x))$.

解：$f(g(x))=\begin{cases}2^{g(x)}, & g(x)\ge 0\\ \sin g(x), & g(x)<0\end{cases}$

$$=\begin{cases}2^{x^3}, & x\le 1 且 x^3\ge 0 \to 0\le x\le 1\\ 2^{\ln x}, & x>1 且 \ln x\ge 0 \to x>1\\ \sin x^3, & x\le 1 且 x^3<0 \to x<0\\ \sin\ln x, & x>1 且 \ln x<0 \to \phi\end{cases}$$

综上：$f(g(x))=\begin{cases}2^{x^3}, & 0\le x\le 1\\ 2^{\ln x}, & x>1\\ \sin x^3, & x<0\end{cases}$

第二章　极限与连续

§. 极限的概念

数列极限不可能在一个数列开头或中间

1. 数列极限：已知数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时，对应的项 x_n 与某一实数 A 无限接近，则称实数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限

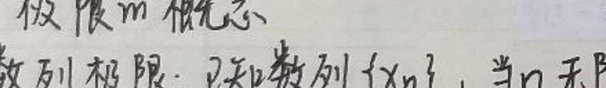
"$\varepsilon-N$"定义：已知数列 $\{x_n\}$，$A\in R$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛（有极限），称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限；记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A$，当 $n\to\infty$

即：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$（不包含0），当 $n>N$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$.　(5)

（x_n 可以与极限 A 相等）.

注：(1)"$\forall\varepsilon>0$"是使 ε 无限小　(2) N 重在存在

(3) 几何表示.



$|x_n-A|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow x_n\in U(A,\varepsilon)$ 即 $A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon$

当 $n<N$ 时，x_n 可能落在 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内

当 $n>N$ 时，x_n 不可能不在 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内.

越靠近A越密集

二. 发散数列：没有极限的数列.

例1：用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. （默认 $n>0$）.

证：分析：$\forall\varepsilon>0$，找 N，当 $n>N$ 时 有 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $n\geq\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1 \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

n从N+1开始取，因此

例2：用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. $\because n>0$，$\sqrt[n]{n}>0$ 恒成立.

证：分析：$\forall\varepsilon>0$，找 N，当 $n>N$ 时 有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{n}<\varepsilon+1$

放缩：$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots\cdot1}_{(n-2)\text{个}}}\leq\frac{n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}+n-2}{n}=\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+1$.

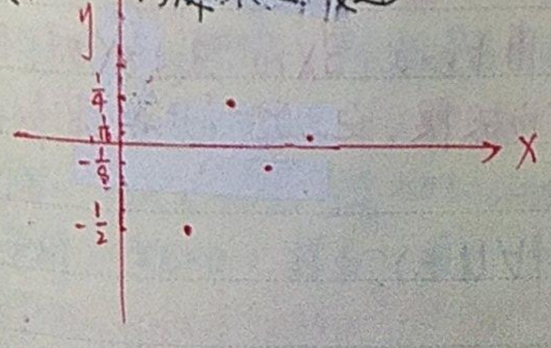
令 $\frac{2}{\sqrt{n}}+1<1+\varepsilon \Rightarrow n>\frac{4}{\varepsilon^2}$ 令 $N=\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]$.

证明：$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]$，当 $n>N$ 时有 $n>\frac{4}{\varepsilon^2} \Rightarrow \left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$.

$\therefore$ 得证.

均值不等式一般式：$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

对一个有极限的数列而言，不一定所有项只分布在极限的一侧，但该数列极限一定是在 $n\to\infty$ 时越来越接近.



$(5)\Rightarrow(1)$：$\forall\varepsilon>0$，取 $N'=N+1$，当 $n\geq N'>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

例3：下列哪些描述可作为是数列 $\{x_n\}$ 极限的定义 (1)(2)(3)(4).

(1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n\geq N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$. $(1)\Rightarrow(5)$ 显然，

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|\leq\varepsilon$. $(5)\Rightarrow(2)$ 显然， $(2)\Rightarrow(5)$：对 $\forall\varepsilon'>0$，取 $\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{2}$：$x_n\leq\varepsilon<\varepsilon'$ 在(2)成立的条件下

(3) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<k\varepsilon$，k 为正常数 $(5)\Rightarrow(3)$ 显然，

(4) $\forall m\in\mathbb{N}$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\frac{1}{m}$. $(5)\Rightarrow(4)$ 显然，

3. 子数列概念:

已知数列 $\{x_n\}$: $x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$

子数列 $\{x_{n_k}\}$: x_2、x_8, x_{15}, x_{21}, ……

n_k 表示, x_{n_k} 在原数列中是第 n_k 项, 子数列中是第 k 项.

显然 $n_k \geq k$.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则子数列中 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$.

4. 定理:

数列收敛于 $a \Leftrightarrow$ 它的所有子数列收敛于 a.

"$\Leftarrow$" 显然

证充分: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$.

取 $N' = N+1$, 当 $k > N'$ 时, $n_k \geq k > N' = N+1 \Rightarrow n_k > N$

$\therefore$ 有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

<1> 判定数列发散.

<2> 判定数列收敛. 结论: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = A$.

函数的极限

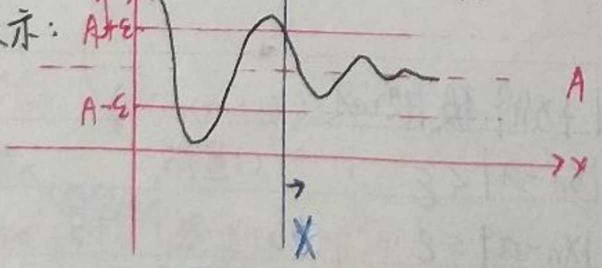
一. 自变量趋于无穷大时的极限

(1) 函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限

定义: 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有定义, A 为常数, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 自变量 $x \to +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$, 当 $x \to +\infty$.

注: $\forall U(A, \varepsilon)$, $\exists X > 0$, 使 $f((X, +\infty)) \subseteq U(A, \varepsilon)$.

几何表示:



(2) 函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限.

定义2: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上有定义, A 为常数, 若 $\varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $x < -X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 自变量 $x \to -\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$, 当 $x \to -\infty$.

(3) 函数自变量 $x\to\infty$ 时的极限。

定义3：设 $f(x)$ 在 $|x|>a$ 上有定义，A为常数．若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$，当 $x\to\infty$．

定理1：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

例：$f(x)=\frac{1}{x}$ $\because \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ $\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$．

二．函数自变量趋于有限值时的极限（函数在一点处的极限）

设 $f(x)$ 自变量 $x\to x_0$ 且 $x\neq x_0$，若 $f(x)$ 无限接近A则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限．

定义4（$\varepsilon-\delta$）：设 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义，A 为常数，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\underbrace{0<|x-x_0|}_{x一定不为x_0}<\delta$，有 $\underbrace{|f(x)-A|}_{f(x)可以为A}<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$（当 $x\to x_0$ 时）在 x_0 点的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

或 $f(x)\to A$，当 $x\to x_0$ 时．

注：$\forall U(A,\varepsilon)$，$\exists \mathring{U}(x_0,\delta)$，使 $f(\mathring{U}(x_0,\delta))\subseteq U(A,\varepsilon)$．

定义5：若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$．

定义6：……，使当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，……左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$．

左右极限统称单侧极限．

定理：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$．

例：已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$，判断是否存在该极限．

不存在：$f(0-0)=-1$；$f(0+0)=1$

例1：用定义验证 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$．

分析：$\forall\varepsilon>0$，找 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$．

$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|<\delta\le\varepsilon$．

证：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

例2：用定义验证 $\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$．

分析：$\forall\varepsilon>0$，找 δ，使当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|x^2-1|<\varepsilon$．即 $|(x+1)(x-1)|<\varepsilon$．

法1°：$|(x+1)(x-1)|<\delta|x+1|=\delta|x-1+2|\le\delta(|x-1|+2)=\delta^2+2\delta<3\delta$

限定 $\varepsilon\in(0,1)$．

$\therefore$ 令 $3\delta\le\varepsilon\to\delta\le\frac{1}{3}\varepsilon$．

法2°：$\forall\varepsilon>0$，不妨设 $0<|x-1|<1\Rightarrow 0<x<2$ 且 $x\ne1$ $\therefore 1<x+1<3$．

$|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|<3|x-1|<3\delta\le\varepsilon\Rightarrow\delta\le\frac{1}{3}\varepsilon$．

结论：由极限定义可得几个极限定式.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0\ (0<a<1)$.

(4) 若 $f(x)$ 为基本初等函数，且在 x_0 处有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

§5. 极限的性质与计算.

1. 极限的性质.

定理1（唯一性）：若一个数列（函数）有极限，则极限唯一.

证：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. [反证法].

又设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$，且 $A\neq B$，不妨设 $B<A$.

取 $\varepsilon=\frac{A-B}{2}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 得：取 $N_1\in\mathbb{N}$

当 $n>N_1$ 时，$|x_n-A|<\frac{A-B}{2}\Rightarrow x_n>\frac{A+B}{2}$

又由 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 得：取 $N_2\in\mathbb{N}$，当 $n>N_2$ 时 $|x_n-B|<\frac{A-B}{2}\Rightarrow x_n<\frac{A+B}{2}$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$. 当 $n>N$ 时，①②同时成立，从而 $x_n<\frac{A+B}{2}<x_n$，矛盾

∴假设不成立，$A=B$.

定理2（有界性）：

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界，即 $\exists M>0$，使 $x_n\leq M$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $\exists X>0$，使 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 有界

即 $\exists M>0$，使 $|f(x)|\leq M$，$\forall x\in(X,+\infty)\cup(-\infty,X)$.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)$ 有界；即 $\exists M>0$，使 $|f(x)|\leq M$，$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$.

注：数列是整体有界的，函数局部有界.

定理3（保序性）设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则

(1) 若 $A>B$，则 $\exists N$，使 $n>N$ 时，有 $x_n>y_n$.

(2) 若 $\exists N$，使 $n>N$ 时，$x_n\geq y_n$，则 $A\geq B$

证(1) 取 $\varepsilon=\frac{A-B}{2}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，$\frac{A+B}{2}=A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，当 $n>N_2$ 时，$y_n<\frac{A+B}{2}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有 $y_n<\frac{A+B}{2}<x_n$.

[推论] 保号性 $f(x)>0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geq0$.

2. 极限的四则运算与复合运算.

前提：有极限

定理4：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = AB$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$.

定理5：设 $f(g(x))$ 为 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的复合函数，且满足：(1) $f(g(x))$ 在 x_0 的去心邻域内有定义。(2) $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$. (3) $g(x) \neq u_0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

例：$\sqrt{\sin x - 1}$ 不满足上述定理

∵定义域为 $\{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in N\}$ ∴在 $\frac{\pi}{2}$ 的去心邻域内 $f(x)$ 没有定义，不满足(1).

证定理5：$\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$ 得：$\exists \eta > 0$，使 $0 < |u - u_0| < \eta$，有 $|f(u) - A| < \varepsilon$；

对上述的 $\eta > 0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$ 得：$\exists \delta_1 > 0$，使 $0 < |x - x_0| < \delta_1$，有 $|g(x) - u_0| < \eta$ 人为取η.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_0\}$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$.

∴有 $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$. ∴ $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

结论(1)指、幂、对、三角、反三角运算可以交换次序（极限存在的情况下）

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$

(2) 若 $f(x)$ 是初等函数且 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

（若基本初等函数可以不说邻域→毕竟都是连续的）.

8.18

例1：$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2-1}$

法1° $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3}$.

$\frac{0}{0}$ 例2：$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$.

$\infty-\infty$ 例3：$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$

分子有理化 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$.

例4：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(p-1)(q^n-1)+b(q-1)(p^n-1)}{a(p-1)(q^{n+1}-1)+b(q-1)(p^{n+1}-1)}$ $(a>0,\ b>0,\ p>0,\ q>0$ 且 $p, q \neq 1)$.

解：<1> $p<1$，$q<1$；原式$=1$.

<2> $0<p<1$，$q>1$，$0<\frac{p}{q}<1$；原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(p-1)(1-\frac{1}{q^n})+b(q-1)[(\frac{p}{q})^n - \frac{1}{q^n}]}{a(p-1)(q-\frac{1}{q^n})+b(q-1)[(\frac{p}{q})^{n+1}\cdot q - \frac{1}{q^n}]} = q$.

<3> $0<q<1$，$p>1$，原式$=p$.

<4> $p>1$，$q>1$：① $p=q$ 时，原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p^n-1}{p^{n+1}-1} = p$.

② $p>q$ 时，原式$=p$

同除大的n次幂 ③ $p<q$ 时，原式$=q$.

例5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2^3-1)(3^3-1)\cdots(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\cdots(n^3+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1)\cdots(n-1)(n^2+n+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(3^2-3+1)\cdots(n+1)(n^2-n+1)}$

$\boxed{\text{发现 } n^2+n+1=(n+1)^2-(n+1)+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\cdot\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}$.

例6. 设 $x_1=2$，$x_{n+1}=x_n^2-nx_n+1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}$

发现：$x_1=2$，$x_2=3$，$x_3=4$，$x_4=5$ …

$\therefore x_n=n+1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

§.2.4 收敛准则.

1. 收敛准则 I.

定理1 (两边夹挤准则)

若从某项以后有 $y_n\le x_n\le z_n$ (从某一时刻后有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$)，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ ($\lim g(x)=A=\lim h(x)$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ ($\lim f(x)=A$).

证：设 $\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，有 $y_n\le x_n\le z_n$，$\forall\varepsilon>0$，由 $\lim y_n=A$，$\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，有 $A-\varepsilon<y_n<A+\varepsilon$，又由 $\lim z_n=A$，$\exists N_3$，当 $n>N_3$ 时，有 $A-\varepsilon<z_n<A+\varepsilon$，取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，当 $n>N$ 时，有 $A-\varepsilon<y_n\le x_n\le z_n<A+\varepsilon$，即 $|x_n-A|<\varepsilon$ $\therefore \lim x_n=A$.

例1：$\lim\limits_{n\to\infty}\boxed{\frac{3^n}{n!}}$　　$\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{3}{n}<\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot 1\cdots\cdots\frac{3}{n}=\frac{27}{2n}\to 0$ $(n\to\infty)$.

对其放大缩小为两个可轻易得出A的数列.

显然大于0

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0$.

例2：$\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$

$4<(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}<(3\cdot 4^n)^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{1}{n}}\cdot 4\to 4$ $(n\to\infty)$.

例：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$

解：设 $a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{a_n(2n+1)}\Rightarrow a_n^2<\frac{1}{2n+1}$

$\therefore 0<a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$　当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to 0$　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

例：$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$

法1° $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=[n^{\frac{1}{n}}\cdot(n-1)^{\frac{1}{n}}\cdot(n-2)^{\frac{1}{n}}\cdots 1^{\frac{1}{n}}]^{\frac{1}{n}}\le\frac{n^{\frac{1}{n}}+(n-1)^{\frac{1}{n}}+\cdots+1^{\frac{1}{n}}}{n}\le\frac{n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{n}=\sqrt[n]{n}$

$=\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdots 1\cdot 1}\le\frac{2n^{\frac{1}{2}}+n-2}{n}=\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n}\to 1$

$\because n!\ge 1$ $\therefore$ $n!$ 开方也一定大于等于1　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

法2° $\boxed{n! \le n^n}$

$(n!)^{\frac{1}{n^2}} < (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n}}$.

2. 收敛准则Ⅱ　定义1：若数列$\{x_n\}$满足：$x_1 \le (\ge) x_2 \le (\ge) x_3 \le (\ge) \cdots \le (\ge) x_n \cdots$，则称数列$\{x_n\}$是单调数列（单调上升/下降）

定理2（单调有界准则）单调有界数列必收敛.

证：设数列单调↑且有界；则$\{x_n\}$有上确界，记为$A = \sup x_n$.

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使$x_N > A - \varepsilon$；当$n > N$时，$A + \varepsilon > A \ge x_n > x_N > A - \varepsilon$　即$|x_n - A| < \varepsilon$.

注：① 一般先证单调性，再证有界性.

② 证单调性 $\begin{cases} a.\ 做差 \\ b.\ 做商（同号）. \end{cases}$

③ 若已证$\{x_n\}$↑，$x_1 \le x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

例1. 设$x_1 > 0$，$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{9}{x_n}\right)$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

分析：$\because x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{9}{x_n}\right) \ge \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{9} = 3$.

$\therefore x_n \ge 3 \ (n \ge 2)$.

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{9}{x_n^2}\right) \le 1 \ (n \ge 2)$.

$\therefore x_{n+1} \le x_n \ (n \ge 2)$　[改变数列有限项数列极限不变，所以不用考虑x_1]

$\therefore \inf x_n = 3$；　$3 \le x_n \le x_2$，由单调有界准则可知 $\lim x_n$存在，记为A.

$\because \lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{9}{x_n}\right)$　$\therefore A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{9}{A}\right)$　分得：$A = 3$或-3（舍去）

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

例2. 设$x_1 = a > 0$，$x_{n+1} = \sqrt{b + x_n}$，求$\lim x_n$（$b > 0$）.

分析：证单调：$x_{n+1} - x_n = \sqrt{b + x_n} - \sqrt{b + x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{b + x_n} + \sqrt{b + x_{n-1}}}$

$\therefore x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号　$\therefore \{x_n\}$单调.

$x_2 - x_1 = \sqrt{b + a} - a = \frac{b + a - a^2}{\sqrt{b + a} + a}$　<1> $b + a - a^2 = 0 \to a = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ 或 $\frac{1 - \sqrt{1 + 4b}}{2}$（舍去）.

此时$x_n = a$，$\forall n \in \mathbb{N}$　$\therefore \lim x_n = a$.

<2> $b + a - a^2 < 0 \to a > \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$　又$\because 0 < x_n \le x_1$，由单调有界准则$\lim x_n$存在，记为A.

$\lim x_{n+1} = \lim \sqrt{b + x_n}$　即$A = \sqrt{b + A}$　分得：$A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ 或 $A = \frac{1 - \sqrt{1 + 4b}}{2}$（舍去）.

<3> $\begin{cases} b + a - a^2 > 0 \\ a > 0 \end{cases} \to 0 < a < \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$　$\therefore$此时$\{x_n\}$↑

当$n = 1$时，$x_1 = a < \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$，成立

下证：$x_n \le \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$　[数学归纳法]设当$n = k$时，$x_k \le \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$成立

则当$n = k + 1$时，$x_{k+1} = \sqrt{b + x_k} \le \sqrt{b + \frac{1 + \sqrt{4b + 1}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{4b + 1}}{2}$

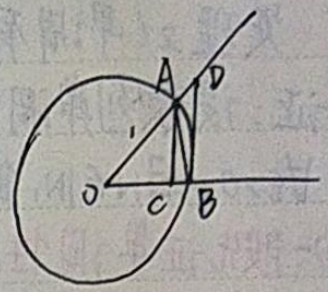
又$\because 0 < x_n$　$\therefore \{x_n\}$有界且↑，由单调有界准则可知 $\lim x_n = A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$.

函数：① 有理式 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$　　无理式

② 三角运算. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

③ 对数运算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\to e}=1.$

§.2.5 两个重要极限.



1. 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\because y=\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数 $\therefore$ 只证 $x>0$ 的部分.

证：不妨设 $0<x<\frac{\pi}{2}$；如图所示，$S_{\triangle AOB}<S_{扇AOB}<S_{\triangle DOB}$

即 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$.

则 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \Rightarrow \frac{1}{\cos x}<\frac{\sin x}{x}<1 \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$.

又 $\because \cos x$，$\frac{\sin x}{x}$ 均为偶函数 $\therefore \frac{1}{\cos x}<\frac{\sin x}{x}<1 \quad (-\frac{\pi}{2}<x<0$ 或 $0<x<\frac{\pi}{2})$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ $\therefore$ 由两边夹挤准则，有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

推论：① $\lim\limits_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1 \quad (\square\to 0$ 且 $\square\neq 0)$.

② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$.

例：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\arctan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}\cdot\frac{2x}{\arctan 2x}=\frac{3}{2}$.

2. 重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

$\boxed{(a+b)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}C_n^r a^{n-r}b^r \text{（牛顿二项式定理）}}$

证明：① $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

(1) 记 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot(\frac{1}{n})^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot(\frac{1}{n})^3+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}(\frac{1}{n})^n$

$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$.

则 $a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$

$\therefore a_n<a_{n+1}$ $\therefore \{a_n\}\uparrow$. $2=a_1\le a_n$

$a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$.

由单调有界准则知，$\lim a_n$ 存在，记为 e，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

不妨设 $x>0$，$n=[x]$，则 $n+1>x\ge n$ $\therefore 1+\frac{1}{n}\le 1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n+1}$ $\to (1+\frac{1}{n})^{n+1}\le(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{n+1})^n$

$(1+\frac{1}{n})^{n+1}=(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})\to e\,(n\to\infty)$.

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \to e \ (n\to\infty)$.

由两边夹挤准则可知 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

(3) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

推论：$\lim_{□\to 0}(1+□)^{\frac{1}{□}} = e$ （$□\to 0$ 且 $□\neq 1$）.

例1：$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.

练习：(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$

解：原式 $= \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$= \log_a e$

$= \frac{1}{\ln a}$.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$

解：[换元] 令 $t = a^x - 1 \to x = \log_a(t+1)$，$(t\to 0)$.

$\therefore$ 原式 $= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \ln a$.

* $\lim_{□\to 0}(1+□)^{\frac{1}{□}} = e$ 可以简化"1^∞"的极限运算.

例3：$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x$ $(a\neq b)$.

原式 $= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a-b}\cdot\frac{a-b}{x+b}\cdot x} = e^{a-b}$

例4：$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$

原式 $= \lim_{x\to 0}(1+\cos x-\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos x-\cos^2 x}\cdot\frac{(\cos x-\cos^2 x)}{x^2}}$

求 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$：$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$.

分析：$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$.

$\therefore \lim_{x\to 0}(1+\cos x-\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos x-\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}$.

例5：$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$

原式 $= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n}$.

求 $\lim_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n = 4$

分析 $\tan\frac{2}{n}\to 0$（当 $n\to\infty$）$\therefore$ 原式等价于 $\lim_{n\to\infty}2n\tan\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot 2 = 4$.

不能影响到分析过程，做时按同样做.

§. 两种量

1. 概念

定义：若 $\lim_{n\to\infty}x_n = 0$（或 $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ 或 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$），则称 $\{x_n\}$（或 $f(x)$）是自变量给定趋向下的无穷小量.

注：无穷小量为变量（常量0为无穷小量），无穷小量常用 α, β, γ 表示.

$x-1\ (x\to 0)$ ✓　　　$x-1\ (x\to 4)$ ✗.

定义2：设有数列 $\{x_n\}$（或函数 $f(x)$），$\forall M>0$，若 $\exists N\in \mathbb{N}$（$\exists \delta>0$ 或 $\exists X>0$）当 $n>N$ 时（当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时或 $|x|>X$ 时）时，有 $|x_n|>M$（或 $|f(x)|>M$）.

则称 $\{x_n\}$（或 $f(x)$）是在自变量给定趋向下的无穷大量. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）. 这种情况下极限其实是不存在的

注：无穷大量是无界函数，反之不成立.

例如：$f(x)=x\sin x$　当 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty\ (n\to\infty)$

$f(x)=x\sin x$　当 $x_n=n\pi$ 时，$f(x)=0$ 不是无穷大量.

非0无穷小的倒数是无穷大.

2. 无穷小的性质.

性质1：有限个无穷小的和、积仍为无穷小.

无限个……不一定为无穷小.（量变→质变）.

性质2：有界量与无穷小之积仍为无穷小（极限定式）.

例：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n$　$\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n=0$.（注意区别于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$）.

性质3：$\lim x_n=\lim y_n$（$\lim f(x)=\lim g(x)$）$\Leftrightarrow x_n=y_n+\alpha$（$f(x)=g(x)+\alpha$），$\alpha$ 为无穷小量

为相同时的无穷小量

例：已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$，$f(x)$ 是已知函数，求常数 a 和 b.

$f(x)-ax=b+\alpha$（$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha=0$）

则 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-b-\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

3. 无穷小的阶

定义1：设 α, β 为自变量相同趋向下的无穷小.

(1) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，称 α 是 β 的高阶无穷小（记为 $\alpha=o(\beta)$）.

(2) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，称 α 是 β 的低阶无穷小.

(3) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$，称 α 与 β 是同阶无穷小.

特别：当 $c=1$ 时，称 α 与 β 是等价无穷小.（记为 $\alpha\sim\beta$）.（此情况下 α 与 β 不为0）.

二元等价：① 反身性（自身与自身等）② 对称性（$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\beta\sim\alpha$）③ 传递性（$\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma\Rightarrow$

(4) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，称 β 是 α 的 k 阶无穷小（$k>0$）.

$k>0$

若 $\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=C\neq0$，$\lim\frac{\gamma}{\beta^m}=C'\neq0$，$k>m$. 则 α 是 γ 的高阶无穷小.

注：$0<k<1$，α 是 β 的低阶无穷小.

$k=1$，α 是 β 的同阶无穷小

$k>1$，…… 高阶无穷小.

