

福昕扫描王快速指南

欢迎使用福昕扫描王安卓 APP！体验 OCR 文字识别功能，将图片转换成文字内容，满足您的日常工作学习的需要，赶紧看看怎么用吧！

1. 添加文件

- 1) 首页从相册导入图片文件
- 2) 使用手机相机拍照，导入图片文件

QQ2842305604

2. 文字识别

1) 单张图片识别

预览图片文档，可旋转图片、调整图片亮度、颜色、对比度，点击“文字识别”按钮进行识别，点击“复制文本”拷贝文本内容，可重复查看识别结果；

2) 多张图片识别

添加多张图片到文档详情页，点击“文字识别”按钮，对文档内的所有文件进行识别，点击“复制”拷贝文本内容，可重复查看识别结果。

3. 如何与我们联系？

加入用户QQ交流群与我们联系，QQ群号码：
587813807

第一章 函数

一. 实数集 \mathbb{R}

① 完备性 $(+, -, \times, \div)$

② 有序性: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 要么 $a < b$, 要么 $a > b$, 要么 $a = b$

③ 阿基米德性: $\forall c > 0$, \exists 正整数 n , 使 $n > c$

④ 稠密性: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{a+b}{2}$

⑤ 实数 \longleftrightarrow 数轴上的点. \longleftrightarrow 对应 \forall 实数 $a \longleftrightarrow$ 点 a

二. 常见的数集

① $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 开区间 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

闭区间 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

半开半闭区间 $(a, b]$, $[a, b)$

$(-\infty, +\infty)$ - 无穷区间

② 邻域: 设 $\delta > 0$, x_0 的 δ 邻域是 $\{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$

记为 $U(x_0, \delta) = U_\delta(x_0)$

x_0 的去心邻域是 $\{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 < x < x_0 + \delta\}$

记为 $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 记为 $\dot{U}(x_0, \delta) = \dot{U}_\delta(x_0)$

③ 有(无)界集

定义: 设 $D \subseteq \mathbb{R}$, 若 \exists 实数 $M > 0$ (或者 $\exists a, b \in \mathbb{R}$) 使 $\forall x \in D$, 有 $|x| \leq M$, $a \leq x \leq b$

则称 D 为有界集 (a 为 D 的下界, b 为 D 的上界), 否则称 D 为无界集. 且 \forall

$M > 0$, $\exists x_0 \in D$, 使 $|x_0| > M$

确界公理: 若数集 D 有上(下)界, 则 D 有最小(大)上(下)界, 称为 D 的上(下)确界, 记为 $\sup D$ ($\inf D$)

确界的鉴别: $A = \sup D \iff \forall x \in D$, 有 $x \leq A$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in D$, 使 $x_0 > A - \varepsilon$

$A = \inf D \iff \forall x \in D$, 有 $x \geq A$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}, \text{使 } |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

三. 函数

定义: 设在某一问题中有两个变量 x, y , 若对变量 x 所取的每一值, 通过一个规律 (对应法则) f , 总有唯一的一个变量 y 与之对应, 这时我们称 y 为 x 的函数, 简记为 $y = f(x)$, 称 x 为自变量, y 为因变量.

注: 定义域 (实际定义域: $S = \mathbb{R}^n, (n > 0)$)
自然定义域: 函数 $y = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

对应规律 (函数关系): 具体的对应规律: 公式法, 列表法
抽象的对应规律: 图形法

2. 常见的函数形式 (10)

(1) 数列 $\{a_n\}: a_n = f(n)$ - 整标函数

(2) 基本初等函数 (6)

常量函数 $y = C$ 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 幂函数

对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$

三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ 圆弧长 $l = r\alpha$

反三角函数 $y = \arcsin x, x \in [-1, 1], y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = \arccos x, x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]$

$y = \arctan x, x \in \mathbb{R}, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$y = \text{arccot } x, x \in \mathbb{R}, y \in (0, \pi)$

(3) 初等函数: 由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合

(4) 反函数

(5) 复合函数: $y = f(t), t = g(x) \Rightarrow y = f(g(x))$

(6) 参数函数: $f(x) = f(t), t \in T, y = \varphi(t)$

$y = \psi(t)$

(7) 隐函数: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ 显函数

狄利克雷函数

(8) 分段函数: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$ 取整函数: $y = [x] = n, n \leq x < n+1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3. 计算函数值及函数值的表示

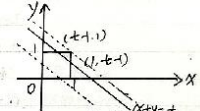
自变量一点, 因变量一函数值

比如求 $y = f(x)$ 在 x_0 点的函数值 $y |_{x=x_0} = f(x_0)$

4. 函数图形

例1: 在平面上有一正方形 $D, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 又有直线 $l: x + y = t (-\infty < t < +\infty)$, $S(t)$ 表示正方形 D 在直线 l 左方的面积, 求 $S(t)$ 的表达式

解: $S(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 2 \\ 1 - \frac{1}{2}(2-t)^2, & 1 < t < 2 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ 连续分类



例2: 设 $f(x)$ 满足 $f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 求 $f(x)$

解: 将 $f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x$ 式中 x 换成 $-x$

得 $f(1 - \sin x) - 3f(1 + \sin x) = -8x \dots (2)$

解 (1)(2) 得 $f(1 - \sin x) = -2x$

令 $1 - \sin x = t, 0 \leq t \leq 2$, 则 $x = \arcsin(1 - t)$

$\therefore f(t) = -2 \arcsin(1 - t)$ 从而有 $f(x) = -2 \arcsin(1 - x), 0 \leq x \leq 2$

例3: 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases} g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ 求 $f(g(x))$

解: $f(g(x)) = \begin{cases} 2^{g(x)}, & g(x) \geq 0 \\ \sin(g(x)), & g(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2^{x^2}, & x \leq 1 \text{ 且 } x^2 \geq 0 \\ 2^{x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sin(x), & x > 1 \text{ 且 } \ln x < 0 \\ \sin(x), & x > 1 \text{ 且 } x^2 < 0 \\ \sin(x^2), & x < 0 \end{cases}$

注意等题时的取值性: $\begin{cases} \sin(x), & x > 1 \text{ 且 } x^2 < 0 \\ \sin(x^2), & x < 0 \end{cases}$

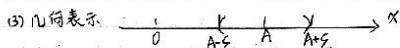
跳步骤

第二章 极限与连续
§2.1 极限的概念

1. 数列极限: 已知数列 $\{x_n\}$, 当 n 无限增大时, 对应的项 x_n 与某一常数 A 无限接近, 则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限.

" ϵ - N " 定义: 已知数列 $\{x_n\}$, $A \in \mathbb{R}$. 若 $\forall \epsilon > 0$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛 (有极限), 称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 或 $x_n \rightarrow A$, 当 $n \rightarrow \infty$.

注: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ (正整数集, 不包括 0) 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \epsilon$.
注: (1) ϵ 要任小, (2) N 要存在. 至多有个 $x_1, x_2, \dots, x_N \notin U(A, \epsilon)$.



改变数列前面有限项并不影响数列的收敛.

2. 发散数列: 没有极限的数列. eg. $(-1)^n$

例1: 用定义验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证: 分析: $\forall \epsilon > 0$, 取 N . 当 $n > N$ 时, 有 $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$.

$\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$, 当 $n > N$ 时, 有 $n > \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

例2: 用定义验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

分析: $\forall \epsilon > 0$, $|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1$

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{n-1}{n}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n} + n - \frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n - \frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n} < 1 + \epsilon$$

取 $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$, 当 $n > N$ 时, 有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

例3: 下列哪些描述可作 A 是数列 $\{x_n\}$ 极限的定义 (1.2.3.9)

(1) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \epsilon$

(2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 有 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \epsilon$

(3) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 有 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < k\epsilon$, k 为正实数

(4) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \frac{1}{m}$

(1) \Rightarrow (5) 显然

(5) \Rightarrow (1) $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = N + 1$, 当 $n > N > N$, 有 $|x_n - A| < \epsilon$

(5) \Rightarrow (2) 显然

(2) \Rightarrow (5) $\forall \epsilon > 0$, 取 $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$, 由 (2) 可知 $\exists N$ 当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| \leq \epsilon' < \epsilon$

(5) \Rightarrow (3) 显然. (5) \Rightarrow (4) 显然

3. 子数列的概念

已知数列 $\{x_n\}$, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

子数列 $\{x_{n_k}\}$, $x_0, x_0, x_5, x_{12}, \dots$

n_k 是表示 x_{n_k} 这一项在 $\{x_n\}$ 中是第 n_k 项

k 是表示 x_{n_k} 这一项在 $\{x_n\}$ 中是第 k 项. 显然 $n_k \geq k$

4. 定理: 数列收敛于 A 当且仅当它的所有子数列都收敛于 A

证: \Leftarrow 显然

\Rightarrow 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \epsilon$

取 $N' = N + 1$, 当 $k > N'$ 时, $n_k \geq k > N' = N + 1 \Rightarrow n_k > N$

\therefore 有 $|x_{n_k} - A| < \epsilon$. $\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$

(1) 判定数列发散. eg. $j(n)^n$, $j \sin \frac{n}{2} \pi$

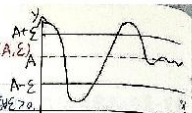
(2) 判定数列收敛. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n}$

§2.2 函数的极限

一. 函数的自变量趋于无穷大时的极限

(1) 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限

定义1: 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有定义, A 为常数. 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$, 当 $x \rightarrow +\infty$

注: $\forall \epsilon \in U(A, \epsilon), \exists X > 0$, 使 $\forall (x, \infty) \subseteq U(A, \epsilon)$
 几何表示: 

定义2: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上有定义, A 为常数, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x < -X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限.
 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow -\infty$.
 定义3: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上有定义, A 为常数, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow \infty$.

定理1: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
 例: $f(x) = \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

二. 函数自变量趋于有限值时的极限 (函数在一点处的极限)
 设 $f(x)$ 自变量 x 无限接近某数 x_0 且 $x \neq x_0$, 若 $f(x)$ 无限接近常数 A , 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限.
 定义4: 设 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义, A 为常数, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限.
 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0$.
 注: $\forall \epsilon \in U(A, \epsilon), \exists U(x_0, \delta)$, 使 $f(U(x_0, \delta)) \subseteq U(A, \epsilon)$.
 定义5: 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0^+$.
 定义6: 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0^-$.
 注: 右极限也称为单侧极限.
 定理: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$
 例1: 用定义验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0$.
 分析: $\forall \epsilon > 0$, 找 $\delta, 0 < |x - 0| < \delta, |\sin x - \sin 0| < \epsilon$.

$|\sin x - \sin 0| = |\sin x| \leq |\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}| \leq |\sin \frac{x}{2}| \leq |x - 0| < \delta \leq \epsilon$
 证: $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon$, 当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, 有 $|\sin x - \sin 0| = |\sin x| \leq |\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}| \leq |x - 0| < \delta = \epsilon \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0$.
 例2: 用定义验证 $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$.
 分析: $\forall \epsilon > 0$, 找 $\delta, 0 < |x - 1| < \delta, |x^2 - 1| = |(x+1)(x-1)| < \delta|x+1| = \delta(|x-1| + 2) \leq \delta(|x-1| + 2) < \delta^2 + 2\delta < 3\delta \leq \epsilon, 0 < \delta < 1 \Rightarrow$ 取 $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{3}, 1\}$.
 法二: $\forall \epsilon > 0$ 不假设 $0 < |x - 1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$ 且 $x+1, |x+1| < 3$ 取 $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{3}, 1\}$.
 $|x^2 - 1| = |(x+1)(x-1)| < 3|x-1| < \epsilon$
 结论: 由极限定义可得几个极限定理:
 1) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ 2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ 3) $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n = \lim_{x \rightarrow a} a^n = a^n, 0 < a < 1$
 13) 若 $f(x)$ 是基本初等函数且在 x_0 点有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

§2.3 极限的性质与计算
 极限的性质
 定理1 (唯一性) 若一个数列 (或函数) 有极限, 则极限唯一.
 证: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 反证法 又设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B, A \neq B$, 不妨设 $B < A$.
 取 $\epsilon = \frac{A-B}{2}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|x_n - A| < \epsilon \Rightarrow x_n > A - \epsilon = \frac{A+B}{2}$.
 又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B, \exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $|x_n - B| < \epsilon \Rightarrow x_n < B + \epsilon = \frac{A+B}{2}$.
 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, ① 由前者成立从而 $x_n > \frac{A+B}{2}$, ② 由后者成立从而 $x_n < \frac{A+B}{2}$, 矛盾.
 所以假设不成立, $A=B$.
 定理2 (有界性)
 ① 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使 $|x_n| \leq M$.
 ② 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 则 $\exists X > 0$, 使 $|x| > X$ 时, $f(x)$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M, \forall x \in (X, +\infty) \cup (-\infty, -X)$.
 ③ 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x)$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$, 由

$x \in U(x_0, \delta)$

注: 数列是整体有界, 函数是局部有界

定理3 (保序性) 设 $\lim x_n = A, \lim y_n = B$, 则

(1) 若 $A > B$, 则 $\exists N$, 使 $n > N$ 时, 有 $x_n > y_n$ > 逆命题

(2) 若 $\exists N$, 使 $n > N$ 时有 $x_n > y_n$, 则 $A > B$ 保序性

证: (1) (类似唯一性证明), 取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$, 由 $\lim x_n = A$ 得 $|x_n - A| < \varepsilon$ 即 $x_n > \frac{A+B}{2}$, 由 $\lim y_n = B$ 得 $|y_n - B| < \varepsilon$ 即 $y_n < \frac{A+B}{2} \therefore y_n < \frac{A+B}{2} < x_n$

2. 极限的四则运算与复合运算

定理4: 设 $\lim x_n = A, \lim y_n = B$, 则 $\lim (x_n \pm y_n) = A \pm B, \lim x_n y_n = AB$
 $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B} (B \neq 0, y_n \neq 0)$

证: $\forall \varepsilon > 0$ 由 $\lim x_n = A \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$
 由 $\lim y_n = B \exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $|y_n - B| < \varepsilon$, 且 $\exists M$ 使 $|y_n| < M$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n y_n - AB| = |(x_n - A)y_n + A(y_n - B)| < \varepsilon M + |A| \varepsilon \leq (M + |A|) \varepsilon = \varepsilon' \therefore \lim x_n y_n = AB$

定理5: 设 $f(x)$ 为 $y = f(u), u = g(x)$ 的复合函数, 且满足:

(1) $f(u)$ 在 u_0 的去心邻域内有定义 eg. $y = f(u) = \sqrt{u}, u = g(x) = 1 - x^2$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$

(3) $g(x) \neq u_0$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$

证: $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A \exists \eta > 0$, 当 $0 < |u - u_0| < \eta$ 时, 有 $|f(u) - A| < \varepsilon$

对上述的 $\eta > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|g(x) - u_0| < \eta$ 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$

\therefore 有 $|f(g(x)) - A| < \varepsilon, \therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A$ 如极限

结论: 1. 极限对数三角自三运算可以交换次序 (极限存在)

若 f 是基本初等函数, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(u) = f(u_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$

(2) 若 f 是初等函数且 f 在 x_0 的邻域内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (定式)

eg. $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ 不定式

例1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 3}{x - 1} = \frac{3}{-1} = -3$ (洛必达法则)

例2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1$

例3: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{0} = \infty$

例4: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - 1}{a^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{a^n}}{1 + \frac{1}{a^n}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$ ($a > 1$)

解: (1) $0 < a < 1, 0 < a^n < 1$ 原式 = $\frac{1 - a^n}{1 + a^n} = \frac{1 - a^n}{1 + a^n} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

(2) $a > 1, 0 < a^n < 1$ 原式 = $\frac{1 - a^{-n}}{1 + a^{-n}} = \frac{1 - \frac{1}{a^n}}{1 + \frac{1}{a^n}} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

(3) $a > 1, a^n > 1$ 原式 = $\frac{a^n - 1}{a^n + 1} = \frac{1 - \frac{1}{a^n}}{1 + \frac{1}{a^n}} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

例5: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12^n - 1}{(2^n + 1)(3^n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12^n - 1}{2^n + 1} \cdot \frac{1}{3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12^n}{2^n} \cdot \frac{1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$

例6: 设 $x_n = 2, x_{2n} = 3^n - 2n + 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 验证数列收敛

§ 24 收敛准则

1. 收敛准则 I

定理1 (柯西收敛准则)

若从某项以后有 $|y_n - y_m| < \varepsilon$ (若从某一项后有 $q_n < \varepsilon, n > N$) 且

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n + z_n) = A + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A + \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - z_n) = A + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - A = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$

证: 设 N_1, N_2 , 当 $n > N$ 时, 有 $|y_n - y_m| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2$ 当 $n > N_2$ 时, 由 $\lim x_n = A$, 有 $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$
 又由 $\lim x_n = A \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon$
 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 有 $A - \varepsilon < x_n \leq z_n < A + \varepsilon$.
 即 $|x_n - A| < \varepsilon \therefore \lim x_n = A$
 例1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 < \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{4^2} > \dots > \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} > \dots$
 例2: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2^n + 3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{4}$
 $4 = (4^n)^{\frac{1}{n}} < (2^n + 3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} < (3 \cdot 4^n)^{\frac{1}{n}}$
 例3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$
 解: 设 $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} < \frac{2n}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$
 $\Rightarrow a_n < \frac{1}{2^{n-1}}$
 例4: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$
 解: $1 \leq (n!)^{\frac{1}{n}} = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$
 $= \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$
 注: $(n!)^{\frac{1}{n}} \sim \frac{n}{e}$

均值不等式
 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$
 简单不等式
 $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$

2. 收敛准则
 定理2 (单调有界准则) 单调有界数列必收敛。
 定义: 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$ 则称数列 $\{x_n\}$ 是单调上升 (或单调上升) 数列。
 若数列 $\{x_n\}$ 有界, $\Rightarrow \{x_n\}$ 有上确界, 记为 $A = \sup x_n$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使 $x_n > A - \varepsilon$, 当 $n > N$ 时, $A + \varepsilon > x_n \geq x_n > A - \varepsilon$
 即 $|x_n - A| < \varepsilon, \therefore \lim x_n = A$
 类似可证若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\lim x_n = \inf x_n$
 注: ① 一般数列单调性再证有界性
 ② $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ (不一定)
 ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ (不一定)

若已证 $\{x_n\}$ 有界, $x_n \leq x_{n+1} \leq \lim x_n$
 若已证 $\{x_n\}$ 有界, $x_n \geq x_{n+1} \geq \lim x_n$
 例1: 设 $x_n > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$, 求 $\lim x_n$
 解: $x_n > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1} = 1 (n \geq 1)$
 $\therefore \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x_n^2}) \leq 1 (n \geq 2) \therefore \{x_n\}$ 有界
 又: $1 \leq x_n \leq x_2$ 由单调有界准则知 $\lim x_n$ 存在记为 A
 $\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) \therefore A = \frac{1}{2}(A + \frac{1}{A}) \therefore A = 1$ 或 $A = -1$ (舍去)
 $\therefore x_n > 0 \therefore \lim x_n = \lim 1 = 1$ 即 $A = 1$
 例2: 设 $x_n > 0, x_{n+1} = \sqrt{b + x_n}$, 求 $\lim x_n (b > 0)$
 解: $x_{n+1} - x_n = \sqrt{b + x_n} - \sqrt{b + x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{b + x_n} + \sqrt{b + x_{n-1}}}$
 $\therefore x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号, 从而与 $x_n - x_{n-1}$ 同号且 $\{x_n\}$ 单调。
 $x_2 - x_1 = \sqrt{b + a} - a = \frac{b + a - a^2}{\sqrt{b + a} + a}$
 $\star \star \star b + a - a^2 > 0 \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ 或 $\frac{1 - \sqrt{1 + 4b}}{2}$ (舍去)
 此时 $x_n = a \forall n \in \mathbb{N}$, $\therefore \lim x_n = a$
 $\langle 1 \rangle b + a - a^2 > 0$ 时 $\{x_n\}$ 有界, 此时 $a > \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ 或 $a < \frac{1 - \sqrt{1 + 4b}}{2}$ (舍去)
 又 $0 < x_n \leq x_1$ 由单调有界准则知 $\lim x_n$ 存在记为 A , $\therefore \lim x_{n+1} = \lim \sqrt{b + x_n}$
 $\Rightarrow A = \sqrt{b + A} \Rightarrow A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ 或 $A = \frac{1 - \sqrt{1 + 4b}}{2}$ (舍去)
 $\langle 2 \rangle b + a - a^2 < 0$ 时 $\{x_n\}$ 有界, 此时 $\frac{1 - \sqrt{1 + 4b}}{2} < a < \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ 且 $a > 0$
 $\therefore 0 < a < \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ 且 $x_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ 用数学归纳法证之
 当 $n=1$ 时, $x_1 = a < \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$
 设 $n=k$ 时, $x_k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ 则
 当 $n=k+1$ 时, $x_{k+1} = \sqrt{b + x_k} \leq \sqrt{b + \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$
 $\therefore \{x_n\}$ 有界且 \uparrow
 由单调有界准则知 $\lim x_n$ 存在记为 A , $\therefore \lim x_{n+1} = \lim \sqrt{b + x_n}$
 $\Rightarrow A = \sqrt{b + A} \Rightarrow A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ 或 $A = \frac{1 - \sqrt{1 + 4b}}{2}$ (舍去)

①有理式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{m-n}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-m}}$ 无理式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$

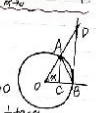
②三角运算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

③对数运算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1$

§25 两个重要极限

重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

证: 不妨设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 如图所示, 取单位圆



$S_{\triangle AOB} < S_{扇形AOB} < S_{\triangle AOB}$ 即 $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$

$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)

又: $\cos x$ 都是偶函数 $\therefore \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 且 $x \neq 0$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 由两边夹准则则有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

推论: ① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$ ($\square \rightarrow 0$ 且 $\square \neq 0$)

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ ③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

二项式定理 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

证明: ① $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n}$

$a_{n+1} = 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)n}{2!} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} \cdot \frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$

$\therefore a_{n+1} > a_n$

$a_n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 2 + \frac{1}{2} = 2.5$

由单调有界准则知, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 记为 e , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

② $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = e$

不妨设 $x > 0$, $n = [nx]$, $n \leq nx < n+1$, $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$

由 $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} > 1 + \frac{1}{n+2} > \dots$ 得

$(1 + \frac{1}{n})^n > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n+2})^{n+2} > \dots$

$(1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n})^0 \rightarrow e$ ($n \rightarrow +\infty$)

$(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} (1 + \frac{1}{n+1})^{-1} \rightarrow e$ ($n \rightarrow +\infty$)

由两边夹准则可知 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = e$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{\frac{x}{x}})^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{t})^{t \cdot \frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{t})^t \cdot (1 + \frac{1}{t})^{\frac{1}{t}} \rightarrow e$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = e$ 即 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = e$

推论: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ($x \rightarrow 0$ 且 $x \neq 0$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \infty$

例1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln a \cdot \frac{1}{x} = \ln a$

例2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln a \cdot a^x = \ln a$

$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 可简化 1^∞ 型的极限计算

例3: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x}{x} + \frac{b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{a^x - 1}{x}) \cdot \frac{a^x}{x} = e^{a-b}$

例4: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin^2 x)^{\frac{1}{x}}$

原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - \cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

例5: $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(\frac{x}{2}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}) = 4$

§26 两种量

1 概念

定义: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$) 则称 $\{x_n\}$ (或 $f(x)$) 是无穷小量

趋近于0的无穷小量

注: 变量0是无穷小量, 无穷小量用字母 α, β, γ 表示

定义2: 设有数列 $\{x_n\}$ (或函数 $f(x)$), $\forall M > 0$, 若 $\exists N \in \mathbb{N}$ ($\exists \delta > 0$ 或 $\exists X > 0$), 当 $n > N$ ($0 < |x - x_0| < \delta$ 或 $|x| > X$) 时, 有 $|x_n| > M$ (或 $|f(x)| > M$), 则称数列 $\{x_n\}$ (或函数 $f(x)$) 是在自变量趋向无穷下的无穷大量, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$)

注: 无穷大量是无穷函数的反之称不成立

例如 $f(x) = x \sin x$ $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ $f(x_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$
 $x_n = n\pi$ $f(x_n) = 0$

非0无穷小的倒数是无穷大

2. 无穷小的性质

性质1: 有限个无穷小的和, 积仍是无穷小
 无限个无穷小的和, 积不一定是无穷小

反例: $\{x_n\}$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
 $\{x_n^2\}$ $1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
 $\{x_n^3\}$ $1, 1, 3^2, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
 \dots
 $\{x_n^k\}$ $1, 1, \dots, 1, \dots, \frac{1}{k^{k-1}}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^1 x_n^2 x_n^3 \dots) = 1$

性质2: 有界量与无穷小之积仍是无穷小

证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ $|y_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M > 0$, 证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$
 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时 $|x_n| < \frac{\epsilon}{M}$, $\therefore |x_n y_n| \leq \epsilon$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin x$
 $\lim_{x \rightarrow 0} x = A$ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = B$ 若 $A=B$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$
 $\Rightarrow x_n \cdot y_n = a$, $\Rightarrow x_n = y_n + a$

性质3: $\lim_{x \rightarrow 0} x_n = \lim_{x \rightarrow 0} y_n$ ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$) $\Leftrightarrow x_n = y_n + \alpha$ ($f(x) = g(x) + \alpha$) α 是0

无穷小量

定义: 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \alpha) = 0$, $f(x)$ 是已知函数, 常数 α 和 b

解: $f(x) = 2x + b + \alpha$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha = 0$ $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - b - \alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

3. 无穷小的阶

定义1: 设 α, β 为自变量趋向无穷下的无穷小

- 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 称 α 是 β 的高阶无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$
- 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 称 α 是 β 的低阶无穷小
- 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$, 称 α 与 β 是同阶无穷小, (记为 $\alpha \sim \beta$)
- 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 称 α 与 β 是等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$
- 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = C > 0$, 称 α 是 β 的 k 阶无穷小 ($k > 0$)

eg. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} = 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x^k} \cdot \frac{1}{x^k} \rightarrow 0$

注: $0 < k < 1$, α 是 β 的低阶无穷小 $k > 1$, α 是 β 的高阶无穷小
 $k=1$, α 与 β 是同阶无穷小

eg. 设 α 为 β 的高阶无穷小 $\sin x \sim x$ ($x \rightarrow 0$) $\sim x \sin \frac{1}{x}$ ($x \rightarrow 0$) \times

定理1: $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\alpha)$ (或 $\alpha - \beta = o(\beta)$)

证: $\Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 0$ ($\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 1$)
 $\Leftarrow \alpha - \beta = o(\alpha) \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha \sim \beta$

定义2: 若 $\alpha \sim \beta$, 则称 β 是 α 的主部 (等价无穷小), $\alpha - \beta$ 是 α 的余项 (高阶无穷小)

定理2: 若 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha'}{\beta'}$ (等价无穷小替换定理)

注: 在极限运算过程中, 分子或分母中的无穷小, 只要与它是等价无穷小, 就可以替换

eg. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$ eg. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = 0$ $\sin x \sim x + o(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3}$

4. 常见的等价无穷小

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 (x \rightarrow 0)$
 $\square \sim \sin \square \sim \arcsin \square \sim \tan \square \sim \arctan \square \sim e^{\square} \sim \ln(1+\square)$
 $(\square \rightarrow 0 \text{ 且 } \square \neq 0)$
 证: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\square)^x - 1}{\square} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(1+\square)} - 1}{\square} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(1+\square)} - 1}{x \ln(1+\square)} = 1$
 (11) $\square \rightarrow 0$ $(\square \rightarrow 0)$ $\tan \square \sim \sin \square \sim \frac{1}{2}\square^2 (x \rightarrow 0)$
 例1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
 例2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - \cos x}{2x} = \frac{1}{2}$
 例3: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(1 + \frac{1}{n})^n \sim e$
 解: $(1 + \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \sim e^{n \cdot \frac{1}{n}} = e$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
 例4: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^a - n^a}{n^2} (a > 0, a \neq 1 \text{ 都是常数})$
 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^a - n^a}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{d}{dn} (n+1)^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n+1)^{a-1}}{n^2} = \frac{a}{n} \rightarrow 0$
 法 = $(n+1)^a = n^a + a n^{a-1} + \frac{1}{2} a(a-1) n^{a-2} + \dots$
 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a + a n^{a-1} + \frac{1}{2} a(a-1) n^{a-2} - n^a}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a n^{a-1} + \frac{1}{2} a(a-1) n^{a-2}}{n^2} = \frac{a}{n} \rightarrow 0$
 例5: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2$

§ 27 函数的连续性

1. 连续的概念
 定义1: 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 任取该邻域内一点 x 称为 x_0 的 δ 邻域, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

法: δ 可正可负, 但 $\delta > 0$, 而 δ 可以等于 0
 定义2: 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 称为 $f(x)$ 的连续点.
 注: 连续的 δ 定义, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
 定义3: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续.
 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续.
 注: 右连续统称为单侧连续 (有时也称连续, 如 $f(x), x \in (a, b)$)
 注: ① 当 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点左连续且右连续.
 ② 当 $f(x)$ 在包含 x_0 点的单侧邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点单侧连续.
 定义4: 若 $f(x)$ 在点集 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 是 I 上的连续函数, 记为 $f(x) \in C_I$.
 若 $I = (a, b), [a, b), (a, b], (a, b)$, 则 $f(x)$ 的图形是一条连续的曲线.
 注: 函数图形断开了 \Rightarrow 自变量断开了 \Rightarrow 函数不连续.
 2. 间断点及其类型
 定义5: 设 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义, 若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.
 第一类间断点: 若 $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ 都存在, 但 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$ 或 $f(x_0^-) = f(x_0^+) \neq f(x_0)$, 或 $f(x_0) = f(x_0^+)$ 但 $f(x)$ 在 x_0 点无定义.
 第二类间断点: 不是第一类间断点的间断点, 即在右极限至少有一个不存在的间断点.
 例1: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ $f(1) = 1, f(1) = 2$
 $x=1$ 是第一类跳跃间断点.
 例2: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $x=1$ 是第二类无穷间断点.

③ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x_0) = +\infty$ $f(x) = -\infty$ $\therefore x_0$ 是第一类无穷间断点

④ $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$x \rightarrow 0^+$ $x_1 = \frac{1}{2n\pi}$, $f(x_1) = 0$ $x_2 = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $f(x_2) = 1$
 $x_3 = \frac{1}{2n\pi + \pi}$, $f(x_3) = 0$ $x_4 = \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}$, $f(x_4) = -1$
 $\therefore x=0$ 是第一类无穷间断点

定义5: 若 $f(x)$ 在 x_0 的左侧邻域内有定义, 而 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的左间断点. 此时, 若 $f(x)$ 在 x_0 的左侧邻域内极限存在, 则称 x_0 是第一类左间断点, 否则称为第二类左间断点.