例：判断下列等价无穷小是否存在

① $\sin x\,(x\to0)\sim x\,(x\to0)$ ✓

② $\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}\,(x\to0)\sim x\cdot\sin\frac{1}{x}\,(x\to0)$ ✗.

② 当 $x_n=\frac{1}{n\pi}$ 时，$\sin x_n=0$.

定理1：$\alpha\sim\beta \iff \alpha-\beta=o(\alpha)$（或 $\alpha-\beta=o(\beta)$）.

证明："$\Rightarrow$" $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=1-\frac{\beta}{\alpha}\to0$

"$\Leftarrow$" $\alpha=\beta+o(\alpha)$，则 $1=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\to1$ $\therefore\frac{\beta}{\alpha}\to1$

（其中 $\frac{o(\alpha)}{\alpha}\to0$）

定义2：若 $\alpha\sim\beta$，则称 β 是 α 的主要部分（主部），$\alpha-\beta$ 是 α 的次要部分（次部）.

主部不唯一，次部也不唯一.

定理2：若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 仅限乘除

证明：$\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}$.

注：在极限运算过程中，分子或分母的无穷小因子可用其等价无穷小代换.

即 $\lim\frac{\alpha f(x)}{\beta g(x)}=\lim\frac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}$.

代换后不可再进行加减运算，必须直接接着算乘除

例：$\lim\frac{x-\sin x}{x^2}=0$. 不能先将 $\sin x\sim x+x^3$（或）$\sim x$ > 结果不同 —— 原因

4. 常见的等价无穷小.

$\square\sim\sin\square\sim\arcsin\square\sim\tan\square\sim\arctan\square\sim\ln(\square+1)\sim e^{\square}-1\sim\frac{(1+\square)^{\alpha}-1}{\alpha}\sim\alpha\square$

即证 $\lim\frac{(1+\square)^{\alpha}-1}{\alpha\square}=1$ ← 证明

$$\lim\frac{e^{\alpha\ln(1+\square)}-1}{\alpha\square}=\frac{\alpha\ln(1+\square)}{\alpha\square}=\frac{\ln(1+\square)}{\square}=1.$$

例：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{2x-1}\cdot\sin\frac{5}{x}\underset{\text{无穷小代换}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{2x-1}\cdot\frac{5}{x}=\frac{15}{2}$.

例2：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{x^3}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 2\cdot(\frac{x}{2})^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

总结：$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3\ (x\to 0)$　　$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$.

例3：当 $n\to\infty$ 时，$(1+\frac{a}{n^2})^{\frac{1}{3}}-1\sim 1-\cos\frac{1}{n}$，求 a.

分：由题：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{a}{n^2})^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos\frac{1}{n}}=1$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{3}\ln(1+\frac{a}{n^2})}-1}{1-\cos\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3}\ln(1+\frac{a}{n^2})}{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{n})^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{n^2}\cdot 2n^2=1$

∴ 解得：$a=\frac{3}{2}$.

例4：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\beta-n^\beta}$（$\beta>0$，$\alpha$、$\beta$ 是常数）.

分：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha-\beta}}{(1+\frac{1}{n})^\beta-1}=\dfrac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta}=\begin{cases}+\infty, & >0\\ \frac{1}{\beta}, & \alpha-\beta+1=0\\ 0 & <0\end{cases}$

总结 $\lim(1+\square)^m-1=m\cdot\square$.

例5：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$

分：原式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\tan x-\sin\tan x+\sin\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(\tan x)^3}{\frac{1}{2}x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\tan x-\sin\sin x}{\frac{1}{2}x^3}$

$=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos\frac{\tan x+\sin x}{2}\sin\frac{\tan x-\sin x}{2}}{\frac{1}{2}x^3}$

$=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{\tan x-\sin x}{2}}{\frac{1}{2}x^3}$

$=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\frac{1}{4}x^3}{\frac{1}{2}x^3}=2$.

§2.7 函数的连续性.

1. 连续的概念

定义1: 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 任取此邻域内一点 x, $x\neq x_0$, 称差 $x-x_0=\Delta x$ 为 x_0 点的增量 (Δx 可正可负). 相应函数差 $f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$, 称 Δy 为 x_0 点对应函数的增量. (Δy 可正可负可为0)

定义2: 设 $f(x)$ 在 x_0 邻域内有定义. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续; 称 x_0 为函数连续点.

注: "$\varepsilon\sim\delta$" 定义: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使当 $\underbrace{|x-x_0|<\delta}_{\text{加入了}x=x_0\text{一点}}$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

加入了 $x=x_0$ 一点, 但定义中的 x 仍不可取 x_0.

定义3: 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 这点左连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$, - - - - - - - - 右连续.

左右连续统称单侧连续

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\iff\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

注: ① 当 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\iff$ $f(x)$ 在 x_0 点左连续且右连续

② 当 $f(x)$ 在包括 x_0 的单侧邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\iff$ $f(x)$ 在 x_0 点单侧连续.

定义4: 若 $f(x)$ 在点集I上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 是I上的连续函数, 记为 $f(x)\in C_I$.

基本初等函数都是连续函数

若 $I=\langle a,b\rangle$ $\left((a,b],(a,b),[a,b),[a,b]\right)$, 则 $f(x)$ 的图形是一条连续曲线. 连续函数

函数断开的两种情况: ① 连续函数, 但定义域断开 ② 函数不连续.

2. 间断点及其类型

定义5: 设 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义; 若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

第Ⅰ类间断点, 若 $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ 都存在, 但 $f(x_0+0)\neq f(x_0+0)$, 称 x_0 为跳跃点;

若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, 称 x_0 为可去点; 或 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 但 $f(x)$ 在 x_0 处无定义 → 可去间断点

第Ⅱ类间断点: 左右极限至少有一个不存在的间断点

例1: ① $f(x)=\begin{cases}2, & x\geq 1\\ 1, & x<1\end{cases}$ $f(1-0)=1$, $f(1+0)=2$.

$\therefore x=1$ 是第一类跳跃间断点.

② $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ $(x\neq 1)$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

∴ $x=1$ 是第I类可去间断点，（但这是个连续函数）

③ $f(x)=\frac{1}{x}$

$f(0+0)=+\infty$

$f(0-0)=-\infty$.

∴ $x=0$ 是第II类无穷间断点

④ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

∵ $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，所以 $x=0$ 是第II类振荡点，

定义5：若 $f(x)$ 在含 x_0 的单侧邻域内有定义，而 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 点是 $f(x)$ 的间断点。此时，若 $f(x)$ 在 x_0 点的单侧极限存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第I类间断点，否则第二段。

连续函数的性质：

<1> 连续函数四则运算与复合仍是连续函数

<2> 反函数仍然连续

<3> 初等函数在其有定义区间都连续.

$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$ 处处有定义，但处处不连续

例：讨论 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\le 1\\ e^{\frac{1}{x+1}}, & |x|>1\end{cases}$ 的连续性，并指出间断点及类型.

分析：∵ $f(x)$ 是 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 三个区间上的初等函数

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续.

$f(-1-0)=\lim\limits_{x\to -1^-} e^{\frac{1}{x+1}}=0$； $f(-1+0)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2+1=0$.

∵ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$ ∴ $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+1=2$； $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x+1}}=e^{\frac{1}{2}}$

∵ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ∴ $x=1$ 是 $f(x)$ 的第I类间断点

综上，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续.

$\boxed{\text{抽象函数}}$

例2：设 $f(x)$ 对任意实数 x_1、x_2、总有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续，证明 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

分析 $\forall x_0\in R$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(0+\Delta x)-f(\Delta x)]=0$.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0)\cdot f(\Delta x)-f(x_0)]=f(x_0)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(\Delta x)-1]$

$\therefore$ 只需使 $f(x_0)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(\Delta x)-1]=0$ 即证得.

即证 $f(0)=1$.

证：由题，令 $x_1=x_2=0\to f(0)=0$ 或 1.

(1) 当 $f(0)=0$ 时，$\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x+0)=f(x)f(0)=0$，即 $f(x)=0$ $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续

(2) 当 $f(0)=0$ 时，$\forall x_0\in\mathbb{R}$ 有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

$\therefore f(x)$ 在 x_0 点连续

由 x_0 的任意性可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

闭区间上连续函数的性质：① 闭区间上连续函数必有界.

② 闭区间上连续函数必有最小值和最大值.

最值定义：设 $f(x)$ 在点集 I 上有界，若 $\forall x\in I$，$\exists\xi\in I$，使 $f(x)\le f(\xi)$ ($f(x)\ge f(\xi)$)，则称 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的最大(小)值.

③ (零点原理) 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(x)=0$.

证③：不妨设 $f(a)<0$，$f(b)>0$，取 $[a,b]$ 中点 $\frac{a+b}{2}$；若 $f(\frac{a+b}{2})=0$，则 $\xi=\frac{a+b}{2}$；若 $f(\frac{a+b}{2})\ne 0$.

<1> 若 $f(\frac{a+b}{2})>0$，令 $[a_1,b_1]=[a,\frac{a+b}{2}]$
…… <0，令 $[a_1,b_1]=[\frac{a+b}{2},b]$.
又取 $[a_1,b_1]$ 中点 $\frac{a_1+b_1}{2}$，若 $f(\frac{a_1+b_1}{2})=0$，则 $\xi=\frac{a_1+b_1}{2}$；

若 $f(\frac{a_1+b_1}{2})\ne 0$，重复步骤<1>得区间 $[a_2,b_2]$ 且 $f(a_2)<0$，$f(b_2)>0$……

以此类推，得到一列区间 $[a_n,b_n]$ $(n=1,2,3\cdots)$ 则满足 ① $f(a_n)<0$，$f(b_n)>0$

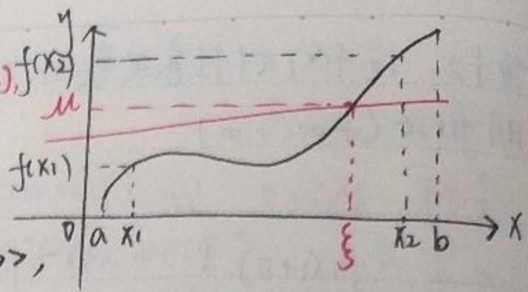
② $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ ③ $\{a_n\}\uparrow$ $\{b_n\}\downarrow$ ④ $[a,b]\supseteq[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots$

$\lim a_n$ 和 $\lim b_n$ 都存在 $\lim(b_n-a_n)=\lim\frac{b-a}{2^n}=0$ $\therefore \lim b_n=\lim a_n=\xi\in[a,b]$.

$a\le a_n<b_n\le b$ $\therefore f(x)$ 在 ξ 点连续，$\lim \underbrace{f(a_n)}_{}^{\le 0}=\lim \underbrace{f(b_n)}_{}^{\ge 0}=f(\xi)=0$.

④ 介值原理

设 $f(x)\in C\langle a,b\rangle$，$x_1,x_2\in\langle a,b\rangle$；满足 $f(x_1)<\mu<f(x_2)$，
则至少存在一点 $\xi\in\langle a,b\rangle$，使 $f(\xi)=\mu$.



证④：令 $g(x)=f(x)-\mu$，则 $g(x)\in C[x_1,x_2]$，
$g(x_1)g(x_2)<0$，由零点原理：$\exists\,\xi\in[x_1,x_2]\subseteq\langle a,b\rangle$，
使 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\mu$.

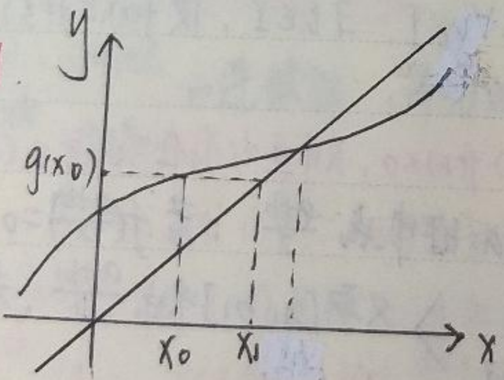
例1：设 $f(x)\in C(a,b)$ 且 $f(a+0)=f(b-0)=A$，又存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)\geq A$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在最大值

开区间→闭区间 { 法1° 取一个 $[x_1,x_2]\subseteq(a,b)$
法2° $\boxed{\text{补充定义}}$ ✓

证明：令 $g(x)=\begin{cases}A, & x=a或b \\ f(x), & x\in(a,b)\end{cases}$，则 $g(x)\in C[a,b]$，由Th2可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 存在 取
最大值 $M=g(\xi)$，且 $\xi\in[a,b]$ 闭→开（排除最值在端点的情况） 在 (a,b) 内
若 $M>f(c)\geq A=g(a)=g(b)\Rightarrow\xi\neq a,b$ ∴ $\xi\in(a,b)\Rightarrow g(\xi)=f(\xi)$ ∴ $f(x)$ ∃最大值
$M=f(c)$，$f(x)$ 在c点取最大值.

求根：[迭代法]

$F(x)=0\to g(x)=x$

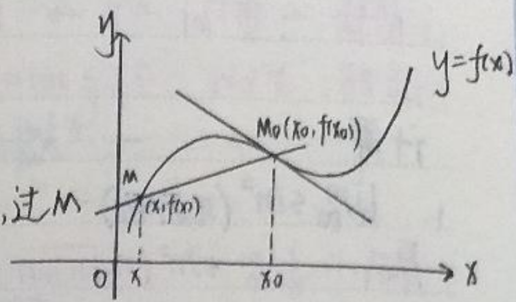


对 $\forall x_0\in\mathbb{R}$，若 $g(x_0)=x_0$ 则找到根；若 $g(x_0)\neq x_0$，令 $x_1=g(x_0)$
若 $g(x_1)=x_1$，则找到根；若 $g(x_1)\neq x_1$，令 $x_2=g(x_1)$.

[不动点原理]

例2：设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)>a$，$f(b)<b$，则必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\xi$
证：令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(a)>0$，$g(b)<0$. 即 $g(a)g(b)<0$ → 零点肯定非端点
且 $g(x)\in C[a,b]$ ∴ $\exists\,\xi\in[a,b]$，使 $g(\xi)=0$.
∴ $\xi\in(a,b)$，使 $g(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\xi$.

第三章 导数与微分



1. 实际问题.

问题1. 曲线的切线(斜率)问题.

如图所示, 设 $y=f(x)$ 为一曲线, $M(x_0, f(x_0))$ 为曲线上一点, 过M点作曲线任意一条割线 MM_0, $M(x, f(x))$.

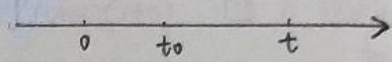
割线斜率 $k(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则规定此极限为 $y=f(x)$ 在 M_0 处的切线斜率.

问题2. 变速直线运动的速度问题.

$S=S(t)$

求 $t\sim t_0$ 的平均速度: $\bar{v}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\frac{1}{2}g(t+t_0)$



取极限: $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{1}{2}g(t+t_0)=gt_0$

2. 导数定义

定义1: 设 $y=f(x)$ 在 x_0 点的邻域内有定义, 给 x_0 一增量 Δx, 相应也有一函数增量 Δy, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$, 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$、$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) 存在, 则称 $y=f(x)$ 在 x_0 可导, 称此极限为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 (微商、差商) 记为 $y'|_{x=x_0}$ ($f'(x_0)$、$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$).

习题课

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$ (用定义).

证明: 分析: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=$____, 当 $n>N$ 时有 $\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n!}{n^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$

$\therefore n>\frac{1}{\varepsilon}$ $\therefore$ 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$ (或 $[\frac{1}{\varepsilon}]+1$)

2. 用定义证明: 当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=A$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n-A|<\varepsilon$.

要证 $\left|\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n}-A\right|<\varepsilon$.

取 $m=\max\{|a_1-A|, |a_2-A|\dots|a_{N_1}-A|\}$

$\because$ 原式 $=\left|\frac{a_1-A+a_2-A+\dots+a_n-A}{n}\right|\le\frac{1}{n}(|a_1-A|+|a_2-A|+\dots+|a_{N_1}-A|+\dots+|a_n-A|)$

$\le\frac{N_1\cdot m}{n}+\frac{(n-N_1)\varepsilon}{n}<\frac{N_1\cdot m}{n}+\varepsilon<2\varepsilon$.

3. 用定义证明: $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$, 其中 $a\neq 0$.

分析: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使当 $|x-a|<\delta$ 时, $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{a-x}{ax}\right|=\frac{|x-a|}{|x|\cdot|a|}$

$|x|=|x-a+a|>|a|-|x-a|>\frac{|a|}{2}$

$\because x\to a$ $\therefore$ 规定 $|x-a|<\frac{|a|}{2}$

$\therefore \frac{|x-a|}{|x|\cdot|a|} < \frac{\delta}{\frac{|a|}{2}\cdot|a|} < \varepsilon \to \delta < \frac{|a|^2}{2}\cdot\varepsilon$.

证明：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta=\min\{\frac{|a|^2}{2}\varepsilon, \frac{|a|}{2}\}$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}|<\varepsilon$

计算

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi^2}{\pi\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\pi}\right)$

$=1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\dots+\boxed{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

原式 $=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

$=\frac{1}{4}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\cdots\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n-1}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$ 存在，求a值　　左极限=右极限

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln[e^{\frac{2}{x}}(1+e^{-\frac{2}{x}})]}{\ln[e^{\frac{1}{x}}(1+e^{-\frac{1}{x}})]}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})+2}{x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})+1}=2$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$.

$\therefore 0-a=2\to a=-2$ ..

5. $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{[4x]}{1+x}=2$.

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[7]{1+5x}\cdot\sqrt[5]{1+7\tan x}-1}{\tan x}$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt[7]{1+5x}-1+1)(\sqrt[5]{1+7\tan x}-1+1)-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt[7]{1+5x}-1)(\sqrt[5]{1+7\tan x}-1)+\sqrt[7]{1+5x}-1+\sqrt[5]{1+7\tan x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt[7]{1+5x}-1)(\sqrt[5]{1+7\tan x}-1)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[7]{1+5x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{1+7\tan x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{5}{7}x\cdot\frac{7}{5}\tan x}{x}+\frac{5}{7}+\frac{7}{5}$

$=\frac{74}{35}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\arcsin x\cdot \ln(1+x^2)}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)\dfrac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(\tan x-\sin x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$=\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}(\tan x-\sin x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x^3$

8. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=b$，求 b.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{(x^5+7x^4+3)^a}{x}-1\right]=0$ $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^5+7x^4+3)^a}{x}=1.$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5})^a}{x^{1-5a}}=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5})^a=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1-5a}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{5a-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{5a-1}(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5})}{1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}}=\frac{1}{1}$

$\therefore a=\frac{1}{5}$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+3)^{\frac{1}{5}}-x]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x[(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5})^{\frac{1}{5}}-1]$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{5}(\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{5}\cdot\dfrac{7x^4+3}{x^4}=\frac{7}{5}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{\frac{1}{x\sin x}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1+1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x\sin x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3+1^2}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\dots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\right]$

$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\dfrac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3+n^2}\le\dfrac{1^2}{n^3+1}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\dots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\le\dfrac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3+1}$

$\dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}\le\dots\dots\le\dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+1}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+1}=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{3}$.

7. 已知 $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2$，求 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}$

$$\left(1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}} = 2+o(x)$$

$$\frac{1}{\ln\cos x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right)=\ln(2+o(x))$$

$$\ln\left(1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right)=\ln(2+o(x))^{\ln\cos x}$$

即 $f(x)=(4^x-1)\left[(2+o(x))^{\ln\cos x}-1\right]$.

$$\lim_{x\to0}\frac{(4^x-1)\left[(2+o(x))^{\ln\cos x}-1\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\ln4\left[(2+o(x))^{\ln\cos x}-1\right]}{x^3}$$

拆 $\lim_{x\to0}\frac{e^{\ln(2+o(x))^{\ln\cos x}}-1}{x^2}$

$$=\ln4\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+o(x))\ln(1+\cos x-1)}{x^2}$$

$$=\ln4\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+o(x))\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln4\cdot\ln2=-(\ln2)^2.$$

定义2：若 $\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称之为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数，记为 $y'_+|_{x=x_0}=f'_+(x_0)$，若 $\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称之为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $y'_-|_{x=x_0}=f'_-(x_0)$.

易见，当 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Leftrightarrow$ $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

当 $f(x)$ 在 x_0 的单侧邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点的单侧导数存在

比如：已知 $f(x)$，$x\in[a,b]$，此时 $f(x)$ 在 a 点可导，指的是 $f'(a)=f'_+(a)$.

例1：若 $\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+x^2)-f(x_0)}{x^2}$ 存在，此极限值为 $f'(x_0)$. ×

若 $\lim_{n\to\infty}n\left[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)\right]$ 存在，…… $f'(x_0)$ ×

只有一个单侧导数，导数不一定存在

定义3：设 $f(x)$ 在点集 I 上每一点都可导，则其导数又构成点集 I 上的一个新函数，称之为 $f(x)$ 在 I 上的导函数，记为 $y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$. 特别地，若 $I=[a,b]$，则 $f'(a)=f'_+(a)$，$f'(b)=f'_-(b)$

3. 导数的意义

(1) $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)$ 表示成 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率.

切线方程: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程 $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

特殊地,当 $f'(x_0)=0$ 时,切线方程为: $y=f(x_0)$; 法线方程为: $x=x_0$.

(2) $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)$ 表示变速直线运动 $y=f(x)$ 在 x_0 时刻的瞬时速度

4. 与连续的关系

可导 $\Rightarrow$ 连续, 连续 $\not\Rightarrow$ 可导.

证明: 当 $f'(x_0)$ 存在时, $f(x)$ 在 x_0 处连续

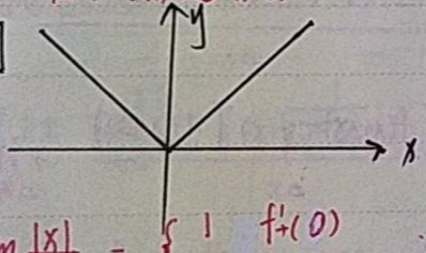
法1° $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

想办法去掉"lim" $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$, $\lim\alpha=0$. ∴ $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$.

∴ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, 即 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

法2° $\lim\Delta y=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim\Delta x=0$.

反例: [连续不可导]



$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & f'_+(0)\\ -1 & f'_-(0)\end{cases}$ ∵ $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ ∴ $f'(0)$ 不存在

§3.2 导数基本公式与四则运算

1. 导数公式

(1) $(C)'=0$ 常量函数

(2) $(x)'=1$

(3) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

(4) $(a^x)'=a^x\ln a$.

(5) $(e^x)'=e^x$

(6) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

(7) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(8) $(\sin x)'=\cos x$

(9) $(\cos x)'=-\sin x$

(10) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ 正割

(11) $(\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$ 余割.

(12) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

(15) $(\text{arccot}\, x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$

正割 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$

余割 $\csc x=\frac{1}{\sin x}$

[定义]

证：(3) $(x^\alpha)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x^\alpha[(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x^\alpha\cdot\frac{\Delta x}{x}\cdot\alpha}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}$

(4) $(a^x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x\ln a}-1}{\Delta x} = \ln a.$

(12) $(\arcsin x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x}{\Delta x}$

令 $y=\arcsin x$，$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，$\Delta y = \arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x = \arcsin(x+\Delta x)-y$

$\therefore x+\Delta x = \sin(y+\Delta y) \Rightarrow \Delta x = \sin(y+\Delta y)-\sin y.$

$(\arcsin x)' = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta y}{\sin(y+\Delta y)-\sin y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{y}} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

二. 导数的四则运算法则

定理：设 $f(x)$，$g(x)$ 可导，则：(1) $[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$

(2) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(3) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

证：(2) $[f(x)g(x)]' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[g(x+\Delta x)-g(x)]f(x)}{\Delta x}$

$= f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

推论：(4) $(kf(x))' = kf'(x)$

(5) $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = \dfrac{-g'(x)}{g^2(x)}$

(6) $\left(\prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right)' = f_1'f_2f_3\cdots f_n + f_1f_2'f_3\cdots f_n + f_1f_2f_3'\cdots f_n + \dots + f_1f_2f_3\cdots f_n'.$

$f_1\cdot f_2\cdot f_3\cdots f_n$

例1：设 $y = x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$，求 $y'|_{x=0}$.

$y' = (x+1)(x+2)\cdots(x+100) + x(x+2)\cdots(x+100) + \cdots$

后面每一项都有 x $\therefore$ 当 $x=0$ 时，只有第一项

$\therefore y'|_{x=0} = 100!$

三. 复合函数求导法 及其它.

定理：设 $y=f(u)$ 可导，$u=g(x)$ 可导，且 $f(g(x))$ 在 x 的邻域内有定义.

则 y $f(g(x))$ 可导，且 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ 即 $[f(g(x))]' = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$

[链导法则]

注：① $y=u^{\frac{3}{2}}$，$u=\sin x-1$；$y=f(g(x))=(\sin x-1)^{\frac{3}{2}}$，$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$．可导

② $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}$ （×）．此时 Δu 不能取 0

证明：$y=f(u)$ 可导，$f'(u_0)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u_0}\rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta u_0}=f'(u_0)+\alpha$，$\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0$

$\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$

规定，当 $\Delta u=0$ 时，$\alpha=0$，此时左端 $\Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=0$．

[补充定义]　　右端 $f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u=0$．

$\therefore\Delta u=0$ 时，左端＝右端

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u}{\Delta x}=f'(u_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta u}{\Delta x}$

$\Rightarrow[f(g(x))]'=f'(x_0)g'(x_0)$

注：$f[g(u(x))]'=f'g'u'$．

例1：$y=e^{\sin\ln^2 x}$

解：$y'=e^{\sin\ln x^2}\cdot\cos\ln^{x^2}\cdot 2\ln^{x}\cdot\frac{1}{x}$

例2：$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 y'

解：$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\boxed{y=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})}$

解：$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$．

例3：$y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arcsin x^2$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$？

令 $t=\frac{3x-2}{3x+2}$，　$t'=\frac{12}{(3x+2)^2}$

$\therefore y'=f'(t)\cdot t'=\arcsin\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$

$\therefore y'|_{x=0}=\frac{3\pi}{2}$．

2. 反函数求导公式

设 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为反函数 [图像相同]

$y=f(x)$，把 y 看作自变量，则两边同时求导数：$1=[f(g(y))]'=f'(x)\cdot g'(y)$

从而有 当 $y=f(x)$ 可导且 $f'(x)\neq 0$，有 $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$，即 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 互为倒数关系．

例4：求 $\arctan x$ 的导数.

解：$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y$ 法1°

$\because x = \tan y$

即 $x^2 = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}$

$\therefore \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{1+x^2}$

法2° $\frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

3. 参数函数求导公式

设 $\begin{cases} x = \Phi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法1° 对 $x = \Phi(t)$，$y = \varphi(t)$ 两端同时关于 x 求导

$\therefore \begin{cases} 1 = \Phi'(t) \cdot \frac{dt}{dx} \\ \frac{dy}{dx} = \varphi'(t) \cdot \frac{dt}{dx} \end{cases}$

消去 $\frac{dt}{dx}$ 得参数函数求导公式：$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\Phi'(t)}$，这里要求 $\Phi'(t)$、$\varphi'(t)$ 都存在且 $\Phi'(t) \neq$

法2° [反函数]. $\begin{cases} x = \Phi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$

$(y')_x = (\varphi(t))'_x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \varphi'(t) \frac{dt}{dx} = \varphi'(t) \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\Phi'(t)}$

一个整体，暂不看成相除

公式：$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\Phi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

例5，设 $x = \ln(1+t^2)$，$y = t^3+3t+1$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：$\frac{dy}{dx} = \frac{(y')_t}{(x')_t} = \frac{3t^2+3}{\frac{2t}{t^2+1}} = \underbrace{\frac{3(t^2+1)^2}{2t}}_{} = y'$ 仍是参数函数.

二阶导 $\frac{dy'}{dx} = \frac{(y')_t}{(x')_t} = \frac{\left[\frac{3(t^2+1)^2}{2t}\right]'}{[\ln(1+t^2)]'}$

$y = f(x)$，$x = g(y)$

$y' = f'(x)$

$(y')_y = f'(x) \cdot g'(y)$.

关于谁求导，谁就做自变量.

4. 隐函数求导方法.

设 $x^2+xy+y^3=\sin(xy^2)$ 确了一个隐函数 $y=y(x)$（相当于 $f(x)$），求 y'.

方法：将方程的 y 与 $y(x)$ 代入方程得到一个恒等式：$x^2+x\cdot y(x)+y^3(x)=\sin(x\,y^2(x))$

再对等式两端同时关于 x 求导

$$2x+y(x)+x\cdot y'(x)+3y^2(x)=\cos(xy^2(x))\left[y^2(x)+2xy(x)\cdot y'(x)\right]$$

$$\therefore y'(x)=\frac{y^2(x)\cos(xy^2(x))-2x-y(x)}{x+3y^2(x)-2xy(x)\cos(xy^2(x))}$$

$$\therefore y'_x=\frac{y^2\cos(xy^2)-2x-y}{x+3y^2-2xy\cos(xy^2)}$$

（再求导按复合函数求导的方法求）

例：设 $xe^{\sin y}=e^y$ 确定了一个隐函数 $y=y(x)$，求 y'.

解：$xe^{\sin y(x)}=e^{y(x)}$

等式两边同时关于 x 求导：$e^{\sin y(x)}+xe^{\sin y(x)}\cdot\cos y(x)\cdot y'(x)=e^{y(x)}\cdot y'(x)$

$$\therefore y'(x)=\frac{e^{\sin y(x)}}{e^{y(x)}-xe^{\sin y(x)}\cdot\cos y(x)}$$

$$\text{即 } y'_x=\frac{e^{\sin y}}{e^y-xe^{\sin y}\cos y}$$

[可以先取个对数]：$\ln x+\sin y=y\xrightarrow{\text{关于}x\text{求导}}\frac{1}{x}+\cos y(x)\cdot y'(x)=y'(x)$

$$\therefore y(x)=\frac{\frac{1}{x}}{1-\cos y(x)}\xrightarrow[x=\frac{e^y}{e^{\sin y}}]{\text{由题目}}=\frac{e^{\sin y}}{e^y-e^y\cos y}=\frac{e^{\sin y}}{e^y-xe^{\sin y}\cos y}.$$

5. 幂指函数求导公式.

$$[f(x)^{g(x)}]'=[e^{g(x)\ln f(x)}]'=f(x)^{g(x)}\cdot(g(x)\ln f(x))'$$

例7：$(x^x)'$ 解：原式 $=x^x\cdot(x\ln x)'=x^x(\ln x+1)$

注 $(f(x))'=f(x)(\ln f(x))'$

适用于 $f(x)$ 中因子较多，含有根号时，可以将乘除变加减.

（使用此公式对 $f(x)$ 的正负无规定）

例8：设$y=\sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x^3+1)(x^5+1)}{(x+1)(x^2+x+1)(x^4-1)}}$，求$y'$.

解：$y'=y\cdot(\ln y)'$

$=\sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x^3+1)(x^5+1)}{(x+1)(x^2+x+1)(x^4-1)}}+\frac{1}{5}[\ln(x^2+1)+\ln(x^3+1)+\ln(x^5+1)-\ln(x+1)-\ln(x^2+x+1)-\ln(x^4-1)]'$

$=\sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x^3+1)(x^5+1)}{(x+1)(x^2+x+1)(x^4-1)}}+\frac{1}{5}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3x^2}{x^3+1}+\frac{5x^4}{x^5+1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{4x^3}{x^4-1}\right)$

§.3.4 高阶导数

1. 高阶导数

定义：设$y=f(x)$在I上可导，且在I上的函数$f'(x)$还可导，则称$y'=f'(x)$的导数为$y=f(x)$的二阶导数，记为$y''=f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}=\frac{d^2y}{dx^2}$；若$y''=f''(x)$在I上还可导，则称其导函数为$y=f(x)$的三阶导数，记为$y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x}$

……如此下去，可定义$y=f(x)$的n阶导数记为$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$，

$n=1,2,3\cdots$（当$n=1$时：$y=f^{(0)}(x)=f(x)$）

$y^{(0)}(=y)$　$y^{(1)}(=y')$　$y^{(2)}(=y'')$　$y^{(3)}(=y''')$　$y^{(4)}$

例1：设$f(x)$与$g(x)$互为反函数，且已知$f(x)$有三阶导数，而$f'(x)\neq 0$，求$g''(x)$.

解：设$y=g(x)$，$x=f(y)$，$y'=g'(x)=\frac{1}{f'(y)}$ 反函数性质

$y''_x=g''(x)=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{-f''(y)}{[f'(y)]^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}=\frac{-f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}$

求$g'''(x)$：$g'''(x)=\frac{-f'''(g(x))\cdot\frac{1}{f'(x)}\cdot[f'(g(x))]^3-3[f'(g(x))]^2\cdot f''(g(x))\cdot\frac{1}{f'(g(x))}}{[f'(g(x))]^6}$

例2：设$xe^{\sin y}=e^y$确定了一个隐函数$y=y(x)$，求y''.

解：$y'=\frac{1}{x(1-\cos y)}$

$y''=\frac{-[(1-\cos y)+x\sin y\cdot y']}{[x(1-\cos y)]^2}=\frac{\cos y-1-\frac{\sin y}{1-\cos y}}{[x(1-\cos y)]^2}$

例3：设$\begin{cases}x=\arctan t\\ y=t^2-2t\end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=(2t-2)(1+t^2)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{[(2t-2)(1+t^2)]'}{(\arctan t)'}=(6t^2-4t+2)(1+t^2)$

例4：$(f[g(x)])''$

解：$(f[g(x)])' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$(f[g(x)])'' = [f'(g(x))\cdot g'(x)]' = g'(x)\cdot f''(g(x))\cdot g'(x) + f'(g(x))\cdot g''(x)$$

$$= [g'(x)]^2 f''(g(x)) + g''(x)f'(g(x)).$$

2. 高阶导数公式.

用数学归纳法可证如下高阶导数公式：

(1) $[f(x)\pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{n}(x)$　　(2) $[kf(x)]^{(n)} = kf^{(n)}(x)$

(3) $[f(x)g(x)]^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{2!}f^{(n-2)}g'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}f^{(n-3)}g^{(3)} + \dots + C_n^{r}f^{(n-r)}g^{(r)} + \dots + fg^{(n)}$

莱布尼茨公式

(4) $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

下面给出基本初等函数高阶导公式：

(5) $(c)^{(n)} = 0 \quad (n=1,2,3\dots)$　　(6) $(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}$

(7) $(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}$　　(8) $(a^x)^{(n)} = a^x\cdot(\ln a)^n$

(9) $(e^x)^{(n)} = e^x$　　(10) $(\ln x)^{(n)} = (\frac{1}{x})^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$

(11) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$　　$(\sin ax)^{(n)} = a^n\sin(ax+\frac{n\pi}{2})$.

(12) $(\cos x)^{(n)} = \sin(x+\frac{(n+1)\pi}{2}) = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$.

例1：设 $y=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$，求 $y^{(n)}$.

解：[积化和差]　$y = \sin x\cdot\sin 3x\cdot\sin 2x$

$$= \frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos 4x]\cdot\sin 2x$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\cos 4x$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}[\sin 6x + \sin(-2x)]$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\therefore y^{(n)} = (\frac{1}{4}\sin 4x)^{(n)} - (\frac{1}{4}\sin 6x)^{(n)} + (\frac{1}{4}\sin 2x)^{(n)}$$

$$= (\frac{1}{4})^n\cdot(\sin 4x)^{(n)} - (\frac{1}{4})^n(\sin 6x)^{(n)} + (\frac{1}{4})^n(\sin 2x)^n$$

$$= \sin(4x+\frac{n\pi}{2}) - (\frac{1}{4})^n\cdot 6^n\sin(6x+\frac{n\pi}{2}) + (\frac{1}{4})^n\cdot 2^n\sin(2x+\frac{n\pi}{2}).$$

例2：设 $y=(1+x^2)e^x$，求 $y^{(n)}$　[莱布尼茨有幂函数，则通过有限次求导后会得到0，使后面消失]

解：$y^{(n)} = (1+x^2)\cdot(e^x)^{(n)} + 2x\cdot(e^x)^{(n-1)} + 2(e^x)^{(n-2)}(+0+0+0\dots\dots)$.

$$= (x^2+2x+3)e^x$$

例3：设$y=e^x\cos\sqrt{3}x$，求 $y^{(n)}$.

[数归]

分析：$y'=e^x\cos\sqrt{3}x+(-\sin\sqrt{3}x)\cdot\sqrt{3}e^x=e^x\cos\sqrt{3}x-\sqrt{3}e^x\sin\sqrt{3}x=2e^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{\pi}{3})$.

$y''=e^x\cos\sqrt{3}x-\sqrt{3}e^x\sin\sqrt{3}x-\sqrt{3}e^x\sin\sqrt{3}x-3e^x\cos\sqrt{3}x$

$=-2e^x\cos\sqrt{3}x-2\sqrt{3}e^x\sin\sqrt{3}x$.

$=4e^x(\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}x)$

$=4e^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{2\pi}{3})$.

假设 $y^{(n)}=2^ne^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{n\pi}{3})$. 由上式可知，$n=1,2$ 时成立

假设当 $n=k$ $(k>2)$ 时，$y^{(k)}=2^ke^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{k\pi}{3})$ 成立

则当 $n=k+1$ 时，$y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=2^ke^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{k\pi}{3})-2^k\sqrt{3}e^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{k\pi}{3})$

$=2^{k+1}e^x[\frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}x+\frac{k\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\sqrt{3}x+\frac{k\pi}{3})]$

$=2^{k+1}e^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{(k+1)\pi}{3})$. 符合假设

∴假设成立

综上，$y^{(n)}=2^ne^x\cos(\sqrt{3}x+\frac{n\pi}{3})$.

§3.5 微分

1. 微分概念

假设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，给 x_0 点一个增量 Δx，相应的函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=k\cdot\Delta x+o(\Delta x)$ （k为一常数） 则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微分，记为 $dy|_{x=x_0}=k\cdot\Delta x$ （关于 Δx 的一个线性函数）. （k是和x_0点和$f(x)$有关，$f'(x_0)$） 切线斜率.

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y=dy+o(\Delta x)\to 0$ ∴可微⇒连续

当 $k\neq 0$ 时，$dy=k\cdot\Delta x\neq 0$ $\frac{\Delta y}{dy}=1+\frac{o(\Delta x)}{k\cdot\Delta x}\to 1$ $(\Delta x\to 0)$.

即 $\Delta y\sim dy$ ∴ dy是Δy的线性主部.

定义2. 设 $y=f(x)$ 在点集 I 上每一点可微，则其微分又构成 I 上的一个新函数，称之为 $y=f(x)$ 在 I 上的微分函数，记为 $dy=k(x)\cdot\Delta x$ （$k(x)$是关于x的函数 $=f'(x)$）

对直线 $y=ax+b$ ： $dy=a\cdot\Delta x+o(\Delta x)=a\cdot\Delta x$

特别地，取直线 $y=x$，则 $dx=\Delta x$

$\therefore dy=k(x)\cdot\Delta x=k(x)\cdot dx$

若 $y=f(x)$ 可微，$\Delta y=dy+o(\Delta x)=k(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)\Rightarrow k(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)$

$\Rightarrow k(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\therefore\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，从而 $f'(x)$ 存在且 $f'(x)=k(x)$

综上：可微 $\Rightarrow$ 可导，且 $f'(x)=k(x)$

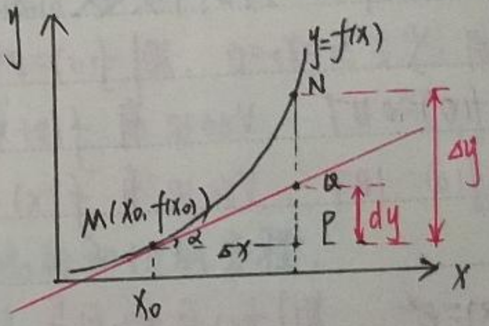
反之，若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$.

$\therefore\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$.

$\therefore f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $k(x)=f'(x_0)$. $\therefore dy=f'(x)\cdot\Delta x$

定理. $y=f(x)$ 可导 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ 可微，且 $dy=f'(x)\cdot\Delta x=f'(x)dx$. $\Rightarrow$ $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ [除法运算]

3. 微分的几何意义.



$PQ=\Delta x\tan\alpha=\Delta x\cdot k=f'(x)\cdot\Delta x=f'(x)dx=dy$

$dy=f'(x)dx$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 x 处的切线增量.

$\Delta y=dy+o(\Delta x)$.

称 ΔMPQ 为微分三角形.

4. 微分运算

(1) $d[f(x)\pm g(x)]=[f(x)\pm g(x)]'dx=[f'(x)\pm g'(x)]dx=df(x)\pm dg(x)$.

(2) $d[f(x)g(x)]=g\,df+f\,dg$

(3) $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'dx=\frac{g(x)\cdot df(x)-f(x)\cdot dg(x)}{g^2(x)}$

5. 微分形式的不变性

设 $y=f(x)$ 可微，(1) 若 u 是自变量，则 $dy=\underline{f'(u)\cdot du}$ (2) 若 $u=g(x)$ 可微，则 $f(g(x))$ 可微. $d[f(g(x))]=[f(g(x))]'\cdot dx=f'(g(x))\cdot d(g(x))=\underline{f'(u)\cdot du}$.

注：当 u 只是自变量时：$du=\Delta u$

当 u 做中间变量时：$du\neq\Delta u$，$\Delta u=du+o(\Delta u)$ (但当 u 是关于 x 的线性函数时，$du=\Delta u$).

例1. 设 $y=e^{\sin\ln\arctan x}$，求 y'.

解：$dy=e^{\sin\ln\arctan x}\cdot d\sin\ln\arctan x=e^{\sin\ln\arctan x}\cdot\cos\ln\arctan x\cdot d\ln\arctan x$

$=e^{\sin\ln\arctan x}\cdot\cos\ln\arctan x\cdot\frac{1}{\arctan x}\cdot d\arctan x$

$y'\leftarrow=e^{\sin\ln\arctan x}\cdot\cos\ln\arctan x\cdot\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot dx$

例2：设 $y=e^{\sin x}$，求 $\frac{dy}{d\cos x}$.

解：$dy=e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx$

$d\cos x=-\sin x\cdot dx$

$\therefore \frac{dy}{d\cos x}=\frac{e^{\sin x}\cos x}{-\sin x}$.

例3：$d\sin x^2=(\quad)d\sqrt{x}$.

解：$(\quad)=\frac{d\sin x^2}{d\sqrt{x}}$.

解得：$4x^{\frac{3}{2}}\cos x^2$.

例：设 $f(x)$ 对任何实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 且 $f'(0)=1$，证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导.

证明：先令 $x_1=x_2=0$，则 $f(0)=0$ 或 1

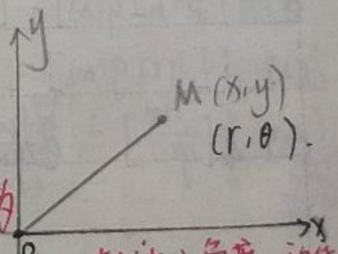
①当 $f(0)=0$ 时，$\forall x\in\mathbb{R}$ 有 $f(0+x)=f(x)=0$ $\therefore f'(x)=0$（舍去）.

②当 $f(0)=1$ 时，$\forall x\in\mathbb{R}$ 有 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot(f(\Delta x)-1)}{\Delta x}=f(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=f(x)\cdot f'(0)=f(x)$

$\therefore f(x)=e^x$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导.

极坐标



1. 极坐标

在直角坐标平面上，建立一个新的坐标系

原点称为极点，x正半轴称为极轴（极坐标轴），点M的极坐标为 (r,θ)，$r=|OM|$，θ是极轴绕极点逆时针旋转到与OM重合时，转过的角度，称作极角

2. 极坐标与直角坐标的关系

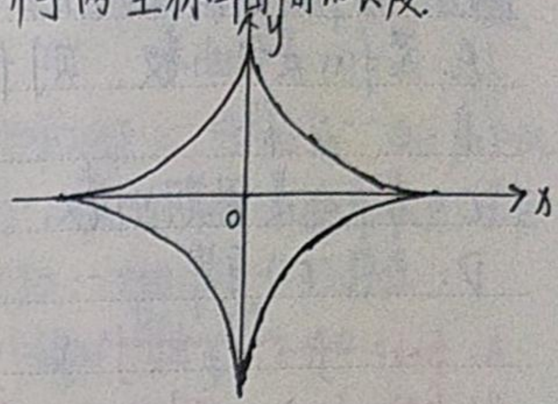
$$\begin{cases}x=r\cos\theta & (r\geq 0)\\ y=r\sin\theta & (0\leq\theta<2\pi)\end{cases}$$

3. 直角坐标曲线与极坐标曲线的相互转换.

<1> $F(x,y)=0$ 是曲线直角坐标方程 $\Rightarrow F(r\cos\theta,r\sin\theta)=0$.

<2> $r=f(\theta)$ 是曲线极坐标方程 $\Rightarrow \begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\ y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）.

例1：求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 上光滑点处切线介于两坐标轴间的长度.



解：对 x 求导：$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y(x)^{-\frac{1}{3}}\cdot y'(x)=0$

$\therefore y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ 设任一光滑点为 $M(x_0,y_0)$

$\therefore$ 切线方程为：$y=-\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}(x-x_0)+y_0$.

令 $x=0$：解得：$y=a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}$

令 $y=0$：解得：$x=x_0^{\frac{1}{3}}\left(y_0^{\frac{2}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}}\right)=a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}}$

$\therefore d=\sqrt{x^2+y^2}=a$.

求星形线参数方程：圆 $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).

令 $X=x^{\frac{1}{3}}$，$Y=y^{\frac{1}{3}}$，则 $X^2+Y^2=(a^{\frac{1}{3}})^2$

即有 $\begin{cases}X=a^{\frac{1}{3}}\cos\theta\\ Y=a^{\frac{1}{3}}\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$.

例2：求三叶玫瑰线 $r=a\sin3\theta$ 在 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 对应点处的切线方程.

解：极→直(参)：$\begin{cases}x=a\sin3\theta\cos\theta\\ y=a\sin3\theta\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)

$\therefore y'_x=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{3a\cos3\theta\sin\theta+a\sin3\theta\cos\theta}{3a\cos3\theta\cos\theta-a\sin3\theta\sin\theta}$

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时：$y'_x=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{-\frac{1}{2}a}=-\sqrt{3}$；$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}a\\ y=\frac{1}{2}a\end{cases}$ $\therefore$ 切线方程为：$y=-\sqrt{3}x+2a$.

例3：设有一个顶角为 $90°$ 的倒圆锥体，以速度 c 匀速沉入盛有部分水的半径为 b 的圆柱形容器中，求圆锥体被水浸没 a 米深时，圆柱形容器水面上升的速度.

解：设 $t=0$ 时，圆锥体顶点在水面，经过时间 t，水平面上升的高度为 y 米.

$\frac{1}{3}\pi(y+ct)^3=\pi b^2y$

两边关于 t 求导：$\pi(y+ct)^2(y'+c)=\pi b^2y'$，令 $y+ct=a$ 代入得：$y'|_{y+ct=a}=\frac{a^2c}{b^2-a^2}$

例4：若$f'(x)$存在，则正确的是 ABC.

A. 若$f(x)$是奇函数，则$f'(x)$是偶函数.

B. ……偶……奇……

C. 若$f(x)$是周期函数，……周期函数.

D. ……有界……有界函数.

A: $f(x)=-f(-x)$，则 $f'(x)=-f'(-x)\times(-1)=f'(-x)$

B: $f(x)=f(-x)$，则 $f'(x)=f'(-x)\times(-1)=-f'(-x)$.

C: $f(x)=f(x+T)$，则 $f'(x)=f'(x+T)$.

D: $y=\sin\frac{1}{x}$，$y'=\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

例5：设$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)\neq0$，$f(0)=0$，又$af(x)+bf(2x)-f(0)=o(x)$，求a,b.

解：由题：$\lim\limits_{x\to0}(af(x)+bf(2x)-f(0))=0$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{af(x)+bf(2x)-f(0)}{x}=0$.

$\downarrow$

$af(0)+bf(0)-f(0)=0$

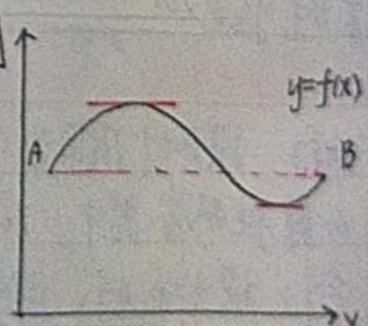
$\therefore a+b=1$

$$\lim_{x\to0}\left[a\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+2b\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\frac{af(0)+bf(0)-f(0)}{x}\right]=af'(0)+2bf'(0)+0=0\quad\therefore a+2b=0$$

$\therefore\begin{cases}a+b=1\\a+2b=0.\end{cases}$

第四章 微分中值定理

§4.1 中值定理

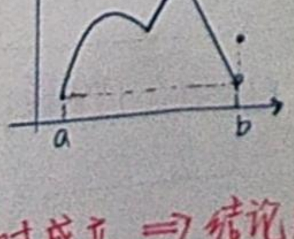


1. 罗尔定理

定理1：①设$f(x)\in C[a,b]$，且②在(a,b)内可导，若③$f(a)=f(b)$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$ ($f'(\xi)=0$在(a,b)内有根).

注：①②③是充分条件，不是必要条件.

例如：



①②③同时成立 $\Longrightarrow$ 结论成立.

极值：设$f(x)$在x_0的邻域内有定义，若$f(x)\geq f(x_0)$（$f(x)\leq f(x_0)$），则称$f(x_0)$是极小(大)值，称x_0是极小(大)值点。极值点不一定可导

证明：$\because f(x)\in C[a,b]$ $\therefore f(x)$在$[a,b]$上有最大值M与最小值m；若$M=m$，则$f(x)=M$ 从而$f'(x)=0$，$\therefore \forall x\in[a,b]$满足$f'(x)=0$；若$M\neq m$ $\because f(a)=f(b)$ $\therefore$最大值和最小值至少有一个在(a,b)内取得，不妨设$M\neq f(a)$，则$\exists\xi\in(a,b)$使$M=f(\xi)$，又由②知$f'(\xi)$存在

$f_-'(\xi)=\lim\limits_{x\to\xi^-}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geq 0$（极限保序性） $f_+'(\xi)=\lim\limits_{x\to\xi^+}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leq 0$

又$\because f_-'(\xi)=f_+'(\xi)$ $\therefore f_-'(\xi)=f_+'(\xi)=f'(\xi)=0$.