例: ① $y = \sqrt{x}$, $x > 0$ $f(0+) = -\infty$
 ② $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in (0, 1) \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ $f(1+) = 1 \neq f(1)$ $\therefore x=1$ 是第一类左间断点

eg. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, 既不是连续也不是间断

3. 连续函数的性质

① 连续函数的四则运算与复合仍是连续函数

② 连续函数的反函数仍是连续函数

③ 相等函数在其定义域内连续

例: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq 1 \\ e^{2x}, & |x| > 1 \end{cases}$ 连续性: 间断点

解: $f(x)$ 是 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 上的初等函数
 $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 上连续

$f(x)$ 在 $x=1$ 处: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $f(1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^2$ $\therefore x=1$ 是第一类跳跃间断点

④ 设 $f(x)$ 对任意实数 a, b 均有 $f(x+a) = f(x) + f(x)$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 证明 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$

极限的四则运算

主要证明
有限增量定理

设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, $f(x_0) = f(x_0)$, 与 $f(x_0) = f(x_0)$

① 当 $\delta > 0$, $\forall x \in U(x_0, \delta)$, $f(x) - f(x_0) = 0$, $f(x) = f(x_0)$

② 当 $\delta > 0$, $\forall x \in U(x_0, \delta)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$

$\therefore f(x)$ 在 x_0 处连续: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$

由 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ 可知 $f(x)$ 在 x_0 处连续

初值的任意性可知, $f(x)$ 在 x_0 处连续

牛浦区间上连续函数的介值原理

定理: 若 $f(x) \in C(a, b)$ 则初值为 M

设 $f(a) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, $f(x) < M$

$\therefore f(x)$ 在 a 处取最大值 M $\forall x \in (a, b)$, $f(x) < M$

$M = f(x_0)$ 有 $f(x_0) = M$, $x_0 \in (a, b)$

$\max\{f(x)\} = M$, $\forall x \in (a, b)$, $f(x) \leq M$, $f(x_0) = M$

单值连续, 增函数 $f(x)$ 上取

将 (a, b) 二等分, $a_1 = a, b_1 = b$, 取 $\frac{a+b}{2}$ 的初值 $f(\frac{a+b}{2})$ 是否在一个区间上取

记 $a_1 = a, b_1 = b$, 取 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 的初值, 再取 $a_2 = a_1, b_2 = b_1$ 的初值

$\forall \epsilon > 0$, a_1, b_1 的初值在 a_2, b_2 的初值上取, 如此下去, 得到一列

区间 $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ 由数列收敛性, 数列 $\{a_n\}$

$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ \therefore 由单调有界原理 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在

$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0 \in (a, b)$ $\therefore f(x)$ 在 x_0 处连续

取 $\epsilon = \frac{b-a}{2}$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $b_n - a_n < \epsilon$, $\therefore f(x)$ 在 x_0 处连续

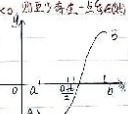
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$, $\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

取 $M = \max\{f(a), f(b)\}$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n < x_0 < b_n < a_{n+1}$

$\forall x \in (a, b)$, $\exists n$ 使得 $a_n < x < b_n$, $\therefore f(x)$ 在 (a, b) 上取

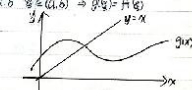
最小值自己证明

这与和及在 $[a, b]$ 上有界, 但值不取, $\therefore f$ 在 $[a, b]$ 上无界
 注: 函数有界 \rightarrow 有最值, 如 $g(x) = x, x \in (0, 1)$ 与 $x < 2$
 定理 2 若 $f(x) \in C[a, b]$ 则 $f(x)$ 有最大值和最小值 (最值原理)
 证: 用反证法, 由 $f(x)$ 有界 $\rightarrow f(x)$ 有上确界 $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$
 即 $f(x) \leq M, \forall x \in [a, b], M - f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$
 令 $g(x) = M - f(x) \in C[a, b]$, 故 $g(x)$ 有界 $\rightarrow g(x)$ 有上确界 $K > 0, g(x) < K$
 $\rightarrow M - f(x) < K \rightarrow f(x) > M - K$ 这与 M 是 $f(x)$ 的上确界矛盾
 $\therefore \exists x_0 \in [a, b]$ 使 $f(x_0) = M$, 即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值. 类似可证和最小值的存在性
 定义: 设 $f(x)$ 在点集 I 上有界, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使 $f(x)$ 在 I 上的值域落在 $[M - \epsilon, M + \epsilon]$ 内, 则称 $f(x)$ 在 I 上取得最大值 M
 定理 3 (零点原理) 设 $f(x) \in C[a, b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$
 证: 不妨设 $f(a) < 0, f(b) > 0$, 取 $[a, b]$ 的中点 $\frac{a+b}{2}$
 若 $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ 则 $a < \frac{a+b}{2} < b$; 若 $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ 则 $a < \frac{a+b}{2} < b$
 若 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ 则 $\xi = \frac{a+b}{2}$
 若 $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ 与 $[a, b]$ 上 $f(a) < 0$ 矛盾
 若 $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ 与 $[a, b]$ 上 $f(b) > 0$ 矛盾
 取 $[a, b]$ 的中点 ξ_1 , 若 $f(\xi_1) > 0$ 则 $a < \xi_1 < \frac{a+b}{2} < b$
 若 $f(\xi_1) < 0$ 则 $a < \frac{a+b}{2} < \xi_1 < b$
 若 $f(\xi_1) = 0$ 则 $\xi = \xi_1$
 如此下去, 得到区间 $[a_n, b_n] (n=1, 2, \dots)$ 满足:
 ① $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ ② $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ ③ $\xi_n \in (a_n, b_n)$
 ④ $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 都等于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+b}{2^n} = a = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+b}{2^n} = a = b$
 $a = a_n < b_n = b, \therefore f(x)$ 在点集 I 上 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(a) = f(b)$
 又 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0, \lim_{x \rightarrow b} f(x) > 0, f(a) = 0$
 定理 4 (介值原理) 设 $f(x) \in C[a, b], x_1, x_2 \in [a, b]$ 满足 $f(x_1) < \eta < f(x_2)$



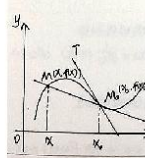
开区间转闭区间的办法
 由闭+开区间
 为补充定义

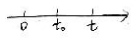
则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = \eta$
 证: 令 $g(x) = f(x) - \eta$, 则 $g(x) \in C[a, b]$, 不妨设 $f(a) < \eta < f(b)$, 由零点原理
 $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $g(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) = \eta$
 例: 设 $f(x) \in C[a, b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$, 又 $f(x) \in C[a, b]$ 使 $f(x) > 0$, 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值
 证: 令 $g(x) = f(x), x \in [a, b]$, 则 $g(x) \in C[a, b]$ 由最值原理
 $\exists \xi \in [a, b]$ 使 $g(\xi) = M$ 即 $f(\xi) = M$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值
 若 $M = f(a) = f(b) = 0$, 则 $f(x) \leq 0$ 且 $f(x) > 0$ 矛盾
 $\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M
 ② $M = f(c)$, 则在 C 上取最大值 M
 证法
 $f(x)$ 有解 $\rightarrow g(x) = x$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ 若 $g(x) = x$ 得解, 若 $g(x) = x$ 则 $x = g(x)$, 若 $g(x) = x$ 得解
 若 $g(x) = x$ 则 $x = g(x)$
 例 2: 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(a) > 0, f(b) < 0$, 则必存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$
 (零点原理)
 证: 令 $g(x) = f(x) - \eta$, 则 $g(a) = f(a) - \eta > 0, g(b) = f(b) - \eta < 0$
 $\therefore g(x) \in C[a, b]$ 由零点原理 $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $g(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) = \eta$
 $\therefore f(x) = \eta$



第三章 导数与微分

问题 1: 曲线的切线 (斜率) 问题
 如图, 设 $f(x)$ 为一直线, $M(x_0, f(x_0))$ 为曲线上一点, 过 M 作曲线的切线
 在任意一条割线 MM_1 中, $M_1(x_1, f(x_1))$ 割线斜率 $k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
 若 $\lim_{x_1 \rightarrow x_0} k$ 存在, 则规定此极限为 $f(x)$ 在 M 点处的切线斜率





问题2. 变速直线运动的速度问题

$$s = s(t) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{2} g(t + t_0)$$

导数定义

定义1: 设 \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 点的邻域内有定义, 给 \$x\$ 一个增量 \$\Delta x\$, 相应地有一个函数增量 \$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0) - f(x_0)\$ 若极限 \$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\$ 存在, 则称 \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 点可导, 此极限称为 \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 点的导数, 记为 \$y'|_{x=x_0} = f'(x_0)\$

定义2: 若 \$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\$ 存在, 称之为 \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 点的右导数, 记为 \$y'|_{x=x_0} = f'_+(x_0)\$, 若 \$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\$ 存在, 称之为 \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 点的左导数, 记为 \$y'|_{x=x_0} = f'_-(x_0)\$, 点 \$x_0\$ 的导数统称为单侧导数

说明: 当 \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 的邻域内有定义, \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 点可导 \$\Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)\$

当 \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 的邻域内可导, \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 点可导, 且 \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 点连续, 则 \$f(x)\$ 在 \$x_0\$ 点可导, 且 \$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\$

比如 \$f(x) \in C[a, b]\$, 此时 \$f(x)\$ 在 \$a\$ 点可导, 导数是 \$f'(a) = f'_+(a)\$

例1: 若 \$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\$ 存在, 此极限值 \$= f'(0)\$

若 \$\lim_{x \rightarrow 0} n[f(x) - f(0)]\$ 存在, 此极限值 \$= f'(0) \cdot x\$

定义3: 设 \$f(x)\$ 在点集 \$I\$ 上每一点都可导, 则其导数又构成 \$I\$ 上的一个新的函数, 记为 \$f(x)\$ 在 \$I\$ 上的导函数, 记为 \$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}\$, 若 \$I = [a, b]\$, 则 \$f'(x) = \frac{dy}{dx}\$, \$f'(a)\$, \$f'(b)\$

3 导数的意义

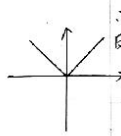
(1) \$y'|_{x=x_0} = f'(x_0)\$ 表示曲线 \$y = f(x)\$ 在 \$(x_0, f(x_0))\$ 点处的切线斜率

切线方程: \$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\$ 法线方程: \$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\$ (若 \$f'(x_0) = 0\$, 切线 \$y = f(x_0)\$, 法线 \$x = x_0\$)

(2) \$y'|_{x=x_0} = f'(x_0)\$ 是变速直线运动 \$y = f(x)\$ 在 \$x_0\$ 时刻的瞬时速度

与连续的关系: 可导 \$\Rightarrow\$ 连续, 反之不成立

若 \$f(x) \in C^1\$, \$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha\$, \$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0 \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \beta\$, \$\beta = o(\Delta x)\$



\$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Rightarrow f(x)\$ 在 \$x_0\$ 点连续

反例: \$y = f(x) = |x| \Rightarrow \int_{-1}^1 x dx = 0, x \ge 0 \quad f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}\$

§2.2 导数基本公式和导数四则运算

1 导数公式

- (1) \$(C)' = 0\$
 - (2) \$(x)' = 1\$
 - (3) \$(x^n)' = nx^{n-1}\$
 - (4) \$(a^x)' = a^x \ln a\$
 - (5) \$(e^x)' = e^x\$
 - (6) \$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\$
 - (7) \$(\ln x)' = \frac{1}{x}\$
 - (8) \$(\sin x)' = \cos x\$
 - (9) \$(\cos x)' = -\sin x\$
 - (10) \$(\tan x)' = \sec^2 x\$
 - (11) \$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x\$
 - (12) \$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\$
 - (13) \$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\$
 - (14) \$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\$
 - (15) \$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}\$
- 证: (3) \$(x^n)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = x_0^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x_0})^n - 1}{\frac{\Delta x}{x_0}} = x_0^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + n\frac{\Delta x}{x_0} + \dots - 1}{\frac{\Delta x}{x_0}} = nx_0^{n-1}\$
- (4) \$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \ln a\$
- (12) \$(\arcsin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x_0 + \Delta x) - \arcsin x_0}{\Delta x}\$
- 令 \$y = \arcsin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\$, \$\Delta y = \arcsin(x_0 + \Delta x) - \arcsin x_0 = \arcsin(x_0 + \Delta x) - y\$
- \$-y \quad x + \Delta x = \sin(y + \Delta y) \Rightarrow \Delta x = \sin(y + \Delta y) - \sin y\$
- \$(\arcsin x)' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\sin(y + \Delta y) - \sin y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\frac{\sin(y + \Delta y) - \sin y}{\Delta y}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\$

2 导数的四则运算法则

- 定理: 设 \$f(x), g(x)\$ 可导, (1) \$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)\$
- (2) \$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\$ (3) \$\frac{f(x)}{g(x)}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\$ (若 \$g(x) \neq 0\$)
- 证: (2) \$[f(x)g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) + f(x_0)(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\$

14) $[k f(x)]' = k f'(x)$ 15) $[\frac{1}{g(x)}]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
 16) $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$
 $(\prod_{i=1}^n f_i)' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_{n-1}'$
 例1: 设 $u = x(x+1)(x+2)\dots(x+n)$, 求 $u'|_{x=0}$ 100!

§ 3.3 复合函数求导法及其逆

1. 复合函数求导公式
 定理: 设 $y = f(u)$ 可导, $u = g(x)$ 可导, 且 $f(g(x))$ 在 x 的邻域内有意义, 则 $y = f(g(x))$ 可导, 且 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, 即 $[f(g(x))]' = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

证: 设 $u = g(x)$, $u = g(x) = \sin(x)$, $y = f(g(x)) = \sin(x)$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\epsilon \in \mathbb{R}$
 ① $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot g'(x)$
 证明: $y = f(u)$ 可导, $f'(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f(u)}{\Delta u} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$
 $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) \approx f'(u) \Delta u$ ② $f'(u) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

规定: 当 $\Delta u = 0$ 时 $\Delta u = 0$, 此时 $g(x)$ 仍在 u 的邻域内
 $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) \approx f'(u) \Delta u$ ③ 当 $\Delta u \neq 0$ 时, 则 $\Delta u \neq 0$
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

例1: $y = e^{\sin x}$, 求 $y' = e^{\sin x} \cdot \cos x = 2x \cdot \frac{1}{x}$
 例2: 设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 求 $y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 公式: $[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 例3: $y = f(\frac{x}{x^2 + 2})$, $f(x) = \arcsin x$, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = \frac{3}{2}$

2. 反函数求导公式
 设 $y = f(x)$ 与 $x = g(y)$ 互为反函数
 $(y)'_y = [f(x)]'_x \Rightarrow 1 = f'(x) \cdot \frac{dx}{dy} = f'(x) \cdot g'(y)$
 从而有当 $y = f(x)$ 可导且 $f'(x) \neq 0$, 有 $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ - 互为倒数关系

例4: 求 $(\arctan x)'$
 3. 参数函数求导公式

设 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$
 方法: 对 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 的两端同时对 t 求导
 $(x)'_t = (\varphi(t))'_t = \varphi'(t)$ 消去 $\frac{dt}{dx}$ 得公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, 这里
 $(y)'_t = (\psi(t))'_t = \psi'(t)$ \Rightarrow 要求 $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 都存在且 $\varphi'(t) \neq 0$
 公式: $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$
 例5: 设 $x = \ln(t+1)$, $y = t^2 + 3t + 1$, 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{2t+3}{\frac{1}{t+1}} = \frac{2(t+1)^2}{t+1}$

4. 隐函数求导方法
 设 $x^2 + xy + y^2 = \sin(xy)$ 确定了一个隐函数 $y = y(x)$, 求 y'
 方法: 将 $y = y(x)$ 代入方程得到恒等式: $x^2 + xy(x) + y^2(x) = \sin(xy(x))$
 再对此等式左、右两端同时对 x 求导
 $2x + y(x) + x y'(x) + 2y(x) y'(x) = \cos(xy(x)) (y'(x) + x^2 y'(x) y'(x))$
 $\therefore y'(x) = \frac{y'(x) \cos(xy(x)) - 2x - y(x)}{x + 3y(x) - 2x y'(x) \cos(xy(x))}$
 例6: 设 $x e^{\sin y} = e^y$ 确定了一个隐函数 $y = y(x)$, 求 $y' = \frac{1}{x(1-\cos y)}$

5. 幂指函数求导公式
 $(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \ln f(x)})' = f(x)^{g(x)} (g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)})'$

注: $(f(x))' = f(x) (\ln f(x))'$ - 用此公式, 当 $f(x)$ 中因于多时, 各根号时乘除变加減, 此公式中, $f(x) < 0$ 也适用
 例8: 设 $y = \sqrt{\frac{(x^2+1)(x^2+1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+1)(x^2+1)}}$, 求 $y' = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{5(x^2+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

§3.4 高阶导数

1. 高阶导数

定义: 设 $y=f(x)$ 在 I 上可导, 且 I 上的导函数 $y=f'(x)$ 也可导, 则称 $y=f''(x)$ 为 $y=f(x)$ 的二阶导数, 记为 $y''=f''(x)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$.
若 $y=f'(x)$ 也可导, 则称 $y=f''(x)$ 为 $y=f(x)$ 的三阶导数, 记为 $y'''=f'''(x)$.
以此类推, 可以定义 $y=f(x)$ 的 n 阶导数, 记为 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$.

例1: 设 $f(x), g(x)$ 互为反函数, 且 $f(x)$ 有二阶导数, 求 $g''(x)$.
解: 设 $y=f(x), x=f(y), y'=g'(x)=\frac{1}{f'(y)}$.
 $y''=g''(x)=\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(y)} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{f'(y)} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{f''(y)}{(f'(y))^2} \cdot \frac{1}{f'(y)}$
 $= -\frac{f''(y)}{(f'(y))^3} \quad y''=g''(y') = \frac{d}{dy} (y') \frac{dy}{dx} = \left(-\frac{f''(y)}{(f'(y))^2} \right) \cdot \frac{1}{f'(y)}$
后化简

例2: 设 $x^{2008}=e^y$ 确定了一个隐函数 $y=y(x)$, 求 y'' .
 $y = \ln(x^{2008}) \quad y' = \frac{1}{x} \cdot 2008x^{1999} = \frac{2008}{x}$
 $y'' = -\frac{2008}{x^2}$

例3: 设 $y = \arctan x$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.
 $y = \frac{1}{2} - 2x$
解: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left((1+x^2)^{-1} \right) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

例4: $(f \circ g)' = (f'(g(x))g'(x)) = f'(g(x))g'(x)$

2. 高阶导数公式
用数学归纳法证明如下高阶导数公式:
(1) $[f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$
(2) $(kf(x))^{(n)} = k f^{(n)}(x)$
(3) $[f(x)g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x)g(x) + n f^{(n-1)}(x)g'(x) + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}(x)g''(x) + \dots + \frac{n!}{(n-k)!} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) + \dots$

$+ (f^{(k)}(x))^{(n-k)} + \dots + f(x)g^{(n)}(x)$ - 莱布尼兹公式

特殊函数

(4) $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$

下面给出基本初等函数的高阶导数公式

(5) $(c)^{(n)} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(6) $(x^n)^{(n)} = n! \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(7) $(x^n)^{(n-1)} = n!x$

(8) $(x^n)^{(n-2)} = \frac{n!}{2}x^2$

(9) $(e^x)^{(n)} = e^x$

(10) $(a^x)^{(n)} = \ln^n a \cdot a^x$

例1: 设 $y = \sin x - \sin 2x - \sin 3x$, 求 $y^{(10)}$ 用微化和套公式

解: $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \sin x = \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x$

$\therefore y^{(10)} = \frac{1}{2} \cdot 4^{10} \sin(4x + \frac{9\pi}{2}) - \frac{1}{2} \cdot 2^{10} \sin(2x + \frac{9\pi}{2}) + 2^{10} \sin(x + \frac{9\pi}{2})$

例2: 设 $y = (1+x)^x$, 求 $y^{(n)}$

解: $y^{(n)} = (e^{x \ln(1+x)})^{(n)} = (e^x)^{(n)} \cdot \ln^n(1+x) + (e^x)^{(n-1)} \cdot n \ln^{n-1}(1+x) + \dots$

例3: 设 $y = e^{\cos \sqrt{x}}$, 求 $y^{(n)}$ 按规律 用 $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2+b^2} \sin(x+\varphi)$

$y = 2e^{200} (\sqrt{5}x + \frac{\pi}{3})$ 猜 $y^{(n)} = 2^n e^{200} (\sqrt{5}x + \frac{\pi}{3})^n$ 用数学归纳法

§3.5 微分

1. 微分的概念

定义: 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 给 x_0 一个增量 Δx , 相应的函数增量 Δy 满足: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k \Delta x + o(\Delta x)$ (k 是一个常数), 则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微, k 为 $dy|_{x_0} = k \Delta x$

注: $dy|_{x_0} = k \Delta x$ 是 $y=f(x)$ 的一个线性函数 (k 是和 Δx 和 x_0 有关的常数)

当 $\Delta x \rightarrow 0$, 有 $\Delta y \rightarrow 0$ 从而 $\Delta y = dy + o(\Delta x) \rightarrow 0$ (可微 \Rightarrow 连续)
 当 $k \neq 0$ $\Delta y = k \Delta x + o(\Delta x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 1$ ($\Delta x \rightarrow 0$)
 $\Rightarrow \Delta y \sim dy$, dy 是 Δy 的线性主部

定义: 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内每一点都可微, 则其微分为 dx 构成 dx 一个新的函数, 称之为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的微分 (函数), 记为 $dy = k \Delta x + o(\Delta x)$ (k 为关于 x 的函数)
 直线 $y=ax+b$ $dy=dx$ ($dy=dx+0, \Rightarrow ax=dy$)
 特别地, 取直线 $y=x$ $dx=dx$
 所以 $dy = k(x) \Delta x = k(x) dx$
 若 $y=f(x)$ 可微 $dy = dy + o(\Delta x) = k(x) \Delta x + o(\Delta x) \Rightarrow k(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
 $\Rightarrow k(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx}$, $\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx}$ 存在, 从而 $f(x)$ 存在 $\Rightarrow f(x) = k(x)$, \therefore
 可微 \Rightarrow 可导且 $f'(x) = k(x)$
 反之, 若 $f(x)$ 可导, 则 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, 从而 $\Delta y = f'(x) \Delta x + o(\Delta x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} o(\Delta x) = 0$
 $\Rightarrow \Delta y = f'(x) \Delta x + o(\Delta x) = f'(x) \Delta x + o(\Delta x)$, $\therefore f(x)$ 在 x_0 处可微且 $dy = f'(x) dx$

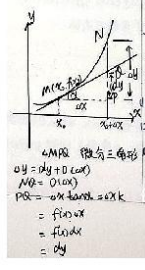
2. 可微与可导的关系
 定理: $f(x)$ 可导 $\Leftrightarrow f(x)$ 可微, 且 $dy = f'(x) dx = f'(x) \Delta x$

注: $dy = f'(x) dx$ - 乘法运算
 $\therefore dx = dx$ 且 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ - 除法运算

3. 微分的几何意义
 $dy = f'(x) dx$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 x 处的切线增量

4. 微分运算
 设 $[f(x) \pm g(x)]' = [f'(x) \pm g'(x)] dx = (f'(x) \pm g'(x)) dx = df(x) \pm dg(x)$
 (1) $d[f(x)g(x)] = (f'g + fg') dx = f'g dx + fg' dx = f'g dx + g'f dx$
 (2) $d(\frac{f(x)}{g(x)}) = (\frac{f'g - fg'}{g^2}) dx = \frac{f'g - fg'}{g^2} dx = \frac{g'f - fg'}{g^2} dx$

5. 微分形式的不变性
 设 $y=f(u)$ 可微, u 为自变量, 则 $dy = f'(u) du$



△MPQ 微分三角形
 $MP = dy = f'(x) dx$
 $PQ = dx$
 $MQ = \Delta y = f(x) dx$
 $MP = \Delta y = f'(x) dx$
 $PQ = dx$
 $MQ = \Delta y$

12) 若 $u=g(x)$ 可微, 则 $f(g(x))$ 可微且 $d(f(g(x))) = f'(g(x)) g'(x) dx = f'(g(x)) dg(x) = f'(u) du$

设 u 是自变量 $du=dx$, 而当 u 是中间变量时, $- \Delta u + du, du = du + o(\Delta u)$ 与 u 同类

例1: 设 $y = e^{\sin \arctan x}$, 求 dy
 解: $dy = e^{\sin \arctan x} d(\sin \arctan x) = e^{\sin \arctan x} \cos \arctan x d(\arctan x)$
 $= e^{\sin \arctan x} \cos \arctan x \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{e^{\sin \arctan x} \cos \arctan x}{1+x^2} dx$

例2: 设 $y = e^{\sin x}$, 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin x} \cos x}{1} = e^{\sin x} \cos x$

例3: $d(\sin x) = \cos x dx$

例4: 设 $f(x)$ 对任何变量 x 满足: $f(x+y) = f(x)f(y)$ 且 $f'(0)=1$, 证明 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可导

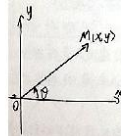
证: 令 $x_0 = x_0 + 0, f(x_0) = f(x_0)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$
 (1) 当 $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x)f(0) = 0, \therefore f(x) = 0$ (舍去)
 (2) 当 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
 $= f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f(x_0) f'(x_0) = f(x_0)$

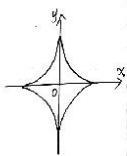
补充内容:
 1. 极坐标
 在直角坐标系平面上建立一个新的坐标系, 原点仍为极点, 且与 x 轴称为极轴, 也叫极坐标轴, 点 M 的极坐标为 (r, θ) , $r = |OM|$ 为极径, θ 为极角, 逆时针旋转到与 OM 重合时轴过的角度, r - 极径, θ - 极角

2. 极坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & r > 0 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

3. 直角坐标曲线与极坐标曲线方程





① $F(x, y) = 0$ 是由极坐标方程 $\Rightarrow r = f(\theta) \Rightarrow r \sin \theta = 0$

② $r = f(\theta)$ 是由极坐标方程 $\Rightarrow \begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$

例如: $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r = |a|$

$r = 1 - \cos \theta \Rightarrow \begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$ 其中 $y' = \sqrt{x^2 + y^2} - x$

例1: 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) 上无端点处切线位于两坐标轴间的长度 l

由 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}, 0 \leq \theta < 2\pi$

令 $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$ 则 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a \cos^3 \theta)^{\frac{2}{3}} + (a \sin^3 \theta)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^{\frac{2}{3}}$

$\therefore \begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos^2 \theta \\ y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \sin^2 \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos^2 \theta \\ y = a \sin^2 \theta \end{cases}, 0 \leq \theta < \pi$

例2: 求三叶玫瑰线 $r = a \sin 3\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 对应点处的切线方程

解: 曲线在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 一点处的极角坐标为 $(x, y) = (a \sin 3\theta \cos \theta, a \sin 3\theta \sin \theta) = (\frac{3}{2}a, \frac{3\sqrt{3}}{2}a)$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a(3\cos 3\theta \sin \theta + \sin 3\theta \cos \theta)}{a(3\cos 3\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin \theta)} = \frac{3\cos 3\theta \sin 4\theta}{3\cos 3\theta \cos 4\theta - \sin 3\theta \sin 4\theta}$

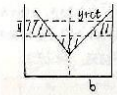
$\therefore y'_{\theta=\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3}$ 所在点的坐标为 $(\frac{3}{2}a, \frac{3\sqrt{3}}{2}a) = -\sqrt{3}(x - \frac{3}{2}a)$ 即 $y = -\sqrt{3}x + 2a$

例子: 设有一个顶角为 α 的倒圆锥体, 以速度 C 角速度 ω 旋转, 求圆锥体被水浸没 A 米深时, 圆锥体水面上升的速度

解: 设 t 表示时间, t 小时圆锥体顶点距水平面 h 米, 过 t 时刻, 水平面升的高度为 y 米, 则

$\frac{y}{h} = \frac{Ct}{\omega h} \Rightarrow \pi(y + Ct)^2 (y + Ct) = \pi h^3$

令 $y + Ct = a$ 代入得 $y' / (\omega + C) = -\frac{3h^2}{3h} = -h$



例4: 若 $f(x)$ 存在则正确的有 () ABC
连续性也会有
(A) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是偶函数
(B) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 是奇函数
(C) 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f(x)$ 也是周期函数 $f(x+\pi) = f(x)$
(D) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 也是奇函数 $f(x) = \sin \frac{x}{2}, f(x) = -\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}$

例5: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0, f(x) + b \sin x - f(0) = O(x^2)$, 求 a, b .

解: $\lim_{x \rightarrow 0} (af(x) + b \sin x - f(0)) = 0 \Rightarrow af(0) + b \sin 0 - f(0) = 0 \Rightarrow a f(0) - f(0) = 0 \Rightarrow a = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{af(x) + b \sin x - f(0)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [a \frac{f(x) - f(0)}{x} + b \frac{\sin x - 0}{x}] = 0$
 $= a f'(0) + b = 0 \Rightarrow a + b = 0$
 $\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

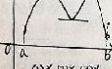
第四章 微分中值定理

§4.1 中值定理



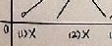
罗尔定理
定理1: 设 $f(x)$ 满足: (1) $f(x) \in C[a, b]$, (2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, (3) $f(a) = f(b)$
则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 或方程 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 内有根

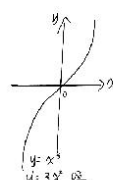
注: ① 罗尔定理有前提, 不是必要条件
定义: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 的区间内有定义, 若 $f(x)$ 在该区间内取得极大(小)值, 称 x 为极大(小)值点



证明: $\because f(x) \in C[a, b], \therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有极大值和极小值 M, m
若 $M = m$, 则 $f(x) = M$ 从而 $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$

若 $M \neq m, \exists f(x) = M, \therefore$ 极大值和极小值至少有一个在 (a, b) 内取得
不妨设 $M \neq m$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $M = f(\xi)$, 又由 $f(\xi)$ 存在





$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ (极限保序性)
 $f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$
 又 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
 2. 费马引理
 定理 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导且 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$
 费马定理: $x^2 + 1 = 2$ $n \geq 2$ 时该方程无实数解
 例 1. 设 C_1, C_2, \dots, C_n 为任意 n 个实数, 证明三角方程 $C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + \dots + C_n \cos nx = 0$ 在 $(0, \pi)$ 内有 n 个根.
 证明: 令 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + \dots + C_n \cos nx$, $x \in (0, \pi)$
 $f(0) = C_1 + C_2 + \dots + C_n$, $f(\pi) = C_1 - C_2 + \dots - C_n$
 $f(0) - f(\pi) = 2C_2 + 2C_4 + \dots + 2C_n$ 由罗尔定理知, 在 $(0, \pi)$ 内至少存在 $n-1$ 个 ξ 使得 $f'(\xi) = 0$.
 例 2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) = f'(b) = 0$, 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = 0$.
 证明: 令 $F(x) = f(x) - f(a)$, 则 $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\eta \in (a, b)$ 使得 $F'(\eta) = 0$.
 又 $F'(a) = F'(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, \eta)$ 使得 $F''(\xi) = 0$.
 例 3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = 0$.
 证明: 令 $F(x) = f(x) - f(a)$, $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\eta \in (a, b)$ 使得 $F'(\eta) = 0$.
 又 $F'(a) = F'(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, \eta)$ 使得 $F''(\xi) = 0$.

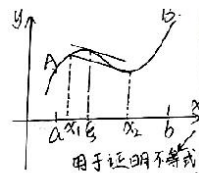
应使用3次
 罗尔定理
 费马引理
 构造辅助函数
 例 2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = 0$.
 证明: 令 $F(x) = f(x) - f(a)$, $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\eta \in (a, b)$ 使得 $F'(\eta) = 0$.
 又 $F'(a) = F'(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, \eta)$ 使得 $F''(\xi) = 0$.

例 4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$ 且 $f'(a) = f'(b) = 0$.
 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = 0$.
 证明: 令 $F(x) = f(x) - f(a)$, $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\eta \in (a, b)$ 使得 $F'(\eta) = 0$.
 又 $F'(a) = F'(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, \eta)$ 使得 $F''(\xi) = 0$.

费马引理使用
 例 5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.
 证明: 不妨设 $f(x) > 0, f'(a) < 0$.
 $0 < f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow \exists \eta \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$
 $0 > f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \rightarrow \exists \eta \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0 \Rightarrow f(x) > f(b)$
 $\therefore f(b)$ 不是最大值
 又 $f(a) \in C(a, b)$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 $M = f(\xi)$, $\xi \in (a, b)$
 $\therefore f'(\xi) = 0$ 即为所求. 由费马引理有 $f'(\xi) = 0$.

导数不连续上层的
 理也适用
 例 6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.
 证明: 令 $F(x) = f(x) - f(a)$, 则 $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\eta \in (a, b)$ 使得 $F'(\eta) = 0$.
 又 $F'(a) = F'(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, \eta)$ 使得 $F''(\xi) = 0$.

3. 拉格朗日中值定理 (微分中值定理)
 例 7. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
 证明: 令 $F(x) = f(x) - kx$, 令 $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
 证毕. 拉格朗日中值定理.