2.费马引理

定理. 若$f(x_0)$是$f(x)$的极值且$f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0$.

导数为0的点叫做极值嫌疑点/驻点.

[费马大定理：$x^n+y^n=z^n$，当$n>2$时，x,y,z没有正整数解]

例1：设$C_1,C_2\cdots C_n$为任意n个实数，证三角方程$C_1\cos x+C_2\cos 2x+\cdots+C_n\cos nx=0$在$(0,\pi)$内必有根

证明：令$f'(x)=C_1\cos x+C_2\cos 2x+\cdots+C_n\cos nx$.

则$f(x)=C_1\sin x+\frac{1}{2}C_2\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}C_n\cos nx$，则$f(x)$在$(0,\pi)$连续且可导，且$f(0)=f(\pi)=0$.

由罗尔定理可知，$f'(x)=0$在$(0,\pi)$内有根.

例2：设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)$，证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

分析：即$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$.

令$F'(x)=f(x)g''(x)-f''(x)g(x)=0$.

则$F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$.

$\because F(x)$在(a,b)上连续且可导，$F(a)=F(b)=0$

$\therefore$由罗尔定理可知，$F'(x)=0$在(a,b)内有根 即$\exists\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$.

$\because g''(\xi)\neq 0$ $\therefore f(\xi)=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}g(\xi)$

若$g(\xi)=0$，则$g(x)$在$[a,\xi)$与$[\xi,b]$上分别满足罗尔定理，所以$\exists\xi_1\in(a,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,b]$使$g'(\xi_1)=0$，$g'(\xi_2)=0$，又由罗尔定理得，$\exists\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$，使$g''(\xi_3)=0$与$g''(x)\neq 0$矛盾$\therefore g(\xi)\neq 0$

$\therefore \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

例3：设$f(x)\in C[a,b]$，在(a,b)内可导且$f(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=0$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使$\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=1$.

分析：即 $f'(\xi)-f(\xi)=0$

令$F(x)=f'(x)-f(x)$　则$F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$.

$\because f(a)=f(b)=0 \therefore F(a)=F(b)=0$　由罗尔定理知，$\exists\xi\in(a,b)$ 使$F'(\xi)=0$.

即 $f'(\xi)=f(\xi)$　$\because f(\xi)\neq 0$

$\therefore \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=1$

例4. 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，令$F(x)=(x-a)f(x)$，证明$\exists\xi\in(a,b)$使$F''(\xi)=0$.

分析：　$F'(x)=f(x)+(x-a)f'(x)$

$F'(a)=0$，$F'(b)=f(b)+(b-a)f'(b)$.

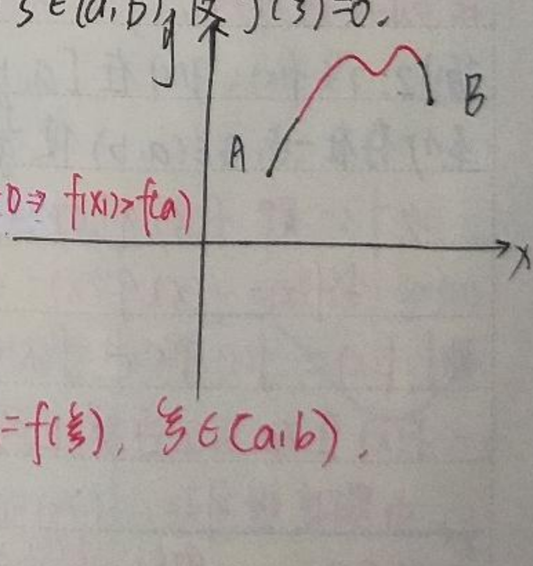
$\because F(x)$在(a,b)上可导且连续，且$F(a)=F(b)$　由罗尔定理得：$\exists c\in(a,b)$使$F'(c)=0$.

$\therefore$ $F'(x)$在(a,c)上可导且连续，且$F'(a)=F'(c)$

由罗尔定理得：$\exists\xi\in(a,c)$，使$F''(\xi)=0$.

例5. 设$f(x)$在$[a,b]$上可导且$f'_+(a)f'_-(b)<0$，证明$\exists\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$.

分析：[原函数连续，导函数不一定连续]



不妨设$f'_+(a)>0$　$f'_-(b)<0$.

$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0 \Rightarrow \exists x_1\in(a,b)$使$\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0\Rightarrow f(x_1)>f(a)$

同理可得　$f(x_2)>f(b)$

$\therefore f(a)$与$f(b)$均不为$[a,b]$上的最大值.

又$\because f(x)\in C[a,b]$　$\therefore f(x)$在$[a,b]$上存在最大值$M=f(\xi)$，$\xi\in(a,b)$.

又$\because f'(\xi)$存在，$f(\xi)$是极值　$\therefore f'(\xi)=0$.

注：闭区间上的导函数满足介值(零点原理)，无论导函数是否连续.

设$f'(x)$在$[a,b]$上有定义，且$f'(a)\neq f'(b)$，不妨设$f'(a)<f'(b)$，则对$f'(a)<\mu<f'(b)$

存在$\xi\in(a,b)$使　$f'(\xi)=\mu$.

$\Rightarrow \exists \xi\in(a,b)$ 使 $|f'(\xi)| = \left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right|$ 从而 $f'(\xi)>M$ $\therefore f'(x)$无界

法2° 逆否命题 即证：$f'(x)$在(a,b)有界 $\Rightarrow f(x)$在(a,b)有界

证明：由题：$\exists M>0$，使对 $\forall x\in(a,b)$ 有 $|f'(x)|\le M$

$\forall x\in(a,b)$，取定 $x_0\in(a,b)$

$$|f(x)| = |f(x)-f(x_0)+f(x_0)| \le |f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)| = |f'(\xi)(x-x_0)-f(x_0)|+|f(x_0)|$$
$$\le |M(b-a)-f(x_0)|+|f(x_0)|$$

$\therefore f(x)$在(a,b)有界。

4. 拉格朗日中值定理推论。

推论1：$f'(x)=0$，$\forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)=C$，$C$为常数。

定义域连续

推论2：$f'(x)=g'(x)$，$\forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+C$，$C$为常数。

推论3：$f'(x)>0\ (<0)$，$\forall x\in(a,b) \Rightarrow f(x)$单增(单减)。

例5：证明：$\arctan\frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(n+1)-\arctan n$.

不能直接求导，先用x替换n：离散的点→连续

$$\left(\arctan\frac{1}{x^2+x+1}\right)' = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2}\cdot\left(-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\right) = -\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} = \varphi'(x)$$

右端求导得：$\frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{1}{1+x^2} = \varphi'(x)$

$\therefore \arctan\frac{1}{x^2+x+1} = \arctan(x+1)-\arctan x + C$

令$x=0$，得：$C=0$

$\therefore \arctan\frac{1}{x^2+x+1} = \arctan(x+1)-\arctan x$.

令$x=n$，则 $\arctan\frac{1}{x^2+x+1} = \arctan(n+1)-\arctan n$.

柯西中值定理（参数方程下的微分中值定理）。

拉：$h'(\xi) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a}$ 令 $\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t)\end{cases}$ (t为参数，$\alpha\le t\le\beta$)

$h'(\xi) = \frac{f'(t)}{g'(t)}$ $h'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$ $\therefore \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$.

定理4：设$f(x)$，$g(x)$满足：① 在$[a,b]$上连续 ② 在(a,b)内可导 ③ $g'(x)\ne0$(保证$g(x)$单调)

则至少$\exists$一个点ξ，使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

证明：令 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = k$ $\therefore f'(\xi) = kg'(\xi)$ 令$F(x) = f(x)-kg(x)$

$F(a)=f(a)-g(a)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}=F(b)$

∴由罗尔定理：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$

$f'(\xi)=kg'(\xi)$

§4.2 洛必达法则

1. 极限中有型不定式（7种）

(1) $f(x)\to0,\ g(x)\to0$，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 为"$\frac{0}{0}$"型

(2) $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 为"$\frac{\infty}{\infty}$"型

(3) $f(x)\to0,\ g(x)\to\infty$，则 $\lim f(x)\cdot g(x)$ 为"$0\cdot\infty$"型

(4) $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$，且 $f(x)g(x)>0$，则 $\lim(f(x)-g(x))$ 为"$\infty-\infty$"型

(5) $f(x)\to1,\ g(x)\to\infty$，则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为"1^∞"型.

(6) $f(x)\to0,\ g(x)\to0$，则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为"0^0"型.

(7) $f(x)\to\infty,\ g(x)\to0$，则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为"∞^0"型.

2. 洛必达法则.

定理：设 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$ 或 ∞，且 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞，称之为洛必达法则.

$f(x)$、$g(x)$、$f^{(n)}(x)$、$g^{(n)}(x)$ 都必须在 x_0 的邻域内有定义.

证明[1]：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=A$ 或 ∞.

补充定义：令 $f(x_0)=g(x_0)=0$ ∴ $f(x)$、$g(x)$ 都在 x_0 点连续.

∴由柯西中值定理得：$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，$\xi\in(x,x_0)$

∴ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞

特殊　　一般

注：洛只能求有(极限)，不能求无极根.（用洛求出来无极限时，不一定没有极限）

例如：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$

洛：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$　$x=2n\pi\to0$，$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to1$ } ∴不存在极限

→换方法：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$.

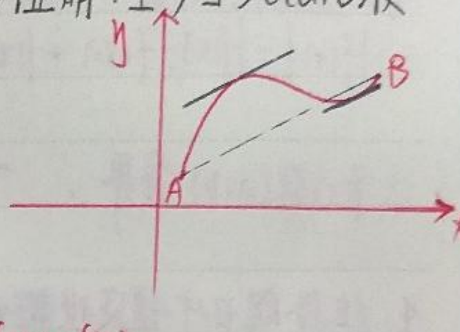
证明：[2] 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$ 或 ∞

取 $t=\frac{1}{x}$，则 $t\to0$ 趋于定点.

证：令 $F(x)=f(x)-\mu x$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且 $F'(a)F'(b)<0$，则 $\exists\ \xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\mu$.

[定理3：拉格朗日中值定理（微分中值/有限增量定理）]

例6：设 $f(x)$ 满足：$f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导；证明：至少 $\exists\ \xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



分析：令 $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$F(x)=f(x)-kx$

$\left.\begin{aligned}F(a)&=f(a)-ka\\F(b)&=f(b)-kb\end{aligned}\right\}\Rightarrow F(a)=F(b)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$.

由罗尔定理：$\exists\ \xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

拉格朗日中值定理一般形式：设 $y=f(x)$ 可导，$x_1,x_2\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)$，$\xi\in(x_1,x_2)$

例1：证明 $\sin x<x\ \ (x\in(0,\frac{\pi}{2}))$.

证明：$\dfrac{\sin x-\sin 0}{x}=\cos\xi$，$0<\xi<x<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \dfrac{\sin x}{x}<1\ \ (x\in(0,\frac{\pi}{2}))\ \therefore \sin x<x\ \ (x\in(0,\frac{\pi}{2}))$.

例2：证明 $\frac{1}{1+n}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

分析：$\ln(1+\frac{1}{n})=\dfrac{\ln(1+n)-\ln n}{1+n-n}=(\ln x)'|_{x=\xi}=\dfrac{1}{\xi}$，$n<\xi<n+1$.

$\therefore \frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$.

例3：设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数且 $f''(x)>0$，证明 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ 有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$

证明：不妨设 $x_1<x_2$，$[f(x_2)-f(\frac{x_1+x_2}{2})]-[f(\frac{x_1+x_2}{2})-f(x_1)]$

$=f'(\xi_2)\dfrac{x_2-x_1}{2}-f'(\xi_1)\dfrac{x_2-x_1}{2}$　　$\xi_2\in(\frac{x_1+x_2}{2},x_2)$，$\xi_1\in(x_1,\frac{x_1+x_2}{2})$

$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]$

$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)\ f''(\xi_3)(\xi_2-\xi_1)>0$　　$\xi_1<\xi_3<\xi_2$.

例4：设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且无界，证明 $f'(x)$ 也无界.

分析：$\left|\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|>\dfrac{|f(x_2)-f(x_1)|}{b-a}>M\rightarrow |f(x_2)|>|f(x_1)|+M(b-a)$.

$\boxed{\text{证明无界：}|F(x)|>M}$

证明：$\forall M>0$，取定 $x_0\in(a,b)$ $\because f(x)$ 在 (a,b) 内无界 $\therefore \exists x_1\in(a,b)$ 使 $|f(x_1)|>|f(x_0)|+M(b-a)$

求极限：①定义+运算变形 ②两个重要准则 ③两个重要极限 ④等价无穷小代换 ⑤洛必达法则

$\frac{0}{0}$ 例1：$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{6}\overset{洛}{=}\frac{1}{6}$

$\frac{0}{0}$ 例2：$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$　令 $x=\frac{1}{t}$，即 $t=\frac{1}{x}$，$t\to\infty$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0$.

$\frac{\infty}{\infty}$ 例3：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-(\cos x-x\sin x)}{3x^2}=\frac{2}{3}$.

$\infty-\infty\to0\cdot\infty\to\frac{\infty}{\infty}\to\frac{0}{0}$

例4：$\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}$

令 $t=\frac{1}{x}$ $\therefore t\to0$

原式 $=\lim\limits_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$.

注："1^∞" "0^0" "∞^0" 利用换底公式 $a=e^{\ln a}$ 将其变成 $e^{\frac{0}{0}}$ 或 $e^{\frac{\infty}{\infty}}$ 型.

例5：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{3^x+5^x}{2})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{3^x+5^x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{3^x+5^x}{2}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3^x+5^x}(3^x\ln3+5^x\ln5)}=\sqrt{15}$.

例6：$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=1$

例7：$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3\sqrt[3]{x^3+x^2}-4\sqrt[4]{x^4+2x^3}+5\sqrt[5]{x^5-x^4})$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x(2-3\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-4\sqrt[4]{1+\frac{2}{x}}+5\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-3\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-4\sqrt[4]{1+\frac{2}{x}}+5\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$

令 $t=\frac{1}{x}(t\to0)$　原式 $=\lim\limits_{t\to0}\frac{2-3\sqrt[3]{1+t}-4\sqrt[4]{1+2t}+5\sqrt[5]{1-t}}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{(-3)\cdot\frac{1}{3}(1+t)^{-\frac{2}{3}}-4\cdot2\cdot\frac{1}{4}(1+2t)^{-\frac{3}{4}}-5\cdot\frac{1}{5}(1-t)^{-\frac{4}{5}}}{1}$

$=-8$

例8：求抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的中值点 ξ.

解：$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$，$\xi\in(x_1,x_2)$.

即 $a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=(2a\xi+b)(x_1-x_2)$

$\therefore 2a\xi+b=a(x_1+x_2)+b$

解得 $\xi=\frac{x_1+x_2}{2}$.

对抛物线而言，$[x_1,x_2]$ 内的中值点为 $\frac{x_1+x_2}{2}$.

对一般曲线而言，$[x_1,x_2]$ 内的中值点满足 $\lim\limits_{x_2\to x_1}\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{2}$.

例9. 设$f(x)$在$[0,x]$上二阶可导且$f''(0)\neq 0$，由拉格朗日中值定理得，$\exists\xi\in(0,x)$
使$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$，证明$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$.

证明: $\lim\limits_{\xi\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}=f''(\xi)$ （想办法把ξ从$f'(\xi)$里拿出来）

$\Rightarrow f'(\xi)-f'(0)=\xi f''(\xi)+\xi\alpha$ （微分 $\Delta y=\Delta x dx+\alpha$）→ 自变量在相同趋向下的无穷小

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}f''(\xi)+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}\alpha=f''(0)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$ 定义(不能洛)

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$.

例10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，求$a,b$.

分析: 原式$=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{5-\sqrt{t^2+bt+a}}{t}=2$.

分子、分母同阶 $\therefore \lim\limits_{t\to 0^+}(5-\sqrt{t^2+bt+a})=0$ 分析: $a=25$.

$\therefore$ 原式$=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{5-\sqrt{t^2+bt+25}}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\frac{(b+2t)}{-2\sqrt{t^2+bt+25}}}{1}=2$ 分析: $b=20$.

$\therefore\begin{cases}a=25\\ b=20.\end{cases}$

例11. 设$f(x)$在x_0的邻域内有定义，则不正确的是

A. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在，则$f'(x)$在$x_0$连续

B. 若 …… 不存在，则x_0是$f'(x)$第一类间断点.

C. 若 …… 不存在，…… 二

D. 若存在此邻域内两点x_1,x_2，使$f'(x_1)f'(x_2)<0$，则存在此邻域内一点ξ，使$f'(\xi)=0$.

A: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$（由A可知$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在，则通过一般可推特殊）.

BC: 若$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$不存在，$x_0$是$f'(x)$的间断点，若$x_0$是第一类间断点，则$f'(x_0-0)$和$f'(x_0+0)$都存在; 左导数$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$，右导$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$

$\because f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)\Rightarrow f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$，与题"$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$不存在"矛盾)

$\therefore$ 导函数有间断点必是第二类间断点.

§.4.3 泰勒公式

1. 多项式 $H_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$.

$a_0 = H_n(0)$; $a_1 = H_n'(0)$; $2a_2 = H_n''(0)$; …; $n!a_n = H_n^{(n)}(0)$.

$\therefore H_n(x) = H_n(0) + H_n'(0)x + \frac{H_n''(0)}{2!}x + \dots + \frac{H_n^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

$f(x) \approx P_n(x)$，设$f(x)$在$x=0$点有n阶导

$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n$

若$f(x)$在$x=x_0$点有n阶导，令$t = x - x_0$

则 $f(x) = f(t+x_0) \triangleq g(t)$ $\therefore g(t)$在$t=0$点有n阶导.

$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n$

即$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

2. 泰勒公式.

1~n任意一阶都有导

设$f(x)$在x_0点$\boxed{有n阶导}$，称多项式 $P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为$f(x)$在x_0点的n阶泰勒多项式.

称 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 为$f(x)$在x_0点的泰勒公式余项.

此时$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$.

定理1：设$f(x)$在x_0点有n阶导，则$f(x)$在x_0点处的n阶泰勒公式余项 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$，

即$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ ——带皮亚诺余项的泰勒公式

证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

证：原式 $\overset{①洛}{=} \lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \overset{②导数定义}{=} \lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\lim\limits_{x\to x_0}R_n^{(n)}(x_0) = 0$.

②处不能再洛：$R_n(x)$在x_0点有n阶导 $\not\Rightarrow$ $R_n(x)$有n阶导

$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$，$\xi \in (x_1, x_2)$ —拉

推广：$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$

→ 定理2（泰勒中值定理）设$f(x)$在x_0的邻域内有$(n+1)$阶导数，则$f(x)$在x_0点的n阶泰勒公式余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

ξ介于x_1，x_2之间，此时 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

证明：令$g(x) = (x-x_0)^{n+1}$

$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \overset{柯西中值定理}{=} \frac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} \overset{柯}{=} \frac{R_n''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} = \dots \underset{(n-1)次柯}{=} \frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})} \overset{柯}{=}$

$\xi_1 \in (x_0, x)$，$\xi_2 \in (x_0, \xi_1)$

$$\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M\cdot|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,\ \exists M>0,\text{使}\ |f^{(n+1)}(x)|\le M.$$

当 $x_0=0$ 时，称 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 麦克劳林公式

ξ 介于 $(0,x)$ 之间 $\therefore 0<\frac{\xi}{x}=\theta<1$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{M\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,\ \exists M>0,\text{使}\ |f^{(n+1)}(x)|\le M.$$

3.常见的泰勒公式

(1) $f(x)=e^x$ $\quad f^{(n)}(x)=e^x \therefore f^{(n)}(0)=1$, $R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

$\therefore f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

当 $x=1$ 时：$e=1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$ $\qquad |R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$

n越大误差越小.

例1: 利用 e^x 的麦克劳林公式计算 e 的值，使其误差不超过 10^{-5}.

解: $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$

对 $\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$: 当 $x=1$ 时 原式 $=\frac{e^\theta}{(n+1)!}$

$\because 1<e^\theta<3$

$\therefore \frac{1}{(n+1)!}<\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$

$\therefore \frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}\le 10^{-5}$ $\quad$ 解得: $n\ge 8$.

证明 e 为无理数:

(2) $f(x)=\sin x$ $\qquad f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\(-1)^m, & n=2m+1\end{cases}$ $(m=0,1,2\dots)$.

$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$ $\therefore$

要有余项 $\therefore$ 将 $f(x)$ 展至偶数项，取 $n=2m+2$

$\therefore f(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\frac{(-1)^{m+1}\cos\xi}{(2m+3)!}x^{2m+3}$

$\boxed{f^{(2m+3)}(\xi)=(-1)^{m+1}\cos\xi.}$

(3) $f(x)=\cos x$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^m, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^m\cdot x^{2m}}{(2m)!}+\frac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$$

(4) $f(x)=(1+x)^\alpha$, $f^{n}(x)=\begin{cases}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^n, & n\geq 1\\ (1+x)^\alpha, & n=0\end{cases}$

$$f(x)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(5) $f(x)=\ln(1+x)$, $f^{n}(x)=\begin{cases}(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}\\ 0, & n=0\end{cases}$

$$\therefore f(x)=x+\frac{-1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{(-1)^n(1+\theta x)^{-(n+1)}}{(n+1)}x^{n+1}$$

法2° $f^{k}(x)=(\frac{1}{1+x})^{k-1}=(1+x)^{1-k}$，即令(4)中$\alpha=1-k$.

例2. 当$x\to 0$时，$f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^x+2\sin x$是$\cos x-1$的几阶无穷小.

解：$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$

$\therefore \cos x-1\sim -\frac{1}{2}x^2$.

$f(x)=1-x+\frac{1}{2}x^2-(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3))+2(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))$

$\therefore$当$x\to 0$时：$\frac{f(x)}{\cos x-1}=\frac{-x^3}{-\frac{1}{2}x^2}$

$\therefore f(x)$是$\cos x-1$的$\frac{3}{2}$阶无穷小.

例3：设$f(x)$在$[-1,1]$上有连续的三阶导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$。证明：$\exists\xi\in(-1,1)$使$f'''(\xi)=3$.

证：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$

令$x=1$：$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}\cdot f'''(\xi_1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$

令$x=-1$：$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$

$\therefore 1=\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)]\Rightarrow 3=\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)]$

$\because f'''(x)\in C[-1,1]$，由介值原理可知：$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(-1,1)$使$f'''(\xi)$

$=\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)]$

例4. 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f(a)=f(b)=0$，又$M=f(c)>0$是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值. 证明：$\exists\xi\in(a,b)$使$f''(\xi)\le\frac{-8M}{(b-a)^2}$.

解：$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$ [由费马原理可知，$f'(c)=0$]

$0=f(a)=M+f'(c)(a-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-c)^2=M+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-c)^2$

$0=f(b)=M+f'(c)(b-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-c)^2=M+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-c)^2$

$\therefore f''(\xi_1)=\frac{-2M}{(a-c)^2}=\frac{-8M}{[2(a-c)]^2}\le\frac{-8M}{(b-a)^2}\Leftrightarrow c\le\frac{a+b}{2}$.

$f''(\xi_2)=\frac{-2M}{(b-c)^2}=\frac{-8M}{[2(b-c)]^2}\le\frac{-8M}{(b-a)^2}\Leftrightarrow c\ge\frac{a+b}{2}$.

§.4.4 极值与最值.

1. 函数的单调性

定理1：设$f(x)\uparrow I$ ($\downarrow I$) 且$f'(x)$存在，则$f'(x)\ge0$ (≤0)

定理2：若$f(x)\in C\langle a,b\rangle$且$f(x)$在$(a,b)$内可导，当$f'(x)>0$时($<0$时)，则$f(x)$在$\uparrow\langle a,b\rangle$ ($f(x)\downarrow\langle a,b\rangle$) 严格单调 (若是"$f'(x)\ge0$"，单调但不严格)

证：$\forall x_1,x_2\in\langle a,b\rangle$，不妨设$x_1<x_2$，由L中值定理 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)>0$

$\because x_2-x_1>0$ $\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$ $\therefore$单增.

例1. 求$f(x)=x^3-3x+5$的单调区间

解：$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ 定义域$(-\infty,+\infty)$.

令$f'(x)>0$：解得：$x>1$或$x<-1$

令$f'(x)<0$：解得：$-1<x<1$

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$上单增，$(-1,1)$上单减.

例2：证明$(1+\frac{1}{x})^x\uparrow(0,+\infty)$

$x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x[x\ln(1+\frac{1}{x})]'$

$=(1+\frac{1}{x})^x\left[\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}}\right]$

$=(1+\frac{1}{x})^x\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}\right]$

令$g(x)=\ln x$ $\therefore \ln(1+\frac{1}{x})-\ln1=f'(\xi)\cdot(\frac{1}{x})=\frac{1}{\xi x}$ $1<\xi<1+\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{1}{1+x}<\frac{1}{\xi x}<\frac{1}{x}$ 即 $\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$

$\therefore f'(x)>0$ $\therefore(1+\frac{1}{x})^x\uparrow(0,+\infty)$.

例3：设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，$x\in[0,+\infty)$．证明 $\frac{f(x)}{x}\downarrow(0,+\infty)$．

分：令 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ ∴ $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，易得：$g(0)=0$．

$g'(x)=f'(x)+f''(x)\cdot x-f'(x)=xf''(x)<0$

∴ $g(x)$ 在 $[0,+\infty)\downarrow$

∴ $g(x)<0$ $(x\in(0,+\infty))$．

∴ $F'(x)<0$，$x\in(0,+\infty)$

∴ $\frac{f(x)}{x}\downarrow(0,+\infty)$．

例4：设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$

分：令 b 为自变量，a 为一常数．

∴ 原方程变形为 $f(x)=a\ln x-x\ln a<0$ $(x>a)$．

∴ $f'(x)=\underbrace{\frac{a}{x}}_{<1}-\underbrace{\ln a}_{>1}<0$．

∴ $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单减

∴ $f(x)<f(a)=0$．

令 $x=b$，则有 $a\ln b-b\ln a<0$ 即 $a^b>b^a$

例5：求方程 $(x^2-2x)e^x+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}=0$ 实根个数

分：令 $f(x)=(x^2-2x)e^x+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}$

$f'(x)=e^x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

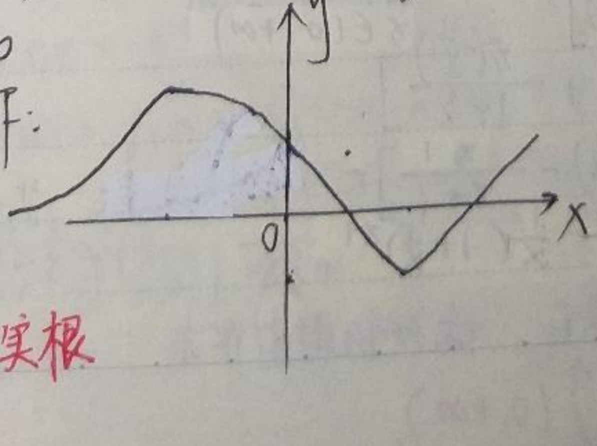
∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{2}]\uparrow$ $(-\sqrt{2},\sqrt{2})\downarrow$ $[\sqrt{2},+\infty)\uparrow$

$f(x)>0$，当 $x\to-\infty$

$f(-\sqrt{2})>0$；$f(0)=(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}>0$；$f(\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}<0$；

$f(x)>0$，当 $x\to+\infty$

∴ $f(x)$ 大致图象如下：



∴ $f(x)=0$ 有2个实根

2. 函数的极值.

定理1：设 $f(x)$ 在 x_0 点连续，且在 x_0 的去心邻域内可导

(1) 当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$. 则 $f(x_0)$ 是极小值.

(2) 当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时 $f'(x)<0$ 则 $f(x_0)$ 是极大值

例1：求 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 的极值.

解：$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$ $(x\neq 0, \pm 1)$.

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

[原函数为偶 ⇓ 导函数为奇]

x	0	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	不∃	+	0	−	不∃	−
$f(x)$	(极小值) 1	↑	(极大值) $4^{\frac{1}{3}}$	↓		↓

$f(x)$ 极大值为 $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=f(\frac{\sqrt{2}}{2})=4^{\frac{1}{3}}$；极小值为 $f(0)=1$.

定理2. 若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$. 则 $f(x_0)$ 必为 $f(x)$ 的极值. 且当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 是极小值；当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 是极大值.

证：若 $f''(x_0)>0$，即 $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$

由极限保序性，$\exists\,\mathring{U}(x_0,\delta)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$.

当 $x>x_0$ 时 则 $f'(x)>0$；当 $x<x_0$ 时，则 $f'(x)<0$

$\therefore f(x_0)$ 是极小值.

注：若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，x_0 不一定是极值点. (如 x^3 与 x^4)

例1：求 $f(x)=e^x-1-x$ 的极值.

解：$f'(x)=e^x-1$；令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$

又 $\because f''(0)=1\neq 0$ $\therefore f(0)=0$ 是 $f(x)$ 的极值.

例3：求 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值

解：$f'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}-2\sin x$，易知 $f'(0)=0$

又 $\because f''(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2\cos x\geq 2-2\cos x\geq 0$ $\therefore f'(x)$ 单调递增.

$\therefore f'(x)=0$ 有且仅有一个 $x=0$.

$\therefore f''(0)=1+1-2=0$

$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x \quad \therefore f'''(0)=0$

$f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x \quad \therefore f^{(4)}(0)=4.$

$f^{(4)}(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'''(x)-f'''(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'''(x)}{x}>0 \Rightarrow \exists x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$

使 $\frac{f'''(x)}{x}>0$ ①当 $x>0$ 时，$f'''(x)>0 \Rightarrow f''(x)\uparrow \therefore f''(x)>f''(0)=0 \Rightarrow f'(x)\uparrow \Rightarrow f'(x)>f'(0) \Rightarrow$

$f(x)\uparrow$

同理可得②当 $x<0$ 时，$f(x)\downarrow$

由定理1可得：$f(0)=4$ 是 $f(x)$ 的极小值

法2° 将 $f(x)$ 在 $x=0$ 点，用泰勒公式展开

$f(x)=4+\frac{4}{4!}x^4+o(x^4) \Rightarrow f(x)-f(0)=\underbrace{\underbrace{\frac{1}{6}x^4}_{\text{主部}}+\underbrace{o(x^4)}_{\text{次部}}}_{\text{正负由主部决定}}>0.$

$\therefore f(0)$ 是极小值

法3°（接法1°求出 $f''(x)>0$，$f'(0)=0$ 之后）

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,+\infty)\uparrow$，则 $f'(x)>f(0)=0 \quad (x>0)$

$f'(x)$ 在 $(-\infty,0)\uparrow$，则 $f'(x)<f(0)=0 \quad (x<0)$.

$\therefore f(0)$ 是极小值.

3. 函数的最值

(1) 区间上连续函数的最值.

设 $f(x)\in C\langle a,b\rangle$ 且 $f(x)$ 上有有限个极限嫌疑点（注点），$x_1, x_2, \cdots x_k$，则 $f(x)$ 的最值在 $f(x_1)\cdots f(x_k)$，$f(a)$，$f(b)$ 中找.

例1：求 $f(x)=(x^2-2x)e^x$ 的最值.

分析：$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x)e^x=e^x(x^2-2)$

令 $f'(x)=0$ 分别得 $x=\pm\sqrt{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，$f(-\sqrt{2})=(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}>0$，

$f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}<0$，$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\therefore f(x)$ 有最小值 $f(\sqrt{2})$，无最大值.

(2) 若 $f(x)\in C\langle a,b\rangle$ 有且仅有一个极大(小)值，则此极值点是最大(小)值.

例2：设有一工厂要加工一批无盖的圆柱形罐头盒，其容积为V，问半径与高

满足什么关系最省料？

解：设半径r，高为h

$$V=\pi r^2\cdot h$$

$$S=\pi r^2+2\pi r h=\pi r^2+\frac{2V}{r}$$

$$S'=2\pi r-\frac{2V}{r^2} \quad 令 S'=0 得：r=\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

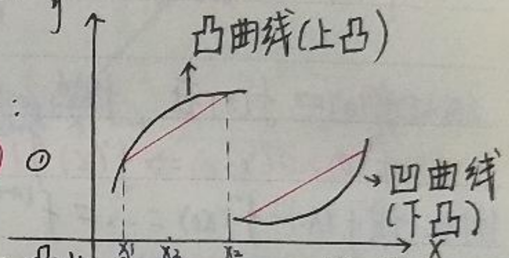
$$S''=2\pi+\frac{4V}{r^3}, \quad S''\Big|_{r=\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}>0$$

$\therefore$ $S\Big|_{r=\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}$ 是唯一的极小值点，

从而为最小值点，此时半径与高相等.

§4.5 函数作图.

1. 函数曲线的凹凸性.



定义1：设$f(x)\in C(a,b)$，$\forall x_1, x_2\in(a,b)$. 若满足：

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\underset{}{\overset{(\le)}{\ge}}(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2) \quad (0\le\lambda\le1) \quad ①$$

则称 $y=f(x)$ 在(a,b)上是凸(凹)的.

定义2：设$y=f(x)$在x_0点连续，若曲线$y=f(x)$的凹凸性在x_0点左、右邻域发生改变

则称$(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点.

不妨设 $x_1<x_2$

令$x_3=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$，由①得：$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)-f(x_3)=\lambda(f(x_2)-f(x_3))+\lambda f(x_3)-f(x_3)+(1-\lambda)f(x_1)=\lambda(f(x_2)-f(x_3))+(1-\lambda)(f(x_1)-f(x_3))\xlongequal[拉]{一阶可导}\lambda f'(\xi_1)(x_2-x_3)+(1-\lambda)f'(\xi_2)(x_1-x_3)$ （$\xi_1\in(x_3,x_2)$，$\xi_2\in(x_1,x_3)$）$\xlongequal{代入x_3}\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)f'(\xi_1)-\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)f'(\xi_2)=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]$

$\xlongequal{二阶可导}\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)f''(\xi)(\xi_1-\xi_2)$

$\boxed{\text{证明拐点处的二阶导为0 用费马引理}}$

$\therefore$ 当$f''(\xi)\le0$时$\Rightarrow$凸曲线；当$f''(\xi)\ge0$时$\Rightarrow$凹曲线

定理1：设$f(x)$在(a,b)上有二阶导数，若$f''(x)\le0\ (\ge0)$，则曲线$y=f(x)$是凸(凹)的，称(a,b)为其凸(凹)区间.

(2) 若$f(x)$在x_0处连续，在x_0的去心邻域内二阶导存在，若$f''(x)$在x_0点的左右邻域内异号，则$(x_0, f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

例1：求 $y=x^4-2x^3+3x+1$ 的凹凸区间及拐点.

$$y'=4x^3-6x^2+3$$

$y''=12x^2-12x$ 令$y''=0$ 解得：$x=0$或1.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	+	0	−	0	+
y	凹	1	凸	3	凹

例2：设$f(x)$在$x=0$点有三阶导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=1$，则（ C ）

A. $f(0)$是$f(x)$极大值

B. ……小

C. $(0, f(0))$是$y=f(x)$的拐点

D. $f(0)$不是极值，$(0,0)$不是拐点

分：$1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3x^2}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{6x}$

$\therefore f(0)、f'(0)、f''(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{6x}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\frac{1}{6}f'''(0)$

$\therefore f'''(0)=6=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}>0 \Rightarrow \begin{cases} x<0时：f''(x)<0 \\ x>0时：f''(x)>0 \end{cases}$ 二阶导异号 → $(0,0)$为拐点

又$\because f''(0)<0\ (x<0) \Rightarrow f'(x)\downarrow\ (x<0)$ $\therefore f'(x)>0\ (x<0)$ 一阶导恒≥ 0 ∴非极值点

$f''(0)>0\ (x>0) \Rightarrow f'(x)\uparrow\ (x>0)$ $\therefore f'(x)>0\ (x>0)$

例3：设$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，而$f^{n}(x_0)\neq 0$ $(n\geq 3)$. 证明：①当n为偶数时，$f(x_0)$是极值，$f^{(n)}(x_0)>0\,(<0)$是极小（大）值，而$(x_0, f(x_0))$不是拐点 ②当n为奇数时，$(x_0, f(x_0))$是拐点，而$f(x_0)$不是极值.

证 [1]：泰：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

$=f(x_0)+\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

$f(x)-f(x_0)=\underbrace{\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{主部}+\underbrace{o((x-x_0)^n)}_{次部}$

$\therefore$当n为偶数时 $f(x)-f(x_0)$与$f^{(n)}(x_0)$同号 $\therefore f(x)\geq f(x_0)$ 或 $f(x)\leq f(x_0)$ ∴$f(x_0)$是极值

当n为奇数时 $f(x)-f(x_0)$在同一个x_0取值下x_0的两端正负号会改变 $\therefore f(x_1)f(x_2)<0$ $(x_1<x_0, x_2>x_0)$

$\therefore f(x_0)$非极值

[2]：$f''(x)=f''(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+o((x-x_0)^{n-2})=\frac{f^{n}(x_0)(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+o((x-x_0)^{n-2})$

$\therefore$当n为偶数时 $f''(x)$与$f^{(n)}(x_0)$同号 $\therefore f''(x)$在x_0邻域内不变号 $\therefore (x_0, f(x_0))$不是拐点

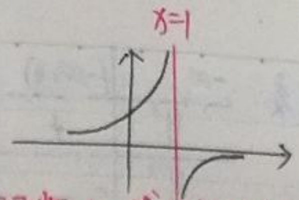
当n为奇数时$f''(x)$在x_0的邻域内变号 $\therefore (x_0, f(x_0))$是拐点.

对可导的点，极值点与拐点是对立的.

2. 渐近线

设有曲线γ和直线l，当曲线γ的一端远离坐标原点时，曲线γ和直线l无

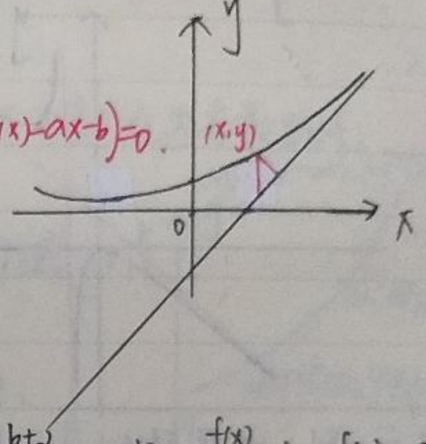
限接近，则称直线 l 是曲线 r 的一条渐近线.



(a) 垂直渐近线（一个函数可能有很多条）.

直线 $x=c$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线 $\Leftrightarrow$ $x=c$ 是 $f(x)$ 的间断点，或区间端点，且 $\lim\limits_{\substack{x\to c^+\\x\to c^-}} f(x)=\infty$.

(b) 一般渐近线



直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}(f(x)-ax-b)=0$.

（一个函数最多两条一般渐近线）.

$a=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\dfrac{f(x)}{x}$ 且 $b=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}(f(x)-ax)$.

推导过程：$f(x)-ax-b=0+\alpha$ （$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha=0$）.

$\therefore a=\dfrac{f(x)-b-\alpha}{x} \Rightarrow a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b+\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=f(x)-ax$

例1：求曲线 $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ 的所有渐近线.

解：定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+e^x}{1-e^x}=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1+e^x}{1-e^x}=+\infty$ $\quad\therefore x=0$ 是垂直渐近线.

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=0$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^x}{1-e^x}=-1$

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=0$. $\quad b=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+e^x}{1-e^x}=1$

$\therefore y=1$ 与 $y=-1$ 是水平渐近线.

3. 分析作图法（描点）

(1) 定义域 (2) $f'(x)=0$ 及不存在的点（极值点）(3) $f''(x)=0$ 及不存在的点（拐点）(4) 渐近线及渐近方向 (5) 列表描图形（加周期性、奇偶性）.

例2：作函数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ 的图形.

解：定义域：$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ $\quad$ 令 $y'=0$ 解得：$x=0$ 或 2.

$y'=\dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$y''=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(2x-2)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

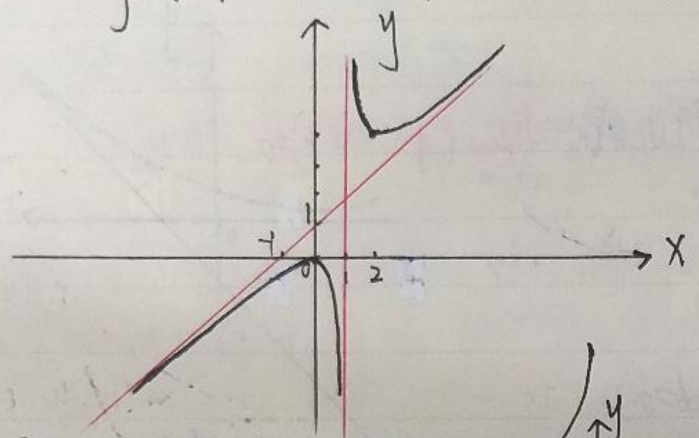
$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2}{x-1}=+\infty$；$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty$ $\quad\therefore x=1$ 是垂直渐近线

$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)x}=1$，$\quad b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$ $\quad\therefore y=x+1$ 是一条渐近线

列表:

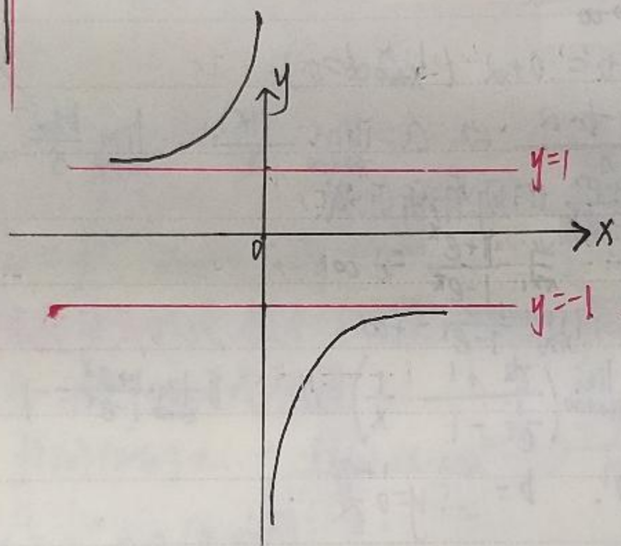
	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	−	0	+
y''	−	极大	−	+	极小	+
y	↗	0	↘	↘	4	↗

∴



补画例1的图形:

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
y'	+	+
y''	+	−
y	↗	↗



作函数 $y=xe^x$ 的图形.

分析: ① 定义域: R

② $y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$. 令 $y'=0$ 解得: $x=-1$

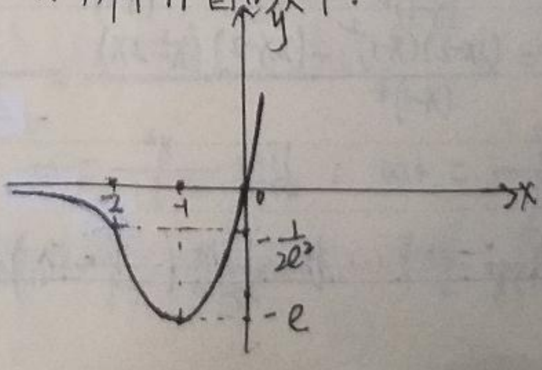
③ $y''=(2+x)e^x$. 令 $y''=0$ 解得: $x=-2$.

($a_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=+\infty$ ∴不存在渐近线)→省略不写.

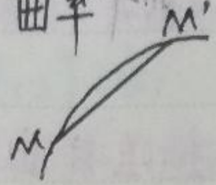
$a_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x}=0$, $b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ ∴ $y=0$ 是一条水平渐近线

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
y'	−	−	−	0	+
y''	−	0	+	+	+
y	↘	拐	↘	极小	↗

∴所求作图形如下:



§.4.6 曲率



1. 曲线长

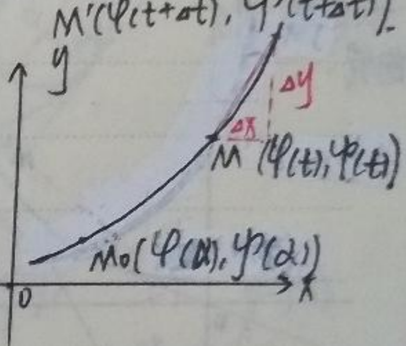
简单（不打结）

连续

可度：$\lim\limits_{M'\to M}\dfrac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}=1$

曲线方程：参数曲线、极坐标曲线、函数曲线.（后两者可化为参数曲线）

曲线长函数 S [$s(t)\uparrow$]



设曲线 l：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$ 是简单连续可度曲线

以曲线左端点 $M_0(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ 为定点，$t\in[\alpha,\beta]$，得到 l 上另一点 $M(\varphi(t),\psi(t))$，设 $s=\overset{\frown}{M_0M}$，易见 s 是 t 的函数，记为 $s=S(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$，$s(t)\uparrow$

$$S'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}\ \frac{\text{限制}}{\Delta t>0}\ \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\overset{\frown}{M_0M'}-\overset{\frown}{M_0M}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}$$

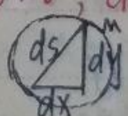
$$=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta t}\ \frac{x=\varphi(t)}{y=\psi(t)\ \text{可导}}\ \lim_{\Delta t\to 0^+}\sqrt{\frac{\Delta x^2+\Delta y^2}{\Delta t^2}}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

当 $\Delta t<0$ 时：$S'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0^-}\dfrac{-\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0^-}\dfrac{-\overline{MM'}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0^-}\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{-\Delta t}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$

结论：若 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 都可导，则曲线长函数 $S=S(t)$ 可导，且

$ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$（称该式为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 的弧微分）规定 $dt>0$，$ds>0$

几何意义：$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$ 　　　微分三角形.



↘ 视 Δy，$\Delta y=dy+o(\Delta x)$.

弧微分公式：参数曲线：$ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$ 　$(dt>0,\ ds>0)$

一般函数曲线 $\begin{cases}y=f(x)\\ x=x\end{cases}\to ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ 　$(dx>0,\ ds>0)$

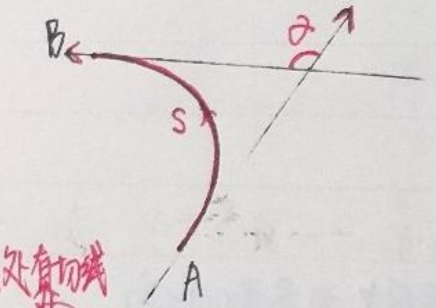
极坐标曲线 $r=r(\theta)\to\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}\to ds=\sqrt{(x_\theta')^2+(y_\theta')^2}\,d\theta$

$=\sqrt{r_\theta^2+(r_\theta')^2}\,d\theta$ $(d\theta>0,\ ds>0)$

2. 曲率

定义1. 设有一光滑曲线段 $\overset{\frown}{AB}$，A是拐点，由A到B，A的切线与B的切线的转角为

α，$\widehat{AB}$长度为s，规定 $k=\frac{\alpha}{s}$ 为曲线段$\widehat{AB}$的曲率.

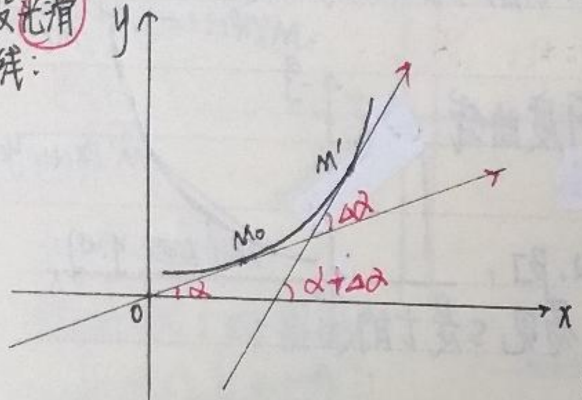


注：①直线曲率为0 (α=0)

②半径为R的圆的曲率为$\frac{1}{R}$

处处有切线

一般光滑曲线：



$$k=\lim_{M\to M_0}\frac{\Delta\alpha}{\widehat{M_0M'}}$$

定义2：设曲线y=f(x)处处有切线，则其切线倾角α是关于x的一个函数，称之为y=f(x)的倾角函数，记为α=α(x)，易见α(x)=arctan y'

定义3：设曲线在点(x,y)附近光滑，若极限$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$存在，则称此极限在(x,y)处曲率，记为$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha/\Delta x}{\Delta s/\Delta x}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\alpha'(x)}{s'(x)}\right|$$

$$=\left|\frac{y''}{1+(y')^2}\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

结论：若y=f(x)有二阶导数，则点(x,y)处曲率一定存在

且$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$ —— 曲率公式.

例1：求半径为R，圆心(0,0)的圆的曲率.

解：方程：$x^2+y^2=R^2$.

$\therefore\ 2x+2yy'=0\to y'=-\frac{x}{y}$

$y''=\frac{-x^2-y^2}{y^3}$

∴圆上任意点$k=\frac{x^2+y^2}{y^3\left[1+\frac{x^2}{y^2}\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{r^2}{r^3}=\frac{1}{r}$.

例2：求 y=ln x 上曲率最大的点.

(x>0) $y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$

$k=\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$k'=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ 令$\begin{cases}k'=0\\x>0\end{cases}$ 解得：$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k'>0\ (0<x<\frac{\sqrt{2}}{2})$；$k'<0\ (x>\frac{\sqrt{2}}{2})$

∴$(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\ln 2)$是y=ln x上曲率最大的点.