拉格朗日中值定理的一般形式:

设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, $\forall x, x_0 \in (a, b)$ $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \quad \xi \in (x_0, x) \cup (x, b)$

例1: 证明: $\sin x < x < \frac{x}{\cos x}$

证: $\frac{\sin x - 0}{x - 0} = \cos \xi < 1, 0 < \xi < x < \frac{x}{\cos \xi} \therefore \sin x < x$

用于证明不等式

转换为 $f(x)$

例2: 证明: $\frac{1}{1+n} < \ln(1+n) < \frac{1}{n}$
 证: 令 $h(t) = \frac{1}{1+t} - \ln(1+t)$ $h'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} < 0$ $n < \xi < n+1$
 $\therefore \frac{1}{1+n} < h(n) < \frac{1}{n}$

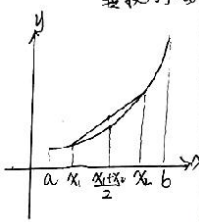
例3: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 证明: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$

证: 不妨设 $x_1 < x_2$. $[f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})] - [f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)]$
 $= f'(\xi_2) \cdot \frac{x_2 - x_1}{2} - f'(\xi_1) \cdot \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]$
 $= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)f''(\xi_3)(\xi_2 - \xi_1) \quad x_1 < \xi_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < \xi_2 < x_2 < \xi_3 < x_2$
 > 0

例4: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导且无界, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内也无界

分析: $|f'(\xi)| = \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| > M$
 $\Rightarrow \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| > \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{b-a} > M$
 证明: $\forall M > 0$, 取定 $x_0 \in (a, b)$, $\therefore f(x)$ 在 (a, b) 内无界, $\therefore \exists x_1 \in (a, b)$ 使 $|f(x_1)| > |f(x_0)| + M(b-a)$ 则有 $\frac{|f(x_1) - f(x_0)|}{b-a} > M$
 $\therefore \left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| > \frac{|f(x_1) - f(x_0)|}{b-a} > M \quad \therefore \exists \xi \in (a, b)$ 使 $|f'(\xi)| = \left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| > M$
 即 $f(x)$ 在 (a, b) 内也无界

命题: $f(x)$ 在 (a, b) 内有界 $\Rightarrow f'(x)$ 在 (a, b) 内无界
 证: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界, 即 $\exists M > 0, \forall x \in (a, b)$ 有 $|f(x)| \leq M$
 $\forall x \in (a, b)$, 取定 $x_0 \in (a, b)$
 $|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)|$
 $= |f'(\xi)(x - x_0)| + |f(x_0)| \leq M(b-a) + |f(x_0)|, \therefore f(x)$ 在 (a, b) 内有界



拉格朗日中值定理推论:

推论1: $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) = C, C$ 为常数

推论2: $f'(x) = g(x) \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + C, C$ 为常数

证明: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

证: $(\sin^2 x + \cos^2 x)' = 0 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = C$ 令 $x=0$ 代入得 $C=1$

例5: 证明: $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$

证: $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \arctan \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

证明题常用
 逆否命题
 逆命题
 原命题
 否命题
 充要条件
 充分条件
 必要条件
 充分必要条件

拉格朗日中值定理

定理4: 设 $f(x), g(x)$ 满足: (1) 在 $[a, b]$ 上连续; (2) 在 (a, b) 内可导; (3) $f'(x) \neq g'(x)$ 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $\frac{f'(\xi) - f(a)}{g'(\xi) - g(a)}$

几何意义: 拉格朗日中值定理的差函数形式

证: 令 $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - k$ $F(x) = f(x) - f(a) - k(g(x) - g(a)) = F(x)$

$F(a) = f(a) - f(a) - k(g(a) - g(a)) = 0$ $F(b) = f(b) - f(a) - k(g(b) - g(a)) = F(b)$

\therefore 由罗尔定理, $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) - k g'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi) - f(a)}{g'(\xi) - g(a)} = k$

洛必达法则

1. 初等函数不定式 (7种)

2. 初等函数不定式 (1种)

3. 初等函数不定式 (1种)

4. 初等函数不定式 (1种)

5. 初等函数不定式 (1种)

6. 初等函数不定式 (1种)

7. 初等函数不定式 (1种)

(3) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow \infty$, 则 $\lim f(x)g(x)$ 为 "0·∞" 型
 (4) $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同号, 则 $\lim(f(x)g(x))$ 为 "∞·∞" 型
 (5) $f(x) \rightarrow 1, g(x) \rightarrow \infty$, 则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为 "1[∞]" 型
 (6) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$, 则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为 "0⁰" 型
 (7) $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow 0$, 则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为 "∞⁰" 型

2. 洛比达法则

定理: 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或 ∞ , 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
 或 ∞ , 则称之为洛比达法则

证明: (1) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或 ∞
 补充定义: 在 $f(x) = g(x) = 0$ 处, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都连续
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或 ∞
 特殊 (洛必) 一般 (洛必)

注: 洛比达法则只能求奇 (极限), 不能求元 (极限)

例: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \rightarrow$ 极限不存在

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或 ∞
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t)}{g'(t)}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

例1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$
 例2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3$
 例3: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x}{2x} = \frac{1}{2}$
 例4: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
 解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
 注: "1[∞]" "0⁰" 利用泰勒公式或 e^x 将式化成不定式 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

例5: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{x^2 + 5x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln \frac{x^2 + 5x}{2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x + 5}{2x}}{1} = e^{\frac{1}{2}}$

例6: $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{1} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^0 = 1$

例7: $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 3\sqrt{x} + 4) = 4$
 解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3\sqrt{x} + 4}{1} = 4$

例8: 求抛物线 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的中值点 ξ
 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$
 $a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = 2a\xi(x_2 - x_1) + b(x_2 - x_1)$
 $\Rightarrow a(x_2 + x_1) + b = 2a\xi + b \Rightarrow \xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$

例9: 设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上二阶可导, 且 $f(0) = 0$, 由拉格朗日中值定理, $\exists \xi_1 \in (0, x)$ 使 $f(x) = f'(\xi_1)x$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi_1) = f'(0)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\xi_2)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{f'(0)}{1} = f'(0)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)(x - 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\xi_2)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{f'(0)}{1} = f'(0)$

例10: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$ 提示: 无穷小等价替换 $\ln(1 + u) \sim u$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 - (1 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{-2x}$

例11: 设 $f(x)$ 在 a 的邻域内可导, 则 $f'(a)$ 的几何意义 ()
 (A) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, 则 $f'(a)$ 在 a 点处切线
 (B) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在, 则 $f'(a)$ 是 $f(x)$ 的切线
 (C) 若 $f'(a)$ 存在, 则 $f'(a)$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) 若 $f(x)$ 在某点 x_0 处 $f'(x_0) < 0$ 则 $f(x)$ 在该点附近是减函数
 (A) $f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ 记作 $f'(x_0)$
 (B) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, x_0 是 $f(x)$ 的可导点, 若 $f(x)$ 在某点 x_0 处不可导, 则 $f'(x_0)$ 不存在
 左导数 $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 右导数 $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
 $\therefore f(x) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

§4.3 泰勒公式

1. 多项式 $H_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
 $a_0 = H(0), a_1 = H'(0), a_2 = \frac{H''(0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{H^{(n)}(0)}{n!}$
 $\therefore H_n(x) = H(0) + H'(0)x + \frac{H''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{H^{(n)}(0)}{n!}x^n$
 $f(x) \approx P_n(x)$ 设 $f(x)$ 在 x_0 点有 n 阶导数
 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
 若 $f(x)$ 在 x_0 点有 n 阶导数, 令 $t = x - x_0$
 $f(x) = f(t+x_0) = g(t)$ 则 $g(t)$ 在 $t=0$ 点有 n 阶导数, $f(x) = g'(t)$
 $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0) + f^{(k)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k}$
 2. 泰勒公式
 设 $f(x)$ 在 x_0 点有 n 阶导数, 则多项式
 $P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
 为 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶泰勒多项式
 称 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点处的泰勒公式余项
 此时 $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$
 $R_n(x) = R_1(x) = R_2(x) = \dots = R_n(x) = 0, R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$n=0$ 时 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x)$
 $n=1$ 时 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + R_2(x)$
 $n=2$ 时 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + R_3(x)$
 $\Rightarrow R_2(x) = O((x-x_0)^3)$
 $\Rightarrow R_n(x) = O((x-x_0)^{n+1})$

定理1: 设 $f(x)$ 在 x_0 点有 n 阶导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 点处的 n 阶泰勒公式余项 $R_n(x) = O((x-x_0)^{n+1})$, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + O((x-x_0)^{n+1})$$

称之为带皮亚诺余项的泰勒公式

证明: $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \dots = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} = 0$

拉格朗日中值定理的(高阶)形式

定理2: (泰勒中值定理) 设 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域内有 $(n+1)$ 阶导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶泰勒公式余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, 其中 ξ 在 x_0 与 x 之间. 此时 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$
 称之为带拉格朗日余项的泰勒公式

证明: 令 $g(t) = (x-x_0)^{n+1}$
 $\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - P_n(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - P_n(x) - g(x) + g(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - P_n(x) - g(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{g(x)}$
 $\frac{f(x) - P_n(x) - g(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - P_n(x) - g(x)}{g(x)}$
 当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$
 $P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
 $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$
 $\therefore \frac{f(x) - P_n(x) - g(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} = 0$

3. 常用的泰勒公式
 (1) $f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x$
 $\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, 0 < \xi < x$
 $\therefore e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}$
 $|R_n| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$
 (例) 利用 e^x 的麦克劳林公式计算 e 的值, 使其误差不超过 10^{-5}
 $\frac{e^\xi}{(n+1)!} < 10^{-5}, n \geq 8$
 证明 e 为无理数

先假设 e 为有理数

若 $e = \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^q}{(n+1)!} \dots$ $0 < \frac{e^q}{(n+1)!} < 1$ (矛盾)

$n! \cdot \frac{p}{q} = (\dots \text{整数}) + \frac{e^q}{(n+1)}$ 矛盾

(2) $f(x) = \sin x$
 $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$ $f^{(0)} = \sin x$, $n=2m$
 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots$ $(-1)^m$, $n=2m+1$
 $f^{(2m+1)}(x) = \cos(x + \frac{2m+1}{2}\pi) = \sin((2m+1)x + \frac{\pi}{2}) = (-1)^m \cos x$

(3) $f(x) = \cos x$ $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$
 $f^{(0)} = \cos x$, $n=2m$
 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + \dots$
 $f^{(2m)}(x) = (-1)^m \cos x$

(4) $f(x) = (1+x)^x$
 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$ $0 < x < 1$
 $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k} x^{k-1}$
 $\frac{f^{(k)}(x)}{k!} x^k = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} x^{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{k-1}$
 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots$

例1 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - 2\sin x$ 是 $O(x^3)$ 的几阶无穷小?
 $O(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \Rightarrow O(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \Rightarrow O(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$
 $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - (1 - x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)) + 2(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3))$
 $= -\frac{1}{2}x^3 + O(x^4) \sim -\frac{1}{2}x^3$

$n=1$ 牛顿二项式展开
 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} (1+O(x)) x^{n+1}$
 $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} x^{n+1}$

高阶泰勒中值定理

例3 设在 $[a, b]$ 上有连续的三阶导数, 且 $f(a)=0, f(b)=0, f'(a)=0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f''(\xi) = 3$

证明: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!}(x-a)^3$
 $\forall x \in [a, b]$, 有 $f(x) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!}(x-a)^3$, $0 < \xi_1 < \xi_2 < x$
 $\forall x \in [a, b]$, 有 $f(x) = f(b) + \frac{f''(\xi_3)}{2!}(x-b)^2 + \frac{f'''(\xi_4)}{3!}(x-b)^3$, $0 < \xi_3 < \xi_4 < x$
 \Rightarrow 也得 $1 = \frac{1}{2}[f''(\xi_1) + f''(\xi_3)] \Rightarrow 3 = \frac{1}{2}[f'''(\xi_2) + f'''(\xi_4)]$
 $\therefore f'''(\xi) \in C[a, b]$ 由连续函数的介值性得 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_4) \subseteq (a, b)$
 使 $f''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\xi_2) + f'''(\xi_4)] = 3$

例4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$, 又 $M = f'(c)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的最大值, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $f''(\xi) \leq \frac{2M}{b-a}$

证明: 将 $f(x)$ 在 $x=c$ 处展成泰勒公式
 $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$
 $\therefore f(c) = M$ 是最大值, $\therefore f(c)$ 是极值
 $\therefore f'(c) = 0$, 由极值原理有 $f''(c) = 0$
 $\therefore x=a, 0 = f(a) = M + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(a-c)^2$
 $x=b, 0 = f(b) = M + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(b-c)^2$
 $\Rightarrow \int f''(\xi_1) = \frac{-2M}{(a-c)^2} = \frac{-2M}{(b-a)^2} \leq \frac{-2M}{(b-a)^2} \Leftrightarrow C \leq \frac{a+b}{2}$
 $\int f''(\xi_2) = \frac{-2M}{(b-c)^2} = \frac{-2M}{(b-a)^2} \leq \frac{-2M}{(b-a)^2} \Leftrightarrow C > \frac{a+b}{2}$

§4.4 极值与最值

1. 函数的单调性

定理1: 设 $f(x) \in C^1(I)$ 且 $f'(x)$ 存在, 则 $f(x) \geq 0$ (或 > 0)
 $f'(x) > 0$ 严格单调
 $f'(x) \geq 0$ 不严格单调

证明: 设 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 由拉格朗日中值定理
 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0 \quad \exists \xi \in (x_1, x_2) \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x) \uparrow (a, b)$

注: $(a, b) \cap [a, b]$

例1: 求 $f(x) = x^2 - 3x + 5$ 的单调区间

解: $f(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$

列表	x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
	$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	$f(x)$	\uparrow		\downarrow		\uparrow

例2: 证明 $(1 + \frac{1}{x})^x \uparrow (0, +\infty)$

证明: $[(1 + \frac{1}{x})^x]' = (1 + \frac{1}{x})^x (x \ln(1 + \frac{1}{x}))'$
 $= (1 + \frac{1}{x})^x (x \ln(1 + \frac{1}{x}) + x \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}))$
 $= (1 + \frac{1}{x})^x (x \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}) > 0$

令 $f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = f(x) \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

$x < \xi < x + 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \therefore (1 + \frac{1}{x})^x \uparrow (0, +\infty)$

例3: 设 $f(x) < 0, f(0) = 0, x \in [0, +\infty)$ 证明 $\frac{f(x)}{x} \downarrow (0, +\infty)$

证明: $(\frac{f(x)}{x})' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$ 令 $g(x) = f'(x)x - f(x), x \in [0, +\infty)$

$g'(x) = f''(x)x < 0, \text{ 当 } x > 0$

$\because g(x)$ 在 $x=0$ 点连续 $\therefore g(x) \downarrow [0, +\infty)$

\therefore 当 $x > 0$ 有 $g(x) < g(0) = 0$

\therefore 当 $x > 0$ 时 $(\frac{f(x)}{x})' < 0$ 从而 $\frac{f(x)}{x} \downarrow (0, +\infty)$

例4: 设 $b > a > e$, 证明 $a^b > b^a$

证明: 令 $f(x) = x \ln a - a \ln x, x \in [a, +\infty)$

$f'(x) = \ln a - \frac{a}{x} > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow [a, +\infty)$

\therefore 当 $x > a$ 有 $f(x) > f(a) = 0 \Rightarrow x \ln a > a \ln x$

令 $x = b$ 有 $b \ln a - a \ln b > 0 \Rightarrow a^b > b^a$

例5: 求方程 $(x^2 - 2x)e^x + (\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}} = 0$ 实根个数

解: 令 $f(x) = (x^2 - 2x)e^x + (\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}}$

$f'(x) = (x^2 - 2x)'e^x + (x^2 - 2x)e^x = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = (x^2 - 2x + 2x - 2)e^x = (x^2 - 2)e^x$

① 当 $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$ 时, $f'(x) > 0, \rightarrow f(x) \uparrow (-\infty, -\sqrt{2}]$

$f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 + (\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}} > 0, f(-\sqrt{2}) > 0 \therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 上无根

② 当 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 时, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \downarrow (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$f(-\sqrt{2}) < 0, f(\sqrt{2}) > 0 \therefore f(x)$ 有且仅有一个根

③ 当 $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x) \uparrow (\sqrt{2}, +\infty)$

$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \therefore f(x)$ 有且仅有一个根

综上所述方程有两个根

2. 函数的极值

定理1: 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续且在 x_0 点附近可导

(1) 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) > 0$ 则 $f(x_0)$ 是极小值

(2) 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) < 0$ 则 $f(x_0)$ 是极大值

证明: (1) 设 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow (x_0 - \delta, x_0)$

又 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\therefore f(x) \downarrow (x_0 - \delta, x_0)$ 且 $f(x) \uparrow (x_0, x_0 + \delta)$

例1: 求 $f(x) = x^3 - (x^2 - 1)^2$ 的极值

解: 定义域 $(-\infty, +\infty)$ $f(x) = x^3 - (x^2 - 1)^2 = x^3 - x^4 + 2x^2 - 1$

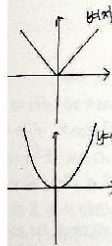
令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \quad (0 \text{ 处})$ 导数不存在

$f(x)$ 是偶函数, $f(x)$ 是奇函数

列表	x	0	$(0, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
	$f'(x)$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$+$
	$f(x)$	极大	\uparrow	极大	\downarrow	不是	\uparrow

\therefore 极大值 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4^{\frac{3}{2}}, f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4^{\frac{3}{2}}$ 极小值 $f(1) = 0$

定理2: 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值, 当 $f''(x_0) > 0$ 时是极小值



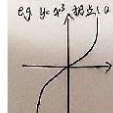
证: 当 $f(x) < 0$ 时是极大值
 证: 若 $f(x) > 0$, $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} > 0$
 由极限的保序性, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有 $\frac{f(x)}{x - x_0} > 0$
 当 $x > x_0$ 时, 有 $f(x) > 0$, 故 $f(x)$ 当 $x < x_0$ 时, 有 $f(x) < f(x_0)$
 $\therefore f(x_0)$ 是极大值
 证: 若 $f(x_0) = 0$, x_0 不一定是极值点, 如 $y = x^3$
 例2: 求 $f(x) = e^x - 1 - x$ 的极值
 解: $f(x) = e^x - 1 - x \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 > 0$
 $\therefore f(x) = 0$ 是极小值
 例3: 求 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ 的极值
 解: 定义域是 $(-\infty, +\infty)$ $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x \Rightarrow f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x > 0 \Rightarrow f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x > 0$
 $f'(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$ $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x$ $f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$
 $f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta)$
 当 $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$ $f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$
 $\Rightarrow f(x) \uparrow$
 当 $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$ $f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f(x) < f(0)$
 $\Rightarrow f(x) \downarrow$
 $\therefore f(0) = 4$ 是极小值
 法二: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$
 $\Rightarrow f(x) = f(0) + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) > 0 \quad \therefore f(0) = 4$ 是极小值
 3. 函数的最值
 (1) 区间上连续函数的最值
 设 $f(x) \in C[a, b]$ 且 $f(x)$ 在 (a, b) 上有有限个极值嫌疑点, x_1, x_2, \dots, x_n
 则 $f(x)$ 的最值在 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$ 中取

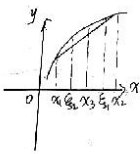
所求极值时考虑使用
 泰勒公式

例1: 求 $f(x) = 12 - 2x^2$ 的极值
 解: 易见 $f(x) \in C[-\infty, +\infty)$ $f'(x) = (12 - 2x^2)' = -4x = 0 \Rightarrow x = 0$
 $f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow f(0) = 12$ 是极大值
 例2: 设有一工厂要加工一批无盖的圆柱形罐头, 给定容积 V , 问半
 径与高满足什么关系最省料
 解: 设半径为 x , 高为 h
 $V = \pi x^2 h = 2\pi x^2 \Rightarrow h = \frac{2}{x}$
 $S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + \frac{4\pi}{x}$
 $S' = 4\pi x - \frac{4\pi}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$
 $\therefore x = 1$ 是唯一极小值点, 从而有最小值, 此时
 $\frac{S}{V} = \frac{2\pi + \frac{4\pi}{x}}{2\pi x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} = 1 + 2 = 3$

§4.5 函数作图

1. 函数曲线的凹凸性
 定义1: 设 $f(x) \in C(2, 2)$, $\forall x_1, x_2 \in C(2, 2)$ 若满足
 $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ $(x_1 - x_2) f'(x) + f(x_2) \leq f(x_1)$
 则称曲线 $y = f(x)$ 在 $(2, 2)$ 上是凸的 (凹) 的
 定义2: 设 $y = f(x)$ 在 x_0 点连续, 若曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 点的左侧或
 右侧是凸的, 则称 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 判断: $f(x)$ 在 x_0 点有二阶导数且 $f''(x_0) = 0$ 且 $f'''(x_0) \neq 0$ 为拐点 (V)
 $y - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$
 $= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o(x^3)$
 $\approx f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$
 $f''(x_0) > 0 \Rightarrow (x - x_0)^2 > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$
 $f''(x_0) < 0 \Rightarrow (x - x_0)^2 < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$
 极值点为 x 轴上的点但拐点为曲线上的点
 如 $y = x^3$ 拐点 $(0, 0)$





不妨设 $x_1 < x_2$ $x_3 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$
 $(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) - f(x_3) = \lambda(f(x_2) - f(x_3)) + (1-\lambda)(f(x_1) - f(x_3))$
 $= \lambda(f(x_2) - f(x_3)) + (1-\lambda)(f(x_1) - f(x_3))$
 $\stackrel{\text{中值定理}}{=} \lambda f'(\xi_1)(x_2 - x_3) + (1-\lambda)f'(\xi_2)(x_1 - x_3)$
 $= \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)f'(\xi_1) - f'(\xi_2)(1-\lambda)(x_2 - x_1)$
 $= \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)]$
 $\stackrel{\text{中值定理}}{=} \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)^2 f''(\xi) < 0 \Rightarrow f(x_3) < f(x_1)$
 $> 0 \Rightarrow f(x_3) > f(x_2)$

定理1: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上有二阶导数, 若 $f''(x) < 0 (> 0)$, 则 $f(x)$ 是凸(凹)的. 称 (a, b) 为 $f(x)$ 的凸(凹)区间.
 (2) 若 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 且在 x_0 点的去心邻域二阶导数恒正(负), 在 x_0 点的左右邻域内异号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

费马定理
推出

注: 在凸(凹)的条件下, 若 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x_0)$ 不一定是极值. eg $y = x^3$ $y'(0) = 0$ 但 $(0, 0)$ 不是极值.

例: 求 $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ 的凸凹区间及拐点.

解: 定义域: $(-\infty, +\infty)$ $y' = 3x^2 - 4x + 3$ $y'' = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2/3$ 或 $x = 0$

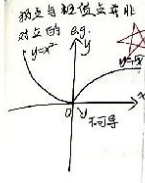
列表	x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2/3)$	1	$(2/3, +\infty)$
	y'	+	0	-	0	+
	y''	+	0	-	0	+

$\therefore (0, 1)$ 和 $(1, 3)$ 是拐点.

例2: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点有三阶导数且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, 则 (C)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
 (C) $(0, f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点 (D) $f(0)$ 不是极值 $(0, 0)$ 不是拐点

解: $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x) - f''(0)}{x-0} = \frac{1}{6} f'''(0)$
 $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$



拐点与极值点并非对立的. eg: $b = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ 使 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) > f(x)$
 例子: 设 $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(n)}(x) = 0$, 而 $f^{(n+1)}(x) > 0$ 且 $f^{(n+1)}(0) > 0$. 证明: (1) 当 n 为偶数时, $f(x)$ 是极值. $f^{(n+1)}(x) > 0, (< 0)$ 是极小(大)值而 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点. (2) 当 n 为奇数时, $(x_0, f(x_0))$ 是拐点而 $f(x_0)$ 不是极值.

证: (1) $f(x) = f^{(n)}(x-x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1})$
 $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1})$
 当 n 为偶数时, 若 $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ 则 $f(x) > f(x_0)$, 从而 $f(x_0)$ 是极小值.
 < 0 则 $f(x) < f(x_0)$, 从而 $f(x_0)$ 是极大值.

当 n 为奇数时, $(x-x_0)^{n+1}$ 可正可负, 从而 $f(x) - f(x_0)$ 可正可负, 所以 $f(x_0)$ 不是极值.

(2) $f(x) = f^{(n)}(x-x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1})$
 $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1})$

当 n 为偶数时, $f^{(n+1)}$ 在 x_0 的邻域内不恒号, $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.
 当 n 为奇数时, $f^{(n+1)}$ 在 x_0 的左右邻域内异号, $(x_0, f(x_0))$ 是拐点.

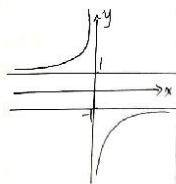
渐近线
 设有曲线 Γ 和直线 l , 当曲线 Γ 的一端无限接近坐标原点时, 曲线 Γ 和直线 l 无限接近, 则称直线 l 是曲线 Γ 的渐近线.

eg $y = \ln x$ $y = \tan x$
 $y = \frac{1}{x}$

(a) 垂直渐近线
 直线 $x=c$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线 $\Leftrightarrow x=c$ 是 $f(x)$ 的间断点且 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$

(b) 斜渐近线
 直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$ 此时
 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ 且 $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$

$f(x) - ax - b = o + d, \lim_{x \rightarrow \infty} d = 0 \Rightarrow a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - b}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$



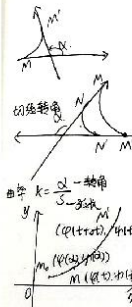
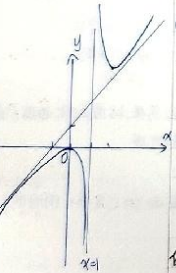
例1: 求曲线 $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ 的所有渐近线
 解: 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+e^x}{1-e^x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+e^x}{1-e^x} = +\infty$ $\therefore x=0$ 是垂直渐近线
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x-1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = -1$
 $\therefore y=0$ 是水平渐近线
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = 1$ $\therefore y=1$ 是水平渐近线
 3) 分析作图法(描点)

- 1) 定义域 2) $f(x)=0$ 及不可导点
- 3) $f(x)=0$ 及不可导点 4) 渐近线及渐近线方向
- 5) 列表描图(加周期性、奇偶性)

例2: 作函数 $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ 的图形
 解: 定义域 $(-\infty, +\infty)$ $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ $y' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+1} = 0$ $\therefore y=1$ 是水平渐近线
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$
 $\therefore y=x+1$ 是一条渐近线

列表	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y	+	0	-	-	0	+
y'	-		-	+		+
y	\nearrow	极小值	\searrow	\swarrow	极大值	\nearrow

例3: 作曲线 $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ 的图形
 解: 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ $y' = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+e^x}{1-e^x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+e^x}{1-e^x} = +\infty$ $\therefore x=0$ 是垂直渐近线
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = -1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = 1$
 $\therefore y=1$ 是水平渐近线



例4: 作函数 $y = xe^x$ 的图形
 解: 定义域 $(-\infty, +\infty)$ $y = xe^x$ $y' = (x+1)e^x$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$ $\therefore y=0$ 是水平渐近线
 x $(-\infty, -2)$ $(-2, -1)$ $(-1, 0)$ $(0, +\infty)$
 y' $-$ $-$ 0 $+$ $+$
 y \searrow \swarrow \swarrow \swarrow \swarrow
 极小 极大
 §4.6 曲率

1. 曲线长
 简单、连续、可导 (M, N 为端点) $\lim_{M \rightarrow N} \frac{MN}{MN} = 1$ 曲线
 曲线方程: 参数曲线 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 函数曲线 $y=f(x)$ 极坐标曲线 $r=r(\theta)$
 曲线长函数 S
 设曲线 $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} t \in [a, \beta]$ 是简单连续可导曲线, 以曲线端点 M_0 为

(x_0, y_0) 为定点, $t \in [a, \beta]$ 得到 L 上另一点 $(x(t), y(t))$, 设 $S = MN$, 高见
 S 是 t 的函数, 记为 $S = S(t)$, $t \in [a, \beta]$, $S(a) = 0$
 $S'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MN' - MN}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x(t+\Delta t) - x(t))^2 + (y(t+\Delta t) - y(t))^2}}{\Delta t} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$
 $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x(t+\Delta t) - x(t))^2 + (y(t+\Delta t) - y(t))^2}}{\Delta t} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

结论: 若 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 都可导, 则曲线长函数 $S = S(t)$ 也可导, 且
 $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ (规定 $dt > 0$, 有 $ds > 0$)
 解上或为曲线 $r = r(\theta)$ 的弧微分
 $|y' = y'(t)|$
 几何意义: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$
 $y = f(x)$ $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ $dx > 0$ $ds > 0$
 $x = x$

极坐标曲线 $r=r(\theta)$ $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$
 $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$
 $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$ $ds > 0, ds < 0$

2. 曲率

定义1: 设有一光滑曲线段 AB, A 是起点, 由 A 到 B, A 点的切线与弦 AB 的夹角为 α , AB 的弧长为 S, 规定 $k = \frac{\alpha}{S}$ 为曲线段 AB 的曲率. 直线的曲率为 0, 半径为 R 的圆的曲率为 $\frac{1}{R}$.

定义2: 设曲线 $y=f(x)$ 处处有切线, 则其切线倾角 α 是关于 x 的函数, 称之为 $y=f(x)$ 的倾角函数, 记为 $\alpha = \alpha(x)$. 有 $\alpha(x) = \arctan y'$.

定义3: 设曲线在点 (x, y) 附近光滑, 若极限 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$ 存在, 则称之为 $y=f(x)$ 在点 (x, y) 处的曲率, 记为 $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$.

结论: 若 $y=f(x)$ 有二阶导数, 则点 (x, y) 处曲率存在且 $k = \frac{|y''|}{1+y'^2} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

例1: 求半径为 R 的圆的曲率.
 解: 极坐标方程为 $x^2 + y^2 = R^2$
 $2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$
 $z + 2(y^2 + yy') = 0 \Rightarrow 1 + \frac{x^2}{y^2} + yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{R^2}{y^2}$
 代入 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{R}$

例2: 求曲线 $y = \ln x$ 上曲率最大的点.
 解: $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$
 $k(x) = \frac{1/x^2}{(1+1/x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$
 $k'(x) = \frac{(1+x^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2} \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 当 $x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $k'(x) > 0$; 当 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $k'(x) < 0$.
 \therefore 当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $k(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 是极大值也是最大值.

3. 曲率圆

曲线的有差

① $y > 0, y' > 0$
 ② $y > 0, y' < 0$
 ③ $y < 0, y' > 0$
 ④ $y < 0, y' < 0$

例: 设有一曲线 $\Gamma, M \in \Gamma$, 又有 Γ 上一点 O 满足以下三条:
 ① 曲线 Γ 与 OO 在 O 点相切. ② 在 O 点处, 曲线 Γ 与 OO 有相同的凹向.
 ③ Γ 在 O 点处的曲率等于 OO 的半径. 称 OO 为曲线 Γ 在 M 点处的曲率圆. 此圆的半径称为 M 点的曲率半径, O 点称为 M 点处的曲率中心.

若 Γ 上任一点都有曲率圆, 且曲率中心又形成一条曲线 L , 称为 Γ 的渐屈线. Γ 称为 L 的渐伸线.

曲率圆的确定 (半径, 曲率中心)

$x = R \cos \alpha, y = R \sin \alpha, R = \frac{1}{k} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}, \tan \alpha = y'$
 $\sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = R \cos \alpha = \frac{1+y'^2}{y''} \\ y = R \sin \alpha = \frac{1+y'^2}{y''} \cdot y' \end{cases}$ 曲率中心公式

例1: 求 $y = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率圆.
 解: $y' = 2x, y'' = 2, (1, 1) \Rightarrow R = \frac{1}{2} = \frac{(1+4)^{3/2}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$
 求出 $\alpha = \arctan(2)$
 $\begin{cases} x = 1 - \frac{1+y'^2}{y''} = -4 \\ y = 1 + \frac{1+y'^2}{y''} = 7 \end{cases}$

\therefore 所求的曲率圆为 $(x+4)^2 + (y-7)^2 = \frac{125}{4}$

例2: 求曲线 $y = a(t \sin t - t \cos t)$ ($a > 0$) 的渐屈线方程.

解: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a(\cos t - \cos t + t \sin t)}{a(\sin t + t \cos t - \sin t)} = \frac{t \sin t}{\sin t + t \cos t} = \tan t$
 $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d/dt (\frac{t \sin t}{\sin t + t \cos t})}{a(\sin t + t \cos t)}$

设渐屈线坐标为 (ξ, η)
 $\xi = x - \frac{y(1+y'^2)}{y''} = a(t \sin t - t \cos t) - a \tan t (\sin t + t \cos t) = a \cos t$
 $\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = a(\sin t - t \cos t) + a \tan t (\sin t + t \cos t) = a \sin t$
 $\therefore \xi^2 + \eta^2 = a^2$, 所求渐屈线为 $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ 是圆.

例3. 求曲线 $y = a(1 - \cos t)$ 的渐近线 (asymptote)

摆线
渐近线

摆线的参数方程: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

求导: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}$

渐近线坐标为 (η, ξ)

$\xi = x - (1/y)' y' = a(t - \sin t) - [1 + \frac{\sin t}{1 - \cos t}] \cdot \frac{a \sin t}{1 - \cos t}$

$\eta = y + (1/y)' y' = a(1 - \cos t) + [1 + \frac{\sin t}{1 - \cos t}] \cdot [-a(1 - \cos t)^2]$

$\xi = a(t - 2 \sin t)$, $\eta = a(1 - 2 \cos t)$

令 $t = \pi + \theta$, $\sin t = -\sin \theta$, $\cos t = -\cos \theta$

$\xi = a(\pi + \theta - 2 \sin \theta)$, $\eta = a(1 - 2 \cos \theta)$

第五章 不定积分

§5.1 原函数与不定积分

1. 原函数

定义: 若在区间 I 上有 $F(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 比如 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数, $\sin x + C$ 也是 $\cos x$ 的原函数.

若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 则其原函数有无穷多个, $F(x) + C$ (C 是任意常数) 都是 $f(x)$ 的原函数, 且任何两个原函数都在 $F(x) + C$ 中.

定理: 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x) + C$ (C 是任意常数) 是 $f(x)$ 的所有原函数的统一表达式.

证: 设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $F(x) = f(x)$, $G(x) = F(x) + C$.

2. 不定积分

2种理解

1. 一般性代表

2. 集合表达

Σ: 离散的和

∫: 来源于 sum

定义2: 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数, 则称 $f(x)$ 在 I 上的不定积分为 $F(x) + C$. $\int f(x) dx = F(x) + C$. \int - 积分符号 (表示连续的和), $f(x)$ - 被积函数, x - 积分变量, $f(x) dx$ - 被积表达式, C - 积分常数.