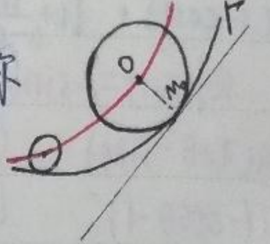
3. 曲率圆

定义：设有曲线Γ，$M\in\Gamma$，又有一个⊙O若满足以下三条：

① 曲线Γ与⊙O在M_0点相切 ② 在M_0点处曲线Γ与⊙O有相同凹向 ③ 曲线Γ在M_0点的曲率恰好等于⊙O的半径的倒数.

则称⊙O为曲线Γ在M_0点处的曲率圆；此⊙O的半径为M_0点的曲率半径，圆心O称为M_0点的曲率中心。

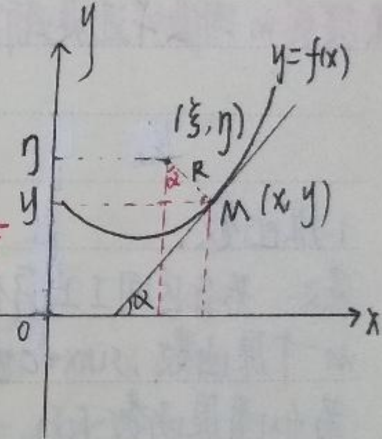
若Γ上每一点都有曲率圆，且曲率中心又形成一条曲线l，称l为Γ的渐屈线，Γ为l的渐开线



※曲率圆的确定（半径，曲率中心）.

$$R=\frac{1}{K}=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$\tan\alpha=y'>0$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$，$\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$



$$\therefore\begin{cases}\eta=y+R\cos\alpha\\ \xi=x-R\sin\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta=y+\dfrac{1+(y')^2}{y''}\\ \xi=x-\dfrac{y'[1+(y')^2]}{y''}\end{cases}$$

例1：求$y=x^2$在$(1,1)$处的曲率圆.

解：$y'=2x$，$y''=2$

$\because y'|_{x=1}=2$ $\quad R=\frac{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

设曲率中心为(ξ,η)

$\therefore \xi=1-\frac{2\times(1+2^2)}{2}=-4$；$\eta=1+\frac{1+2^2}{2}=\frac{7}{2}$.

$\therefore$ 曲率圆为：$(x+4)^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{125}{4}$

例2：求曲线：$\begin{cases}x=a(t\sin t+\cos t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$ 的渐屈线方程

$y'=\tan t$，$y''=\frac{1}{at\cos^3 t}$

设渐屈线坐标为(ξ,η)

$\eta=y+at\cos^3 t\cdot(1+\tan^2 t)=y+at\cos t=a\sin t$

$\xi=x-a\tan t(1+\tan^2 t)\cdot t\cos^3 t=a\cos t$

$\therefore$ 所求渐屈线方程是圆 $\xi^2+\eta^2=a^2$

摆线

例3：求曲线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 的渐屈线 $(a>0)$

解：$y'=\frac{\sin t}{1-\cos t}$ ，$y''=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$

设渐屈线上任一点为 (ξ,η)

$\xi=a(t-\sin t)+\frac{\sin t}{1-\cos t}\left[1+\frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right]\cdot a(1-\cos t)^2=a(t+\sin t)$

$\eta=a(1-\cos t)-\left[1+\frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right]a(1-\cos t)^2=a(\cos t-1)$

令 $t=\pi+\theta$ ，则 $\sin t=-\sin\theta$ ，$\cos t=-\cos\theta$

$\Rightarrow \begin{cases} \xi=a(\pi+\theta-\sin\theta) \\ \eta=a(-\cos\theta-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi-a\pi=a(\theta-\sin\theta) \\ \eta+2a=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ 原曲线的平移

※摆线的渐屈线还是渐屈线

第五章 不定积分

§5.1 原函数与不定积分

1. 原函数.

定义：若在区间 I 上有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数；比如：$\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，$\sin x+C$ 也是 $\cos x$ 的原函数.

若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则其原函数有无穷多个，$F(x)+C$（C是任意常数）都是 $f(x)$ 的原函数，且 $f(x)$ 的所有原函数都在 $F(x)+C$ 中.

定理：若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$（C为任意常数）是 $f(x)$ 的所有原函数的统一表达式

证：设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. $\varphi'(x)=f(x)$，又 $F'(x)=f(x)$

$\therefore \varphi'(x)=F'(x) \Rightarrow \varphi(x)=F(x)+C$.

2. 不定积分

定义2：若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，则称 $f(x)$ 在 I 上的所有原函数的统一表达式(的集合) $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 的不定积分. 记为 $F(x)+C=\int f(x)dx$ "$\int$" 为积分号. "$f(x)$" 为被积函数. "x" 积分变量 "$f(x)dx$" 为被积表达式 "C" 为积分常数.

3. 性质与简单计算

(1) $\left(\int f(x)dx\right)'=F'(x)=f(x)$　　$d\left(\int f(x)dx\right)=dF(x)=f(x)dx$

(2) $\int f'(x)dx=f(x)+C$　　$\int df(x)=f(x)+C$.

$\int f(x)=F(x)+C$.

(3) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

(4) $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

4. 原函数的存在性

(1) 连续函数一定有原函数.

(2) 含有第I类间断点的函数，没有原函数.

(3) ……第II类……，可能有原函数.

① $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

$F'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0. \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不∃

② $D(x)=\begin{cases} 1, & x\in Q \\ 0, & x\in Q^c \end{cases}$

5. 积分的基本公式

(1) $\int 0\,dx = C$ (2) $\int 1\,dx = x + C$ (3) $\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C.\ (\mu\neq -1)$

(4) $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$ (5) $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x + C$ (6) $\int e^x\,dx = e^x + C$

$(a^x)' = \ln a\cdot a^x$

$\to a^x = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'$

(7) $\int \sin\,dx = -\cos x + C$ (8) $\int \cos\,dx = \sin x + C$ (9) $\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

(10) $\int \csc^2 x\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$ (11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$

(12) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C'$

例1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geq 1 \\ x, & x<1 \end{cases}$，求 $\int f(x)\,dx$

解: $\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + C_1, & x\geq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_2, & x<1. \end{cases}$

且原函数连续 ∴ $\frac{1}{4}+C_1 = \frac{1}{2}+C_2$ ∴ $C_1 = \frac{1}{4}+C_2$

∴ $\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4} + C, & x\geq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C, & x<1 \end{cases}$

例2：$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

分析：$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= -\frac{1}{x} - \arctan x + C.$

例3：$\int(\sqrt{x}-1)(x+1)\,dx$

分析：$\int(\sqrt{x}-1)(x-1)\,dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-x+1\right)dx$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+x+C.$

例4：$\int \tan^2 x\,dx$

分析：$\boxed{1+\tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\ ;\ 1+\cot^2 x = \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}}$

$\int \tan^2 x\,dx = \int(\tan^2 x+1-1)\,dx$

$= \int(\sec^2 x-1)\,dx$

$= \tan x - x + C$

例5：$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

分析：$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx$

$= \int\left(\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}(\tan x + x) + C.$

积分法 $\begin{cases} \text{第一换元积分法} \\ \text{分部换元积分法} \\ \text{第二换元积分法} \end{cases}$

§5.5.2 第一换元积分法

定理：设 $F(u)$ 可导，且 $F'(u)=f(u)$，$u=g(x)$ 也可导，则 $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(g(x))\,dg(x) = F(g(x))+C$.

证：由复合函数求导，有 $[F(g(x))]' = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$

$\therefore \int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))+C$

$\because F'(u)=f(u)$ $\therefore \int f(u)\,du = F(u)+C$，令 $u=g(x)$

有 $\int f(g(x))\,dg(x) = F(g(x))+C$.

$\therefore \boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(g(x))\,dg(x)} = F(g(x))+C.$

第一换元积分公式.

例1: $\int \sin(3x+5)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+5)d(3x+5) = -\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C$.

※第一换元积分法也叫凑微分法

若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int f(ax+b)dx = ?$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

例2: $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int \ln^2 x \, d\ln x = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$

例3: $\int \frac{a^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \int a^{\arctan x} d\arctan x = \frac{a^{\arctan x}}{\ln a}+C$.

2. 显示第一换元积分形. 若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int f(\ln x)d\ln x = F(\ln x)+C$.

$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d\arcsin x = F(\arcsin x)+C$

计算: $\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{d(e^x+1)}{1+e^x} = \ln(e^x+1)+C$.

3. 四个积分基本公式

(13) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x|+C$

(14) $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x|+C$

(15) $\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} \xlongequal{t=\cos x} \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$

$= \ln|\csc x - \cot x|+C$

(16) $\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}dx = \ln\left|\csc(x+\frac{\pi}{2}) - \cot(x+\frac{\pi}{2})\right|+C = \ln|\sec x+\tan x|+C$

4. 常见的三角函数积分.

例1: $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

分: 原式 $= \int \sin^2 x \cos^2 x \, d\sin x$

$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d\sin x$

$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

※ $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$，若 m,n 中至少有一个是奇数时（不妨设 $m=2k+1$），则 $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x \, dx$

$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k d\sin x$

例2: $\int \sin^4 x dx$

分: 原式 $= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$= \int \frac{1}{4}(1-2\cos 2x + \cos^2 2x)dx$

$= \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x)dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx$

$= \frac{1}{4}(x-\sin 2x) + \frac{1}{8}(x+\frac{1}{4}\sin 4x)+C$.

例3: $\int \tan^3 x dx$

原式 $= \int \tan x(\sec^2 x - 1)dx = \int \tan x \, d\tan x - \int \tan x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$.

※ $\int \tan^n x$ 或 $\int \cot^n dx \ (n \geq 2)$，利用 $\begin{cases} \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \\ \cot^2 x = \csc^2 x - 1 \end{cases}$；$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} dx$

例4：$\int \frac{1}{\sin x\cos^2 x}dx$

原式 $=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}dx$

$=\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\int \frac{1}{\sin x}dx$

$=-\int \frac{1}{\cos^2 x}d\cos x+\ln|\csc x-\cot x|+C$

$=\frac{1}{\cos x}+\ln|\csc x-\cot x|+C$

※ $\int \frac{1}{\sin^m x\cos^n x}dx$，令分子 $1=\sin^2 x+\cos^2 x$

例5：$\int \frac{1}{1+3\sin^2 x}dx$

原式 $=\int \frac{1}{4\sin^2 x+\cos^2 x}dx$

$=\int \frac{\sec^2 x}{(2\tan x)^2+1}dx$

$=\int \frac{1}{(2\tan x)^2+1}d\tan x$

$=\frac{1}{2}\arctan(2\tan x)+C.$

$\int \frac{1}{a+b\sin^2 x}dx$ 或 $\int \frac{dx}{a+b\cos^2 x}$，将 $a=a(\sin^2 x+\cos^2 x)$ 代入

5. 第一换元的技巧.

例1：$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$　将根号里的看成 $g(x)$

$=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

$=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}}-\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$

例2：$\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$

$=\int \frac{dx}{(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)}$.

$=\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x}$

$=\int \frac{dx}{(\sin^2 x-\cos^2 x)^2+\sin^2 x\cos^2 x}$

$=\int \frac{dx}{\cos^2 2x+\frac{1}{4}\sin^2 2x}$

$=\int \frac{\sec^2 2x}{1+\frac{1}{4}\tan^2 2x}dx$

$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\frac{1}{2}\tan 2x)^2}d\tan 2x$

$=\arctan(\frac{1}{2}\tan 2x)+C$.

例3：$\int \frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx\ (a,b\neq 0)$.

原式 $=\int \frac{a\cos x-b\sin x-\frac{a}{b}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}dx$

$=\frac{a^2+b^2}{-b}\left[\int \frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}-\frac{a}{b}x+C\right]$

$=-\frac{a^2+b^2}{b}\left(\ln|a\sin x+b\cos x|-\frac{a}{b}x\right)+C$

例4：$\int \frac{1}{\sin x+\tan x}dx=t$

原式 $=\int \frac{\cos x}{\sin x\cos x+\sin x}dx$

$=\int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

$=\int \frac{\cos x+1-1}{\sin x(1+\cos x)}dx$

$=\int\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\right)dx$

对 $\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}dx$ 有：$\int \frac{1-\cos x+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)}+t$

∴ 原式 $=\int \frac{1}{\sin x}dx-\int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx-t$

$=\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\sin x}dx-\int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\sin x}dx-\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\sin x}dx+\int \frac{d(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}\right)$

例4 [法2]

原式 $=\int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

$=\int \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$=\int \frac{1}{2\sin x}dx-\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos^3\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$.

$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x}dx+\int \frac{d\cos\frac{x}{2}}{2\cos^3\frac{x}{2}}$

$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x}dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^{-2}\frac{x}{2}}{-2}$

$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$.

$=\frac{1}{2}\left(\ln|\csc x-\cot x|-\frac{1}{1+\cos x}\right)+C$.

例5：$\int \frac{x\cos x-\sin x}{(x+\sin x)^2}dx$

原式$=\int \frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx$

$=\int \frac{d\frac{\sin x}{x}}{\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^2}$

$=\int \frac{d(\frac{\sin x}{x}+1)}{\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^2}$

$=-\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+1}+C$

§.5.3 分部积分法

推导：$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\therefore \int [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx=f(x)g(x)+C$

$\Rightarrow \underline{\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx} \rightarrow$ 分部积分公式.

或 $\int g(x)df(x)=f(x)g(x)-\int f(x)dg(x)$

注：在此公式中，将被积表达式拆成两个因子 $g(x)$ 与 $df(x)$ 的乘积，要使 $f(x)$ 的原函数"好"求，$g(x)$ 的导数 $g'(x)$ 相对简单

1. 典型分部积分

例1：$\int \ln^2 x\, dx$

原式$=x\ln^2 x-\int x\, d\ln^2 x$

$=x\ln^2 x-\int 2\ln x\, dx$

$=x\ln^2 x-2[x\ln x-\int x\, d\ln x]$

$=x\ln^2 x-2[x\ln x-\int 1 dx]$

$=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$

$\int \ln^n x\, dx=x\ln^n x-\int x\, d\ln^n x=x\ln^n x-\int n\ln^{n-1}x=\cdots\cdots$

例2：$\int \arctan x\, dx$

原式$=x\arctan x-\int x\, d\arctan x$

$=x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}dx$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx^2$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

(2) $\int \arcsin x\, dx$

$\int \arccos x\, dx$

$\int \operatorname{arccot} x\, dx$

$\int \operatorname{arccot} x\, dx$

Dete: Page:

(3) $\int$ 正整数幂函数 × 反三角函数 dx

例3: $\int x^2 \arcsin x dx$

原式 $= \frac{1}{3}\int \arcsin x \, dx^3$

$= \frac{1}{3}x^3\arcsin x - \frac{1}{3}\int x^3 d\arcsin x$

$= \frac{1}{3}x^3\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= \frac{1}{3}x^3\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{-x^2}{2\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$

$= \frac{1}{3}x^3\arcsin x - \frac{1}{6}\int \frac{1-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$

$= \frac{1}{3}x^3\arcsin x - \frac{1}{6}\int \sqrt{1-x^2}\, d(1-x^2) - \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$

$= \frac{1}{3}x^3\arcsin x - \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + C$

(4) $\int$ 正整数幂函数 × 对数函数 dx

例4:

$\int x^2 \ln x \, dx$

原式 $= \frac{1}{3}\int \ln x \, dx^3$

$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^3 d\ln x$

$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$

$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

(6) $\int$ 正整数幂函数 × 正(余)弦函数 dx

例6: $\int x\cos x \, dx$

原式 $= \int x \, d\sin x$

$= x\sin x - \int \sin x \, dx$

$= x\sin x + \cos x$

(5) $\int$ 指数函数 × 正(余)弦函数 dx

例5: $\int e^x \sin x \, dx$

原式 $= \int \sin x \, de^x$

$= e^x\sin x - \int e^x d\sin x$

$= e^x\sin x - \int e^x\cos x \, dx$

$= e^x\sin x - \int \cos x \, de^x$

$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x \, dx$

$\therefore 2\int e^x\sin x \, dx = e^x\sin x - e^x\cos x$

则 $\int e^x\sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$

例7:

$\int xe^x dx$

原式 $=\int x\, de^x$

$= xe^x - \int e^x dx$

$= xe^x - e^x$

$= (x-1)e^x + C$

(7) $\int$ 正整数幂函数 $\times$ 指数函数 dx

例8: $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

原式 $\overset{法1°}{=} \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx$

$= \int \sec x \tan^2 x\, dx + \int \sec x\, dx$

$= \int \tan x\, d\sec x + \int \sec x\, dx$

$= \tan x \sec x - \int \sec x\, d\tan x + \int \sec x\, dx$

$= \tan x \sec x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}\left(\tan x \sec x + \int \frac{1}{\cos x} dx\right) + C$

$\rightarrow$ 法2° $= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} dx$

$= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x}$

$= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\therefore \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\left(\ln|\sec x + \tan x| + \sec x \tan x\right) + C$.

(8) $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ 或 $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ $(n \geq 3)$ 用分部积分法变成 $\int \frac{1}{\cos^{n-2} x} d\tan x$ 或 $\int \frac{-1}{\sin^{n-2} x} d\cot x$，再变成方程移项求升.

若 n 为偶数 $2m+2$:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2m+2} x} = \int \frac{1}{\cos^{2m} x} d\tan x = \int (1+\tan^2 x)^m d\tan x$$

若 n 为一般自然数 (≥ 3).

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} d\tan x$$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - \int \tan x\, d\frac{1}{\cos^{n-2} x}$$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - \int \tan x \cdot (n-2) \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} dx$$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2)\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x} dx$$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2)\int \frac{1}{\cos^n x} dx + (n-2)\int \frac{1}{\cos^{n-2} x} dx$$

$$\therefore I_n = \frac{\tan x \sec^{n-2} x + (n-2) I_{n-2}}{n-1}$$ [递推]

例9. $\int \frac{1}{(a^2+x^2)} dx$

$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} d\frac{x}{a}$

$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

(9) $I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n} dx$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} - \int x\, d\frac{1}{(a^2+x^2)^n}$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} - \int x (a^2+x^2)^{-n-1} (-n) \cdot (2x) dx$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}$$

$$\therefore I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^n} + (2n-1) I_n\right].$$

2. 一般分部积分法

例1: $\int [f''(x)g(x) - f(x)g''(x)]dx$.

解: 原式 $= \int g(x)df'(x) - \int f(x)dg'(x)$.

$= g(x)f'(x) - \int f'(x)dg(x) - f(x)g'(x) + \int g'(x)df(x)$

$= g(x)f'(x) - f(x)g'(x) + \int g'(x)f'(x)dx - \int f'(x)g'(x)dx$

$= g(x)f'(x) - f(x)g'(x) + C$.

※含有抽象函数的积分往往用分部积分法.

例2: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 在 (a,b) 内 $f(x)\neq 0$, 且 $f'(a)=f(a)$, $f'(b)=f(b)$.
证明 $\exists \xi\in(a,b)$ 使 $\frac{f''(\xi)}{f(\xi)}=1$

解: 设 $F'(x) = g(x)[f(x) - f(x)]$

则 $\int F'(x)dx = \int g(x)[f''(x) - f(x)]dx$

$= \int g(x)df'(x) - \int g(x)f(x)dx$

$= f'(x)g(x) - \int f'(x)g'(x)dx - \int f(x)g(x)dx$

$= f'(x)g(x) - \int g'(x)df(x) - \int f(x)g(x)dx$

$= f'(x)g(x) - g'(x)f(x) + \int f(x)g''(x)dx - \int f(x)g(x)dx$.

$= f'(x)g(x) - g'(x)f(x) + \int f(x)[g''(x) - g(x)]dx$

$\therefore$ 令 $g''(x) = g(x)$, 即 $g(x) = e^x$ 或 e^{-x}; 不妨取 $g(x) = e^x$.

则 $F(x) = e^x[f'(x) - f(x)]$

又 $\because f'(a) - f(a) = 0$; $f'(b) - f(b) = 0$

$e^x[f'(x) - f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上连续且可导

$\therefore$ 由罗尔定理得: $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即 $\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} = 1$.

※(2) 不同类函数乘积的积分往往用分部积分法.

例1: $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$ $d\sqrt{1-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解: 原式 $= \int \arcsin x\, d\sqrt{1-x^2}$

$= \sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int\sqrt{1-x^2}\,d\arcsin x$

$= \sqrt{1-x^2}\arcsin x - x + C$

Dete: Page:

例2: $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} \cancel{dx} \arctan x\, dx$

分析: 原式 $= \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} \arctan x\, dx$

$= \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}) \arctan x\, dx$

$= \int \frac{1}{x^2} \arctan x\, dx - \int \frac{1}{1+x^2} \arctan x dx$

$= -\int \arctan x\, d\frac{1}{x} - \int \arctan x\, d\arctan x$

$= \int \frac{1}{x} d\arctan x - \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$

$= \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx - \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$

$\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx$

$= \int (\frac{-x}{1+x^2} + \frac{1}{x}) dx$ $\quad d\ln(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$

$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

$\therefore$ 原式 $= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$.

例3: $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx$

分析: 原式 $= \int \ln(1+x^2)\, df(x)$

$f(x) = \int x \arctan x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C = \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + C$.

原式 $= \int \ln(1+x^2)\, df(x)$

$= \ln(1+x^2) f(x) - \int f(x)\, d\ln(1+x^2)$

$= \ln(1+x^2) f(x) - \int \frac{f(x)\cdot 2x}{1+x^2} dx$

$= \ln(1+x^2) f(x) - \int (x\arctan x - 1 + \frac{1}{1+x^2}) dx$

$= \ln(1+x^2) f(x) - f(x) + x - \arctan x + C$

$= [\ln(1+x^2) - 1](\frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x) + x - \arctan x + C$.

例4: 设$g(x)$与$f(x)$互为反函数, 且$F'(x) = f(x)$, 求$\int g(x) dx$

分析: 设$y = g(x)$, 则$x = f(y)$.

$\int g(x) dx = x g(x) - \int f(y) dy$

$= x g(x) - F(g(x)) + C$.

3. 不存在形式积分也往往用分部积分法

例如: $\frac{\sin x}{x}$, e^{x^2}, $\sqrt{1+x^3}$, $e^x \tan x$, $\frac{e^x}{\cos x}$, ……

例1: $\int (\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln|x|) dx$

Dete: Page:

解：原式 $=\int \frac{\sin x}{x}dx+\int \ln|x| d\sin x$

$=\int \frac{\sin x}{x}dx+\ln|x|\sin x-\int \frac{\sin x}{x}dx$

$=\sin x\ln|x|+C$.

例2：$\int e^{2x}(\sec^2 x+2\tan x)dx$

解：原式 $=\int e^{2x}d\tan x+\int e^{2x}\cdot 2\tan x dx$

$=e^{2x}\tan x-2\int \tan x\cdot e^{2x}dx+2\int e^{x}\tan x dx$

$=e^{2x}\tan x+C$.

5.5.4 第二换元积分法

方法：$\int f(x)dx \overset{\text{令}x=g(t)}{=\!=\!=} \int f(g(t))g'(t)dt=G(t)+C=G(g^{-1}(x))+C$

要求：$g(t)$ 可导且单调；

称此等式为第二换元积分公式.

证明：$[G(g^{-1}(x))]'_x=G'(t)\cdot t'_x$

$=f(g(t))g'(t)\cdot\frac{1}{x'_t}$

$=f(g(t))g'(t)\cdot\frac{1}{g'(t)}$

$=f(g(t))$

$=f(x)$.

1. 典型的第二换元积分

(1) $\int f\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$.

令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ （无理→有理）

例1：求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

$\overset{x=t^6}{=\!=\!=} \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt$

$=6\int \frac{t^3}{t+1}dt$

$=6\int \left[\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right]dt$

$=6\int (t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt$

$=6(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln(t+1))+C$

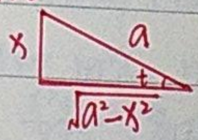
$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$.

(2) $\int f(\sqrt{Ax^2+Bx+C})\,dx$

将 Ax^2+Bx+C 配方： $A(x+\frac{B}{2A})^2+C-\frac{B^2}{4A}$.

① $\int f(\sqrt{a^2-x^2})\,dx$ ，令 $x=\sin t$

令 $x=a\sin t$



[变换图]

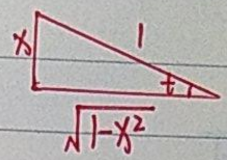
例2: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

$\underline{\underline{x=\sin t}}$ $\int\cos^2 t\,dt$

$=\int\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$

$=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)+C$

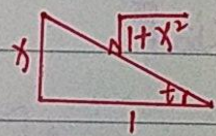
$=\frac{1}{2}$



② $\int f(\sqrt{a^2+x^2})\,dx$ ，令 $x=a\tan t$

例3: $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

$\underline{\underline{x=\tan t}}$ $\int\frac{\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\,d\tan t$



$=\int\tan^2 t\cos t\,dt$

$=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt$

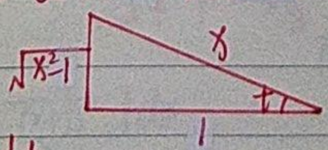
$=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,dt$

$=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+C.$

$=\ln|\sqrt{1+x^2}+x|-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

③ $\int f(\sqrt{x^2-a^2})\,dx$ ，令 $x=a\sec t$ 或 $a\csc t$

例4: $\int\frac{1}{(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\,dx$



$\underline{\underline{x=\sec t}}$ $\int\frac{\sec t\cdot\tan t}{(\frac{2}{\cos^2 t}-1)\tan t}\,dt$

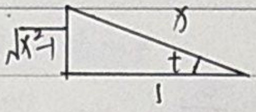
$=\int\frac{\cos t}{2-\cos^2 t}\,dt$

$=\int\frac{1}{1+\sin^2 t}\,d\sin t$

$=\arctan(\sin t)+C=\arctan\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

Dete: Page:

例5: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$



$\overset{x=\sec t}{=\!=\!=} \int \cot t\, d\sec t$

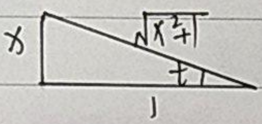
$= \int \cot t \cdot \sec t \cdot \tan t\, dt$

$= \int \sec t\, dt$

$= \ln|\sec t + \tan t| + C$

$= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$



$\overset{x=\tan t}{=\!=\!=} \int \frac{1}{\cos t}dt$

$= \ln|\sec t + \tan t| + C$

$= \ln|\sqrt{x^2+1} + x| + C$

第17个基本公式:

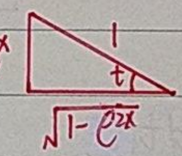
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx$

$= \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

2. 第二换元的思路 —— 去掉复杂运算.

例1: $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$

令 $t = \arcsin e^x$, 则 $\sin t = e^x$, $x = \ln\sin t$.



$\therefore$ 原式 $= \int \frac{t}{\sin t} d\ln\sin t$

$= \int \frac{t\cos t}{\sin^2 t}dt$

$= \int t\, d(-\csc t)$

$= -t\csc t + \int \csc t\, dt$

$= -t\csc t + \ln|\csc t - \cot t| + C$

$= \frac{-\arcsin e^x}{e^x} + \ln\left|\frac{1}{e^x} - \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}\right| + C.$

例2: $\int \frac{dx}{(2x+x^4)\sqrt{1+x^3}}$

$\overset{t=\sqrt{1+x^3}}{=\!=\!=} \int \frac{2}{3(t^2+1)(t^2-1)}dt$

$= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2+1}\right)dt$

$= \frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) - \frac{1}{t^2+1}\right]dt = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{3}\arctan t + C = \cdots\cdots$

3. 有理函数的积分.

(1) 有理函数及其分类

有理函数：自变量经过有限次有理运算（四则运算）组成的函数，记为 $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$，其中 $P_m(x)$，$Q_n(x)$ 分别是关于 x 的 m 次、n 次多项式；若 $m\geq(<)n$，称 $R(x)$ 为假(真)分式. 如：$\frac{x}{x^2+1}$ 为真分式；$\frac{x^3+1}{x+2}$、多项式都是假分式.

(2) 有理函数的分解.

定理1：假分式＝真分式＋多项式.

真分式：$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

$$Q_n(x)=(x+a_1)^{k_1}\cdots(x+a_{k_s})^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\cdots(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}$$

定理2：若多项式 $Q_n(x)$ 在实数范围内的分解式为：$(x+a_1)^{k_1}\cdots(x+a_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}$，其中 $p_i^2-4q_i<0$，则真分式 $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x+a_1)^{k_1}}+\frac{A_2}{(x+a_1)^{k_1-1}}+\cdots+\frac{A_{k_1}}{(x+a_1)}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)}$

(3) 最简分式积分.

① $\int\frac{A}{(x+a)^n}dx$

$$=\begin{cases}A\ln|x+a|+C, & n=1\\ \frac{A}{-(n-1)(x+a)^{n-1}}+C, & n\geq2\end{cases}$$

② $\int\frac{Bt+N}{(t^2+a^2)^n}dt$

$$I_1=\int\frac{Bt+N}{t^2+a^2}dt=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{N}{a}\arctan\frac{t}{a}+C.$$

$$I_n=\frac{B}{2}\cdot\frac{(t^2+a^2)^{-n+1}}{-n+1}+\int\frac{N}{(t^2+a^2)^n}dt$$

注：有理函数的原函数是初等函数.

例1：$\int\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

解：原式 $=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$

$$=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2(x+1)}+C$$

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$x=A(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2$$

$$=(B+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(B+C+2D)x+(A+B+D)$$

$$\therefore\begin{cases}B+C=0\\A+B+2C+D=0\\B+C+2D=1\\A+B+D=0\end{cases}\quad 解得：\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=0\\C=0\\D=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Dete:　　Page:

例2: $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

分析: 原式 $=\int \frac{x^4+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$

$=\int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$

$=\int \frac{1}{x^2+1}dx+\int \frac{x^2}{x^6+1}dx$

$=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3+C$.

例3: $\int \frac{dx}{x^4+1}$

分析: 原式 $=\int \frac{\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$=\frac{1}{2}\int \frac{(1+\frac{1}{x^2})-(1-\frac{1}{x^2})}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$=\frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{x^2+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{x^2+\frac{1}{x^2}}$

$=\frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln(x+\frac{1}{x}-2)-\ln(x+\frac{1}{x}+2)\right]+C$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}+C.$

$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2$

$=(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$

[太复杂]

$\frac{1}{u^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}}-\frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)$

4. 三角函数有理式的积分.

sinx、cosx经过有限次的有理运算得到的表达式，称之为三角函数有理式. 记为 $R(\sin x,\cos x)$

万能变换: 设 $\underbrace{t=\tan\frac{x}{2}}_{x=2\arctan t}$，则 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}(1-\tan^2\frac{x}{2})=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$ —— t的有理函数积分

例4: $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

分析: 原式 $=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$

$=\int \frac{t^2+2t+1}{2t}dt$

$=\frac{1}{2}\int(t+\frac{1}{t}+2)dt$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}t^2+\ln|t|+2t)+C$

$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+C.$

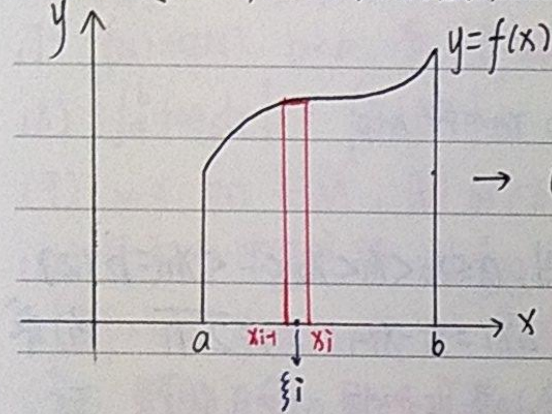
Dete: Page:

第六章 定积分

§.6.1 定积分的概念与性质.

1. 典型问题

问题1：平面图形的面积



→ (曲边梯形)

$$S:\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$$

方法：(1) 将区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个小区间，$[x_{i-1},x_i]$，$i=\overline{1,n}$

(2) $f(\xi_i)\Delta x_i$ ，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

(4) $\lambda=\max\{\Delta x_i\}$，$1\le i\le n$；$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to S.$

则 $n\to\infty$ (反之，当 $n\to\infty$ 时，λ 不定 $\to 0$)

Dete: Page:

问题2.变速直线运动的路程.

方法：(1) 分割：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$

(2) 作乘积：$v(\xi_i)\Delta t_i$ ，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$ ，$i=\overline{1,n}$

(3) 求和 ：$\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i\approx S$

(4) 取极限：$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}$，当$\lambda\to 0$时，$\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i\to S$

注意：$\lambda\to 0 \Rightarrow n\to\infty$ ；$n\to\infty$ ~~推~~ $\lambda\to 0$.

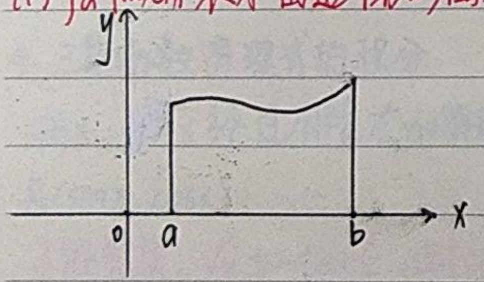
2. 积分定义

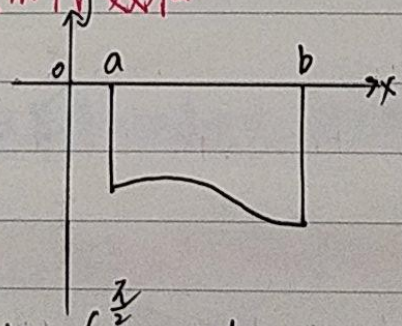
定义：设$f(x)$在$[a,b]$上有定义 (1) 任取$[a,b]$的一个分割：$a\le x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ (2) 任取一个点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=\overline{1,n}$ (3) 求和：$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ (4) 若无论$[a,b]$的分割如何，ξ_i的选取如何，和式极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 总是存在且相等，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，则称此极限为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分，也称$f(x)$在$[a,b]$上可积，记为$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx$.

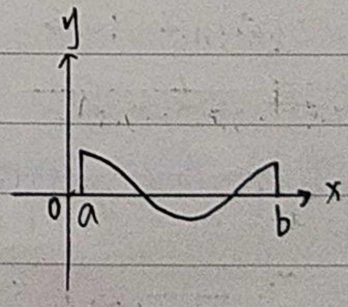
注：$[a,b]$—积分区间． "$f(x)\,dx$"—被积表达式． "$f(x)$"—被积函数． "dx"—积分变量x微积分(点x的长度微元). 此处的极限与初等极限不同

3. 定积分的意义.

(1) $\int_a^b f(x)dx$ 表示曲边梯形面积的代数和







$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=0$ ； $\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

(2) $\int_a^b f(x)dx$ 表示变速直线运动($f(x)$—速度)在时间段$[a,b]$所走路程的代数和.

(3) $\int_a^b f(x)dx$ 表示(力的大小$f(x)$，方向指向x轴正方向)将质点从a到b力所做的功.

4. 定积分的性质

(1) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

(2) $\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx$ (线性性质)

(3) $\int_a^a f(x)dx=0$.

(4) $\int_a^b 1dx = b-a$

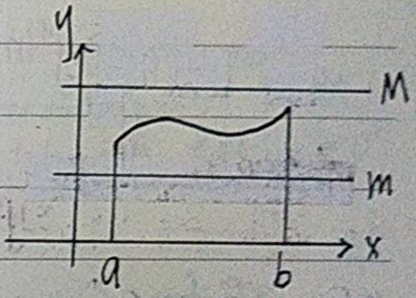
(5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (有向性)

(6) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (C不必在[a,b]内).

(7) $f(x)\le g(x)$, $a<b$, 有 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

(8) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b|f(x)|dx$ ($a<b$).

(9) $m\le f(x)\le M$, 则 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$



(10) 定积分中值定理. 设 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使

$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ —— 积分中值公式.

证: ∵ $f(x)\in C[a,b]$ ∴ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值M, 最小值m, 即 $m\le f(x)\le M$

$\Rightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$ 由介值原理 $\exists\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

§6.2 定积分定理.

1. 定积分存在的必要条件.

定理1: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

注: ①有界不一定可积[狄]. ②无界必不可积

2. 定积分存在的充分条件.

定理2: 若 $f(x)$ 满足: (1) $f(x)\in C[a,b]$ (2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点

(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调; 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

3. 微积分的基本定理.

(1) 变限积分函数.

设 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 称 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in[a,b]$ ($\psi(x)=\int_x^b f(t)dt, x\in[a,b]$)

为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的变上限(下限)积分函数.

(2) 微积分基本定理第一部分 —— 微分部分.

定理3: ①若 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导且 $\varphi'(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$

证明: $\varphi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[\varphi(x+\Delta\varphi)-\varphi(x)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right)$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot f(x)\cdot\Delta x=f(x)$.

②若 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)$ 可导, 则 $\left(\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt\right)'=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

Dete:　　Page:

③变限积分函数导数公式：$\varphi'(x)$，$\psi'(x)$都存在，$f(x)$连续，$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right)' = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) - f(\psi(x))\cdot\psi'(x)$

例1：设 $y^y + e^x = x + \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt$，求 y'.

分析：$y^y(y\ln y)' + e^x = 1 + \frac{3\sin x^3 - 2\sin x^2}{x}$

$\therefore y'y^y(\ln y + 1) + e^x = 1 + \frac{3\sin x^3 - 2\sin x^2}{x}$

$\therefore y' = \dfrac{1 + \frac{3\sin x^3 - 2\sin x^2}{x}}{y^y(\ln y + 1)}$

例2：设 $f(x) \in C[0,1]$，证明 $\exists \xi \in (0,1)$，使 $\xi f(\xi) = \int_\xi^1 f(x)dx$.

证明：$\int [xf(x) + \int_1^x f(t)dt]dx$

$= \int xf(x)dx + x\int_1^x f(t)dt - \int xd(\int_1^x f(t)dt)$

$= \int xf(x)dx + x\int_1^x f(t)dt - \int x\cdot f(x)dx$.

$= x\int_1^x f(t)dt + C$

取 $F(x) = x\int_1^x f(t)dt$.　　又 $\because F(0) = F(1) = 0$

$\therefore$由罗尔定理得，$\exists \xi \in (0,1)$，使 $F'(\xi) = 0$

即 $\xi f(\xi) = \int_\xi^1 f(x)dx$.

(4) 微积分基本定理第二部分——积分部分

[牛顿-莱布尼茨公式]

定理4. 设 $f(x) \in C[a,b]$，$F'(x) = f(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

证明：$(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$　　$\therefore \int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

令 $x = a$，则 $C = -F(a)$；令 $x = b$，有 $\int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a)$

例1：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则（ D ）.

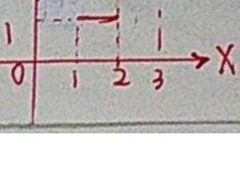
A. $\exists \xi \in [a,b]$，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$　　可积 $\not\Longrightarrow$ 连续

B. $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 可导，且 $\varphi'(x) = f(x)$，$x \in [a,b]$.

C. $(\int_a^b f(x)dx)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx$　　(若有原函数)

D. $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续　　导数可积 $\not\Longrightarrow$ 原函数连续

(导数连续 $\Longrightarrow$ 原函数可导).

如：

对A：$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 + \int_2^3 = 3$；不存在$\xi$使 $2f(\xi) = 3$.

对D：$\varphi(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \le x \le 2 \\ 1 + (x-2)2, & 2 < x \le 3. \end{cases}$

对B：$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 < x \le 3 \end{cases}$，$x \in [1,2) \cup (2,3]$

对C：$(\int_0^\pi \sin x dx)^2 = 4$，$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$；$\int_0^1 x dx^2 = \frac{1}{4}$，$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

证明D：即证 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi=0$

即 $\lim_{\Delta x\to 0}\left(\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt\right)$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$

∵ f(x)可积，∴ ∃M>0使 $|f(x)|<M$，$x\in[a,b]$.

$0\le\underbrace{\left|\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx\right|\le M\cdot|\Delta x|}\to 0.$

↳证明：当 $\Delta x>0$ 时：$\left|\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx\right|\le\int_x^{x+\Delta x}|f(x)|dx\le\int_x^{x+\Delta x}Mdx=M\cdot\Delta x\to 0$

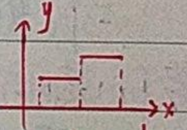
当 $\Delta x<0$ 时：$\left|\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx\right|\le\int_{x+\Delta x}^{x}|f(x)|dx\le M(-\Delta x)\to 0$ $\Big\}\Rightarrow\left|\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx\right|\le M\cdot|\Delta x|\to 0^+$

注：① $f(x)\in C[a,b]$，则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导

② $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt\in C[a,b]$

例2. 正确的是（C）

A. 若f(x)在[a,b]上可积，则f(x)在[a,b]上有原函数. ×



B. …… 有原函数，…… 可积 × $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

C. …… 可积，…… 有界

D. …… 有界，…… 可积. × 狄

牛顿-莱布尼茨公式：$\int_a^b f(t)dt=F(x)\Big|_a^b$ 使用条件 $f(x)\in C[a,b]$.

例1：$\int_{-1}^{1}x^5dx=\frac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1}=0.$

例2：$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx=4(\sqrt{2}-1)$

2. 定积分的第一换元与分部积分公式.

(1) 第一换元公式：$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))\Big|_a^b$

例3：$\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{d\frac{1}{2}x^2}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.$

(2) 分部积分公式：$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

→ $\int_a^b[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx=f(x)g(x)\Big|_a^b$

→ $\int_a^b g(x)df(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)dg(x)$ —— 定积分的分部积分公式.

例4：$\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=-\int_0^{\pi}e^x d\sin x+e^x\sin x\Big|_0^{\pi}=-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=-\left(e^x\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x d\cos x\right)$

$=-(-e^{\pi}-1)+\int_0^{\pi}e^x(-\sin x)dx$ ∴ $\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=-\frac{1}{2}(-e^{\pi}-1)$

例5：设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$

解：原式 $=\int_0^1 f(x)d\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\sin x^2\frac{dx^2}{2}$

$=\frac{1}{2}(\cos x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$

Dete: Page:

定积分的第二换元公式

定理1（第二换元公式）设 $f(x)\in C[a,b]$，令 $x=g(t)$ 满足：(i) $g(\alpha)=a$，$g(\beta)=b$ (ii) $g'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上连续 (iii) 当 $t\in[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）时，$g(t)\leq[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

结论1：设 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数：

当 $f(x)$ 是奇(偶)函数时，有 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$ $\left(\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx\right)$.

证：$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$.

$=\int_a^0 f(-t)\,d(-t)+\int_0^a f(x)dx$

$=\int_0^a f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx$.

结论2：若 $f(x)$ 是以T为周期的连续函数，则 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

证：$\int_a^{a+T}=\int_a^0+\int_0^T+\int_T^{a+T}$

$\int_a^0 f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^a f(t+T)\,d(t+T)=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(t)dt=0$.

例1：$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos^2x}{1+e^x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^x}dx$.

$\underline{\underline{令x=-t}}\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos^2t}{1+e^{-t}}d(-t)+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^x}dx$ 拆限

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^x}dx$.

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2x}{2}dx$ 换元

$=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

例2：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln^{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\sin(\frac{\pi}{2}-x)\,d(\frac{\pi}{2}-x)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{1}{2}\sin2x\,dx$.

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin2x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln2\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln2\,dx$

解方程可得：原式 $=-\frac{\pi}{2}\ln2$

例3：正确的是 D 。已知 f(x) 连续且 $F'(x)=f(x)$.

A 当 f(x) 是偶函数，则 F(x) 是奇函数

B. …… 奇 …… 偶

C. …… 周期 …… 周期 $f(x)=1+\cos x \to F(x)=x+\sin x$

D. …… 无界 …… 无界 $f(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} \to F(x)=\sin\frac{1}{x}$

证 B：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$

$$F(-x)=\int_a^{-x} f(t)dt+C=\int_a^x+\int_x^{-x}+C=F(x)+\underbrace{\int_{-x}^{x} f(t)dt}_{=0}=F(x)$$

6.4 广义积分

1. 无穷区间上的广义积分

定义：设 f(x) 在 $[a,+\infty)$ 上的任何有限子区间上都可积，称极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ 为 f(x) 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分，若此极限存在，则称此广义积分收敛（或存在）；否则称此广义积分发散（或不存在）.

记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt=\int_a^{+\infty} f(x)dx$ （$\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt=\int_{-\infty}^b f(x)dx$）.

若 $F'(x)=f(x)$ 且 f(x) 连续，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x)-F(a)]=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$
$=F(x)\Big|_a^{+\infty}$

（同理：$\int_{-\infty}^b f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^b$）

例1：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\arctan x\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{\pi}{2}$

例2：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ （偶函数）

$=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\pi$.

注：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_0^{+\infty}f(x)dx$

有一个不存在，等式左边就一定不存在（与函数极限不同）.

例3：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx$ $(0<\beta<1)$

$=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx$

$=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx+\int_1^0\frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x^\beta})}d\frac{1}{x}$

$=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx+\int_0^1\frac{x^\beta}{(1+x^2)(1+x^\beta)}dx$

$=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

Dete: Page:

2. 瑕积分.

定义2：设$f(x)$在$[a,b)$的任何子区间上可积，$f(x)$在b点的左邻域内无界，称$\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$为瑕积分. 称$x=b$为瑕点. （$(a,b]$可积同理）.

若此极限存在，则称此积分收敛或存在，否则称其发散或不存在.

记为$\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$

若$F'(x)=f(x)$且$f(x)$连续.

则$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^{b^-}$ （同理可得$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_{a^+}^b$）.

例1：$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 在$x=1$处无界

解：原式$=\arcsin x\Big|_0^{1^-}=\frac{\pi}{2}$.

例2：$\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$ 在$x=0$处无界→从瑕点分区间

解：原式$=\int_{-1}^0\frac{1}{x}dx+\int_0^1\frac{1}{x}dx$

$\ln 0$不存在 ∴该积分发散(不存在)

注：瑕点$c\in(a,b)$，$\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$ 当右端两积分都存在时，左端积分才存在

3. 定积分求极限

公式：$\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]}{n}$

利用此公式求"无穷和"、"无穷积"的数列极限

例1：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}}{n}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$=\ln 2$

例2：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})}{n}}$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})}{n}}$

$=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}$

$=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$

例3: 设$f(x)\in C[0,1]$且$f(x)>0$

证明: $\ln\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 \ln f(x)dx$

解: $\ln\int_0^1 f(x)dx = \ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})}{n}$

$\int_0^1 \ln f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f(\frac{1}{n})+\ln f(\frac{2}{n})+\cdots+\ln f(\frac{n}{n})}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}$

由均值不等式得: $\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})}{n} \geq \sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}$.

由极限保序性: $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})}{n} \geq \lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}$.

∴原不等式成立.

5、定积分的应用.

1. 微元法

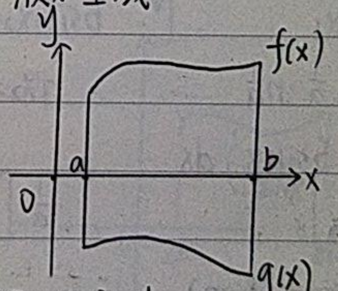
设S满足: ①S具有可加性 ②∃闭区间$[a,b]$与之对应 ③$\forall x\in[a,b]$, 点区间$[x,x+dx]$所对应的S的分量(微元) ds等于$f(x)$在点区间$[x,x+d]$上的值$f(x)$乘以点区间长度dx.
即$ds=f(x)dx$, 则$S=\int_a^b f(x)dx$.

2. 求平面图的面积.

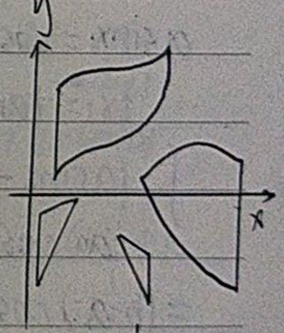
(1) 函数曲线所围图形的面积.

(2) ①x-型域S的面积

一般x-型域



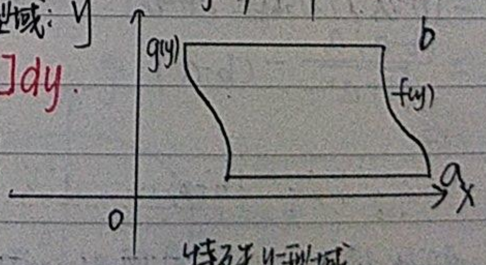
特殊x-型域



$S:\begin{cases} a\leq x\leq b \\ g(x)\leq y\leq f(x)\end{cases}$ —x-型域 $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$.

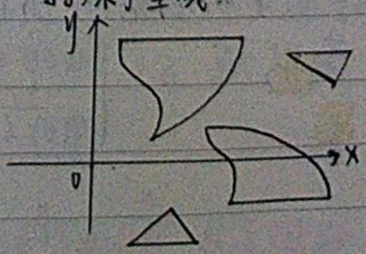
②y-型域S的面积.

一般y-型域

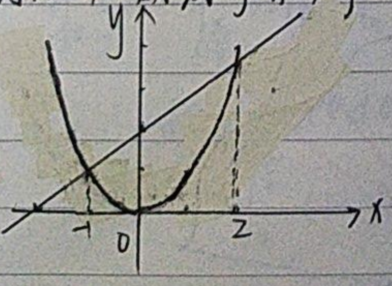


$S:\begin{cases} a\leq y\leq b \\ g(y)\leq x\leq f(y)\end{cases}$ —y-型域 $S=\int_a^b[f(y)-g(y)]dy$.

特殊y-型域



例1: 求曲线$y=x^2$, $y=x+2$所围图形的面积.

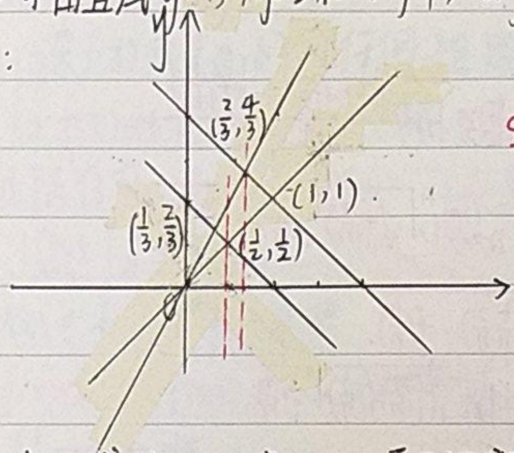


$S=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx$
$=\frac{9}{2}$.