3. 性质与简单计算

(1) $(\int f(x) dx)' = f(x)$, $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$

(2) $\int f(x) dx = F(x) + C$, $\int dF(x) = F(x) + C$

(3) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ (线性性质)

(4) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

不是所有函数都有原函数, 原函数的存在性

第二类间断点

(1) 连续函数一定有原函数

(2) 含有第一类间断点的函数, 没有原函数

含有第二类间断点的函数, 可能有原函数

eg. $F(x) = \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt$, $F(x) = \int_0^x 2x \sin x - \cos \frac{1}{x} dx$, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) \neq F(0)$

$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ (原函数存在的函数)

5. 不定积分的基本公式

(1) $\int 0 dx = C$, (2) $\int 1 dx = x + C$, (3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)

(4) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \begin{cases} \ln x + C, & x > 0 \\ \ln(-x) + C, & x < 0 \end{cases}$

(5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, (6) $\int e^x dx = e^x + C$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, (8) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(9) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$, (10) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\sin x} dx$

直接积分法

加一项减一项

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$

(2) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\arccot x + C'$

例1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$ 求 $\int f(x) dx$

解 $\int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_2, & x < 1 \end{cases}$ $\int f(x) dx$ (连续) $\Rightarrow \frac{1}{3} + C_1 = \frac{1}{2} + C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{6} + C_2$

例2. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

解 $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int (\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}) dx$

$$= \frac{1}{x} - \arctan x + C$$

例3. $\int (x^2 - 1)(x+1) dx$

解 原式 $= \int (x^3 - x + x^2 - 1) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - x + C$

例4. $\int \tan^2 x dx$

解 原式 $= \int (\tan^2 x + 1) dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$

例5. $\int \frac{1+\cos x}{1+\cos^2 x} dx$

解 $\int \frac{1+\cos x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{1+\cos x}{2+\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \tan x + \frac{1}{2} x + C$

复合函数求导法

定理1: 设 $F(u)$ 可导, 且 $F(u) = f(x)$, $u = g(x)$ 也可导, 则

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C$$

证: 由复合函数求导

$$[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

$$\therefore \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

$$\therefore F'(u) = f(u) \quad \therefore \int f(u) du = F(u) + C \quad (u = g(x))$$

有 $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$

$$\therefore \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C$$

第一换元积分法, 也叫凑微分法

例1. $\int \sin(3x+5) dx$

解 原式 $= \int \sin(3x+5) d(3x+5) = -\frac{1}{3} \cos(3x+5) + C$

若 $F(x) = f(x)$ 则 $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(x) dx = \frac{1}{a} F(x) + C$

例2. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

解 原式 $= \int \ln x \cdot x^{-1} dx = \int \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$

例3. $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

解 原式 $= \int \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \int \arctan x \cdot d(\arctan x) = \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C$

2. 第二类换元积分法, 若 $F(x) = f(u)$ 则

$$\int f(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C$$

$$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x) = F(\arcsin x) + C$$

$$\int \frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arccos x) d(\arccos x) = F(\arccos x) + C$$

$$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x) = F(\arctan x) + C$$

$$\int \frac{f(e^x)}{e^x} dx = \int \frac{f(u)}{u} du = \int \frac{1}{u} d(e^x) = \ln|e^x| + C = \ln|e^x| + C$$

3. 四个积分基本公式

(13) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

(14) $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$

(15) $\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} dx$

$$= \int \frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} dx = \int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1+\cos x}{2+2\cos x} dx = \int \frac{1+\cos x}{2(1+\cos x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1+\cos x}{1+\cos x} dx = \frac{1}{2} \int 1 dx = \frac{1}{2} x + C$$

(16) $\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} dx = \ln|\frac{1+\sin x}{\cos x}| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(17) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x \cos x} = \ln|\tan \frac{x}{2}| + C$

常见的三角函数积分

例1: $\int \sin^m x \cos^n x dx$

解: 原式 = $\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^{n/2} dx = \int (\sin^m x - \sin^{m+2} x + \dots) dx$

$= \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x - \frac{1}{m+3} \sin^{m+3} x + C$
 $\int \sin^m x \cos^n x dx$, 若 m, n 中至少有一个是奇数, 不妨设 $n=2k+1$, 则
 $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k dx$
 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

例2: $\int \sin^2 x dx$

解: 原式 = $\int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx$
 $= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx$
 $= \frac{1}{4} (x - \sin 2x) + \frac{1}{4} (x + \sin 2x) + C$
 $= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

例3: $\int \tan^2 x dx$

解: 原式 = $\int \tan^2 x (1 - \sec^2 x) dx = \int \tan^2 x dx - \int \tan^2 x \sec^2 x dx$
 $= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\sec x| + C$
 $\int \tan^2 x dx$ 或 $\int \cot^2 x dx$ ($n=2$) 利用 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1, \cot^2 x = \csc^2 x - 1$
 $\int \tan^2 x dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \int \tan^2 x dx$

例4: $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

解: 原式 = $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$
 $= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\sec x - \csc x| + C$

例5: $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$

解: 原式 = $\int \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{4 \tan^2 x + 1} dx = \int \frac{1}{4 \tan^2 x + 1} d \tan x$
 $= \frac{1}{2} \arctan(2 \tan x) + C$
 $\int \frac{1}{a + b \sin^2 x} dx$ 或 $\int \frac{1}{a + b \cos^2 x} dx$ 将 $a = \sin^2 x + \cos^2 x$ 代入

5. 第一类元的技巧

例1: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

解: 原式 = $\frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}} - \int \frac{2 dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$

例2: $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x}$

解: 原式 = $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \sin 2x} dx$
 $= \arctan(\frac{1}{2} \tan 2x) + C$

例3: $\int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx (a, b \neq 0)$

解: 原式 = $\frac{1}{-b} \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} dx = \frac{1}{-b} \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{-b} \ln |a \sin x + b \cos x| + C$

例4: $\int \frac{\sin x}{\sin x + \tan x} dx = t$

解: 原式 = $\int \frac{\sin x}{\sin x (1 + \tan x)} dx = \int \frac{1}{1 + \tan x} dx = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$

原式 = $\frac{1}{2} (\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx - \int \frac{1 + \tan x}{1 + \tan x} dx)$
 $= \frac{1}{2} (\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx - \int 1 dx)$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx - \frac{x}{2} + C$

注: 原式 = $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{1 + \tan^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{1 + \tan^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{1 + \tan^2 x} dx$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \frac{1}{2} (\ln |\csc x - \cot x| - \frac{1}{\tan x}) + C$

例5: $\int \frac{x \cos x - \sin x}{(x + \sin x)^2} dx$ ($\frac{\sin x}{x}$)' = $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

解: 原式 = $\int \frac{x \cos x - \sin x}{(x + \sin x)^2} dx = \int \frac{d(x + \sin x)}{(x + \sin x)^2} dx = -\frac{1}{x + \sin x} + C$

§ 5.3 分部积分法

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow$$

$$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx = f(x)g(x) + C \Rightarrow$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \quad \text{分部积分公式}$$

$$\text{或 } \int g(x)d f(x) = f(x)g(x) - \int f(x)dg(x)$$

注:在此公式中,将被积表达式拆成两个因子 $g(x)$ 与 $d f(x)$ 的乘积,要使 $f(x)$ 的原函数好求, $g(x)$ 的导数 $g'(x)$ 相对简单

I. 典型的部分积分形式

例1: $\int x^n dx$

$$\text{解原式} = x^{n+1} - \int x^n d(x) = x^{n+1} - \int x^n dx$$

$$= x^{n+1} - 2x^{n+1} + 2x + C$$

$$\text{例2: } \int x^n dx = x^{n+1} - \int x^n d(x) = x^{n+1} - n \int x^{n-1} dx$$

例2: $\int \arctan x dx$

$$\text{解原式} = x \arctan x - \int x d \arctan x = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

例3: $\int x^2 \arcsin x dx$

$$\text{解原式} = \int x^2 \arcsin x dx = \frac{1}{3} x^3 \arcsin x - \frac{1}{3} \int x^3 d \arcsin x$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \arcsin x - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x^2 \cdot (-1/2) d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$$

$$= -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} - (1-x^2)^{1/2} d(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{2} (1-x^2)^{1/2} - \frac{1}{2} (1-x^2)^{3/2} + C$$

例4: $\int x^2 \ln x dx = \int x^2 d(\frac{1}{2} \ln x^2)$

$$\text{解原式} = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

(14) \int 正整数幂函数 \times 对数函数 dx

例6: $\int x \cos x dx$

$$\text{解原式} = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

(15) \int 正整数幂函数 \times 正(余)弦函数 dx

例5: $\int e^x \sin x dx$

$$\text{解原式} = \int \sin x d e^x = \sin x \cdot e^x - \int e^x d \sin x = \sin x \cdot e^x - \int e^x \cos x dx$$

$$= \sin x \cdot e^x - (e^x \cos x - \int e^x d \cos x) = \sin x \cdot e^x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx)$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

(15) \int 指数函数 \times 反三角函数 dx

例7: $\int x e^{2x} dx$

$$\text{解原式} = \int x d e^{2x} = x e^{2x} - \int e^{2x} d(x) = x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

(17) \int 正整数幂函数 \times 超越函数 dx

例8: $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$$\text{解原式} = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \frac{-\cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\tan x}{\cos^2 x} + \ln |\sec x + \tan x| \right) + C$$

$$\text{注: 原式} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx + \int \sec^2 x dx$$

$$= \int \tan x d \sec x + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \sec x - \int \sec x \sec^2 x dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2} (\tan x \sec x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$$

(18) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 或 $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ (n) 可用分部积分公式或 $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$, $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

例9: 待定系数法, 待定系数法

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d \tan x}{1 + \tan^2 x} = \int \frac{d \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{原式} = \int \frac{d \tan x}{1 + \tan^2 x} = \int \frac{d \tan x}{1 + \tan^2 x} = \int \frac{d \tan x}{1 + \tan^2 x} = \int \frac{d \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \tan x (n-1) \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - (n-1) \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - (n-1) \ln |\cos x| + (n-1) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\therefore I_n = \frac{1}{(n-1)\cos^2 x} + (n-1) \ln |\cos x| \quad I_1 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

例9: $I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n} dx \quad (n \geq 2)$
 解: $I_1 = \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
 $I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n} dx = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} \cdot \frac{1}{a^2+x^2} dx$
 $= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 - a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}} dx$
 $= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n I_{n+1} - 2na^2 I_n$
 $\therefore I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{x}{(a^2+x^2)^n} + (2n-1) I_n \right]$

2. 一般分部积分法
 例1: $\int [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)] dx$
 解: 原式 = $\int g(x) df(x) - \int f(x) dg(x)$
 $= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx - f(x)g'(x) + \int f(x)g''(x) dx$
 $= f(x)g(x) - f(x)g'(x) + C$

(1) 含有抽象函数积分与任意用分部积分法
 例2: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 在 (a, b) 内 $f(x) \neq 0$ 且 $f'(a) = f(a), f'(b) = f(b)$
 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = 1$
 证明: 设 $F(x) = g(x)[f'(x) - f(x)]$
 $F(x) = \int g(x)[f'(x) - f(x)] dx = \int g(x) df(x) - \int g(x)f(x) dx$
 $= \int f(x)g(x) dx - \int f(x)g(x) dx = \int g(x)f'(x) dx - \int f(x)g(x) dx$
 $= f(x)g(x) - \int g(x) df(x) - \int f(x)g(x) dx$
 $= f(x)g(x) - [g(x)f(x) - \int f(x)g'(x) dx] - \int f(x)g(x) dx$
 $= f(x)g(x) - g(x)f(x) + \int f(x)g'(x) dx - \int f(x)g(x) dx$
 $= \int f(x)g'(x) dx - \int f(x)g(x) dx$
 令 $g(x) = g(x)$ 即 $g(x) = e^x$ 或 e^{-x} 不妨取 $g(x) = e^x$ 则 $F(x) = e^x(f(x) - f(x))$
 (2) 不同函数乘积的积分与任意用分部积分法, 除 $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

分部积分
 式抽象函数
 积分常用

不同函数乘积
 积分常用

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 例1: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx$ 整理
 解: 原式 = $-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx$
 $= -\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} d\arcsin x$
 $= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + C$

例2: $\int \frac{x}{x^2+1} \arctan x dx$
 解: 原式 = $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \arctan x dx$
 $= \int \arctan x d \ln x - \int \frac{1}{x+1} \arctan x dx$
 $= \frac{1}{2} \arctan x - \int \frac{1}{x^2+1} \arctan x dx = \frac{1}{2} \arctan x$
 而 $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2+1} dx = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+1} \right) dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$
 \therefore 原式 = $-\frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \arctan x + \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$

例3: $\int x \arctan x \ln(1+x) dx$
 解: 原式 = $\int \ln(1+x) d \left(\frac{1}{2} x^2 \arctan x \right) - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{1+x^2} dx$
 $= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$
 $= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int (x - \arctan x) dx + C$
 $= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C$

\therefore 原式 = $f(x)h'(1+x) - \int f(x) dh(1+x)$
 而 $\int f(x) dh(1+x) = \int f(x) \frac{1}{1+x^2} dx = \int x \arctan x dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx$
 $= f(x) - (x - \arctan x) + C$
 \therefore 原式 = $f(x)h(1+x) - f(x) + x - \arctan x + C$
 $= \left(\frac{x^2}{2} - \arctan x - \frac{1}{2} x \right) \ln(1+x) - \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \arctan x + \frac{3}{2} x + C$

例4: 设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 互为反函数且 $F(x) = f(x)$, 求 $\int g(x) dx$
 解: 设 $y = g(x), x = f(y), g'(x) = \frac{dy}{dx}$
 $\int g(x) dx = \int y dx = \int y f'(y) dy = \int f(y) dy = F(y) + C$

$$= xg(x) - F(g(x)) + C$$

3. "不在"形的积的也往往用分部积分法

例如: $\frac{\sin x}{x}$, $e^x \sqrt{1+x^2}$, $e^x \tan x$, $\frac{e^x}{\cos x}$, ...

例1: $\int (\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln|x|) dx$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int \frac{\sin x}{x} dx + \int \ln|x| d\sin x \\ &= \int \frac{\sin x}{x} dx + \sin x \ln|x| - \int \sin x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \sin x \ln|x| \end{aligned}$$

例2: $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int e^{2x} (\tan^2 x + 2 + 2\tan x) dx = \int e^{2x} (\sec^2 x + 2 + 2\tan x) dx \\ &= \int e^{2x} d\tan x + 2 \int e^{2x} dx \\ &= e^{2x} \tan x - 2 \int \tan x e^{2x} dx + 2 \int e^{2x} dx = e^{2x} \tan x + e^{2x} + C \end{aligned}$$

§5.4 第二换元积分法

方法: $\int f(x) dx \xrightarrow{x=g(t)} \int f(g(t)) g'(t) dt = G(t) + C = G(g^{-1}(x)) + C$

要求 $g(t)$ 单调可导, 称此等式为第二换元积分公式

注: $t = g^{-1}(x)$ $x = g(t)$

$$[G(g^{-1}(x))]_x = G(t) \frac{dt}{dx} = f(g(t)) \cdot g'(t) \cdot \frac{1}{g'(t)} = f(g(t)) = f(x)$$

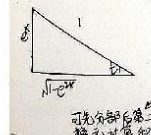
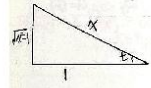
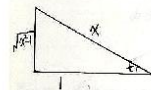
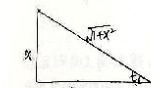
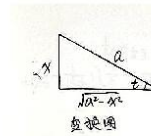
$$\text{第一换元: } \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(t)) + C = F(g(x)) + C$$

1. 典型的第二换元积分

$$(1) \int f(\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx, t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\begin{aligned} \text{例1: 求 } \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}} \\ \text{解原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{3t^2+1}} \cdot \frac{2t}{2t+1} dt = \int \frac{2t}{2t+1} dt \\ &= \int (1 - \frac{1}{2t+1}) dt = t - \frac{1}{2} \ln|2t+1| + C \\ &= 2\sqrt{x} - 3x^2 + 6x^{\frac{3}{2}} - 6 \ln|x^{\frac{3}{2}}+1| + C \end{aligned}$$

(2) $\int f(\sqrt{Ax^2+Bx+C}) dx$



将 Ax^2+Bx+C 配为 $A(x+\frac{B}{2A})^2 + C - \frac{B^2}{4A}$

例2: $\int \sqrt{1-x^2} dx$ 令 $x = \sin t$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

例3: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 令 $x = \tan t$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \sec^2 t dt = \int \frac{\sec^2 t}{\sec t} dt \\ &= \int (\sec t - \csc t) dt = \ln|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}| - \tan t + C \\ &= \ln|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-x}| - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \end{aligned}$$

例4: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 令 $x = \sec t$ 或 $\csc t$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{\csc^2 t - 1}} \csc^2 t dt = \int \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} \frac{1}{\sin^2 t} dt = \int \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} dt \\ &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \int \tan^2 t dt = \int (\sec^2 t - 1) dt = \tan t - t + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \arccos \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

例5: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 令 $x = \sec t$ 或 $\csc t$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{\sec^2 t - 1}} \sec^2 t dt = \int \frac{\sec^2 t}{\tan t} dt = \int \frac{1}{\tan t} dt \\ &= \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \ln|\sin t| + C = \ln|\frac{1}{x}| + C = -\ln|x| + C \end{aligned}$$

第(1)个积分公式 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

第(2)个积分公式 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$

例1: $\int \frac{e^x \sin x}{e^x} dx$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int \frac{e^x \sin x}{e^x} dx = \int \sin x dx = -\cos x + C \\ &= -\frac{1}{e^x} + C = -e^{-x} + C \end{aligned}$$

可先分部后第二换元计算积分

$$= -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \ln|1 - \sqrt{1 - e^{2x}}| - x + C$$

例2: $\int \frac{dx}{(2x+\sqrt{1+x^2})^2}$ 令 $\sqrt{1+x^2} = t \Rightarrow x = (t^2-1)^{\frac{1}{2}}$
 解原式 = $\int \frac{dx}{(t^2 + \sqrt{t^2-1})^2} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2)} = \frac{2}{3} \int (\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2}) dt$
 $= \frac{2}{3} \int [\frac{1}{2}(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) - \frac{1}{t^2}] dt$
 $= \frac{1}{3} \ln|\frac{t-1}{t+1}| - \frac{2}{3} \arctan t + C$

3 有理函数的积分
 (1) 有理函数及其分类

有理函数: 自变量 x 经过有限次的有理运算(四则运算)组成的函数, 记为 $R(x)$, 简记 $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, 其中 $P_m(x)$, $Q_n(x)$ 分别是关于 x 的 m 次, n 次多项式. 若 $m \geq (<) n$, 称 $R(x)$ 为假(真)分式
 如 $\frac{x^2+1}{x^2+1}$ 一真分式 $\frac{x^2+1}{x^2+2}$ 多项式都是假分式

(2) 有理函数的分解

定理1: 假分式 = 多项式 + 真分式
 定理2: 若多项式 $Q_n(x)$ 在实数范围内的分解为: $(x+a_1)^{k_1} \dots (x+a_r)^{k_r} (x^2+b^2)^{l_1} \dots (x^2+c^2)^{l_s}$
 (其中 $k_i, l_j < 0$), 则真分式 $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1(x)}{(x+a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_r(x)}{(x+a_r)^{k_r}} + \frac{B_1(x)}{(x^2+b^2)^{l_1}} + \dots + \frac{B_s(x)}{(x^2+c^2)^{l_s}}$

(3) 最简分式积分

① $\int \frac{A}{(x+a)^n} dx = \int \frac{A/n + a}{(x+a)^{n+1}} dx = \frac{A/n + a}{-n+1} (x+a)^{-n+1} + C, n \geq 2$

② $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} dx, p^2-4q < 0$
 $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2 + a^2$
 $Bx+C = B(t-\frac{p}{2}) + C = Bt + C - \frac{p}{2}B = Nt + M$
 $I_n = \int \frac{Nt+M}{(t^2+a^2)^n} dt$
 $I_n = \frac{N}{2} \ln|\frac{t^2+a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}| + \frac{N}{2} \arctan \frac{t}{a} + C$
 $I_n = \frac{N}{2} \ln|\frac{(x+\frac{p}{2})^2 + a^2}{(x+\frac{p}{2})^{2n+2}}| + \frac{N}{2} \arctan \frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C$

注: 有理函数的原函数是初等函数

例1: $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$
 解: $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{(x+1)(x+2)}$
 $x = A(x+2) + B(x+1) + (Cx+D)(x+1)$
 $= x^2(B+C) + x(A+B+2C+D) + (2A+B+D)$
 $\Rightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ B+2D+C=1 \\ A+B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=\frac{1}{2} \\ C=0 \\ B=0 \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 原式 = $\frac{1}{2} \int (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}) dx = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$

例2: $\int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx$
 解: 原式 = $\int \frac{x^2-x^2+1+x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2-x^2)+x^2}{(x^2+1)(x^2+1)} dx$
 $= \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x^2 + C$

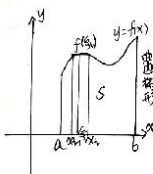
例3: $\int \frac{dx}{x^2+1}$
 解: 原式 = $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1+\frac{1}{x^2} - (1+\frac{1}{x^2})}{x^2+1} dx$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$
 $= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x-\frac{1}{x}+\sqrt{2}}| + C$

4 三角函数有理式的积分

$\sin x, \cos x$ 经过有限次的有理运算得到的表达式, 称之为三角函数有理式, 记为 $R(\sin x, \cos x)$
 万能变换: 设 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$
 $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} (1 - \tan^2 \frac{x}{2}) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
 $x = 2 \arctan t, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$
 $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \frac{2}{1+t^2} dt$ - 化为有理函数积分
 例4: $\int \frac{1+\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

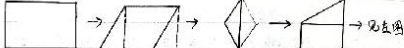
解: 原式 $\int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2 + 2t + 1}{2t} dt$
 $= \frac{1}{2} |t| + t + \frac{1}{2} t^2 + C$
 $= \frac{1}{2} |\tan x| + \tan x + \frac{1}{2} \tan^2 x + C$

第六章 定积分
 § 6.1 定积分的概念与性质



1. 典型问题

问题1: 平面图形的面积



$S: a \leq x \leq b$
 $0 \leq y \leq f(x)$

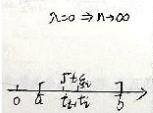
- 方法: (1) 将区间 [a, b] 任意分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i], i=1, 2, \dots, n$
 (2) $f(\xi_i) \Delta x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
 (3) $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \rightarrow S, \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$

问题2: 变速直线运动的行程 $s = \int_a^b v(t) dt, t \in [a, b]$

- 方法: (1) 分割: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
 (2) 作乘积: $v(\xi_i) \Delta t_i, \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i=1, 2, \dots, n$
 (3) 求和: $\sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i \approx s$
 (4) 取极限: $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i \rightarrow 0, \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i \rightarrow s$

2. 积分定义

定义: 设 $f(x)$ 在 [a, b] 上有定义, (1) 任取 [a, b] 的一个分割: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, (2) 任取一个点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 作乘积 $f(\xi_i) \Delta x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = A$ 可圆
 一般极限

$\xi_i, i=1, 2, \dots, n$ (3) 求和: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ (4) 若无论 [a, b] 的分割如何细, 总是取如何的 ξ_i 和怎样的 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 均存在且相等, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 则称此极限为 $f(x)$ 在 [a, b] 上的定积分, 也称 $f(x)$ 在 [a, b] 上可积, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ "f" 积自左, "a" 积分下限, "b" 积分上限, "[a, b]" 积为区间和 dx 积分表达式, " $f(x)$ " 被积函数, " dx " 积分变量 x 的微分 (x 的长度的微分)

元)

3. 定积分的意义

- (1) $\int_a^b f(x) dx$ 表示由边梯形面积和化数和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$
 (2) $\int_a^b f(x) dx$ 表示变速直线运动 ($f(x)$ —速度) 在时间段 [a, b] 内所走的路程的代数和

- (3) $\int_a^b f(x) dx$ 表示力的大小为 $f(x)$ 有向沿 x 轴的正方向, 将质点从 a 点移动到 b 点所做的功

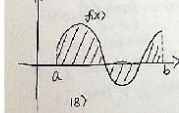
4. 定积分的性质

- (1) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dt$
 (2) $\int_a^b [c f(x) \pm g(x)] dx = c \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ (线性性质)
 (3) $\int_a^a f(x) dx = 0$
 (4) $\int_a^b dx = b - a$
 (5) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ (变号性)
 (6) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

定积分与积分区间的被积函数的函数关系有关, 与积分变量无关, 且与不定积分有很大不同, 积分上限与下限所围面积大小皆可, 证: $f(x) \in [a, b], \therefore f(x)$ 在 [a, b] 上有最大值 M 和最小值 m

- (7) $f(x) = g(x), a < b, \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$
 (8) $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx, (a < b)$
 (9) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), (a < b)$
 (10) 定积分中值定理: 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ (中值定理)

证: $f(x) \in [a, b], \therefore f(x)$ 在 [a, b] 上有最大值 M 和最小值 m



数学推论：并非所有的平均速度推广到无穷小的平均速度，即平均速度的平均速度。

$$\int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M, \text{由介值原理.}$$

$$\exists \xi \in [a, b], \text{使 } f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

§6.2 定积分定理

1. 定积分存在的充分条件

定理1: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界

注: ① 有界不一定可积, 如 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
② 无界不可积

2. 定积分存在的充分条件, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 存在

定理2: 若 $f(x)$ 满足下列条件之一: (1) $f(x) \in C[a, b]$, (2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且有有限个间断点, (3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的单调, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

3. 微积分基本定理

(1) 变限积分函数

$$\text{设 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上可积, 则 } \psi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$$

为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的变上限(下限)积分函数

(2) 微积分基本定理第一、二部分 - 微分部分

定理3: 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\psi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可导且 $\psi'(x) = f(x), x \in [a, b]$
证明: $\psi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(\xi) d\xi}{\Delta x}$
由介值定理, $\xi \in [x, x+\Delta x]$, 故 $\xi \rightarrow x$ 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$

注: ① 若 $f(x)$ 连续, $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$, $(\int_x^a f(t) dt)' = -f(x)$

$$\text{② 若 } f(x) \text{ 连续, } \psi(x) \text{ 可导, } (\int_a^x f(t) dt)' = f(\psi(x)) \psi'(x)$$

$$\text{③ } u = \psi(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} (\int_a^{\psi(x)} f(t) dt) = f(\psi(x)) \psi'(x)$$

变上限积分与函数是连续函数的一个原函数

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

① 变限积分函数公式: $\psi(x), \varphi(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续

$$(\int_a^{\psi(x)} f(t) dt)' = f(\psi(x)) \psi'(x) - f(\varphi(x)) \varphi'(x)$$

例1: 设 $y^2 + e^x = x + \int_x^{\sin x} t dt$, 求 y'

$$\text{解: } y^2 (2y y') + e^x = 1 + \frac{d}{dx} \int_x^{\sin x} t dt = 1 + \frac{\sin x \cdot \cos x - x \cdot 1}{x^2}$$

$$\therefore y^2 (y' y) + e^x = 1 + \frac{\sin x \cos x - x}{x^2}$$

$$\text{即 } y' = (1 + \frac{\sin x \cos x - x}{x^2} - e^x) / (2y^2)$$

例2: 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 证明 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx$

$$\text{证明: } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x f(x) dx + x \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x f(x) dx$$

$$= x \int_0^1 f(x) dx + C$$

\therefore 取 $F(x) = x \int_0^1 f(x) dx$ 有 $F(0) = 0$ 且 $f(x) \in C[0, 1]$ 故 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导

由罗尔定理可得 $\exists \xi \in (0, 1)$ 使 $F'(\xi) = 0$

(2) 微积分基本定理第二部分 - 积分部分

定理4: 设 $f(x) \in C[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$

证明: $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x) \therefore \int_a^x f(t) dt = F(x) + C$

令 $x=a$ 则 $C = -F(a)$, 令 $x=b$, 有 $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

例1: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 (1) D

(A) $\exists \xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$

(B) $\psi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可导, 且 $\psi'(x) = f(x), x \in [a, b]$

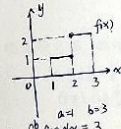
(C) $(\int_a^x f(x) dx)' \leq f(x)$

(D) $\psi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续

证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt = \psi(x_0)$

$\therefore \psi(x)$ 可积, $\exists M > 0$ 使 $|f(x)| \leq M, x \in [a, b]$

$0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq M(x-a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 0$ (两边夹)



A. $\int_1^3 f(x) dx = 3$

$f(\xi) = \frac{\int_1^3 f(x) dx}{3-1} = \frac{3}{2}$

B. $\psi(x) = \int_1^x f(t) dt$

$= (x-1) \cdot 1.5 \leq x \leq 2$

$2 \leq x \leq 3$

$\psi'(x) = 1.5 \leq x \leq 2$

$2 \leq x \leq 3$

$\psi'(x)$ 在 $x=2$ 处不可导

C. $(\int_0^x \sin x dx)' > \int_0^x \sin^2 x dx$

$(\int_0^1 x dx)' < \int_0^1 x^2 dx$

定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 不一定积为0

注: ① $f(x) \in C[a,b]$ 则 $\int_a^b f(x) dx$ 可导
 ② $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 则 $\int_a^b f(x) dx \in C[a,b]$
 例2. 正确的是 (C)
 (A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数 $f(x)$ 可能有第一类间断点
 (B) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $f(x)$ 可能无界
 (C) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界
 (D) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

§6.3 定积分的计算

1. 用牛顿-莱布尼兹公式: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$ ($f(x) \in C[a,b]$)

例1: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

例2: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin x} dx$

解: 原式 = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}| dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}) dx$
 $= 2(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2(-\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$
 $= 4$

2. 定积分的第一换元与分部积分公式

(1) 第一换元公式: $\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt$

例3: $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

解: 原式 = $\int_0^1 \frac{1}{2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$

(2) 分部积分公式: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

例4: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

解: 原式 = $e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$
 $= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^x dx = -1 \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -(0-1) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$
 \therefore 原式 = $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$

例5: 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $\int_0^1 x f(x) dx$

解: 原式 = $\int_0^1 f(x) dx^2 = \frac{1}{2} x^2 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 \frac{\sin x}{x^2} \cdot 2x dx$
 $= \frac{1}{2} x^2 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin x^2 dx^2 = \frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\cos 1 - 1)$

(3) 定积分的第二换元公式

定理1: (第二换元公式) 设 $f(x) \in C[a,b]$, $\phi(x) = g(t)$ 满足:

(i) $g(a) = a, g(b) = b$

(ii) $g(t)$ 在 $[c,d]$ (或 $[c,\alpha]$) 上连续

(iii) g 在 $[c,d]$ (或 $[c,\alpha]$) 上可导, $g'(t) \in C[a,b]$

则 $\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt$

结论1: 设 $f(x)$ 是 $[a, a+2\pi]$ 上的连续函数, 当 $f(x)$ 是奇函数时有 $\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = 0$ ($\int_a^{a+\pi} f(x) dx = 2 \int_a^{\pi} f(x) dx$) (偶)

换元与换限

拆限+换元 \rightarrow 证 $\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$

结论1: $f(x)$ 为可积函数

仍为正确

证: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
 $= \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(x) dx$
 $= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
 $= \int_a^b (f(x) + f(x)) dx$

结论2: $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数 则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx$

仍然正确

证: $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$
 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_0^T f(t+T) dt = \int_a^T f(x) dx + \int_0^T f(t) dt$

观察积分限

例: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x} dx$

解: 原式 = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^{-x}} dx$
 $\stackrel{①}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^{-x}} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^{-x}} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+e^x) \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{1}{2} \sin x) dx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$

两次新换元

例2: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$

解: 原式 = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ 令 $\frac{\pi}{2} - x = t$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x + \ln \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{2} \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx$$

$$\text{令 } 2x = t \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$\therefore \text{原式} = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

例3. 正确的是 () 已知 $f(x)$ 连续且 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$
 (A) 当 $f(x)$ 是偶函数 则 $F(x)$ 是奇函数 $f(x)=0 \Rightarrow F(x)=C$
 (B) 当 $f(x)$ 是奇函数 则 $F(x)$ 是偶函数
 (C) 当 $f(x)$ 是周期函数 则 $F(x)$ 是周期函数 $\sin(x) = \cos(x + \sin(x) + \cos(x))$
 (D) 当 $f(x)$ 是无界函数 则 $F(x)$ 是无界函数 $F(x) = \sin x$

新题 推广
 (B) $f(x) = -f(x) \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$

$$F(x) = \int_a^x f(-t) dt + C = \int_a^x f(t) dt + C = F(x) + C$$

例4 广义积分
 1. 无穷区间上的广义积分
 定义: 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的任何有限区间上都可积, 称极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$ 为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的广义积分. 若此极限存在, 则称此广义积分收敛或存在, 否则称此广义积分发散或不收敛. 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(x) dx$)
 若 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 且 $f(x)$ 连续, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(a)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a)$$

$$= F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b$$
 例1: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$
 解: 原式 = $\arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

例2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$
 解: 原式 = $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

$$= \arctan x \Big|_{-\infty}^0 + \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \pi$$

注意: 两个不同区间的被积函数不同, 同一函数被积限不同, 则其初值也不同. 若初值不同, 且仅当两函数被积限相同时, 则积分相等.

例3: $\int_0^1 \sqrt{x+1} \sqrt{1-x} dx$ ($0 < \beta < 1$)
 解: 原式 = $\int_0^1 \sqrt{(x+1)(1-x)} dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$
 而 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$
 \therefore 原式 = $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt \in C[a, b]$, $\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = \varphi(a) = \int_a^a f(t) dt$
 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不连续, $\varphi(x)$ 在 (a, b) 内 (即 a 点) 不可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x)$ 可能不存在.

2. 瑕积分 $\varphi(x) \in C(a, b)$ $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt \in C(a, b)$
 定义2: 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 的任何有限区间上可积, $f(x)$ 在 b 点附近为无界, 称 $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ 为瑕积分. 若 $x=b$ 为瑕点, 则 $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ 若此极限存在, 则称此瑕积分为收敛或存在, 否则称为发散或不收敛.

记为 $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$ 若 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ 且 $f(x)$ 连续, 则 $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$
 $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$ ($\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$)

例1: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$
 解: 原式 = $\arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$

例2: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
 解: 原式 = $\ln|x| \Big|_0^1 = 0 - (-\infty) = +\infty$ 不收敛
 $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2 - 0 = \ln 2$
 $\therefore \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 不收敛

注: 瑕点 $c \in (a, b)$ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ 且当两个瑕积分都存在 \Rightarrow 该二重积分收敛.

3. 定积分求极限

公式: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)]$

利用此公式求“无穷和”“无穷级数”的数列极限

例1: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots + \frac{1}{n^2})$

解: 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)} + \dots + \frac{1}{n}) = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = 2$

例2: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [(1+n) + (1+n)^2 + \dots + (1+n)^n]$

解: 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1+\frac{k}{n})^k = \int_0^1 e^{x(1+x)} dx = \frac{e^2 - e}{2}$

例3: 设 $f(x) \in C[a, b]$ 且 $f(x) > 0$

证明: $\ln \int_a^b f(x) dx > \int_a^b \ln f(x) dx$

证: $\ln \int_a^b f(x) dx = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)]$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{n} [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)]$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln f(\xi_1) + \ln f(\xi_2) + \dots + \ln f(\xi_n)]$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f(\xi_k) = \int_a^b \ln f(x) dx$

由均值不等式得 $\frac{1}{n} [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)] > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f(\xi_k)$

由极限的保序性得 $\ln \int_a^b f(x) dx > \int_a^b \ln f(x) dx$

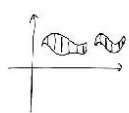
§6.5 定积分的应用

1. 微元法

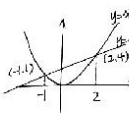
设 S 满足: ① S 具有可加性 ② 于区间 $[a, b]$ 与 S 对应 ③ $V \in [a, b]$ 的点 x 与 dx 所对应的 S 的变量 (微元) ds 等于 $f(x)$ 在点 x 处 $[a, x+dx]$ 的函数值 $f(x)$ 乘以点区间的长度 dx , $ds = f(x) dx$ 则 $S = \int_a^b f(x) dx$

2. 求平面图形面积

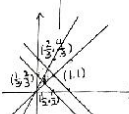
① 均值不等式:
 $x_1 > 0, x_2 > 0$
 $\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$
 $x_1 > x_2 \Rightarrow \lim x_n \geq \lim x_{n+1}$



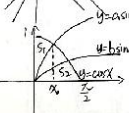
(1) 函数曲线所围图形面积
 (a) X -型域 S 的面积
 $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$
 $(g(x) \leq y \leq f(x))$



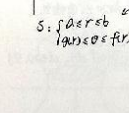
(b) Y -型域 S 的面积
 $S = \int_a^b [f(y) - g(y)] dy$
 $(g(y) \leq x \leq f(y))$



例1: 求由曲线 $y=x^2, y=x+2$ 所围图形面积
 解: $S = \int_{-2}^1 (x+2-x^2) dx = \frac{9}{2}$



例2: 求由直线 $y=x, y=2x, x+y=1$ 所围图形面积
 解: $S = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (2x-x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (2-x) dx = \frac{1}{6}$



例3: 由曲线 $y=\cos x$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 间部分与两坐标轴所围图形面积被曲线 $y=\sin x, y=\cos x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) 分成三等份, 求 a, b
 解: $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$
 $S_1 = \int_0^a \cos x dx = \sin a$
 $S_2 = \int_a^b (\cos x - \sin x) dx = (\sin x + \cos x)|_a^b = \sin b + \cos b - \sin a - \cos a$
 $S_3 = \int_b^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 - \cos b$
 $\therefore \sin a = \frac{1}{3}, \sin b + \cos b - \sin a - \cos a = \frac{1}{3}, 1 - \cos b = \frac{1}{3}$
 $\therefore a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{2\pi}{3}$

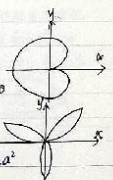
(2) 极坐标曲线所围图形面积

扇形域 $S: \theta \in [a, b]$
 $(\rho(\theta) \leq r \leq f(\theta))$

微元法: $ds = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

例1: 求心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$ 所围图形的面积
 解: $S = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1-\cos\theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} (1-2\cos\theta+\cos^2\theta) d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2$

例2: 求曲线 $r = a \sin 3\theta$ 所围图形面积
 解: $S = 6 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} a^2 \sin^2 3\theta d\theta = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{3}{2} a^2$



15) 参数曲线所围图形面积

由一参数曲线所围曲边梯形 $S: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq y(x) \end{cases}$ 的面积.

$S = \int_a^b y(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} y(\varphi(t)) d(\varphi(t))$ 其中 $y(x)$ 为参数曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

例1: 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限内所围图形的面积.

解: $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin \theta d(a \cos \theta) = \pi ab$

例2: 求曲线 $r = a(1 + \cos t)$ 所围图形的面积.

$y = a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ 及直线 $x = a(1 + \cos t)$

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a(\cos t - \cos t + t \sin t)}{-a(\sin t - \sin t)} = \frac{t \sin t}{0}$

$t=0 \rightarrow (a, 0) \quad t = \frac{\pi}{2} \rightarrow (\frac{3}{2}a, a) \quad t = \pi \rightarrow (-a, \pi a) \quad t = \frac{3\pi}{2} \rightarrow (-\frac{3}{2}a, -a)$

$t = 2\pi \rightarrow (a, -2\pi a)$

如图 $S = S_1 + S_2 \quad S_2 = \frac{1}{2} a \cdot 2\pi a = \pi a^2$

$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 \frac{1}{2} d\theta = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$

$= \frac{a^2}{4} [\theta + 2\sin \theta + \frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4} (\frac{\pi}{2} + 2 + \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi a^2}{8} + \frac{a^2}{2}$

$\therefore S = S_1 + S_2 = \frac{3\pi a^2}{8} + \pi a^2 + \frac{a^2}{2}$

3. 平面曲线弧长 $x \in [a, b]$

(1) 函数曲线 $y = f(x)$, 弧微分 $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$, 要求 $dx > 0$ 则曲线长

$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

(2) 参数曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t), t \in [\alpha, \beta] \\ y = \psi(t) \end{cases}, ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, dt > 0, \beta > \alpha$

$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$

(3) 极坐标曲线 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta], ds = \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta, d\theta > 0$, 则

$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$

例1: 半径为 R 的圆的周长

解: 如图, $x^2 + y^2 = R^2, \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi]$

$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$

例2: 求 $r = a(1 - \cos \theta)$ 的弧长, $(a > 0)$

解: $S = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1 - \cos \theta)]^2 + [a \sin \theta]^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta$

$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} |\sin \frac{\theta}{2}| d\theta = 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 8a$

4. 截面面已知的空间体积

例1: 设有互相垂直的柱体, 底面在 xy 平面上, 与 x 轴为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 用这

xy 轴及与 xy 轴垂直的平面去截此柱体得一形体, 求该形体体积

解: 如图 $V = 2 \int_0^a \frac{1}{2} b y \tan \frac{\pi y}{2a} dx = \int_0^a b y \tan \frac{\pi y}{2a} dx = \int_0^a \frac{b}{2} (\frac{\pi y}{2a})^2 dx$

$= \frac{\pi^2 b^3}{12a^2}$

5. 旋转体的体积

由曲线 $y = f(x), [a \leq x \leq b]$ 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体体积

$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$

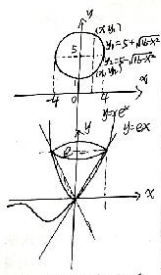
例: 求由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形的弧绕 x 轴旋转一周形成的体积

解: (1) 绕 x 轴旋转 $V = 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 2 \int_0^a \pi (b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2) dx = \frac{4}{3} \pi a b^2$

(2) 绕 y 轴旋转 $V = 2 \int_0^b \pi x^2 dy = 2 \int_0^b \pi (1 - \frac{y^2}{b^2})^2 dy = \frac{8}{15} \pi a^3 b$

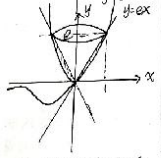
例2: 求半径为 R , 高为 h 的球缺体积

解: 如图 $V = \int_{-R}^R \pi x^2 dy = \int_{-R}^R \pi (R^2 - y^2) dy = \pi (R^2 y - \frac{1}{3} y^3) \Big|_{-R}^R = \frac{2}{3} \pi (R^2 h - \frac{1}{3} h^3)$



例3: 求由曲线 $x^2 + (y-5)^2 = 16$ 所围成图形绕 x 轴旋转形成的体积

解: 如图 $V = 2\pi \int_0^4 \pi y^2 dx - \int_0^4 \pi y^2 dx$
 $= 2\pi \int_0^4 \pi (16 - x^2) dx = 40\pi \int_0^4 (16 - x^2) dx = 40\pi [16x - \frac{1}{3}x^3]_0^4 = 40\pi [64 - \frac{64}{3}] = 40\pi \cdot \frac{128}{3} = \frac{5120\pi}{3}$



例4: 求由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $y = 0$ 所围图形绕 y 轴旋转形成的体积

解: 如图 $x = e^{-y}$ $x=0$ $x=1$
 $V_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}e$
 $V_2 = \int_0^e \pi x^2 dy = \int_0^e \pi x^2 (xe^x) = \int_0^e \pi x^3 (1+x) e^x dx$
 $= \int_0^e \pi (x^3 + x^4) e^x dx = \pi(4 - e)$

6. 旋转体的侧面积

曲线 $Y=f(x)$ 绕 x 轴旋转一周形成的旋转体的侧面积

$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx$

例1: 半径为 R 的球面面积

解: $S = 2\pi \int_0^R 2R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 2\pi \int_0^R 2R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 2\pi R^2 \int_0^R \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} dx$
 $= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4\pi R^2$

球冠的面积 $S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+f'(x)^2} dx = 2\pi \int_a^b f(x) dx = 2\pi R^2 \theta$

例2: 求曲线 $y = \sqrt{x}$ 绕 x 轴旋转形成的旋转体侧面积

解: $S = \int_0^1 2\pi \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = \frac{\pi}{6} \int_0^1 \sqrt{4x+1} dx$

7. 定积分在物理方面的应用

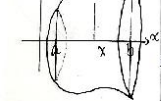
(1) 质点运动: $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$

(2) (平面) 小薄片: $F = \rho_k g h S = g h S$

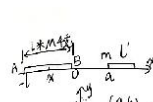
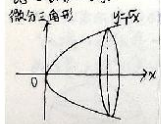
(3) $W = FS$

例: 设有一根长为 L 质量为 M 均匀的细杆 AB , 在 AB 的延长线上距 B 点 a 米处有一个质量为 m 的质点, 求细杆 AB 对该质点的引力

绕哪个轴旋转该轴对应的为积分变量

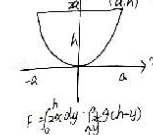


$ds = \sqrt{1+y'^2} dx$
 $ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$



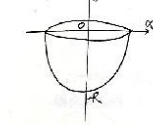
(引力系数 $K > 0$)

解: $F = \int_0^L K \frac{m}{x} dx = K \frac{m}{a-x} \Big|_0^L = \frac{K m \ln a}{a-x}$
 $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$



例2: 设水库有一抛物线型闸门(如图), 闸门的上沿宽 $2a$ 米高 h 米, 让水库蓄满水, 求此闸门所承受的水压力 F (水=1)

解: 如图 $y = bx^2$, $x = a$ $y = h$ $bx^2 = h \Rightarrow b = \frac{h}{a^2}$ $y = \frac{h}{a^2} x^2$
 $F = \int_0^h 2g (h-y) \sqrt{\frac{h}{a^2} (h-y)}$



例3: 设有一个半径为 R 的半球形面(如图)蓄满水, 将此容器中的水全部抽出所做的功 W (水=1)

解: 如图所示, 由微元法, 有 $W = \int_0^R \pi x^2 dy \rho g (R-y) = \pi \rho g \int_0^R x^2 (R-y) dx$
 $= \pi \rho g \int_0^R (R^2 - yx) dy = \frac{4}{3} \rho g R^4$

第七章 微分方程

§7.1 基本概念

- (1) 常微分方程: 含有未知函数或微分的等式
- (2) 微分方程的阶: 方程中未知函数的最高阶数
- (3) 微分方程的解:
 - (4) 通解
 - (5) 奇解: 不包含在通解中的解
 - (6) 定解条件(初始条件) n 阶方程满足 n 个条件: $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$ 称为定解条件
- (7) 特解: 通解中通过定解条件得到的解
- (8) 解的存在性、唯一性、稳定性

"计算"方法: 数值解法

§7.2 一阶微分方程

1. 可分离变量方程:

称 $y' = P(x)Q(y)$ ($P(x)$ 是 x 的已知函数, $Q(y)$ 是关于 y 的已知函数) 为可分离变量方程

解法: 可分离变量法

$$\frac{dy}{dx} = P(x)Q(y) \Rightarrow \frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx \quad (Q(y) \neq 0)$$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C$ (这里 $\int \frac{dy}{Q(y)}$ 表示一个原函数)

例1: 求方程 $yy' + x = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解

$$\text{解: } y \cdot \frac{dy}{dx} + x = 0 \Rightarrow y dy = -x dx \Rightarrow \int y dy = \int -x dx + C$$

$$\Rightarrow \text{通解为 } \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{由 } y|_{x=1} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

\therefore 特解为 $x^2 + y^2 = 1$

例2: 求解方程 $yy' = \sqrt{1-y^2}$

$$\text{解: } y \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \quad (y \neq \pm 1) \Rightarrow \int \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx + C$$

$$-\sqrt{1-y^2} = x + C \Rightarrow \sqrt{1-y^2} = -(x+C) \quad y = \text{显函数}$$

2. 方程的变量代换 已知

(1) 齐次方程 $y' = f(\frac{y}{x})$, f 为一次函数

解法: 令 $\frac{y}{x} = u$, $\Rightarrow y = ux$, $\Rightarrow y' = u + xu' = f(u)$

$$\Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = f(u) \quad \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

例1: 解方程 $\frac{xy-y^2}{x^2+y^2} = y'$

$$\text{解: 令 } \frac{y}{x} = u, \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + xu' = \frac{u+u^2}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow xu' = \frac{u+u^2}{1+u^2} - u = \frac{u^2}{1+u^2} \Rightarrow \arctan u - \frac{1}{2} \ln|1+u^2| = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{u^2}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x} + C$$

通解: $\arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln|1 + \frac{y^2}{x^2}| = \ln|x| + C$

例2: 求与曲线 $x^2 + y^2 = 2cx$ 正交的曲线族

$$\text{解: } (\frac{x^2+y^2}{x})' = 2c \Rightarrow y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

方程的通解

通解

设两族曲线正交为 $1/x$ 切, 所求曲线族在点 (x, y) 处满足 $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

$$\text{令 } \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow u + xu' = \frac{2xu}{x^2+u^2x^2} \Rightarrow xu' = \frac{2u}{1+u^2} - u$$

$$\int \frac{u+u^3}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \int \frac{u+u^3}{1+u^2} du = \ln|x| + C$$

$$\ln|u| - \ln|1+u^2| = \ln|x| + C \Rightarrow \ln \frac{|u|}{|1+u^2|} = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \frac{|u|}{|1+u^2|} = C_1|x| \quad (C_1 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = C_1|x| \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = C_1^2|x| \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{C_1^2}|x| = C_2|x|$$

(2) 线性齐次方程 $y' = f(\frac{Ax+By+C_1}{Ax+By+C_2})$

① $C_1 = C_2$, 为齐次方程

$$\text{② 当 } \frac{C_1}{C_2} = \frac{A}{A'} \Rightarrow y' = f(\frac{A(Ax+By)+C_1}{A(Ax+By)+C_2}) = f(\frac{A(Ax+By)}{A(Ax+By)+C_2}) \quad u = \frac{Ax+By}{Ax+By+C_2} \quad u' = \frac{A-A'u}{Ax+By+C_2}$$

$$\Rightarrow \frac{u-A'u}{Ax+By+C_2} = f(\frac{Au}{A+Bu+C_2/A}) = f(\frac{Au}{A+Bu+C_2/A})$$

例1: $y' = \frac{x-y+1}{x+y-1}$

$$\text{解: 令 } u = x-y \Rightarrow u' = 1-y' \Rightarrow y' = 1-u' = \frac{u+1}{u-1} = 1 + \frac{2}{u-1} \Rightarrow -u' \frac{du}{u-1} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int u du = \int (1-u) dx + C \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = -x + C \Rightarrow \frac{1}{2}(x-y)^2 = -x + C \Rightarrow \text{通解}$$

$$\text{③ 当 } \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{A}{A'} \Rightarrow \frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2} = 0 \Rightarrow y = \frac{A_1x+C_1-B_1x}{B_2}$$

$$\text{令 } y = x + u \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(x+u)}{dx} = 1 + \frac{du}{dx} = f(\frac{Ax+By}{Ax+By+C_2})$$

$$\text{令 } y = Y + B_2 \Rightarrow \text{令 } u = \frac{Y}{B_2}$$

例2: 解方程 $y' = \frac{x-y+1}{x+y-1}$

$$\text{解: 令 } y+2=0 \Rightarrow y=-2 \text{ 令 } x=3 \text{ 则原方程变为 } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} = \frac{y}{x+1}$$

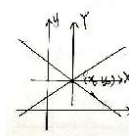
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + C$$

$$\Rightarrow y = C(x+1) \Rightarrow y+2 = C(x+1) \Rightarrow \text{通解}$$

$$\Rightarrow \ln|u| + \ln|x| = \ln|x| + C \Rightarrow \ln|u| = C \Rightarrow u = e^C \text{ (或 } e^{-C})$$

$$\Rightarrow Y = e^C(x+1) \Rightarrow y+2 = e^{\frac{x}{B_2}}(x+1) \quad (C \neq 0)$$

$y+2=0$ 是方程的解, 通解为 $y+2 = e^{\frac{x}{B_2}}(x+1)$ C 为任意常数



$y = 1x + u^2 \Rightarrow u = x + y \Rightarrow u' = 1 + y' = 2u' \Rightarrow u' = u' \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + u'$
 $\Rightarrow \int \frac{1}{1+u} du = \int dx + C' \Rightarrow \arctan u = x + C'$
 $\Rightarrow \arctan(x+y) = x + C'$

3- 一阶线性微分方程
 定义: 称 $y' = p(x)y + q(x)$ 为一阶线性微分方程, 其中 $p(x), q(x)$ 为 x 的函数, 称 $q(x)$ 为方程的非齐次项. 若 $q(x) \equiv 0$ 称此方程为一阶线性非齐次(齐次)微分方程.

1) 齐次方程通解公式
 $y' = p(x)y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int p(x) dx + C' \Rightarrow \ln|y| = \int p(x) dx + C'$
 $|y| = e^{\int p(x) dx} \cdot e^{C'} \Rightarrow y = e^{\int p(x) dx} (\pm e^{C'}) = C \cdot e^{\int p(x) dx} (C \neq 0)$
 $\therefore y=0$ 也是齐次解 $\therefore y = C \cdot e^{\int p(x) dx}$, C 为任意常数.

例: 解方程 $xy' = y$
 解: $y = xy \Rightarrow y = C \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} = C \cdot e^{\ln|x|} = C|x|$ x 在 $x=0$ 点不连续
 故 $= C \cdot e^{\ln|x|} = Cx$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C' \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C' \Rightarrow |y| = |x| \cdot e^{C'}$
 $\Rightarrow y = x(\pm e^{C'}) = Cx$

注: 在通解公式中 $e^{\int p(x) dx} = e^{\ln|x|}$ $f(x)$ 不取绝对值
 12) 非齐次的通解公式 $y' = p(x)y + q(x)$
 $\int \frac{dy}{y} = \int p(x) dx + \int \frac{q(x)}{y} dx + C'$
 $\ln|y| = \int p(x) dx + \int \frac{q(x)}{y} dx + C'$
 $y = e^{\int p(x) dx} \left[\int \frac{q(x)}{e^{\int p(x) dx}} dx + C' \right] = |u| \cdot e^{\int p(x) dx}$
 解法: 常数变易法 令 $y = u \cdot e^{\int p(x) dx}$, $u = u(x)$
 $y' = u' \cdot e^{\int p(x) dx} + u \cdot e^{\int p(x) dx} \cdot p(x) = p(x)u \cdot e^{\int p(x) dx} + q(x)$
 $u' = e^{-\int p(x) dx} \cdot q(x) \Rightarrow u = \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + C$
 $\therefore y = (C + \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx) \cdot e^{\int p(x) dx}$ - 通解公式
 $= y_1 + y_2$
 类比法代 \leftarrow $y_1 = C \cdot e^{\int p(x) dx}$ 齐次通解
 $y_2 = \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx \cdot e^{\int p(x) dx}$ 非齐次特解

此定仅表示出 $p(x)$ 的一个原函数

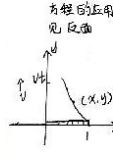
一阶线性微分方程的通解公式

例1: 求 $xy' = y + x^2 e^x$ 满足 $|y| = 0$ 的解
 解: $y' = \frac{1}{x}y + x e^x$
 $y = (C + \int x e^x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx) \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx}$
 $= (C + \int x e^x \frac{1}{x} dx) x = (C + e^x) x$
 将 $x=1$ 代入得 $C = -e$ 即 $y = (e^x - e)x$

例2: 解方程 $(x-y^2)y' = y$
 解: $x - y^2 = y' \Rightarrow y' = \frac{1}{x}y - y^2$ $p(x) = \frac{1}{x}$ $q(x) = -y^2$
 $x = (C + \int -y^2 e^{\int \frac{1}{x} dx} dx) e^{\int \frac{1}{x} dx}$
 $= (C - e^y) y$

不定分母变量
 也不是齐次
 可尝试将 x 看作函数
 且看非齐次项
 或者换元转化

方程的应用
 例: 一个儿童用一根长的竹竿做一个玩具, 包括将儿童在 $(0,0)$ 处, 玩具在 $(1,0)$ 处, 现在儿童以匀速 v 沿 y 轴正向行走, 问玩具所运动的轨迹如何?
 解: 如图设 $t=0$ 为初始状态, 经过时间 t , 儿童运动到 $(0, vt)$ 处, 玩具在 (x, y) 处, 过 (x, y) 点切线 $Y - y = y'(x - x)$ 或 $\lambda(0, vt)$ 得 $vt - y = y'x + 0$ $\Rightarrow y' = \frac{vt - y}{x}$
 由 $p(x)$ 中有 y^2 $x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$ $(0 < x < 1)$ $y = \int \frac{-y}{x} dx$
 4. 设斜率为 $y' = p(x)y + q(x)$ $(\lambda \neq 0, 1)$ 则 $\frac{dy}{y} = \frac{p(x)y + q(x)}{y} dx$
 $y^{-\lambda} y' = y^{-\lambda} p(x)y + q(x) = y^{-\lambda} p(x) + q(x)$ 令 $y^{-\lambda} = u \Rightarrow (1-\lambda)y^{-\lambda} = u'$
 $\Rightarrow \frac{u'}{1-\lambda} = p(x)u + q(x) \Rightarrow u' = (1-\lambda)p(x)u + (1-\lambda)q(x)$
 $\therefore y^{-\lambda} = u = (C + \int (1-\lambda)q(x) e^{-\int (1-\lambda)p(x) dx} dx) e^{\int (1-\lambda)p(x) dx}$
 例3: 解方程: $xy' = 4y + x^2 \sqrt{y}$ $p(x) = \frac{4}{x}$ $q(x) = x \sqrt{y}$
 解: $y^{\frac{1}{2}} = (C + \int \frac{1}{2} x e^{\int \frac{4}{x} dx} dx) e^{\int \frac{4}{x} dx}$
 $= (C + \frac{1}{2} |x|) x^2$
 $y^{\frac{1}{2}} = 4x + \frac{1}{2} x^2$ $y' = 4 + x \sqrt{y}$ $p(x) = \frac{4}{y}$ $q(x) = y$ $\lambda = \frac{1}{2}$



§7.3. 三种可降阶的高阶方程

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型方程 $y^{(3)} = x$
 $y = \int \int \dots \int f(x) (dx)^n + C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \dots + C_1x + C_0$

2. $F(x, y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$ 型方程
 解法: 令 $y^{(n)} = u, y^{(n-1)} = u'$, 则方程变为 $F(x, u, u') = 0$
 若此方程可解, 则原方程可解

例1: 求方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 3$ 的解
 解: 设 $u = y', u' = y''$, 原方程变为 $(1+x^2)u' = 2xu \Rightarrow u' = \frac{2x}{1+x^2}u$
 $u = C e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = C(1+x^2)$ 代入 $u|_{x=0} = 3$ 得 $C=3$
 $\therefore y' = u = 3(1+x^2) \therefore y = x^3 + 3x + C'$ 代入 $y|_{x=0} = 1$ 得 $C'=1$
 $\therefore y = x^3 + 3x + 1$

3. $F(y, y', y'')$ 型方程
 设 $y' = u, u = u(y), y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$
 方程变为 $F(y, u, u \frac{du}{dy}) = 0$

例2: 求方程 $yy'' = 1+y'^2$ 满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$ 的解.
 解: 设 $u = y', y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$, 原方程变为
 $y u \frac{du}{dy} = 1+u^2 \Rightarrow \int \frac{y u}{1+u^2} du = \int y dy + C' \Rightarrow$
 $\frac{1}{2} \ln|1+u^2| = \ln|y| + C' \Rightarrow \sqrt{1+u^2} = |y| e^{C'} = y \cdot (\pm e^{C'})$
 $\sqrt{1+u^2} = y \cdot C''$ 代入 $u|_{y=1} = 0$ 得 $C'' = 1$
 $\therefore \sqrt{1+u^2} = y \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = y \Rightarrow y' = \pm \sqrt{y^2-1}$
 $\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} dy = \int \pm dx + C \Rightarrow \ln|y + \sqrt{y^2-1}| = \pm x + C$
 $\Rightarrow |y + \sqrt{y^2-1}| = e^{\pm x} \cdot e^C \Rightarrow y + \sqrt{y^2-1} = e^{\pm x} \cdot C_0$ 代入 $y|_{x=0} = 1$ 得 $C_0 = 1$
 $\therefore y + \sqrt{y^2-1} = e^{\pm x} \quad y - \sqrt{y^2-1} = e^{\mp x}$ (两式相乘)
 $\therefore y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

例3: 飞机着陆时, 为减少滑行距离, 立即打开机尾减速伞, 经测试, 此

形成的阻力大小与滑行速度成正比, 比例系数 $k=6 \times 10^4$. 今有一架重 9000 吨的飞机, 着陆时的水平速度为 700 km/h. 若不计破飞机与地面摩擦阻力, 求飞机最长滑行多少米?

解: 由牛顿第二定律: t -时间, s -滑行距离, $t=0$ 为初始状态
 $9000 \frac{dv}{dt} = -6 \times 10^4 v$ 且 $s|_{t=0} = 0, v|_{t=0} = 700$
 $\therefore v = \frac{dv}{dt} = -6 \times 10^4 v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -6 \times 10^4 dt \Rightarrow \ln|v| = -6 \times 10^4 t + C$
 $v = C e^{-6 \times 10^4 t}$ 代入 $v|_{t=0} = 700$ 得 $C = 700$
 $\therefore v = 700 e^{-6 \times 10^4 t} \Rightarrow s = \int v dt = \int 700 e^{-6 \times 10^4 t} dt = -\frac{700}{6 \times 10^4} e^{-6 \times 10^4 t} + C'$
 将 $s|_{t=0} = 0$ 代入得 $C' = \frac{700}{6 \times 10^4} \therefore s = \frac{700}{6 \times 10^4} (1 - e^{-6 \times 10^4 t})$
 $\lim_{t \rightarrow \infty} s = \frac{700}{6 \times 10^4} = 1.165$ (公里)

例3: 有一个装有进出两个水管的圆柱形容器, 原有 50% 浓度的酒精水溶液 bL . 现同时打开两个水管, 它们的流速均为 aL/min . 而进水端流速 10% 浓度的酒精水溶液. 问经过多长时间, 容器中酒精水溶液浓度变为 20%?

解: t -时间 $y(t)$ - t 时刻容器中的浓度, 经 t 个增量 Δt
 $\Delta y = [y(t) \cdot b + a \Delta t \cdot 10\% - (y(t) + a \Delta t) \cdot y(t)]$
 $\therefore \Delta y = \frac{a}{10} \Delta t (1 - \frac{y(t)}{b}) \Delta t$
 $\Rightarrow y' = \frac{a}{10} (1 - \frac{y}{b})$ 且 $y|_{t=0} = 50\%$
 $y = a/4 e^{-\frac{a}{10} t} + u/1 = a/2 \Rightarrow t = \frac{a}{10} \ln 4$

§7.4 n 阶线性微分方程及通解的结构

一. n 阶线性微分方程
 型如: $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$ (1)
 $L(y) = f(x)$ (1)
 $L(y) = 0$ (2)
 解(1)为 n 阶线性微分方程, 当 $f(x) = 0$ 时, 解(1)为 n 阶线性齐次方程.
 当 $f(x) \neq 0$ 时, 解(1)为 n 阶线性非齐次微分方程, 令 $Y = \frac{dy}{dx} + p(x) \frac{d^2y}{dx^2} + \dots$

$L(y) = f(x)$ (1)
 $L(y) = 0$ (2)

福昕扫描王快速指南

欢迎使用福昕扫描王安卓 APP！体验 OCR 文字识别功能，将图片转换成文字内容，满足您的日常工作学习的需要，赶紧看看怎么使用吧！

1.添加文件

- 1) 首页从相册导入图片文件
- 2) 使用手机相机拍照，导入图片文件

2.文字识别

1)单张图片识别

预览图片文档，可旋转图片、调整图片亮度、颜色、对比度，点击“文字识别”按钮进行识别，点击“复制文本”拷贝文本内容，可重复查看识别结果；

2)多张图片识别

添加多张图片到文档详细页，点击“文字识别”按钮，对文档内的所有文件进行识别，点击“复制”拷贝文本内容，可重复查看识别结果。

3.如何与我们取得联系？

加入用户QQ交流群与我们取得联系，QQ群号码：
587813807

第一章 函数

一. 实数集 \mathbb{R}

① 完备性 (+, -, \times , \div)

② 有序性: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 要么 $a < b$, 要么 $a > b$, 要么 $a = b$


③ 阿基米德性: $\forall c > 0$, \exists 正整数 n , 使 $n > c$

④ 稠密性: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{a+b}{2}$

⑤ 实数 \longleftrightarrow 数轴上的点. \longleftrightarrow 对应 \forall 实数 $a \longleftrightarrow$ 点 a

二. 常见的数集

① $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 开区间 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
 闭区间 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

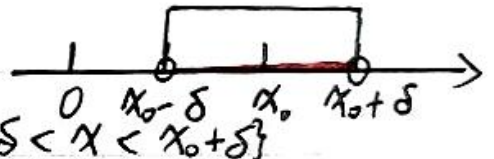


有限区间

半开半闭区间 $(a, b]$, $[a, b)$

$(-\infty, +\infty)$ - 无穷区间

② 邻域: 设 $\delta > 0$, x_0 点的 δ 邻域是 $\{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$



记为 $U(x_0, \delta) = U_\delta(x_0)$

x_0 点的去心邻域是 $\{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 < x < x_0 + \delta\}$ 记为 $\dot{U}(x_0, \delta) = \dot{U}_\delta(x_0)$

③ 有(无)界集

定义: 设 $D \subseteq \mathbb{R}$, 若 \exists 实数 $M > 0$ (或者 $\exists a, b \in \mathbb{R}$) 使 $\forall x \in D$, 有 $|x| \leq M$, ($a \leq x \leq b$) 则称 D 为有界集 (a 为 D 的下界, b 为 D 的上界)。否则, 称 D 为无界集, 即 \forall

$M > 0$, $\exists x_0 \in D$, 使 $|x_0| > M$

确界公理 若数集 D 有上(下)界, 则必有最小(大)上(下)界, 称为 D 的上(下)确界, 记为 $\sup D$ ($\inf D$)

确界的鉴别: $A = \sup D \Leftrightarrow \forall x \in D$, 有 $x \leq A$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in D$, 使 $x_0 > A - \varepsilon$

$A = \inf D \Leftrightarrow \forall x \in D$, 有 $x \geq A$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in D, \text{使 } x_0 < A + \varepsilon$$

三. 函数

定义: 设在某一问题中, 有两个变量 x, y , 若对变量 x 所取的每一个数通过一个规律 (对应法则) f , 总有唯一的一个变量 y 与之对应, 这时我们称 y 为 x 的一元函数, 简记为 $y = f(x)$, 称 x 为自变量, y 为因变量

注: 定义域 $\left\{ \begin{array}{l} \text{实际定义域: } S = \pi r^2 \ (r > 0) \\ \text{自然定义域: 函数 } y = \pi r^2 \ r \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

对应规律 (函数关系) $\left\{ \begin{array}{l} \text{具体的对应规律: 公式法、列表法} \\ \text{抽象的对应规律: 图形法} \end{array} \right.$

2. 常见的函数形式 (10)

(1) 数列 $\{a_n\}$: $a_n = f(n)$ — 整标函数

(2) 基本初等函数 (6)

常量函数 $y = C$ 指数函数 $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ 幂函数

对数函数 $y = \log_a x \ (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$

三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ 图象见 P13

反三角函数 $y = \arcsin x \ x \in [-1, 1], y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = \arccos x \ x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]$

$y = \arctan x, x \in \mathbb{R} \ y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$y = \text{arc cot } x, x \in \mathbb{R} \ y \in (0, \pi)$

(3) 初等函数: 由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合

(4) 反函数

(5) 复合函数: $y = f(t), t = g(x) \rightarrow f(g(x))$

(6) 参数函数: $\begin{cases} x = \varphi(t), t \in T \\ y = \psi(\varphi^{-1}(x)) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

(7) 隐函数: $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ 显函数

狄利克雷函数

(8) 分段函数: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$ 取整函数: $y = [x] = n, n \leq x < n+1$
 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3. 计算函数值及函数值的表示

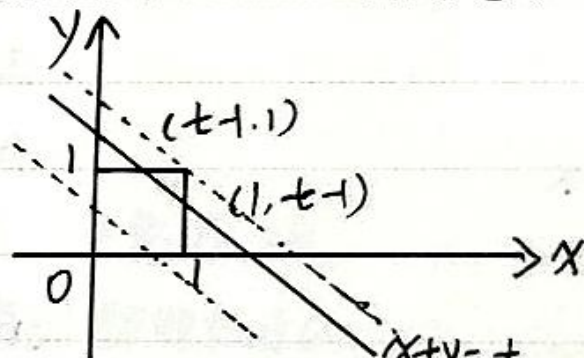
自变量一点 因变量一函数值

比如求 $y = f(x)$ 在 x_0 点的函数值 $y | x = x_0 = f(x_0)$

4. 函数图形

例1: 设平面上有一正方形 $D, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 又有直线 $l: x + y = t (-\infty < t < +\infty)$, $S(t)$ 表示正方形 D 在直线 l 左下方的面积, 求 $S(t)$ 的表达式

解: $S(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 2 \\ 1 - \frac{1}{2}(2-t)^2, & 1 < t < 2 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ 注意分类



例2: 设 $f(x)$ 满足 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 求 $f(x)$

解: 将 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x \dots (1)$ 中 x 换成 $-x$

得 $f(1-\sin x) - 3f(1+\sin x) = -8x \dots (2)$

解 (1)(2) 得 $f(1-\sin x) = -2x$

令 $1-\sin x = t, 0 \leq t \leq 2$, 则 $x = \arcsin(1-t)$

$\therefore f(t) = -2\arcsin(1-t)$ 从而有 $f(x) = -2\arcsin(1-x), 0 \leq x \leq 2$

例3: 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases} g(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ 求 $f(g(x))$

解: $f(g(x)) = \begin{cases} 2^{g(x)}, & g(x) \geq 0 \\ \sin(g(x)), & g(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2^{x^3}, & x \leq 1 \text{ 且 } x^3 \geq 0 \\ 2^{hx}, & x > 1 \text{ 且 } hx \geq 0 \\ \sin x^3, & x \leq 1 \text{ 且 } x^3 < 0 \\ \sin(hx), & x > 1 \text{ 且 } hx < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2^{x^3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2^{hx}, & x > 1 \\ \sin x^3, & x < 0 \end{cases}$

注意答题时的条理性

跳步骤

第二章 极限与连续

§2.1 极限的概念

1. 数列极限: 已知数列 $\{x_n\}$, 当 n 无限增大时, 对应的项 x_n 与某一实数 A 无限接近, 则称实数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限

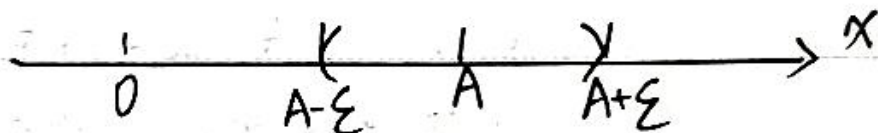
" ϵ - N " 定义: 已知数列 $\{x_n\}$, $A \in \mathbb{R}$, 若 $\forall \epsilon > 0$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \epsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛 (有极限), 称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记

为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 或 $x_n \rightarrow A$, 当 $n \rightarrow \infty$

注: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ (正整数集, 不包括 0) 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \epsilon$

注: (1) ϵ 贵在小时, (2) N 贵在存在 至多有 $x_1, x_2, \dots, x_N \notin U(A, \epsilon)$

(3) 几何表示



改变数列前面有限个项并不影响数列的收敛。

2. 发散数列: 没有极限的数列 e.g. $(-1)^n$

例1: 用定义验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证: 分析, $\forall \epsilon > 0$, 找 N . 当 $n > N$ 时, 有 $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$, 取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$

$\forall \epsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$, 当 $n > N$ 时, 有 $n > [\frac{1}{\epsilon}] \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

例2: 用定义验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

分析: $\forall \epsilon > 0$, $|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1$

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdots 1} \leq \frac{2n^{\frac{1}{2}} + n - 2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 < 1 + \epsilon$$

取 $N = [\frac{4}{\epsilon^2}]$, 当 $n > N$ 时有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

例3: 下列哪些描述可作 a 是数列 $\{x_n\}$ 极限的定义 (1.2.3.4)

(1) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$. 当 $n \geq N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$

(2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 有 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$

(3) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 有 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < k\epsilon$, k 为正常数

(4) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \frac{1}{m}$

(1) \Rightarrow (5) 显然

(5) \Rightarrow (1) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N' = N + 1$, 当 $n > N' > N$, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$

(5) \Rightarrow (2) 显然

(2) \Rightarrow (5) $\forall \varepsilon' > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$, 由 (2) 可知 $\exists N$ 当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| \leq \varepsilon < \varepsilon'$

(5) \Rightarrow (3) 显然 (5) \Rightarrow (4) 显然

3. 子数列的概念

已知数列 $\{x_n\}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

子数列 $\{x_{n_k}\}, x_2, x_8, x_{15}, x_{27}, \dots$

n_k 是表示 x_{n_k} 这一项在 $\{x_n\}$ 中是第 n_k 项

k 是表示 x_{n_k} 这一项在 $\{x_n\}$ 中是第 k 项 显然 $n_k \geq k$

4. 定理: 数列收敛于 $a \Leftrightarrow$ 它的所有子数列都收敛于 a

证: \Leftarrow 显然

\Rightarrow 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$

取 $N' = N + 1$, 当 $k > N'$ 时, $n_k \geq k > N' = N + 1, \Rightarrow n_k > N$

\therefore 有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon, \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$

(1) 判定数列发散 e.g. $\{(-1)^n\} \{ \sin \frac{n}{2} \pi \}$

(2) 判定数列收敛 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1}$

§2.2 函数的极限

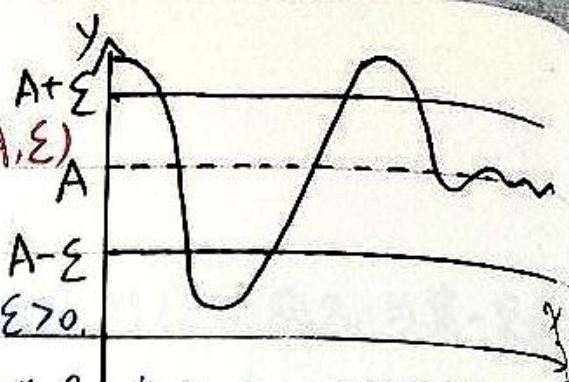
一. 函数的自变量趋于无穷大时的极限

(1) 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限

定义 1: 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有定义, A 为常数, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A, \text{当 } x \rightarrow +\infty$

注: $\forall U(A, \varepsilon), \exists X > 0$, 使 $f(x, +\infty) \subseteq U(A, \varepsilon)$

几何表示



定义2: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上有定义, A 为常数, 若 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists X > 0$, 当 $x < -X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限,

记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$, 当 $x \rightarrow -\infty$.