Dete:　　Page:

例2：求由直线 $y=x$，$y=2x$，$x+y=1$，$x+y=2$ 所围图形的面积。

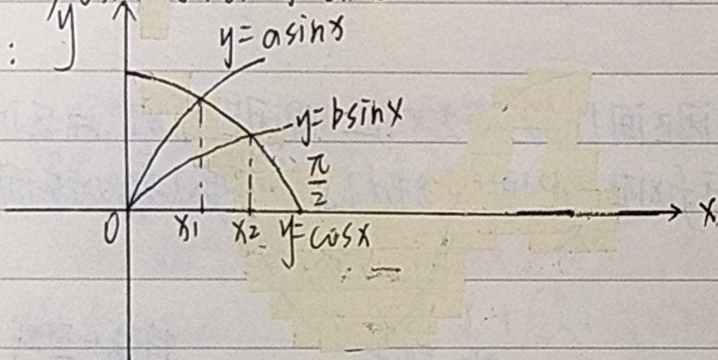
解：



$$S=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}[2x-(-x+1)]dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}(2x-x)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(2-x-x)dx$$
$$=\frac{1}{4}$$

例3：由曲线 $y=\cos x$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 间部分与两坐标轴所围图形被曲线 $y=a\sin x$，$y=b\sin x$ $(a>b>0)$ 分成三等份，求 a，b。

解：



$$S_{总}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1.$$

$a\sin x_1=\cos x_1$

$\tan x_1=\frac{1}{a}$

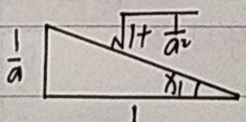
$\therefore \int_0^{x_1}(\cos x-a\sin x)dx$

$=(\sin x+a\cos x)\Big|_0^{x_1}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}-a$

$b\sin x_2=\cos x_2$

$\tan x_2=b.$



$\int_0^{x_2}b\sin x\,dx+\int_{x_2}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

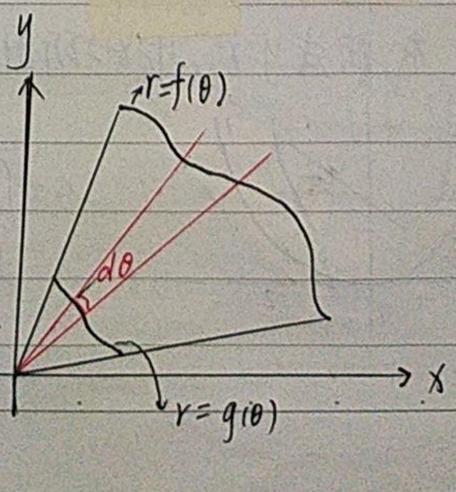
$=b-\frac{b^2}{\sqrt{1+b^2}}+1-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$

$=b+1-\sqrt{b^2+1}$

$\therefore\begin{cases}\sqrt{1+a^2}-a=\frac{1}{3}\\ b+1-\sqrt{b^2+1}=\frac{1}{3}\end{cases}$　　解得 $\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ b=\frac{5}{12}\end{cases}$

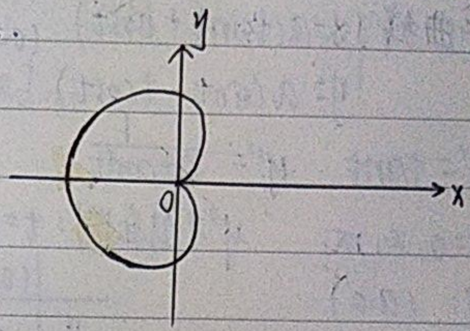
(2) 极坐标曲线所围图形的面积。

扇形域 S：$\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta\\ g(\theta)\le r\le f(\theta)\end{cases}$



由微元法，有 $S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[f^2(\theta)-g^2(\theta)]d\theta$

例1：求心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$ 所围图形的面积.



解：$S=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1-\cos\theta)^2d\theta$

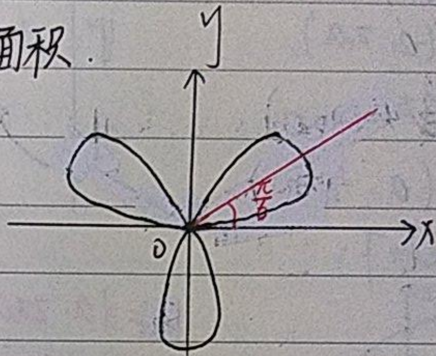
$=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)d\theta$

$=a^2\int_0^{\pi}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos2\theta-2\cos\theta)d\theta$

$=a^2(\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta-2\sin\theta)\Big|_0^{\pi}$

$=\frac{\pi}{2}a^2$.

例2：求曲线 $r=a\sin3\theta\ (a>0)$ 所围图形面积.



解：$S=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}a^2\sin^2 3\theta d\theta$

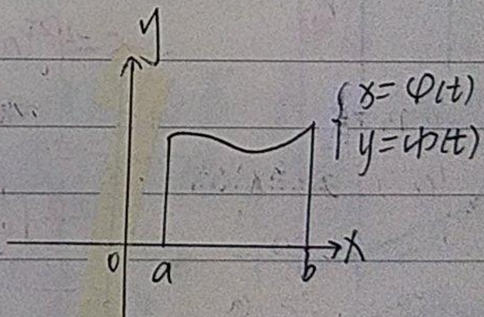
$=3\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\frac{1-\cos6\theta}{2}d\theta$

$=\frac{1}{4}\pi a^2$.

(3) 参数曲线所围图形的面积

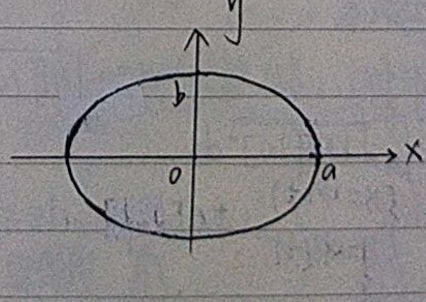
由一条参数曲线所围曲边梯形 $S:\begin{cases}a\le x\le b\\ 0\le y\le y(x)\end{cases}$ 的面积、

其中 $y(x)$ 为参数曲线 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$.



$S=\int_a^b y(x)dx=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}\psi(t)d\varphi(t)$

例1：求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积



解：$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$

$S=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin\theta\, d\, a\cos\theta$

$=4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^2\theta d\theta$

$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\theta)d\theta$

$=2ab(x-\frac{1}{2}\sin2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\pi ab$.

Dete:　　Page:

例2：求曲线 $\begin{cases} x=a(t\sin t+\cos t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 及直线 $x=a\,(y\le 0)$ 所围图形的面积.

解：$y'=\tan t$，$y''=\dfrac{1}{at\cos^3 t}$

$y'=0\Rightarrow t=0,\pi,2\pi$　　y''不存在时：$t=0,\frac{\pi}{2}$.

$t=0$时：$(a,0)$

$t=\frac{\pi}{2}$时：$(\frac{\pi}{2}a,a)$

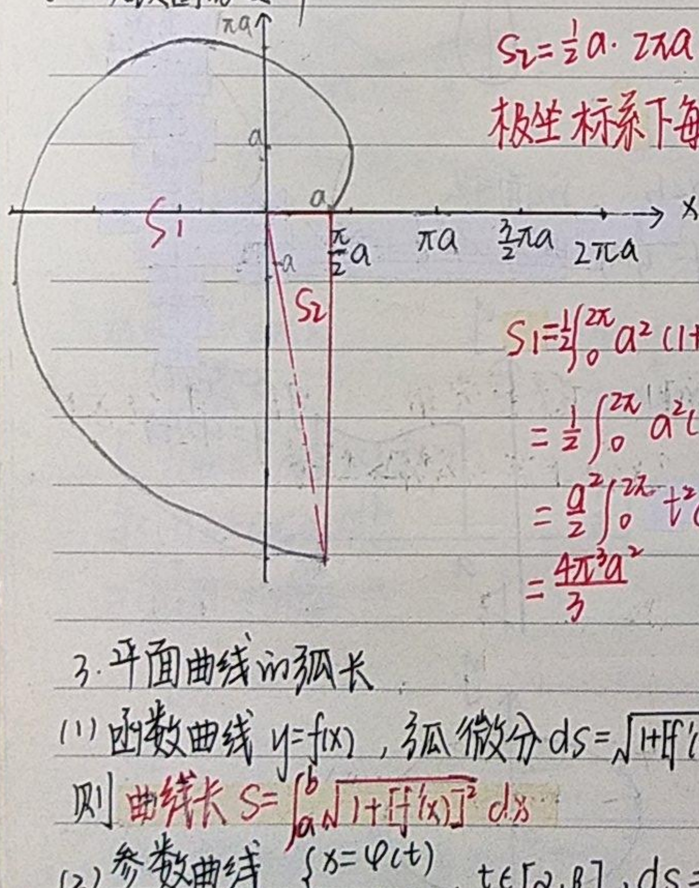
$t=\pi$时：$(-a,\pi a)$.

$t=\frac{3}{2}\pi$时：$(-\frac{3}{2}\pi a,-a)$

$t=2\pi$时：$(a,-2\pi a)$.

	$(0,\frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\pi)$	$(\pi,\frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi,2\pi)$
y'	+	−	+	−
y''	+	−	−	+
y	↗	↘	↗	↘

∴大致图象如下：



$S_2=\frac{1}{2}a\cdot 2\pi a=\pi a^2$

极坐标系下每点(x,y)都有对应 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow r^2=x^2+y^2=a^2(1+t^2)$

$\Rightarrow \tan\theta=\frac{y}{x}$，$\theta=\arctan\frac{y}{x}$

$d\theta=\dfrac{t^2}{1+t^2}dt$

$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+t^2)\,d\theta$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+t^2)\cdot\frac{t^2}{1+t^2}dt$

$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}t^2dt$

$=\frac{4\pi^3a^2}{3}$

$\therefore S=S_1+S_2=\frac{4}{3}\pi^3a^2+\pi a^2$

3. 平面曲线的弧长

(1) 函数曲线 $y=f(x)$，弧微分 $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$，要求 $dx>0$.

则曲线长 $S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

(2) 参数曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$，$ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$，$dt>0$.

则曲线长 $S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$

(3) 极坐标曲线 $r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$，则 $ds=\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$，$d\theta>0$.

则曲线长 $S=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

例1：半径为R的圆的周长.

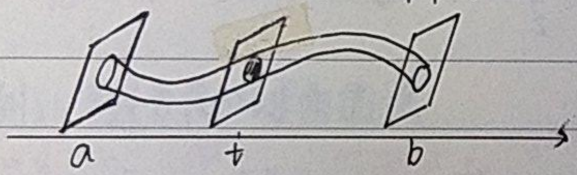
解：如图 $x^2+y^2=R^2$ 即 $\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi]$.

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}R\,d\theta=2\pi R.$$

例2：求 $r=a(1-\cos\theta)$ 的长度 $(a>0)$

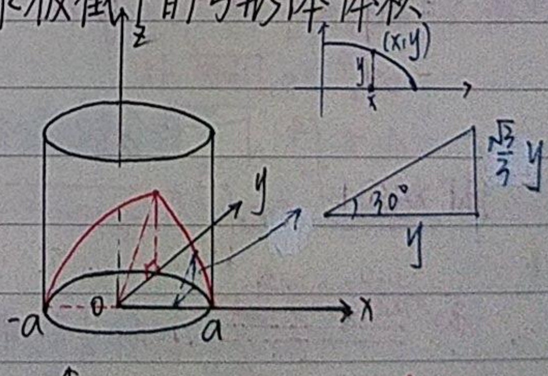
解：$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{[a(1-\cos\theta)]^2+(a\sin\theta)^2}\,d\theta$$
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$
$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$=8a.$$

4. 截面已知的空间体的体积.



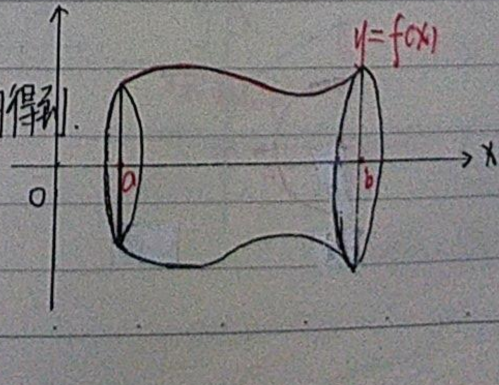
例1：设有正椭圆柱体，底面座落在xoy平面上，其方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，用过ox轴且与xoy平面成30°的平面去截此柱体，求被截下的弓形体体积.

解：如图. $V=2\int_0^a\frac{1}{2}y\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}y\,dx$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2\,dx$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}ab^2$$



5. 旋转体体积.

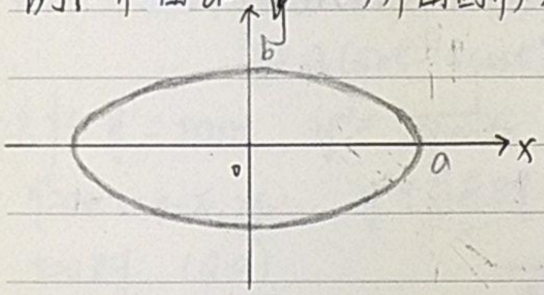
① 由曲边梯形 $\begin{cases}a\le x\le b\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$，绕x轴旋转一周得到的旋转体体积. $V=\int_a^b\pi f^2(x)\,dx$



② $\begin{cases}a\le y\le b\\ 0\le x\le g(y)\end{cases}$ $V=\int_a^b\pi g^2(y)\,dy$.

Dete: Page:

例1：求由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围图形分别绕两个坐标轴旋转形成的体积．



解：①绕x轴旋转．

$V=2\int_0^a \pi y^2 dx=\frac{4}{3}\pi ab^2$．

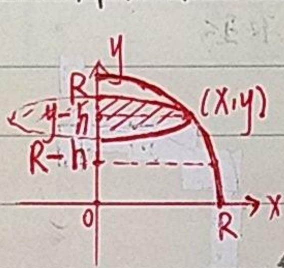
②绕y轴旋转

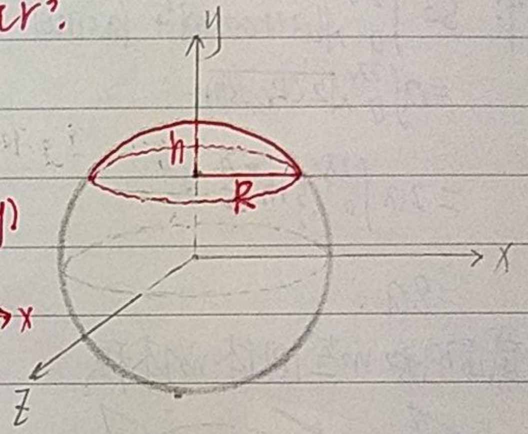
$V=2\int_0^b \pi x^2 dy=\frac{4}{3}\pi a^2 b$．

特别地，当$a=b$时，得到球的体积$\frac{4}{3}\pi r^3$．

例2：求半径为R，高为h的球缺的体积．

解：如图





$V=\int_{R-h}^{R}\pi x^2 dy$

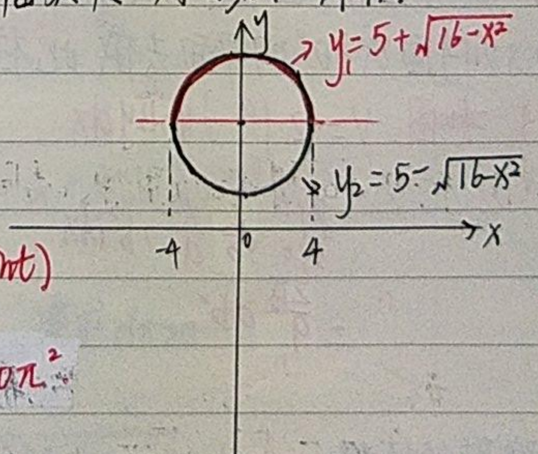
$=\int_{R-h}^{R}\pi(R^2-y^2)dy$

$=\pi(R^2y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{R-h}^{R}$

$=\pi h^2(R-\frac{h}{3})$．

例3：求由曲线$x^2+(y-5)^2=16$所围图形绕x轴旋转一周形成的体积

解：如图 $V=2[\int_0^4\pi y_1^2dx-\int_0^4\pi y_2^2dx]$



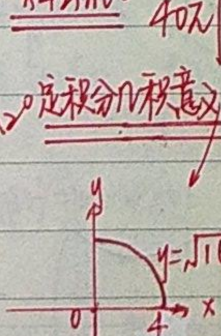
$=2\pi\int_0^4 20\sqrt{16-x^2}\,dx$

$=40\pi\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$

法1° 令$x=4\sin t$

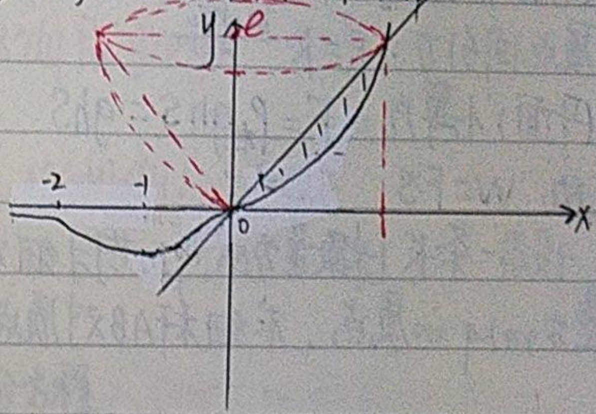
$40\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-(4\sin t)^2}\,d(4\sin t)$

法2° 定积分几何意义 $40\pi\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot4^2=160\pi^2$



例4：求曲线 $y=xe^x$，直线 $y=ex$ 所围图形绕 y 轴旋转形成的体积.

解：如图：$xe^x=ex \Rightarrow x=0,1$



$V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot e=\frac{\pi}{3}e$

$V_2=\int_0^e \pi x^2 dy=\int_0^1 \pi x^2 d(xe^x)$

$=\int_0^1 \pi x^2 (x+1)e^x dx$

$=\int_0^1 \pi (x^3+x^2) de^x$

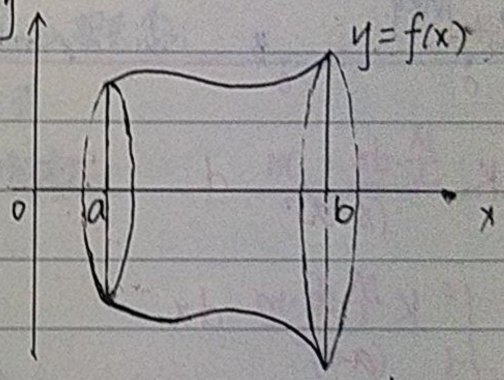
$=\pi(4-e)$

6. 旋转体的侧面积.

曲边梯形 $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x) \end{cases}$ 绕 x 轴旋转

一周形成的旋转体侧面积

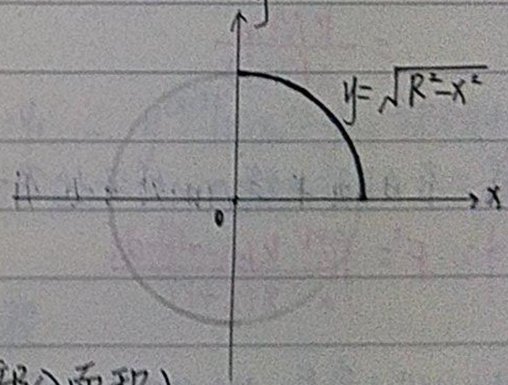
$S=\int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1+(y')^2}\, dx$



例1：半径为R的球面面积.

解：$S=2\int_0^R 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\, dx$

$=4\pi R^2$



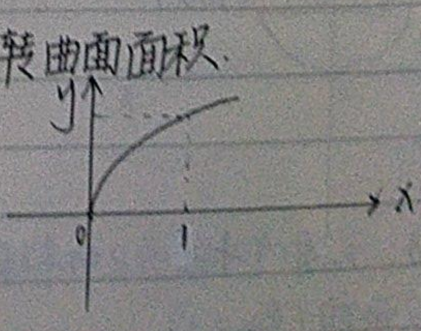
高度为h

变式：求半径为R的球冠的面积（球缺的球面部分面积）.

解：$S=\int_{R-h}^{R} 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\, dx = 2\pi Rh$

例2：求曲线 $y=\sqrt{x}$，$x\in[0,1]$ 绕 x 轴旋转形成的旋转曲面面积.

解：$S=\int_0^1 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}})^2}\, dx=\frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$



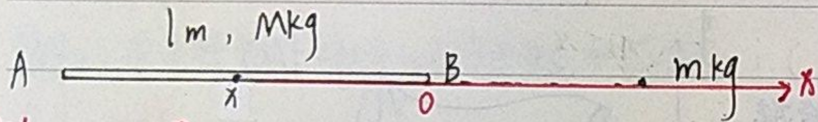
1. 定积分在物理方面的应用.

(1) 质点间引力: $F=k\cdot\frac{m_1m_2}{r^2}$

(2) (平面)小薄片: $F=\rho_{水}ghS=ghS$

(3) 功: $W=F\cdot S$

例: 设有一条长l米质量为M kg的均匀细杆AB. 在AB延长线上距B点a米处, 有一个质量为m kg的质点, 求细杆AB对质点m的引力F(引力系数$k>0$).



对$\forall x\in[-l,0]$有:

$$dF=k\cdot\frac{\frac{M}{l}dx\cdot m}{(a-x)^2}$$

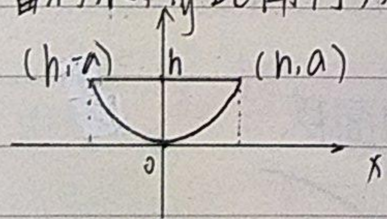
$$\therefore F=\int_{-l}^{0}\frac{k\frac{M}{l}dx\cdot m}{(a-x)^2}$$

$$=\frac{kMm}{a(a+l)}$$

变式: 在AB延长线am处开始有一个长度为l'的细杆.

解: $F'=\int_{a}^{a+l'}\frac{kM\cdot\frac{m}{l'}dx}{x(x+l)}$

例2: 设水库有一抛物型的闸门(如图), 闸门的上沿宽2a米, 高为h米, 让水库蓄满水, 求此闸门所承受的水压力$F(\rho_{水}=1)$

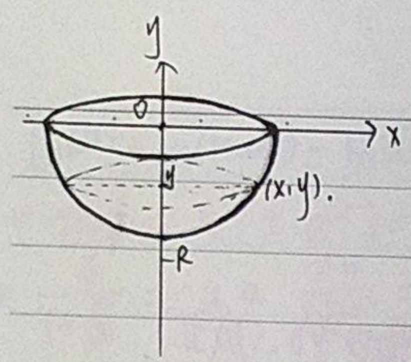


解: 如图, $y=bx^2$, $x=a$, $y=h$代入得: $b=\frac{h}{a^2}$.

$\therefore y=\frac{h}{a^2}x^2$.

$\therefore F=\int_0^h \rho_{水}g(h-y)\cdot 2x\,dy=\frac{8a}{15}gh^2$.

例3: 设有1个半径为R的半球形面(如图), 盛满水, 将此容器中水全部抽出所做的功$(\rho_{水}=1)$.



Dete: Page:

解：如图所示：由微元法

有 $W=\int_{-R}^{0}\pi x^2 dy\, \rho_水\, g(0-y)$

$=\pi g\int_{-R}^{0} x^2(-y)dy.$

$=\frac{\pi}{4}gR^4.$

第七章 微分方程.

§.7.1 基本概念

(1) (常)微分方程：含有未知数导数或微分的等式

(2) 微分方程的阶：方程中未知函数的最高阶数.

(3) 微分方程的解.

(4) 微分方程的通解.

(5) 微分方程的奇解：不包含在通解中的解.

(6) 定解条件(初始条件)

n阶方程满足的n个条件：$y|_{x=x_0}=y_0,\ y'|_{x=x_0}=y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1}$ 称为定解条件.

(7) 特解：通解中由定解条件确定的解.

(8) 解的存在性、唯一性、稳定性.

§.7.2 一阶微分方程

1. 可分离变量方程

称 $y'=P(x)Q(y)$ ($P(x)$是x的已知函数，$Q(y)$是关于y的已知函数)为可分离变量方程.

解法即可分离变量法.

$\frac{dy}{dx}=P(x)Q(y)$ $\frac{dy}{Q(y)}=P(x)dx\ (Q(y)\neq 0)$.

通解：

$\Rightarrow \int\frac{dy}{Q(y)}=\int P(x)dx+C$ → 都只表示一个原函数

例1：求方程 $yy'+x=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解.

解：$y\cdot\frac{dy}{dx}+x=0$，$ydy=-xdx\Rightarrow\int ydy=\int -xdx+C$

$\Rightarrow$ 通解为：$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C$ 代入 $y|_{x=1}=0$ 得：$C=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 特解为 $x^2+y^2=1$.