定义3: 设 $f(x)$ 在 $|x| > a$ 上有定义, A 为常数, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有

$|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$.

($x \rightarrow \infty$)

定理1: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

例: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

二. 函数自变量趋于有限值时的极限 (函数在一点处的极限)

设 $f(x)$, 自变量 x 无限接近 x_0 , 且 $x \neq x_0$, 若 $f(x)$ 无限接近常数 A , 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限

定义4: (ε - δ) 设 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义, A 为常数, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ (当 $x \rightarrow x_0$ 时) 在 x_0 点的极限

记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时

注: $\forall U(A, \varepsilon), \exists \dot{U}(x_0, \delta)$, 使 $f(\dot{U}(x_0, \delta)) \subseteq U(A, \varepsilon)$

定义5: 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$.

定义6: 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$

左、右极限统称为单侧极限

定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$

例1: 用定义验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 找 δ , $0 < |x - x_0| < \delta, |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$

$$|\sin x - \sin x_0| < \left| 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x-x_0| < \delta \leq \varepsilon$$

证: $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, 有 $|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2} \right|$
 $\leq |x-x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \therefore \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$

例2: 用定义验证 $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 找 δ . $0 < |x-1| < \delta$, $|x^2-1| = |(x+1)(x-1)| < \delta|x+1| = \delta|x-1+2|$
 $\leq \delta(|x-1|+2) < \delta^2+2\delta < 3\delta \leq \varepsilon \quad 0 < \delta < 1 \Rightarrow$ 取 $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\}$

法二: $\forall \varepsilon > 0$ 不假设 $0 < |x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$ 且 $x \neq 1$, $|1+x| < 3$ 取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$.
 $|x^2-1| = |(x+1)(x-1)| < 3|x-1| < \varepsilon$

结论: 由极限定义可得几个极限定式:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad 0 < a < 1$

3) 若 $f(x)$ 是基本初等函数且 $f(x)$ 在 x_0 有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

§2.3 极限的性质与计算

极限的性质

定理1 (唯一性) 若一个数列(或函数)有极限, 则极限唯一

证: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 反证法 又设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B$, 且 $A \neq B$, 不妨设 $B < A$

取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时有 $|x_n - A| < \varepsilon \Rightarrow x_n > A - \varepsilon = \frac{A+B}{2}$ ①

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时有 $|x_n - B| < \varepsilon \Rightarrow x_n < B + \varepsilon = \frac{A+B}{2}$ ②

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时 ①②同时成立从而 $x_n < \frac{A+B}{2} < x_n$ 矛盾

所以假设不成立, $A=B$

定理2 (有界性)

1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使 $|x_n| \leq M$

2) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 则 $\exists X > 0$, 使 $|x| > X$ 时, $f(x)$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M, \forall x \in$

$(X, +\infty) \cup (-\infty, -X)$

3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时 $f(x)$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M, \forall x \in$

$\in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$

注: 数列是整体有界, 函数是局部有界

定理3: (保序性) 设 $\lim x_n = A, \lim y_n = B$, 则:

(1) 若 $A > B$, 则 $\exists N$, 使 $n > N$ 时, 有 $x_n > y_n$ > 逆否命题

(2) 若 $\exists N$, 使 $n > N$ 时有 $x_n > y_n$, 则 $A \geq B$ 保序性

证明: (1) (类似唯一性证明) 取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$, 由 $\lim x_n = A$ 得 $|x_n - A| < \varepsilon$ 即 $x_n > \frac{A+B}{2}$ 由 $\lim y_n = B$ 得 $|y_n - B| < \varepsilon$ 即 $y_n < \frac{A+B}{2} \therefore y_n < \frac{A+B}{2} < x_n$

2 极限的四则运算与复合运算

前提: 极限存在
定理4: 设 $\lim x_n = A, \lim y_n = B$, 则 $\lim (x_n \pm y_n) = A \pm B, \lim x_n y_n = AB$
 $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B} (B \neq 0, y_n \neq 0)$

证: $\forall \varepsilon > 0$ 由 $\lim x_n = A \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$

由 $\lim y_n = B \exists N_2$ 当 $n > N_2$ 时有 $|y_n - B| < \varepsilon$, 且 $\exists M$ 使 $|y_n| < M$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n y_n - AB| = |(x_n - A)y_n + A(y_n - B)| < \varepsilon |y_n| + |A| \varepsilon \leq (M + |A|) \varepsilon = \varepsilon' \therefore \lim x_n y_n = AB$

定理5: 设 $f(g(x))$ 为 $y = f(u), u = g(x)$ 的复合函数, 且满足:

(1) $f(g(x))$ 在 x_0 的去心邻域内有定义 eg. $y = f(u) = \sqrt{u} \quad u = g(x) = \sin x - 1$

(2) $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$

(3) $g(x) \neq u_0$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_0)$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$

证: $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A, \exists \eta > 0$, 当 $0 < |u - u_0| < \eta$, 有 $|f(u) - A| < \varepsilon$

对上述的 $\eta > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时有 $|g(x) - u_0| < \eta$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_0\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$

\therefore 有 $|f(g(x)) - A| < \varepsilon, \therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A$

结论: (1) 指、幂、对数、三角、反三角运算可以交换次序 (极限存在) \hookrightarrow 知极限

若 f 是基本初等函数, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$

(2) 若 $f(x)$ 是初等函数, 且 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ / 定式 / 不定式

e.g. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$ $u = g(x) = 0$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -1$

例 1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3}$ (运用极限的四则运算)

例 2: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$

例 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$

例 4: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(p-1)(q^n-1) + b(p-1)(p^n-1)}{a(p-1)(q^{n+1}-1) + b(p-1)(p^{n+1}-1)}$ ($a > 0, b > 0, p > 0, p \neq 1, q > 0, q \neq 1$)

解 (1) $0 < p < 1, 0 < q < 1$ 原式 = 1

(2) $0 < p < 1, q > 1$ 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(p-1)(1-\frac{1}{q^n}) + b(q-1)(\frac{p^n}{q^n} - \frac{1}{q^n})}{a(p-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{q^n}) + b(q-1)(\frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} - \frac{1}{q^{n+1}})} = q$

(3) $p > 1, 0 < q < 1$ 原式 = p

(4) $p > 1, q > 1$ $\begin{cases} p = q & \text{原式} = p \\ p > q & \text{原式} = p \\ p < q & \text{原式} = q \end{cases}$

例 5: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^3-1)(3^3-1)\dots(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\dots(n^3+1)}$ 无穷级/积问题

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1)\dots(n-1)(n^2+n+1)}{(2+1)(2^2+2+1)(3+1)(3^2-3+1)\dots(n+1)(n^2-n+1)}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!(n^2+n+1)}{\frac{1}{2}(n+1)!(\frac{1}{2}n^2-2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \frac{2}{3}$

例 6: 设 $x_1 = 2, x_{n+1} = x_n^2 - nx_n + 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ 猜证 数归法 递推

§ 24 收敛准则

1. 收敛准则 I

定理 I (两边夹挤准则)

若从某项以后有 $y_n \leq x_n \leq z_n$ (若从某时刻后有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$) 且

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = A = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x)$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = A$)

证: 设 $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $y_n \leq x_n \leq z_n$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2$. 当 $n > N_2$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$, 有 $A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon$

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A \exists N_3$, 当 $n > N_3$ 时, 有 $A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon$

取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. 当 $n > N$ 时, 有 $A - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < A + \varepsilon$,

即 $|x_n - A| < \varepsilon \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

例1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} \quad 0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{3}{n} < \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{3}{n}$

例2: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2^n + 3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}}$
 $4 = (4^n)^{\frac{1}{n}} < (2^n + 3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} < (3 \times 4^n)^{\frac{1}{n}}$

例3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$

解: 设 $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}$

$\Rightarrow a_n^2 < \frac{1}{2n+1}$

例4: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$

解: $1 \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} = (1^{\frac{1}{n}} \cdot 2^{\frac{1}{n}} \cdot 3^{\frac{1}{n}} \cdots n^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n} \leq \frac{n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{n} = n^{\frac{1}{n}}$
 $= \sqrt[n]{n^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}} \cdots 1 \cdots 1} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} \rightarrow 1 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$

法二: $(n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = \sqrt{n}$

2 收敛准则 II

定理2 (单调有界准则) 单调有界数列必收敛.

定义1: 若数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 \leq (\geq) x_2 \leq (\geq) x_3 \leq (\geq) x_4 \leq (\geq) \cdots \leq (\geq)$

$x_n \leq (\geq) \cdots$ 则称数列 $\{x_n\}$ 是单调上升 (下降) 的, 单调上升 (下降) 数列统称为单调数列

证: 设数列 $\{x_n\} \uparrow$ 有界, $\Rightarrow \{x_n\}$ 有上确界, 记为 $A = \sup x_n$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使 $x_n > A - \varepsilon$, 当 $n > N$ 时, $A + \varepsilon > A \geq x_n \geq x_N > A - \varepsilon$

即 $|x_n - A| < \varepsilon, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

类似可证若 $\{x_n\} \downarrow$ 有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf x_n$

注: ① 一般先证单调性再证有界性

② 作差 $x_{n+1} - x_n \geq 0 \uparrow (\leq 0 \downarrow)$
 作比 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \uparrow (\leq 1 \downarrow)$

均值不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

简单不等式

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$$

③若已证 $\{x_n\} \uparrow, x_1 \leq x_n \leq \lim x_n$

若已证 $\{x_n\} \downarrow, x_1 \geq x_n \geq \lim x_n$

例1: 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{9}{x_n})$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

解: $\because x_1 > 0, x_n > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{9}{x_n}) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{9} = 3 (n \geq 1)$

$\therefore \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{9}{x_n^2}) \leq 1 (n \geq 2) \therefore \{x_n\} \downarrow$

又: $3 \leq x_n \leq x_2$ 由单调有界准则知 $\lim x_n$ 存在记为 A

$$\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(x_n + \frac{9}{x_n}) \therefore A = \frac{1}{2}(A + \frac{9}{A}) \therefore A = 3 \text{ 或 } -3 \text{ (舍去)}$$

$\because x_n > 0 \therefore \lim x_n \geq \lim 0 = 0$ 即 $A \geq 0$

例2: 设 $x_1 = a > 0, x_{n+1} = \sqrt{b+x_n}$, 求 $\lim x_n (b > 0)$

解: $x_{n+1} - x_n = \sqrt{b+x_n} - \sqrt{b+x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{b+x_n} + \sqrt{b+x_{n-1}}}$

$\therefore x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号, 从而与 $x_2 - x_1$ 同号, 且 $\{x_n\}$ 单调

$$x_2 - x_1 = \sqrt{b+a} - a = \frac{b+a-a^2}{\sqrt{b+a}+a}$$

$\star x_1 > b+a-a^2=0 \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 或 $\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ (舍去)

此时 $x_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}, \therefore \lim x_n = a$

(2) $b+a-a^2 < 0$ 时 $\{x_n\} \downarrow$ 此时 $a > \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 或 $a < \frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ (舍去)

又 $0 < x_n \leq x_1$ 由单调有界准则知 $\lim x_n \exists$ 记为 $A, \therefore \lim x_{n+1} = \lim \sqrt{x_n+b}$

$$\Rightarrow A = \sqrt{b+A} \Rightarrow A = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2} \text{ 或 } A = \frac{1-\sqrt{1+4b}}{2} \text{ (舍去)}$$

(3) $b+a-a^2 > 0$ 时 $\{x_n\} \uparrow$ 此时 $\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 又: $a > 0$

$\therefore 0 < a < \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 下证 $x_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 用数学归纳法证之

当 $n=1, x_1 = a < \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$

设 $n=k$ 时, $x_k \leq \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 则

$$\text{当 } n=k+1 \text{ 时, } x_{k+1} = \sqrt{b+x_k} \leq \sqrt{b + \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}} = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$$

$\therefore \{x_n\}$ 有界且 \uparrow

由单调有界准则知 $\lim x_n \exists$ 记为 $A, \therefore \lim x_{n+1} = \lim \sqrt{x_n+b}$

$$\Rightarrow A = \sqrt{b+A} \Rightarrow A = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2} \text{ 或 } A = \frac{1-\sqrt{1+4b}}{2} \text{ (舍去)}$$

① 有理式 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ 无理式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$

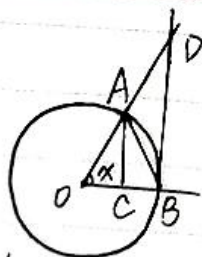
② 三角运算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t}$

③ 对数运算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

§ 25 两个重要极限

重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

证: 不妨设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 如图所示, 取单位圆



$S_{\triangle OAB} < S_{\text{扇形} OAB} < S_{\triangle ODB}$ 即 $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$

$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

又: $\cos x, \frac{\sin x}{x}$ 都是偶函数 $\therefore \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ 且 } x \neq 0)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 由两边夹挤准则有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

推论: ① $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1 \quad (\square \rightarrow 0 \text{ 且 } \square \neq 0)$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ ③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ ④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

eg. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{2x} \cdot \frac{2x}{\arctan 2x} = \frac{1}{2}$

2 重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

证明: ① $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

$A_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (\frac{1}{n})^3 + \dots + (\frac{1}{n})^n$

$A_{n+1} = 1 + (n+1) \frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)n}{2!} (\frac{1}{n+1})^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} (\frac{1}{n+1})^3 + \dots +$

$\frac{(n+1)n \dots (n+1-n)}{n!} (\frac{1}{n+1})^n + \frac{(n+1)n \dots (n+1-n)}{(n+1)!} (\frac{1}{n+1})^{n+1} \Rightarrow A_n < A_{n+1}$

$\therefore \{A_n\} \uparrow \quad 2 = A_1 \leq A_n$

$A_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^n} < 3$

由单调有界准则知, $\lim A_n$ 存在, 记为 e , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

不妨设 $x > 0, n = [x], n \leq x < n+1, 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{n}$

牛顿二项式定理
 $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r a^{n-r} b^r$

$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

由 $1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{n+1}$ $n+1 > x \geq n$ 得

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow e \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \rightarrow e \quad (n \rightarrow +\infty)$$

由两边夹挤准则可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \stackrel{x=-t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \rightarrow e$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{即} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

推论: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (x \rightarrow 0 \text{ 且 } x \neq 0)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

例 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

例 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a$

$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 可简化“ 1^∞ ”型的极限计算

例 3: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x \quad (a \neq b)$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a-b}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a-b} \cdot \frac{a-b}{x+b} \cdot x} = e^{a-b}$

例 4: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$

原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - \cos^2 x)^{\frac{1}{\cos x(1-\cos x)} \cdot \cos x(1-\cos x) \cdot \frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x (1 - \cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

例 5: $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}}\right)^n$
 $= e^4 \quad \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \cdot n = \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} \cdot 2 = 4$

§ 26 两种量

1. 概念

定义 1: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) 则称 $\{x_n\}$ (或 $f(x)$) 是自变量 x 趋向于 x_0 (或 ∞) 时的无穷小量

趋向于 0 的无穷小量

注: 无穷小是无穷小量, 无穷小量常用字母 α, β, ν 表示

定义 2: 设有数列 $\{x_n\}$ (或函数 $f(x)$), $\forall M > 0$, 若 $\exists N \in \mathbb{N}$ ($\exists \delta > 0$ 或 $\exists X > 0$) 当 $n > N$ ($0 < |x - x_0| < \delta$ 或 $|x| > X$) 时, 有 $|x_n| > M$ (或 $|f(x)| > M$), 则称数列 $\{x_n\}$ (或函数 $f(x)$) 是在自变量给定趋向下的无穷大量. 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$)

注: 无穷大量是无界函数, 反之不成立.

例如 $f(x) = x \sin x$ $x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ $f(x'_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$
 $x''_n = n\pi$ $f(x''_n) = 0$

非 0 无穷小的倒数是无穷大

2. 无穷小的性质

性质 1: 有限个无穷小的和、积仍是无穷小.

无限个无穷小的和、积不一定是无穷小

反例: $\{x_n\}$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

$\{x_n^2\}$ $1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

$\{x_n^3\}$ $1, 1, 3^2, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

$\{x_n^k\}$ $1, 1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, k^{k-1}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^1 x_n^2 x_n^3 x_n^4 \dots) = 1$$

性质 2: 有界量与无穷小之积仍是无穷小.

证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ $|y_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}, M > 0$, 证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时 $|x_n| < \varepsilon, \therefore |x_n y_n| \leq \varepsilon M$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$$

$$\lim x_n = A \quad \lim y_n = B \quad \text{若 } A=B \text{ 则 } \lim x_n = \lim y_n \quad \lim (x_n - y_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_n - y_n = \alpha, \Leftrightarrow x_n = y_n + \alpha$$

性质 3: $\lim x_n = \lim y_n$ ($\lim f(x) = \lim g(x)$) $\Leftrightarrow x_n = y_n + \alpha$ ($f(x) = g(x) + \alpha$), α 是常数

无穷小量。

例: 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$, $f(x)$ 是已知函数, 求常数 a 和 b

解: $f(x) - ax = b + o(x)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} o(x) = 0$ $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - b - o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

3. 无穷小的阶

定义1: 设 α, β 为自变量相同趋向下的无穷小,

(1) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 称 α 是 β 的高阶无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$

(2) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 称 α 是 β 的低阶无穷小.

(3) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$, 称 α 与 β 是同阶无穷小, (记为 $\alpha = O(\beta)$)

(4) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 称 α 与 β 是等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$

(5) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = C \neq 0$, 称 α 是 β 的 k 阶无穷小 ($k > 0$)

eg. $\lim \frac{\alpha}{\beta^m} = C \neq 0$ $k > m$, $\frac{\alpha}{\beta^k} = \frac{\alpha}{\beta^m} \cdot \frac{\beta^m}{\beta^k} \rightarrow 0$

注: $0 < k < 1$, α 是 β 的低阶无穷小 $k > 1$, α 是 β 的高阶无穷小

$k = 1$, α 与 β 是同阶无穷小.

eg. 注意分母不为0 $\sin x \cdot \sin \frac{1}{x} (x \rightarrow 0) \sim x \sin \frac{1}{x} (x \rightarrow 0) \times$

定理1: $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\alpha)$ (或 $\alpha - \beta = o(\beta)$)

证: $\Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 0$ ($\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \rightarrow 0$)

$\Leftarrow \alpha - \beta = o(\alpha) \Rightarrow \alpha = \beta + o(\alpha) \Rightarrow 1 = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \Rightarrow 1 = \lim \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta \sim \alpha$

定义2: 若 $\alpha \sim \beta$, 则称 β 是 α 的主(要)部分, $\alpha - \beta$ 是 α 的次(要)部分

主部不唯一, 次部不唯一

定理2: 若 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$,

则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ (等价无穷小替换定理)

注: 在极限运算过程中, 分子或分母中的无穷小因子可用其等价无穷小替换

即 $\lim \frac{\alpha f(x)}{\beta g(x)} = \lim \frac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}$ eg. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 0$ $\sin x \sim x + o(x^2)$

$\lim \frac{\alpha - f}{\beta} \neq \lim \frac{\alpha' - f}{\beta}$

4. 常见的等价无穷小

二元关系:
1. 反身性
eg. $\alpha \sim \alpha \Leftrightarrow \lim \frac{\alpha}{\alpha} = 1$
2. 对称性
 $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta \sim \alpha$
3. 传递性
 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Leftrightarrow \alpha \sim \gamma$
 $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \rightarrow 1$
思考题
无穷小量 α, β
 $\alpha \pm \beta$ $\alpha \cdot \beta$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 (x \rightarrow 0)$$

$$\square \sim \sin \square \sim \arcsin \square \sim \tan \square \sim \arctan \square \sim e^\square - 1 \sim \ln(1+\square)$$

$$(\square \rightarrow 0 \text{ 且 } \square \neq 0)$$

$$\text{证: } \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{(1+\square)^\alpha - 1}{\square} = \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+\square)} - 1}{\square} = \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+\square)}{\square} = \alpha$$

$$(1+\square)^\alpha - 1 \sim \alpha \square \quad (\square \rightarrow 0) \quad \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3 (x \rightarrow 0)$$

例1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{2x-1} \cdot \sin \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{2x-1} \cdot \frac{5}{x} = \frac{15}{2}$

例2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x - \sin x}}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}$$

例3: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(1 + \frac{a}{n^2})^{\frac{1}{3}} - 1 \sim 1 - \cos \frac{1}{n}$, 求 a

解: $(1 + \frac{a}{n^2})^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3} \frac{a}{n^2} (n \rightarrow \infty)$ $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} (n \rightarrow \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \frac{a}{n^2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}} = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

例4: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\beta} \quad (\beta > 0, \alpha, \beta \text{ 都是常数})$

原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha-\beta}}{(1+\frac{1}{n})^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha-\beta}}{\frac{1}{n}^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta}$

$\alpha - \beta + 1 > 0$ 原式 = $+\infty$ $\alpha - \beta + 1 = 0$ 原式 = $\frac{1}{\beta}$ $\alpha - \beta + 1 < 0$ 原式 = 0

法二: $(n+1)^\beta = n^\beta + \beta \cdot n^{\beta-1} + \frac{1}{2!} \beta(\beta-1) n^{\beta-2} + \dots$

原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta + \frac{1}{2!} \beta(\beta-1) n^{\beta-2} + \dots} =$

例5: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \tan x - \sin \sin x}{\tan x - \sin x} \sim \frac{\tan x - \sin x}{2} \sim \frac{1}{4}x^3 (x \rightarrow 0)$

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \tan x - \sin \tan x}{\tan x - \sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \tan x - \sin \sin x}{\tan x - \sin x}$

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \tan^3 x}{\frac{1}{2} \tan^3 x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{\tan x + \sin x}{2} \frac{\tan x - \sin x}{2}}{\frac{1}{2} x^3}$

= $1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\tan x - \sin x}{2}}{\frac{1}{2} x^3} = 2$

§ 27 函数的连续性

1. 连续的概念

定义1: 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 任取此邻域内一点 $x \neq x_0$ 称差 $x - x_0 = \Delta x$ 为 x_0 点的一个增量 ($x = x_0 + \Delta x$), 相应的函数差 $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, 称为 x_0 点对应的函数增量

注: Δx 可正可负, 但 $\Delta x \neq 0$, 而 Δy 可以等于 0

定义 2: 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点

注: 连续的 " ε - δ " 定义: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

定义 3: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续

左、右连续统称为单侧连续 (有时也称连续 eg $f(x), x \in [a, b)$)

注: ① 当 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点左连续且右连续

② 当 $f(x)$ 在包含 x_0 点的单侧邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点单侧连续

定义 4: 若 $f(x)$ 在点集 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 是 I 上的连续函数, 记为 $f(x) \in C_I$

若 $I = \langle a, b \rangle$ ($[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$), 则 $f(x)$ 的图形是一条连续的曲线

注: 函数图形断开: ① 自变量断开了 ② 函数不连续

2. 间断点及其类型

定义 5: 设 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义, 若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点

第一类间断点: 若 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 都存在, 但 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$; 或 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$; 或 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ 但 $f(x)$ 在 x_0 点无定义

第二类间断点: 不是第一类间断点的间断点, 即左右极限至少有一个不存在的间断点

例 1. $f(x) = \begin{cases} x \geq 1, & 2 \\ x < 1, & 1 \end{cases}$ $f(1-0) = 1$ $f(1+0) = 2$
 $\therefore x=1$ 是第一类跳跃间断点

② $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ $x=1$ 是第一类可去间断点

③ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(0^+) = +\infty$ $f(0^-) = -\infty$ $\therefore x=0$ 是第 II 类无穷间断点

④ $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$x \rightarrow 0^+$ $x_n' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $f(x_n') = 1$ $x_n'' = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$, $f(x_n'') = -1$

$x_n''' = \frac{1}{n\pi}$ $f(x_n''') = 0$ $\therefore x=0$ 是第 V 类震荡间断点

定义 5: 若 $f(x)$ 在含 x_0 在内的单侧邻域内有定义, 而 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。此时, 若 $f(x)$ 在 x_0 点的单侧极限存在, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第 I 类间断点, 否则, 称 x_0 是 $f(x)$ 的第 II 类间断点。

例: ① $y = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ $f(0^+) = -\infty$
 $\therefore x=0$ 是第 II 类无穷间断点

② $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (1, 3] \\ f(1^+) = 1 \neq f(1) \end{cases}$
 $\therefore x=1$ 是第 I 类间断点

eg. $f(x) = \sqrt{\sin x + 1}$, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, 既不连续又不间断

3. 连续函数的性质

极限的法则复合运算 \rightarrow

(1) 连续函数的四则运算与复合仍是连续函数

(2) 连续函数的反函数仍是连续函数

(3) 初等函数在其有定义区间上连续

例: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & |x| \leq 1 \\ e^{\frac{1}{x}}, & |x| > 1 \end{cases}$ 连续性、间断点分类

解: $f(x)$ 是 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ 上的初等函数

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 上连续

$f(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{1}{x}} = 0$ $f(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 + 1) = 0$ $\lim_{|x| \rightarrow -1} = 0 = f(-1)$ $\therefore x = -1$ 点连续

$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 + 1 = 2$ $f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x}} = e^1$ $\therefore x = 1$ 是第 I 类跳跃间断点

综上, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 上连续

例 2: 设 $f(x)$ 对任意实数 x_1, x_2 总有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 证明 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$

证明: 令 $x_1 = x_2 = 0$, $f(0+0) = f(0)f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ 或 1

(1) 当 $f(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+0) = f(x)f(0) = 0 \therefore f(x) = 0$

(2) 当 $f(0) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0)f(\Delta x) - f(x_0)] = f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(\Delta x) - 1]$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 点连续 $\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(0+\Delta x) - f(0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(\Delta x) - 1] = 0$

从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \therefore f(x)$ 在 x_0 点连续

由 x_0 的任意性可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续

4. 闭区间上连续函数的两个原理

定理 1: 若 $f(x) \in C[a, b]$ 则 $f(x)$ 必有界

找 $M > 0$, $\forall x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq M$

$\therefore f(x)$ 在 x_0 点连续 取定 $\varepsilon = \frac{1}{2} \forall x \in [a, b]$, $\exists \delta_{x_0}$

$M_{x_0} = \frac{1}{2} + |f(x_0)|$ 有 $|f(x)| \leq M_{x_0} \quad x \in U(x_0, \delta_{x_0})$

$\max \{M_{x_i}\} = M \quad \forall x \in [a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(x_i, \delta_{x_i}) \quad i=1, \dots, n \quad |f(x)| \leq M_i \leq M$

用反证法, 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界

将 $[a, b]$ 二等份, $[a, b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$, 则 $f(x)$ 至少在其中一个区间上无界

记为 $[a_1, b_1]$, 即 $f(x)$ 在 $[a_1, b_1]$ 上无界, 再将 $[a_1, b_1]$ 二等份, $[a_1, b_1] = [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] \cup [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

$f(x)$ 至少在其中一个区间上无界, 记为 $[a_2, b_2]$... 如此下去, 得到一系列

闭区间 $[a_n, b_n] \quad n=1, 2, 3, \dots$ ① $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ ② 数列 $\{a_n\}$ ③ 数列 $\{b_n\}$ ④

③ $a \leq a_n < b_n \leq b \therefore$ 由单调有界准则可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 都存在

$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi \in [a, b] \therefore f(x)$ 在 ξ 点连续

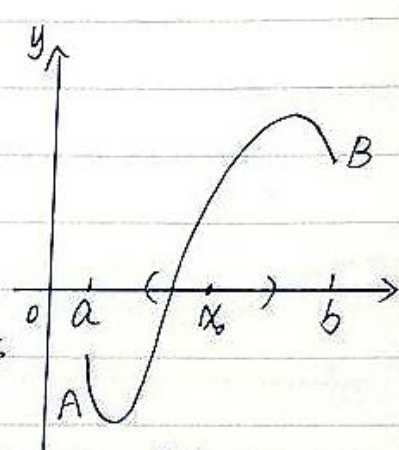
取 $\varepsilon = \frac{1}{2} \exists \delta > 0$, 当 $|x - \xi| < \delta$, $|f(x) - f(\xi)| < \frac{1}{2} \Rightarrow |f(x)| \leq |f(\xi)| + \frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$, 对上述 $\delta > 0$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时有 $|a_n - \xi| < \delta \Rightarrow \xi - \delta < a_n < \xi + \delta$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$, $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时有 $|b_n - \xi| < \delta \Rightarrow \xi < b_n < \xi + \delta$

取 $N = \max \{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时有 $\xi - \delta < a_n < b_n < \xi + \delta \Rightarrow$

$\forall x \in [a_n, b_n] \subseteq U(\xi, \delta) \quad |f(x)| \leq |f(\xi)| + \frac{1}{2} \Rightarrow f(x)$ 在 $[a_n, b_n]$ 上有界 ($n > N$)



正面证明:
有限覆盖定理

这与 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界矛盾 \therefore 假设不成立 $\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界

注: 函数有界 \rightarrow 有最值 eg. $g(x) = x, x \in (0, 2) |g(x)| < 2$

定理 2: 若 $f(x) \in C[a, b]$ 则 $f(x)$ 有最大值和最小值 (最值原理)

证: 用反证法 由 Th1. $f(x)$ 有界 $\Rightarrow f(x)$ 有上确界 $M = \sup f(x), x \in [a, b]$

即 $f(x) \leq M$, 若 $f(x) < M, M - f(x) > 0 \forall x \in [a, b]$

令 $g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \in C[a, b], g(x)$ 有界 $\Rightarrow g(x)$ 有上确界 $K > 0, g(x) \leq K$

$\Rightarrow \frac{1}{M - f(x)} \leq K \Rightarrow \frac{1}{K} < M - f(x) \Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{K}$ 这与 M 是 $f(x)$ 的上确界矛盾

$\therefore \exists x_0 \in [a, b]$ 使 $f(x_0) = M$, 即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值. 类似可证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最小值

定义 1: 设 $f(x)$ 在点集 I 上有界, 若 $\forall x \in I, \exists \xi \in I$, 使 $f(x) \leq f(\xi) (f(x) \geq f(\xi))$

则称 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的最大(小)值

定理 3: (零点原理) 设 $f(x) \in C[a, b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$

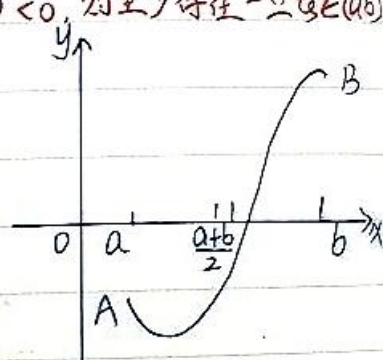
使 $f(\xi) = 0$

证: 不妨设 $f(a) < 0, f(b) > 0$, 取 $[a, b]$ 的中点 $\frac{a+b}{2}$

若 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ 则 $\xi = \frac{a+b}{2}$; 若 $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$

(1) 若 $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, 令 $[a, b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$

$f(\frac{a+b}{2}) < 0$, 令 $[a_1, b] = [\frac{a+b}{2}, b]$



取 $[a, b_1]$ 的中点 $\frac{a_1+b_1}{2}$, 若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$ 则 $\xi = \frac{a_1+b_1}{2}$ $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$

若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq 0$, 重复步骤 (1) 得到区间 $[a_2, b_2]$ 且 $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$

如此下去, 得一系列闭区间 $[a_n, b_n] (n=1, 2, 3, \dots)$ 满足:

① $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ ② $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ ③ $\{a_n\} \uparrow, \{b_n\} \downarrow$

④ $[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$

$\lim a_n$ 和 $\lim b_n$ 都 $\exists, \lim(b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0 \therefore \lim a_n = \lim b_n = \xi \in [a, b]$

$a \leq a_n < b_n \leq b \therefore f(x)$ 在 ξ 点连续 $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(\xi)$

又 $\lim f(a_n) < 0, \lim f(b_n) > 0 \therefore f(\xi) = 0$

定理 4: (介值原理) 设 $f(x) \in C[a, b], x_1, x_2 \in [a, b]$ 满足: $f(x_1) < \mu < f(x_2)$

将开区间转闭区间的方法:

- ① 缩小区间
- ② 补充定义

则至少 \exists 一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \mu$

证: 令 $g(x) = f(x) - \mu$ 则 $g(x) \in C[x_1, x_2]$ 不妨设 $x_1 < x_2$ $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$ 由零点原理

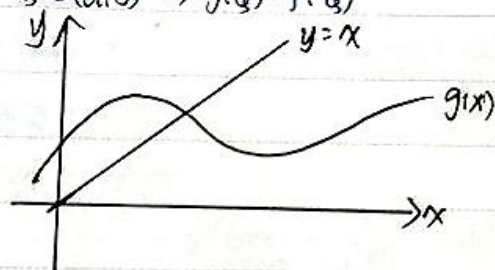
$\exists \xi \in [x_1, x_2] \subseteq (a, b)$, 使 $g(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) - \mu = 0 \therefore f(\xi) = \mu$

例1: 设 $f(x) \in C(a, b)$ 且 $f(a^+) = f(b^-) = A$, 又存在 $c \in (a, b)$ 使 $f(c) > A$ 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内有最大值

证明: 令 $g(x) = \begin{cases} A, & x = a, b \\ f(x), & x \in (a, b) \end{cases}$ 则 $g(x) \in C[a, b]$ 由最值原理 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 $M = g(\xi)$ $\xi \in [a, b]$

① 若 $M = g(\xi) > f(c) \geq A = g(a) = g(b) \Rightarrow \xi \neq a, b$ $\xi \in (a, b) \Rightarrow g(\xi) = f(\xi)$
 $\therefore f(x)$ 在 ξ 点有最大值 M

② $M = f(c)$, $f(x)$ 在 c 点取最大值 M



迭代法

$F(x) = 0$ 解方程 $\Rightarrow g(x) = x$

\forall 取 $x_0 \in \mathbb{R}$ 若 $g(x_0) = x_0$ 得解 若 $g(x_0) \neq x_0$ 令 $x_1 = g(x_0)$ 若 $g(x_1) = x_1$ 得解 若 $g(x_1) \neq x_1$ 令 $x_2 = g(x_1)$

例2: 设 $f(x) \in C(a, b)$, 且 $f(a) > a, f(b) < b$, 则必存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \xi$ (不动点原理)

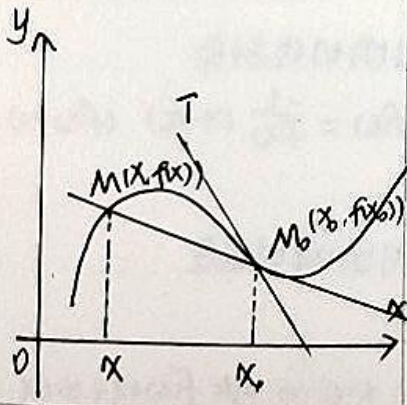
证明: 令 $g(x) = f(x) - x$ 则 $g(a) = f(a) - a > 0$ $g(b) = f(b) - b < 0 \therefore g(a) \cdot g(b) < 0$
 $g(x) \in C[a, b]$ 由零点原理 $\exists \xi \in [a, b]$ 使 $g(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) - \xi = 0 \therefore f(\xi) = \xi$

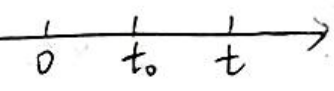
第三章 导数与微分

1. 实际问题

问题1: 曲线的切线(斜率)问题

如图所示, 设 $y = f(x)$ 为一曲线, $M_0(x_0, f(x_0))$ 为曲线上一点, 过 M_0 点作曲线任意一条割线 MM_0 , $M(x, f(x))$, 割线斜率 $k(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 则规定此极限为 $y = f(x)$ 在 M_0 点的切线斜率





问题2: 变速直线运动的速度问题

$$S = S(t) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{2}g(t+t_0)$$

导数定义

定义1: 设 $y=f(x)$ 在 x_0 点的邻域内有定义, 给 x_0 一个增量 Δx , 相应地有一个函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ 若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导, 称此极限为 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数 (微商)

记为 $y'|_{x=x_0} = f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$

定义2: 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 称之为 $f(x)$ 在 x_0 点的右导数, 记为 $y'_+|_{x=x_0} = f'_+(x_0)$; 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 称之为 $f(x)$ 在 x_0 点的左导数, 记为 $y'_-|_{x=x_0} = f'_-(x_0)$, 左、右导数统称为单侧导数

可见, 当 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

当 $f(x)$ 在 x_0 的单侧邻域有定义, $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点的单侧导数存在

比如 $f(x), x \in [a, b]$, 此时 $f(x)$ 在 a 点可导, 指的是 $f'(a) = f'_+(a)$

例1: 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2}$ 存在, 此极限值 $= f''(0)$ (x)

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)]$ 存在, 此极限值 $= f'(x)$ (x)

定义3: 设 $f(x)$ 在点集 I 上每一点都可导, 则其导数又构成 I 上的一个新的函数, 称之为 $f(x)$ 在 I 上的导 (函) 数, 记为 $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$, 若 $I = [a, b]$, 则 $f'(a) = f'_+(a), f'(b) = f'_-(b)$

3. 导数的意义

(1) $y'|_{x=x_0} = f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 点处的切线斜率

切线方程: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 法线方程 $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) (f'(x_0) \neq 0)$

注: 若 $f'(x_0) = 0$, 切线 $y = f(x_0)$, 法线 $x = x_0$

(2) $y'|_{x=x_0} = f'(x_0)$ 是变速直线运动 $y=f(x)$ 在 x_0 时刻的瞬时速度

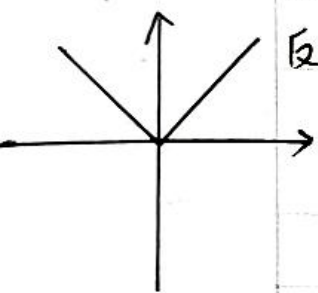
4. 与连续的关系 可导 \Rightarrow 连续, 反之不成立

若 $f(x) \exists, f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0 \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续

反例 $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & f'(0) \\ -1, & f'(0) \end{cases} \therefore f'(0) \text{ 不存在}$



§3.2 导数基本公式和导数四则运算

1. 导数公式

(1) $(c)' = 0$ (2) $(x)' = 1$ (3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (4) $(a^x)' = a^x \ln a$

(5) $(e^x)' = e^x$ (6) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ (7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (8) $(\sin x)' = \cos x$

(9) $(\cos x)' = -\sin x$ (10) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ (11) $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(12) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (13) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ (15) $(\text{arccot } x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

证: (3) $(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + \alpha \frac{\Delta x}{x} + \dots - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}$

14) $(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$

(12) $(\arcsin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}$

令 $y = \arcsin x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\Delta y = \arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x = \arcsin(x+\Delta x) - y$

$-y \quad x + \Delta x = \sin(y + \Delta y) \Rightarrow \Delta x = \sin(y + \Delta y) - \sin y$

$(\arcsin x)' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\sin(y + \Delta y) - \sin y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\frac{\sin(y + \Delta y) - \sin y}{\Delta y}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. 导数的四则运算法则

定理: 设 $f(x), g(x)$ 可导, 则 (1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

(2) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (3) $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (g(x) \neq 0)$

证: (2) $[f(x)g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x+\Delta x) \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$
 $= g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$

$$14) [k f(x)]' = k f'(x) \quad 15) \left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$16) (fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

$$\left(\prod_{i=1}^n f_i\right)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1}' f_n$$

例1: 设 $y = x(x+1)(x+2) \cdots (x+100)$, 求 $y'|_{x=0}$ $100!$

§ 3.3 复合函数求导法及其它

1. 复合函数求导公式

定理: 设 $y = f(u)$ 可导, $u = g(x)$ 可导, 且 $f(g(x))$ 在 x 的邻域内有定义, 则 $y = f(g(x))$

可导, 且 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 即 $[f(g(x))]' = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

注: ① $y = u^{\frac{3}{2}}$, $u = g(x) = \sin x - 1$ $y = f(g(x)) = (\sin x - 1)^{\frac{3}{2}}$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$② \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (x)$$

证明: $y = f(u)$ 可导, $f'(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha$, $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0$

$$\Delta y = f'(u) \Delta u + \alpha \cdot \Delta u \quad (*) \quad (\Delta u \neq 0)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta u} - f'(u), (\Delta u \neq 0) \\ \text{补充 } \alpha = 0, \Delta u = 0 \end{cases}$$

规定: 当 $\Delta u = 0$ 时 $\alpha = 0$, 此时 (*) 的左端

补充 $\alpha = 0, \Delta u = 0$

$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = 0$ (*) 的右端 $= 0$ \therefore 当 $\Delta u = 0$ 时, (*) 式也成立

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(u) \frac{du}{dx} = f'(u) g'(x)$$

注: $[f(g(\varphi(x)))]' = f'(g(\varphi(x))) g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

例1: $y = e^{\sin h^2 x}$, 求 $y' = e^{\sin h^2 x} \cos h^2 x \cdot 2hx \cdot \frac{1}{x}$

例2: 设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 求 $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

公式 $[\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

例3: $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f(x) = \arcsin x^2$, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = \frac{3}{2}\pi$

2. 反函数求导公式

设 $y = f(x)$ 与 $x = g(y)$ 互为反函数

$$(y)'_y = [f(x)]'_y \Rightarrow 1 = f'(x) \frac{dx}{dy} = f'(x) g'(y)$$

从而有当 $y = f(x)$ 可导且 $f'(x) \neq 0$, 有 $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ - 互为倒数关系

例4: 求 $(\arctan x)'$

3. 参数函数求导公式

$$\text{设 } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx}$$

方法: 对 $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$, 的两端同时关于 x 求导

$$(x)'_x = (\varphi(t))'_x \Rightarrow \begin{cases} 1 = \varphi'(t) \frac{dt}{dx} \\ \frac{dy}{dx} = \psi'(t) \frac{dt}{dx} \end{cases} \text{ 消去 } \frac{dt}{dx} \text{ 得公式 } \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \text{ 这里}$$

$$(y)'_x = (\psi(t))'_x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \psi'(t) \frac{dt}{dx} \Rightarrow \text{要求 } \varphi'(t), \psi'(t) \text{ 都存在且 } \varphi'(t) \neq 0$$

$$(y)'_x = (\psi(t))'_x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \psi'(t) \frac{dt}{dx} = \psi'(t) \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$\text{公式: } \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\text{例5: 设 } x = \ln(1+t^2), y = t^3 + 3t + 1, \text{ 求 } \frac{dy}{dx} = \frac{3(t^2+1)^2}{2t}$$

4. 隐函数求导方法

设 $x^2 + xy + y^3 = \sin(xy^2)$ 确定了一个隐函数, $y = y(x)$, 求 y'

方法: 将 $y = y(x)$ 代入方程, 得到恒等式: $x^2 + xy(x) + y^3(x) = \sin(xy^2(x))$

再对此等式左、右两端同时关于 x 求导

$$2x + y(x) + x y'(x) + 3 y^2(x) y'(x) = \cos(xy^2(x)) (y^2(x) + x^2 y(x) y'(x))$$

$$\therefore y'(x) = \frac{y^2(x) \cos(xy^2(x)) - 2x - y(x)}{x + 3y^2(x) - 2xy(x) \cos(xy^2(x))}$$

$$\therefore y'_x = \frac{y^2 \cos(xy^2) - 2x - y}{x + 3y^2 - 2xy \cos(xy^2)} \quad \text{— 复合函数}$$

$$\text{例6: 设 } x e^{\sin y} = e^y \text{ 确定了一个隐函数, } y = y(x), \text{ 求 } y' = \frac{1}{x(1 - \cos y)}$$

5. 幂指函数求导公式

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \ln f(x)})' = f(x)^{g(x)} (g(x) \ln f(x))'$$

$$\text{例7: } (x^x)' = x^x (\ln x + 1)$$

注: $(f(x))' = f(x) (\ln f(x))'$ — 用此公式, 当 $f(x)$ 中因子多时, 含根号时, 乘除变

加减, 此公式中, $f(x) < 0$ 也没关系

$$\text{例8: 设 } y = \sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x^3+1)(x^5+1)}{(x+1)(x^2+x+1)(x^4+1)}}, \text{ 求 } y' = \frac{3x^6 - 5x^4 - 2x}{5(x^2-1)(x^5+1)} \sqrt[5]{\frac{x^5+1}{x^2-1}}$$

§ 3.4 高阶导数

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

1. 高阶导数

定义: 设 $y=f(x)$ 在 I 上可导, 且在 I 上的导函数 $y'=f'(x)$ 还可导, 则称 $y'=f'(x)$ 的导函数为 $y=f(x)$ 的二阶导(函)数, 记为 $y''=f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \frac{d^2y}{dx^2}$

若 $y''=f''(x)$ 还可导, 则称其导函数为 $y=f(x)$ 的三阶导(函)数, 记为 $y'''=f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$

如此下去, 可以定义 $y=f(x)$ 的 n 阶导(函)数, 记为 $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$, $n=1, 2, 3, \dots$, $y^{(0)}=y$, $y^{(1)}=y'$, $y^{(2)}=y''$, $y^{(3)}=y'''$

例1: 设 $f(x), g(x)$ 互为反函数, 且 $f(x)$ 有二阶导, 而 $f'(x) \neq 0$, 求 $g''(x)$

解: 设 $y=g(x)$ $x=f(y)$ $y'=g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$

$$y''_x = g''(x) = \frac{d}{dx} (g'(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(y)} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{f'(y)} \right) \frac{dy}{dx} = - \frac{f''(y)}{[f'(y)]^2} \cdot \frac{1}{f'(y)} = - \frac{f''(y)}{[f'(y)]^3}$$

$$= - \frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3} \quad y''_x = \frac{d}{dx} (y') = \frac{d}{dy} (y') \frac{dy}{dx} = \left(- \frac{f''(y)}{[f'(y)]^3} \right) \frac{1}{f'(y)}$$

后作业

例2: 设 $x e^{\sin y} = e^y$ 确定了一个隐函数 $y=y(x)$, 求 y''

$$y' = \frac{1}{x(1-\cos y)} \quad y'' = - \frac{1-\cos y + x \sin y y'}{x^2 (1-\cos y)^2} = - \frac{1-\cos y + \frac{\sin y}{1-\cos y}}{x^2 (1-\cos y)^2}$$

$$= - \frac{(1-\cos y)^2 + \sin y}{x^2 (1-\cos y)^3}$$

例3: 设 $\arctan t = x$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$y = t^2 - 2t$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^2-2t)'}{(\arctan t)'} = (2t-2)(t^2+1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} =$$

$$(6t^2-4t+2)(t^2+1)$$

例4: $(f(g(x)))''$

$$(f(g(x)))'' = (f'(g(x))g'(x))' = f''(g(x))[g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x)$$

2. 高阶导数公式

用数学归纳法可证如下高阶导数公式:

$$(1) [f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$$

$$(2) [k f(x)]^{(n)} = k f^{(n)}(x)$$

$$(3) [f(x)g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x)g(x) + n f^{(n-1)}(x)g'(x) + \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)}(x)g''(x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f^{(n-3)}(x)g'''(x) + \dots$$

$$+ C_n^r f^{(n-r)} \cdot g^{(r)} + \dots + f \cdot g^{(n)} \quad \text{— 莱布尼兹公式}$$

线性函数复合
 (4) $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$

下面给出基本初等函数的高阶导数公式

15) $(c)^{(n)} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(11) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$

16) $(x^a)^{(n)} = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}$

$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin(ax + \frac{n}{2}\pi)$

17) $(\frac{1}{x})^n = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$

(12) $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$

18) $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$

19) $(e^x)^{(n)} = e^x$

20) $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$

例1: 设 $y = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$, 求 $y^{(n)}$ 用积化和差公式

解: $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)\sin x = \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin(-2x))$
 $= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x$

$\therefore y^{(n)} = \frac{1}{4} \cdot 4^n \sin(4x + \frac{n}{2}\pi) - \frac{1}{4} \cdot 6^n \sin(6x + \frac{n}{2}\pi) + \frac{1}{4} \cdot 2^n \sin(2x + \frac{n}{2}\pi)$

例2: 设 $y = (1+x^2)e^x$, 求 $y^{(n)}$

解: $y^{(n)} = (e^x)^{(n)}(1+x^2) + (e^x)^{(n-1)} \cdot n(1+x^2)' + (e^x)^{(n-2)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot (1+x^2)''$
 $= (1+x^2)e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x$

例3: 设 $y = e^x \cos \sqrt{3}x$, 求 $y^{(n)}$ 找规律 用 $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2+b^2} \cos(x+\varphi)$

$y' = 2e^x \cos(\sqrt{3}x + \frac{\pi}{3})$ 猜 $y^{(n)} = 2^n e^x \cos(\sqrt{3}x + \frac{n}{3}\pi)$ 用数学归纳法证

§ 3.5 微分

1. 微分概念

定义1: 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 给 x_0 点一个增量 Δx , 相应的函数增量 Δy 满足: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k\Delta x + o(\Delta x)$ (k 是一个常数), 则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微分, 记为 $dy|_{x=x_0} = k\Delta x$

注: $dy|_{x=x_0} = k\Delta x$ 是关于 Δx 的一个线性函数 (k 是和 $f(x)$ 和 x_0 有关 $k=f'(x_0)$)

当 $\Delta x \rightarrow 0$, 有 $dy \rightarrow 0$ 从而 $\Delta y = dy + o(\Delta x) \rightarrow 0$ (可微 \Rightarrow 连续)

当 $k \neq 0$ $dy = k \Delta x \neq 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{k \Delta x} \rightarrow 1$ ($\Delta x \rightarrow 0$)

$\Rightarrow \Delta y \sim dy$ $\therefore dy$ 是 Δy 的线性主部

定义2: 设 $y=f(x)$ 在点集 I 上的每一点都可微, 则其微分又构成 I 上一个新的函数, 称之为 $y=f(x)$ 在 I 上的微分(函数), 记为 $dy = k(x) \Delta x$ ($k(x)$ 是关于 x 的函数)

直线 $y=ax+b$ $dy = a \Delta x$ ($\Delta y = a \Delta x + 0, \Rightarrow a \Delta x = dy$)

特别地, 取直线 $y=x$ $dx = \Delta x$

所以 $dy = k(x) \Delta x = k(x) dx$

若 $y=f(x)$ 可微 $\Delta y = dy + o(\Delta x) = k(x) \Delta x + o(\Delta x), \Rightarrow k(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$

$\Rightarrow k(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \exists$, 从而 $f(x)$ 存在且 $f'(x) = k(x), \therefore$

可微 \Rightarrow 可导且 $f'(x) = k(x)$

反之, 若 $f'(x)$ 存在, 则 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, 从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$

$\Rightarrow \Delta y = \Delta x f'(x) + \alpha \Delta x = f'(x) \Delta x + o(\Delta x) \therefore f(x)$ 在 x 点处可微且 $dy = f'(x) \Delta x$

2. 可微与可导的关系

定理 $y=f(x)$ 可导 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 可微, 且 $dy = f'(x) \Delta x = f'(x) dx$

注: $dy = f'(x) dx$ - 乘法运算

$\therefore dx = \Delta x \neq 0$ $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ - 除法运算

3. 微分的几何意义

$dy = f'(x) dx$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 x 处的切线增量

4. 微分运算

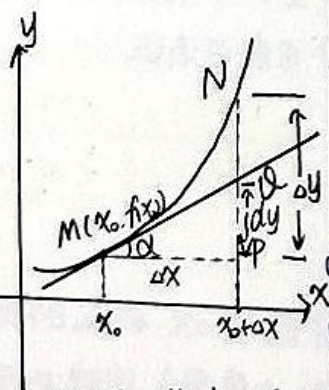
$$(1) d[f(x) \pm g(x)] = [f(x) \pm g(x)]' dx = [f'(x) \pm g'(x)] dx = df(x) \pm dg(x)$$

$$(2) d[f(x)g(x)] = (fg)' dx = (f'g + fg') dx = f dg + g df$$

$$(3) d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \left(\frac{f}{g}\right)' dx = \frac{f'g - fg'}{g^2} dx = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{[g(x)]^2}$$

5. 微分形式的不变性

设 $y=f(u)$ 可微, (1) 若 u 是自变量, 则 $dy = f'(u) du$



$\triangle MPQ$ 微分三角形

$$\Delta y = dy + o(\Delta x)$$

$$NQ = o(\Delta x)$$

$$PQ = \Delta x \tan \alpha = \Delta x k$$

$$= f'(x) \Delta x$$

$$= f'(x) dx$$

$$= dy$$

(2) 若 $u=g(x)$ 可微, 则 $f(g(x))$ 可微且 $df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)dx = f'(g(x))dg(x) = f'(u)du$

注: 当 u 是自变量, $du=du$, 而当 u 是中间变量时, 一般 $du \neq du$, $du = du + 0(x)$ 当 u 是关于

例 1: 设 $y = e^{\sin \ln \arctan x}$, 求 y'

解: $dy = e^{\sin \ln \arctan x} d \sin \ln \arctan x = e^{\sin \ln \arctan x} \cos \ln \arctan x d \ln \arctan x$
 $= e^{\sin \ln \arctan x} \cos \ln \arctan x \frac{1}{\arctan x} d \arctan x = e^{\sin \ln \arctan x} \cos \ln \arctan x \frac{1}{\arctan x} \frac{1}{1+x^2} dx$

例 2: 设 $y = e^{\sin x}$, 求 $\frac{dy}{\cos x} = -\frac{e^{\sin x}}{\tan x}$

例 3: $d \sin x^2 = 2x \cos x^2 dx$

例 4: 设 $f(x)$ 对任何实数 x_1, x_2 满足: $f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2)$ 且 $f'(0)=1$, 证明 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可导

证: 令 $x_1 = x_2 = 0$, $f(0) = f(0)f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ 或 1

(1) 当 $f(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0, \therefore f'(x) = 0$ (舍去)

(2) 当 $f(0) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x}$
 $= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f(x) f'(0) = f(x)$

补充内容:

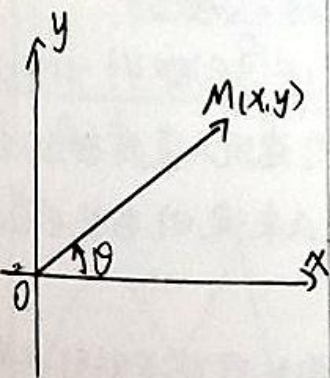
1. 极坐标

在直角坐标平面上建立一个新的坐标系, 原点称为极点, 正向 x 轴称为极轴, 也叫极坐标轴, 点 M 的极坐标为 (r, θ) , $r = |\vec{OM}|$, θ 是极轴绕极点逆时针旋转到与 \vec{OM} 重合时转过的角度 r -极径 θ -极角

2. 极坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & r \geq 0 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

3. 直角坐标曲线与极坐标曲线转换



(1) $F(x, y) = 0$ 是曲线直角坐标方程 $\Rightarrow F(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$

(2) $r = f(\theta)$ 是曲线的极坐标方程 $\Rightarrow \begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$

例如: $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r = |a|$

$r = 1 - \cos \theta \Rightarrow \begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta \end{cases} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$

例1: 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) 上光滑点处切线介于两坐标轴间的长度 l

由 $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}, 0 \leq \theta < 2\pi$

令 $X = x^{\frac{1}{3}}, Y = y^{\frac{1}{3}}$ 则 $X^2 + Y^2 = (a^{\frac{1}{3}})^2$

$\therefore \begin{cases} X = a^{\frac{1}{3}} \cos \theta \\ Y = a^{\frac{1}{3}} \sin \theta \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cos \theta \\ y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \sin \theta \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}, 0 \leq \theta < 2\pi$

例2: 求三叶玫瑰线 $r = a \sin 3\theta$, 在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 对应点处的切线方程

解: 曲线在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 这一点的直角坐标为 $\begin{cases} x = a \sin 3\theta \cos \theta |_{\theta = \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ y = a \sin 3\theta \sin \theta |_{\theta = \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}a \end{cases}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \left(\frac{a \sin 3\theta \sin \theta}{a \sin 3\theta \cos \theta} \right)' = \frac{3 \cos 3\theta \sin \theta + \sin 3\theta \cos \theta}{3 \cos 3\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin \theta}$

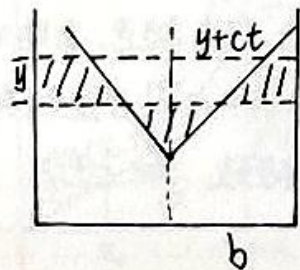
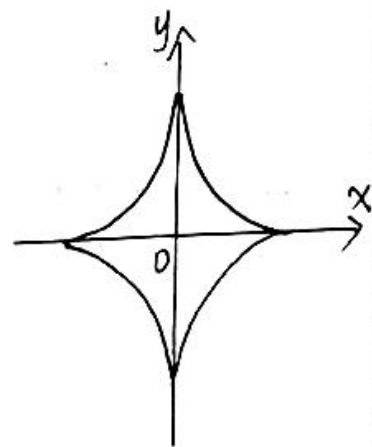
$\therefore y'|_{x = \frac{\sqrt{3}}{2}a} = -\sqrt{3} \quad \therefore$ 所求切线方程为 $y - \frac{1}{2}a = -\sqrt{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}a)$ 即 $y = -\sqrt{3}x + 2a$

例3: 设有一个顶角为 90° 的倒圆锥体, 以速度 c 匀速沉入盛有部分水的半径为 b 的圆柱形容皿中, 求圆锥体被水浸没 a 米深时, 圆柱形容皿水面上升的速度.

解: 设 t 表示时间, $t=0$ 时圆锥体顶点刚好在水平面上, 经过 t 时刻, 水平面上升的高度为 y 米, 则

$$\frac{1}{3} \pi (y + ct)^3 = \pi b^2 y \Rightarrow \pi (y + ct)^2 (y + ct) = \pi b^2 y$$

令 $y + ct = a$ 代入得 $y'|_{y+ct=a} = \frac{a^2 c}{b^2 - a^2}$



例4: 若 $f(x)$ 存在, 则正确的是 () ABC

连续性也会有变

(4)

(A) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数

(B) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数

(C) 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f'(x)$ 也是周期函数 $f(x+T) = f(x)$

(D) 若 $f(x)$ 是有界函数, 则 $f'(x)$ 也是有界函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ 无界

例5: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导, 且 $f'(0) \neq 0$, $f(0) \neq 0$, 又 $a f(x) + b f(2x) - f(0) = o(x)$, 求 a, b .

解:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a f(x) + b f(2x) - f(0)) = 0 \Rightarrow a f(0) + b f(0) - f(0) = 0 \Rightarrow a + b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a f(x) + b f(2x) - f(0)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[a \frac{f(x) - f(0)}{x} + b \frac{f(2x) - f(0)}{2x} + \frac{a f(0) + b f(0) - f(0)}{x} \right]$$

$$= a f'(0) + 2b f'(0) = 0 \Rightarrow a + 2b = 0$$

$$\therefore \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

第四章 微分中值定理

§4.1 中值定理

1. 罗尔定理

定理1: 设 $f(x)$ 满足: (1) $f(x) \in C[a, b]$, (2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, (3) $f(a) = f(b)$

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 或方程 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 内必有根

注: ①②③是充分条件, 不是必要条件

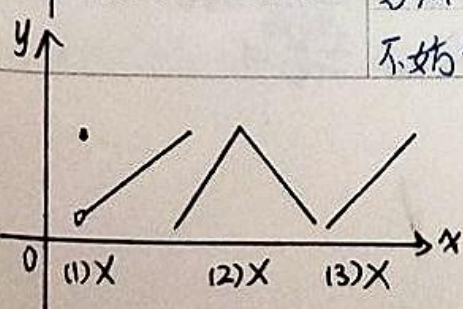
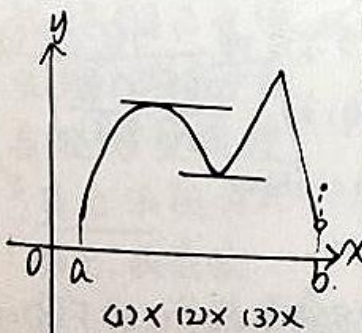
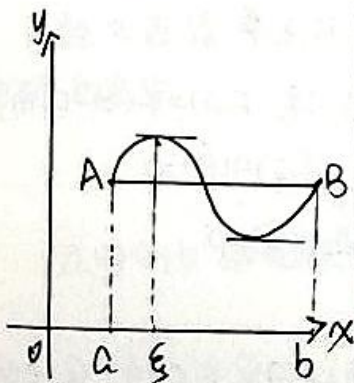
定义: 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 若 $f(x_0) \geq f(x)$ 则称 $f(x_0)$ 是极小(大)值, 称 x_0 是极小值(大值)点.

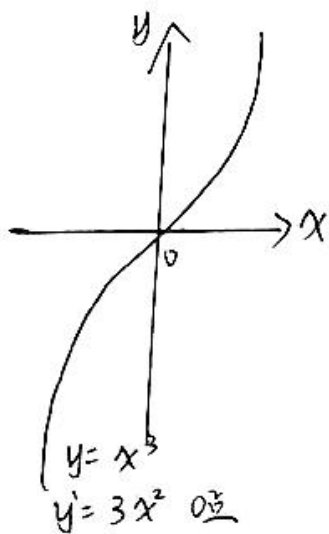
证明: $\because f(x) \in C[a, b]$ $\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m

若 $M = m$ 则 $f(x) = M$ 从而 $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$

若 $M \neq m$, $\because f(a) = f(b)$, \therefore 最大值和最小值至少有一个在 (a, b) 内取得

不妨设 $M \neq f(a)$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $M = f(\xi)$ 又由 (2) 知 $f'(\xi)$ 存在





称导数为0的点为
极值嫌疑点、驻点
涉及方程有根的方法

费马原理
罗尔定理
费马引理

反复使用3次
罗尔定理

极值漏证 $g'(x) \neq 0$ ★ 用反证法 若 $g'(x) = 0$, 则

$$f'_-(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \quad (\text{极限的保序性})$$

$$f'_+(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

$$\text{又: } f'_-(\xi) = f'_+(\xi) = f'(\xi) \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

2 费马引理

定理: 若 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极值且 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f'(x_0) = 0$

费马大定理: $x^n + y^n = z^n$ $n > 2$ 时该方程无正整数解

例1: 设 C_1, C_2, \dots, C_n 为任意 n 个实数, 证明三角方程 $C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + \dots + C_n \cos nx = 0$ 在 $(0, \pi)$ 内必有根

证明: 令 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + \dots + C_n \cos nx, x \in (0, \pi)$

$f(x) = C_1 \sin x + \frac{C_2}{2} \sin 2x + \dots + \frac{C_n}{n} \sin nx, x \in (0, \pi)$ 则 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上可导

$f(0) = f(\pi) = 0$ 由罗尔定理知, 方程 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + \dots + C_n \cos nx = 0$ 在 $(0, \pi)$ 内必有根

例2: 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, $g'(x) \neq 0, f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$,

证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明: 令 $F(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $F(a) = F(b) = 0$, 由罗

尔定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $F'(\xi) = 0$ 即 $f(\xi)g''(\xi) - f'(\xi)g'(\xi) = 0$

$\because g'(x) \neq 0 \therefore g'(\xi) \neq 0 \therefore f(\xi) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} g(\xi)$ 下证 $g(\xi) \neq 0$

用反证法 若 $g(\xi) = 0$, 则

$g(x)$ 在 $[a, \xi]$ 和 $[\xi, b]$ 上分别满足罗尔定理, 所以 $\exists \xi_1 \in (a, \xi), \xi_2 \in (\xi, b)$

使 $g'(\xi_1) = 0, g'(\xi_2) = 0$, 又: $g(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上满足罗尔定理 $\therefore \exists \xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$

$\subseteq (a, b)$ 使 $g'(\xi_3) = 0$ 这与 $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$ 矛盾 $\therefore g(\xi) \neq 0 \therefore \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

例3: 设 $f(x) \in C[a, b]$ 在 (a, b) 内可导且 $f(x) \neq 0$, 而 $f(a) = f(b) = 0$,

证明: \exists 一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $\frac{f(\xi)}{f'(\xi)} = 1$

证明: 令 $F(x) = e^{-x} f(x) \therefore F(a) = F(b) = 0 \therefore$ 由罗尔定理有 $\exists \xi \in (a, b), F'(\xi) = 0$

即 $e^{-\xi} F(\xi) - e^{-\xi} F'(\xi) = 0 \Rightarrow F(\xi) = F'(\xi) \Rightarrow \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} = 1$

构造辅助函数时

例2加一项减一项
例3乘某因子

例4: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 令 $F(x) = (x-a)f(x)$

找到满足 (3) 的点

证明: $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $F'(\xi) = 0$

证明: $F(x) = f(x) + (x-a)f(x)$, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $F(a) = 0, F(b) = 0$

$\therefore F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理, $\therefore \exists c \in (a, b)$ 使 $F'(c) = 0$

又: $F(x)$ 在 $[a, c]$ 上满足罗尔定理, $\therefore \exists \xi \in (a, c) \subset (a, b)$ 使 $F'(\xi) = 0$

费马引理使用

例5: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(a)f'(b) < 0$ 证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) = 0$

证明: 不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$

$0 < f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow \exists x_1 \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(a)$
 $\therefore f(a)$ 不是最大值

$0 > f'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \Rightarrow \exists x_2 \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(x_2) - f(b)}{x_2 - b} < 0 \Rightarrow f(x_2) > f(b)$
 $\therefore f(b)$ 不是最大值

又: $f(x) \in C[a, b] \therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 $M = f(\xi), \xi \in (a, b)$

又: $f'(\xi)$ 存在, $f(\xi)$ 是极值 由费马引理有 $f'(\xi) = 0$

导数不连续零点原理也适用

注: 闭区间上函数满足介值原理, 无论其是否连续

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 且 $f'(a) \neq f'(b)$, 不妨设 $f'(a) < f'(b)$, 则对 $f'(a) < u < f'(b)$, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) = u$

运用例5 结论证

证: 令 $F(x) = f(x) - ux$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $F'(a)F'(b) = (f'(a) - u)(f'(b) - u) < 0$
 $\therefore \exists \xi \in (a, b)$ 使 $F'(\xi) = 0$ 即 $f'(\xi) = u$

3. 拉格朗日中值

(定理 (微分中值, 有限增量定理))

变分法创始人

优化, 找最值

最佳函数曲线

例6: 设 $f(x)$ 满足: 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明: 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

证明: 令 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k$, 令 $F(x) = f(x) - kx$

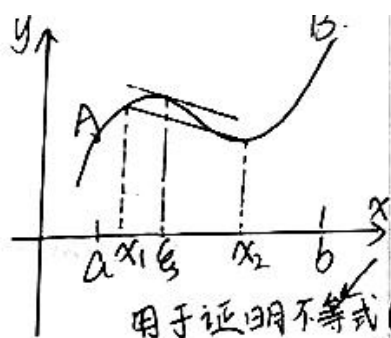
$F(a) = f(a) - a \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b f(a) - a f(b)}{b - a} = F(b)$ 由罗尔定理 $\exists \xi \in (a, b)$ 使

$F'(\xi) = 0$ 即 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

令 $x_0 = a, x_0 + \Delta x = b, \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(\xi)$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi) \Delta x = f'(\xi) dx, \Delta y = dy |_{x=x_0} + o(\Delta x)$

ξ 介于 x_0 与 $x_0 + \Delta x$ 之间



拉格朗日中值定理的一般形式:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 内可导, } \forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad \xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$$

例1: 证明: $\sin x < x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\left(\frac{\sin x - 0}{x - 0} = \cos \xi < 1, 0 < \xi < x < \frac{\pi}{2} \therefore \sin x < x \right)$$

用于证明不等式

转换为 $f'(\xi)$

例2: 证明: $\frac{1}{1+n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

$$\text{证明: } \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{\ln(1+n) - \ln n}{1+n-n} = (\ln x)'|_{x=\xi} = \frac{1}{\xi} \quad n < \xi < n+1$$

$$\therefore \frac{1}{1+n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

例3: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 证明: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$

$$< \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

$$\text{证: 不妨设 } x_1 < x_2, [f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})] - [f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)]$$

$$= f'(\xi_2) \frac{x_2 - x_1}{2} - f'(\xi_1) \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1) f''(\xi_3)(\xi_2 - \xi_1) \quad x_1 < \xi_1 < \frac{x_1+x_2}{2} \quad \frac{x_1+x_2}{2} < \xi_2 < x_2 \quad \xi_1 < \xi_3 < \xi_2$$

> 0

例4: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导且无界, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内也无界

$$\text{分析: } |f'(\xi)| = \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| > M$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| > \frac{|f(x_2)| - |f(x_1)|}{b-a} > M$$

证明: $\forall M > 0$, 取定 $x_0 \in (a, b)$, $\because f(x)$ 在 (a, b) 内无界, $\therefore \exists x_1 \in (a, b)$ 使

$$|f(x_1)| > |f(x_0)| + M(b-a) \text{ 则有 } \frac{|f(x_1)| - |f(x_0)|}{b-a} > M$$

$$\therefore \left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| > \frac{|f(x_1)| - |f(x_0)|}{b-a} > M \therefore \exists \xi \in (a, b) \text{ 使 } |f'(\xi)| = \left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| > M$$

即 $f(x)$ 在 (a, b) 内也无界

或证 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 内有界

证: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界, 即 $\exists M > 0, \forall x \in (a, b)$ 有 $|f(x)| \leq M$

$\forall x \in (a, b)$, 取定 $x_0 \in (a, b)$

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)|$$

$$= |f'(\xi)(x - x_0)| + |f(x_0)| \leq M(b-a) + |f(x_0)| \therefore f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 内有界}$$

4. 拉格朗日中值定理推论:

推论1: $f'(x)=0, \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f(x)=C, C$ 为常数

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \neq x_2, \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi) = 0$$

推论2: $f'(x)=g(x), \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+C, C$ 为常数

证明: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\text{证: } (\sin^2 x + \cos^2 x)' = 0 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = C \text{ 令 } x=0 \text{ 代入得 } C=1$$

推论3: $f'(x) > 0 (< 0), \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ 单调增(单调减)

例5: 证明: $\arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(n+1) - \arctan n$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \varphi(x) &= \arctan \frac{1}{x^2+x+1} \\ \varphi'(x) &= \frac{1}{1+(x^2+x+1)^2} \cdot \left(-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\right) \\ &= -\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} \end{aligned}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}$$

$$\therefore \varphi(x) = \psi(x) + C \text{ 令 } x=0 \text{ 则 } C = \varphi(0) - \psi(0) = 0 \therefore \varphi(x) = \psi(x)$$

$$\text{从而 } \varphi(n) = \psi(n) \text{ 即 } \arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(n+1) - \arctan n$$

5. 柯西中值定理

定理4: 设 $f(x), g(x)$ 满足: (1) 在 $[a,b]$ 上连续, (2) 在 (a,b) 内可导, (3) $g'(x) \neq 0$ 则

至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

几何意义: 拉格朗日中值定理的参数函数形式

证: 令 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = k, F(x) = f(x) - k g(x)$

$$F(a) = f(a) - g(a) \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} = F(b)$$

\therefore 由罗尔定理, $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) - k g'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

§4.2 洛比达法则

1. 极限中有型的不定式 (7种)

$f(x), g(x)$ 趋和但不等 \leftarrow (1) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 "0/0" 型

(2) $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 " ∞/∞ " 型

证明恒等式

理解为求导运算的逆运算

C 是一个固定的常数

取定 $x \in (a,b)$

$f(x) - g(x) = C$

拉格朗日中值定理

多数方程下的拉格朗日中值定理
证明洛必达法则

(3) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow \infty$, 则 $\lim(f(x)g(x))$ 为“ $0 \cdot \infty$ ”型

(4) $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同号, 则 $\lim(f(x)g(x))$ 为“ $\infty \cdot \infty$ ”型

(5) $f(x) \rightarrow 1, g(x) \rightarrow \infty$, 则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为“ 1^∞ ”型

(6) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$, 则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为“ 0^0 ”型

(7) $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow 0$, 则 $\lim f(x)^{g(x)}$ 为“ ∞^0 ”型

2. 洛比达法则

定理: 设 $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, 且 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或 ∞ , 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或 ∞ , 则称之为洛比达法则

证明(1) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或 ∞ .

补充定义: 令 $f(x_0) = g(x_0) = 0$ $\therefore f(x), g(x)$ 都在 x_0 点连续

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \stackrel{\text{柯西}}{=} \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ 或 } \infty$$

特殊(子极限) - 一般(极限)

注: 洛比达法则只能求有(极限), 不能求无(极限)

例: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$ $\neq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \rightarrow$ 极限不存在

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或 ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{柯西}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f(\frac{1}{t})]'_t}{[g(\frac{1}{t})]'_t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{t^2}) f'(\frac{1}{t})}{(-\frac{1}{t^2}) g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(3) $\lim f(x) = \infty, \lim g(x) = 0$

例1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$

例2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$ 令 $t = \frac{1}{x}$

例3: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x \cos x)(\sin x - x \cos x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x + \sin x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - (\cos x - x \sin x)}{3x^2} = \frac{2}{3}$

例4: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})) = \frac{1}{2}$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{柯西}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2}$

注: “ $1^\infty, 0^0, \infty^0$ ” 利用换底公式 $a = e^{\ln a}$ 将其变成不定式 $e^{\frac{0}{0}}$ 或 $e^{\frac{\infty}{\infty}}$ 型

例5: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x + 5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{3^x + 5^x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{3^x + 5^x}{2}}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3^x + 5^x} (3^x \ln 3 + 5^x \ln 5)}$
 $= e^{\ln 4} = \sqrt{16}$

例6: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$

例7: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3\sqrt{x^2+x} - 4\sqrt{x^2+2x} + 5\sqrt{x^2-x})$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 4\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 5\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$
 $t = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} (2 - 3\sqrt{1+t} - 4\sqrt{1+2t} + 5\sqrt{1-t})/t$
 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} [-3 \cdot \frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}} - 2(1+2t)^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(-1)] = -8$

例8: 求抛物线 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的中值点 ξ

解: $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$ ξ 介于 x_1, x_2 之间

$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = (2a\xi + b)(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow a(x_1 + x_2) + b = 2a\xi + b \Rightarrow \xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$

例9: 设 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 上二阶可导, 且 $f''(0) \neq 0$. 由拉格朗日中值定理, $\exists \xi \in (0, x)$ 使 $f(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$, 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} = \frac{1}{2}$

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi} = f'(0)$

$\Rightarrow \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi} = \frac{\xi f'(0) + \frac{1}{2}\xi^2 f''(0) + o(\xi^2)}{\xi}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} f'(0) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} \frac{1}{2}\xi f''(0) = f'(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} + \frac{1}{2} f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - x f'(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - x f'(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0)$

$\therefore f'(0) \neq 0 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} = \frac{1}{2}$

例10: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{ax^2 + bx + c})$ 提出无穷小因子, 转换形式 $a=25 \quad b=-20$

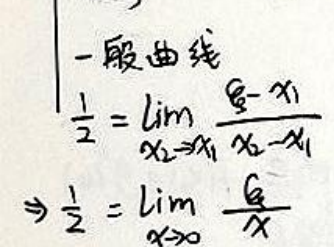
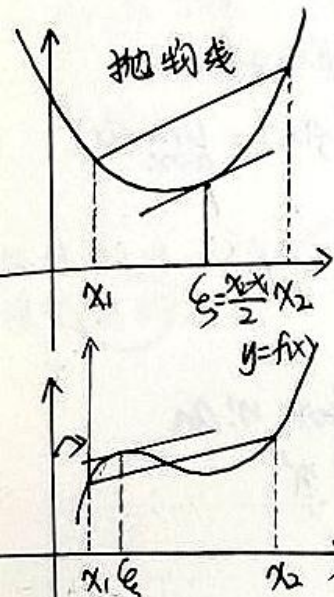
$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[5 - \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{5 - \sqrt{a + bt + ct^2}}{t}$

例11: 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内可导, 则不正确的是 ()

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 点连续

(B) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点



$\frac{1}{2} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{\xi - x_1}{x_2 - x_1}$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x}$

注意运用导数定义
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$
 同阶/高阶无穷小

(D) 若 \exists 此邻域内两点 x_1, x_2 使 $f(x_1)f(x_2) < 0$, 则 \exists 此邻域内一点 x_0 使 $f(x_0) = 0$

(A) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{洛比达}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 记结论

(B) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不 \exists , x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 若 x_0 是第一类间断点, 则 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都 \exists

左导数 $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{洛比达}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'(x_0-0)$

右导数 $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{洛比达}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0+0)$

$\therefore f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Rightarrow f'(x_0-0) = f'(x_0+0) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$

§4.3 泰勒公式

多项式 $H_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$a_0 = H(0)$ $a_1 = H'(0)$ $H''(0) = 2a_2 \dots H^{(n)}(0) = n! a_n$

$\therefore H_n(x) = H(0) + H'(0)x + \frac{H''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{H^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$f(x) \approx P_n(x)$ 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点有 n 阶导

$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有 n 阶导, 令 $t = x - x_0$

$f(x) = f(t + x_0) \stackrel{\circ}{=} g(t)$ 则 $g(t)$ 在 $t=0$ 点有 n 阶导, $f'(x_0) = g'(0)$

$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(0)$ $g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n$

$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$n=1$ 时
 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x)$

$\Rightarrow \Delta y = dy|_{x=x_0} + o(\Delta x)$
 $R_1(x) = o(x-x_0)$

$n=2$ 时
 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + R_2(x)$

$\Rightarrow R_2(x) = o((x-x_0)^2)$
 $\Rightarrow R_n(x) = o((x-x_0)^n)$

2. 泰勒公式

设 $f(x)$ 在 x_0 点有 n 阶导, 称多项式

$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

为 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶泰勒多项式

称 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点处的泰勒公式余项

此时 $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ $R_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ ($k > n$)

定理1: 设 $f(x)$ 在 x_0 点有 n 阶导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 点处的 n 阶泰勒公式余项 $R_n(x) = o(|x-x_0|^n)$, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n)$$

称之为带皮亚诺余项的泰勒公式

证明: $R_1'(x) = R_2''(x) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \stackrel{0/0 \text{ 型}}{=} \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n(n-1)\dots 2(x-x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x) - R_n^{(n)}(x_0)}{n! (x-x_0)} = 0$$

定理2: (泰勒中值定理) 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有 $(n+1)$ 阶导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 点的

$$n \text{ 阶泰勒公式余项 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ 介于 } x, x_0 \text{ 之间, 此时}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

称之为带拉格朗日余项的泰勒公式

证明: 令 $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \stackrel{\text{柯西}}{=} \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} = \frac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} \stackrel{n \text{ 次柯西}}{=} \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(\xi_n) - g^{(n)}(x_0)} \stackrel{\text{柯西}}{=} \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\text{当 } x_0=0 \text{ 时 } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称之为麦克劳林公式 ξ 介于 $0, x$ 之间, $0 < \frac{\xi}{x} = \theta < 1$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \exists M > 0, \text{ 使 } |f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$$

3. 常见的泰勒公式

$$(1) f(x) = e^x \quad f^{(n)}(x) = e^x \quad f(0) = e^0 = 1 \quad R_n(x) = \frac{e^\theta x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta x^{n+1}}{(n+1)!} \quad 0 < \theta < 1$$

$$\therefore e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

$$|R_n(1)| = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

例: 利用 e^x 的麦克劳林公式计算 e 的值, 使其误差不超过 10^{-5}

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-5} \quad n \geq 8$$

证明 e 为无理数

拉格朗日中值定理的高阶形式

先假设 e 为有理数

$$\text{若 } e = \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^0}{(n+1)!} \quad 0 < \frac{e^0}{(n+1)!} < 1 \quad (n \geq 2)$$

$$n! \frac{p}{q} = (\dots \text{整数}) + \frac{e^0}{n+1} \quad \text{矛盾}$$

(2) $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi) \quad f^{(n)}(0) = \sin \frac{n}{2}\pi = \begin{cases} 0, & n=2m \\ (-1)^m, & n=2m+1 \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{(-1)^{m+1} \cos 0 x^{2m+3}}{(2m+3)!}$$

$$f^{(2m+3)}(\xi) = \sin(\xi + \frac{2m+3}{2}\pi) = \sin((m+1)\pi + \frac{\pi}{2} + \xi) = (-1)^{m+1} \sin(\frac{\pi}{2} + \xi)$$

(3) $f(x) = \cos x$

$$f^{(n)}(x) = \cos^{(n)} x = \cos(x + \frac{n}{2}\pi) \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m, & n=2m \\ 0, & n=2m+1 \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + \frac{(-1)^{m+1} \cos 0 x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

$$\cos x = \sin x$$

(4) $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$f(x) = 1 \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

(5) $f(x) = \ln(1+x)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(1+x)^k} = (-1)^{k-1} (1-x)(1-2x)\dots(1-(k-1)x)(1+x)^{-k}$$

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} x^k = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} x^k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1} (1+\xi)^{-(n+1)}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

例2: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 问 $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^x + 2\sin x$ 是 $\cos x - 1$ 的几阶无穷小 $\frac{3}{2}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) + 2(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{2}x^3$$

$\alpha = n$ 牛顿二项式的推广

$\alpha = -1$ 得

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} (1+\xi)^{-n-1} x^{n+1}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad |x| < 1$$

高阶 → 泰勒中值定理

例3. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有连续的三阶导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明: \exists 一点 $\xi \in (-1, 1)$ 使 $f''(\xi) = 3$

证明: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$

令 $x=1$, 有 $f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}, 0 < \xi_1 < 1$ ①

令 $x=-1$, 有 $f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} - \frac{f'''(\xi_2)}{3!}, 0 > \xi_2 > -1$ ②

①-②得 $1 = \frac{1}{6} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]$

$\therefore f'''(x) \in C[-1, 1]$ 由连续函数的介值原理, $\exists \xi \in [\xi_2, \xi_1] \subseteq [-1, 1]$

使 $f'''(\xi) = \frac{1}{2} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] = 3$

例4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 又 $M = f(c) > 0$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $f''(\xi) \leq \frac{-8M}{(b-a)^2}$

证明: 将 $f(x)$ 在 $x=c$ 点展成泰勒公式

$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\eta)}{2!}(x-c)^2$

又: $f(c) = M$ 是最大值, $\therefore f'(c) = 0$ 是极值

又: $f'(c) = 0$. 由费马原理有 $f'(c) = 0$

$\therefore x=a, 0 = f(a) = M + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(a-c)^2$

$x=b, 0 = f(b) = M + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(b-c)^2$

$\Rightarrow \begin{cases} f''(\xi_1) = \frac{-2M}{(a-c)^2} = \frac{-8M}{[2(a-c)]^2} \leq \frac{-8M}{(b-a)^2} \Leftrightarrow c \leq \frac{a+b}{2} \\ f''(\xi_2) = \frac{-2M}{(b-c)^2} = \frac{-8M}{[2(b-c)]^2} \leq \frac{-8M}{(b-a)^2} \Leftrightarrow c \geq \frac{a+b}{2} \end{cases}$

§4.4. 极值与最值

1. 函数的单调性

定理1: 设 $f(x) \uparrow I (\downarrow I)$ 且 $f'(x)$ 存在, 则 $f'(x) \geq 0 (< 0)$

$\uparrow f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$

定理2: 若 $f(x) \in C(a, b)$ 且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内可导, 当 $f'(x) > 0 (< 0)$ 则 $f(x) \uparrow \langle a, b \rangle (\downarrow \langle a, b \rangle)$

$f'(x) > 0$ 严格单调

$f'(x) \geq 0$ 不严格单调

证明: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 由拉格朗日中值定理

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0 \quad \exists \xi \in (x_1, x_2) \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x) \uparrow (a, b)$$

注: $[a, b]$ $[a, b]$

例1: 求 $f(x) = x^3 - 3x + 5$ 的单调区间

解: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$

列表	x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
	$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	$f(x)$	\uparrow		\downarrow		\uparrow

例2: 证明 $(1 + \frac{1}{x})^x \uparrow (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{证明: } [(1 + \frac{1}{x})^x]' &= (1 + \frac{1}{x})^x \cdot (x \ln(1 + \frac{1}{x}))' \\ &= (1 + \frac{1}{x})^x \left[\ln(1 + \frac{1}{x}) + x \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= (1 + \frac{1}{x})^x \left(\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1} \right) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{令 } f(x) = \ln x \quad \ln(1 + \frac{1}{x}) - \ln 1 = f'(\xi) \frac{1}{x} = \frac{1}{\xi x} \quad 1 < \xi < 1 + \frac{1}{x}$$

$$x < \xi < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi x} < \frac{1}{x} \quad \therefore (1 + \frac{1}{x})^x \uparrow (0, +\infty)$$

例3: 设 $f'(x) < 0, f(0) = 0, x \in [0, +\infty)$ 证明 $\frac{f(x)}{x} \downarrow (0, +\infty)$

$$\text{证明: } \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \quad \text{令 } g(x) = f'(x)x - f(x), x \in [0, +\infty)$$

$$g'(x) = f''(x)x < 0, \text{ 当 } x > 0$$

$$\because g(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 点连续 } \therefore g(x) \downarrow [0, +\infty)$$

$$\therefore \text{ 当 } x > 0 \text{ 有 } g(x) < g(0) = 0$$

$$\therefore \text{ 当 } x > 0 \text{ 时 } \left(\frac{f(x)}{x}\right)' < 0 \text{ 从而 } \frac{f(x)}{x} \downarrow (0, +\infty)$$

例4: 设 $b > a > e$, 证明 $a^b > b^a$

$$\text{证明: 令 } f(x) = x \ln a - a \ln x, x \in [a, +\infty)$$

$$f'(x) = \ln a - \frac{a}{x} > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow [a, +\infty)$$

$$\therefore \text{ 当 } x > a, \text{ 有 } f(x) > f(a) = 0 \Rightarrow x \ln a > a \ln x$$

$$\text{令 } x=b \text{ 有 } b \ln a - a \ln b > 0 \Rightarrow a^b > b^a$$

例5: 求方程 $(x^2-2x)e^x + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}} = 0$ 实根个数

解: 令 $f(x) = (x^2-2x)e^x + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}$

$$f(x) = (x^2-2)e^x = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

① 当 $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$ 时, $f'(x) > 0, \Rightarrow f(x) \uparrow (-\infty, -\sqrt{2}]$

$\star f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}} > 0$ $f(-\sqrt{2}) > 0 \therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 上无根

② 当 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 时, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$f(\sqrt{2}) < 0$ $f(-\sqrt{2}) > 0 \therefore f(x)$ 有且仅有一个根

③ 当 $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow [\sqrt{2}, +\infty)$

$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \therefore f(x)$ 有且仅有一个根

综上所述, 方程有两个根

2 函数的极值

定理1: 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续且在 x_0 点的去心邻域内可导,

(1) 当 $x \in (x_0-d, x_0)$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, x_0+d)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值

(2) 当 $x \in (x_0-d, x_0)$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0+d)$ 时 $f'(x) < 0$ 则 $f(x_0)$ 是极大值

证明: (1) $x \in (x_0-d, x_0)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow (x_0-d, x_0)$

又 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\therefore f(x) \downarrow (x_0-d, x_0]$ 类似 $f(x) \uparrow (x_0, x_0+d)$

例1: 求 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 的极值

解: 定义域 $(-\infty, +\infty)$ $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2}{3} \frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$

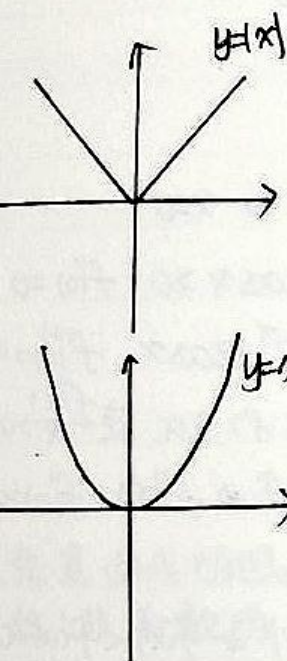
令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (0 处) 导数不存在

$f(x)$ 是偶函数, $f(x)$ 是奇函数

列表 x	0	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	不 \exists	+	0	-	不 \exists	-
$f(x)$	极小	\uparrow	极大	\downarrow	不是	\uparrow

\therefore 极大值 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4^{\frac{1}{3}}$ $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4^{\frac{1}{3}}$ 极小值 $f(0) = 1$

定理2: 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极值, 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 是极小



值, 当 $f'(x_0) < 0$ 时, 是极大值

证: 若 $f'(x_0) > 0$, $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} > 0$

由极限的保序性, $\exists \delta(x_0, \delta) \ni x$, 有 $\frac{f(x)}{x - x_0} > 0$

当 $x > x_0$ 时, 有 $f(x) > 0$, $f(x) \uparrow$ 当 $x < x_0$ 时, 有 $f(x) < 0$, $f(x) \downarrow$

$\therefore f(x_0)$ 是极小值

注: 若 $f'(x_0) = 0$, x_0 不一定是极值点. eg $y = x^3$ $y = x^4$

例2: 求 $f(x) = e^x - 1 - x$ 的极值

解: $f'(x) = e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ $f'(x) = e^x$ $f'(0) = 1 > 0$

$\therefore f(0) = 0$ 是极小值

例3: 求 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ 的极值

解: 定义域是 $(-\infty, +\infty)$ $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x \geq 2\sqrt{e^x e^{-x}} - 2\cos x = 2 - 2\cos x \geq 0$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$ $f'''(0) = 0$ $f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ $f^{(4)}(0) = 4$

$f^{(4)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(4)}(x)}{x} > 0$ $\exists \delta(0, \delta) \ni x$, 使 $\frac{f^{(4)}(x)}{x} > 0$

当 $x > 0 \Rightarrow f^{(4)}(x) > 0 \Rightarrow f'''(x) \uparrow$ $f'''(x) > f'''(0) = 0 \Rightarrow f''(x) \uparrow \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) \uparrow$

当 $x < 0 \Rightarrow f^{(4)}(x) < 0 \Rightarrow f'''(x) \downarrow$ $f'''(x) < f'''(0) = 0 \Rightarrow f''(x) \downarrow \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) \downarrow$

$\therefore f(0) = 4$ 是极小值

法二: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$

$\Rightarrow f(x) - f(0) = \frac{1}{3!}x^4 + o(x^4) > 0$ $\therefore f(0) = 4$ 是极小值

3. 函数的最值

(1) 区间上连续函数的最值

设 $f(x) \in C[a, b]$ 且 $f(x)$ 在 (a, b) 上有有限个极值嫌疑点, x_1, x_2, \dots, x_k

则 $f(x)$ 的最值在 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), f(a), f(b)$ 中找

阶数高时考虑使用
泰勒公式

例1: 求 $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ 的最值

解: 易见 $f(x) \in (-\infty, +\infty)$ $f'(x) = (x^2 - 2)e^x = 0 \quad x = \pm\sqrt{2}$

$$f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad f(-\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} > 0 \quad f(\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} < 0$$

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$\therefore f(x)$ 有最小值 $f(\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$, 无最大值

(2) 若 $f(x) \in (a, b)$ 有且仅有一个极大(小)值, 则此极值是最大(小)值

例2: 设有一工厂要加工一批无盖的圆柱形罐头盒, 其容积为 V , 问半径与高满足什么关系最省料

解: 设半径为 x , 高为 $\frac{V}{\pi x^2}$.

$$y = \pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{2V}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

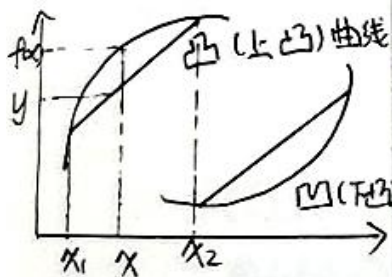
$$y' = 2\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \quad y'' = 2\pi + \frac{4V}{x^3} > 0$$

$\therefore x = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ 是唯一的极小值点, 从而为最小值点. 此时

$$\frac{\text{半径}}{\text{高}} = \frac{x}{\frac{V}{\pi x^2}} = \frac{\pi x^3}{V} = \frac{V}{V} = 1:1$$

§4.5 函数作图

注意是曲线的凹凸性, 非函数的凹凸性



1. 函数曲线凹凸性

定义1: 设 $f(x) \in C(a, b)$, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 若满足:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

则称曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上是凸(凹)的

定义2: 设 $y = f(x)$ 在 x_0 点连续, 若曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性在 x_0 点的左右邻域发生改变, 则称 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

判断: $f(x)$ 在 $x=0$ 点有三阶导数且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, 则 $f(0)$ 为极值 (✓)

分析: ① $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{6x} = \frac{1}{6} f''(0)$

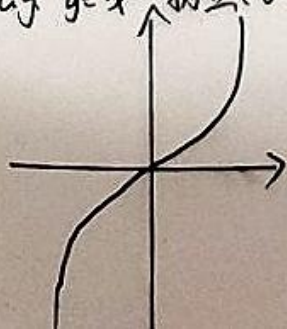
$$f(0) = 0 = f'(0) = f''(0)$$

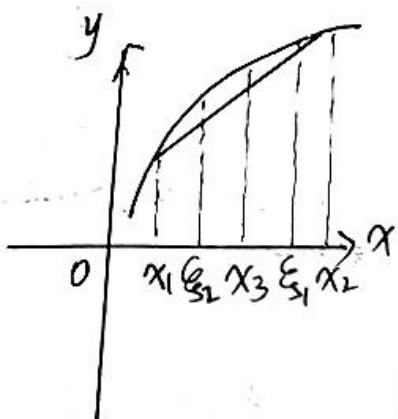
由凸曲线定义: $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$

$$\frac{f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)}{\lambda} \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

极值点为 x 轴上的点但拐点为曲线上的点.

eg $y = x^3$ 拐点 $(0, 0)$





不妨设 $x_1 < x_2$ $x_3 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$

$$\begin{aligned}
 & (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) - f(x_3) = \lambda(f(x_2) - f(x_3)) + (1-\lambda)(f(x_1) - f(x_3)) \\
 & = \lambda(f(x_2) - f(x_3)) + (1-\lambda)(f(x_1) - f(x_3)) \\
 & \stackrel{\text{一阶可导}}{=} \lambda f'(\xi_1)(x_2 - x_3) + (1-\lambda)f'(\xi_2)(x_1 - x_3) \\
 & = \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)f'(\xi) - f'(\xi_2)(1-\lambda)\lambda(x_2 - x_1) \\
 & = \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)] \\
 & \stackrel{\text{二阶可导}}{=} \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)f''(\xi)(\xi_1 - \xi_2) \leq 0 \text{ (凹)} \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad \geq 0 \text{ (凸)} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0
 \end{aligned}$$

定理1: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上有二阶导数, 若 $f''(x) \leq 0 (> 0)$, 则曲线 $y=f(x)$ 是凸(凹)的, 称 (a, b) 为其凸(凹)区间

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 且在 x_0 点的去心邻域二阶导存在, 若 $f''(x)$ 在 x_0 点的左右邻域内异号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

费马引理 ←
推出

注: 在②的条件下, 若 $f'(x_0) \exists$, 则 $f'(x_0) = 0$

$f'(x_0) = 0$, 不一定是拐点. eg. $y = x^4$ $y'(0) = 0$ 但 $(0, 0)$ 不是拐点

例: 求 $y = x^4 - 2x^3 + 3x + 1$ 的凹凸区间及拐点.

解: 定义域: $(-\infty, +\infty)$ $y' = 4x^3 - 6x^2 + 3$ $y'' = 12x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 1

列表 x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	凹	1	凸	3	凹

$\therefore (0, 1)$ 和 $(1, 3)$ 是拐点.

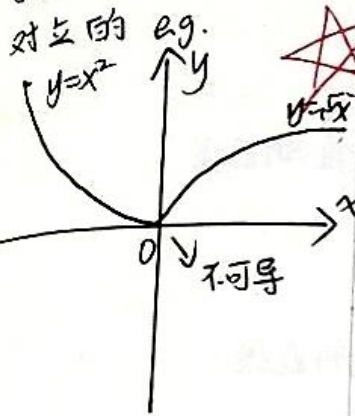
例2: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点有三阶导数且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, 则 (C)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0, f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点 (D) $f(0)$ 不是极值 $(0, 0)$ 不是拐点.

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x-0} = \frac{1}{6} f'''(0) \\
 f(0) &= f'(0) = f''(0) = 0
 \end{aligned}$$

拐点与极值点并非



$b = f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x} > 0 \Rightarrow \exists \delta (0, \delta)$ 使 $\frac{f'(x)}{x} > 0$. $\Rightarrow \begin{cases} x < 0 & f(x) < f(x_0) \\ x > 0 & f(x) > f(x_0) \end{cases} \Rightarrow f \uparrow$

例3: 设 $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$, 而 $f^{(n)}(x) \neq 0$ ($n \geq 3$) 证明: ① 当 n 为偶数时, $f(x)$ 是极值, $f^{(n)}(x) > 0$, (x_0) 是极小(大)值而 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点
② 当 n 为奇数时, $(x_0, f(x_0))$ 是拐点, 而 $f(x)$ 不是极值

证: ① $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$
 $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

当 n 为偶数时若 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 则 $f(x) > f(x_0)$, 从而 $f(x_0)$ 是极小值
 < 0 则 $f(x) < f(x_0)$ 从而 $f(x_0)$ 是极大值

当 n 为奇数时, $(x-x_0)^n$ 可正可负, 从而 $f(x) - f(x_0)$ 可正可负所以 $f(x_0)$ 不是极值

② $f'(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + o((x-x_0)^{n-2})$
 $= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$

当 n 为偶数时, $f'(x)$ 在 x_0 的邻域内不变号, $\therefore (x_0, f(x_0))$ 不是拐点

当 n 为奇数时, $f'(x)$ 在 x_0 的左右邻域内异号, $\therefore (x_0, f(x_0))$ 是拐点

2. 渐近线

设有曲线 Γ 和直线 l , 当曲线 Γ 的一端远离坐标原点时, 曲线 Γ 和直线 l 无限接近则称直线 l 是曲线 Γ 的一条渐近线

(a) 垂直渐近线

直线 $x=c$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线 $\Leftrightarrow x=c$ 是 $f(x)$ 的间断点或区间端点且 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$

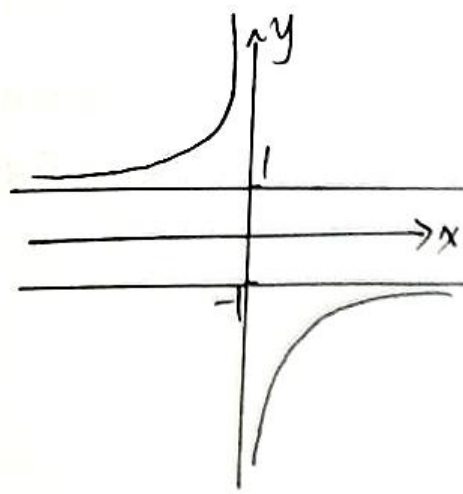
(b) 一般渐近线

直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ 此时

$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 且 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

$f(x) - ax - b = 0 + \alpha$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha = 0$ $a = \frac{f(x) - b - \alpha}{x} \Rightarrow a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b + \alpha}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

eg. $y = \ln x$ $y = \tan x$
 $y = \frac{1}{1-x}$



例1: 求曲线 $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ 的所有渐近线

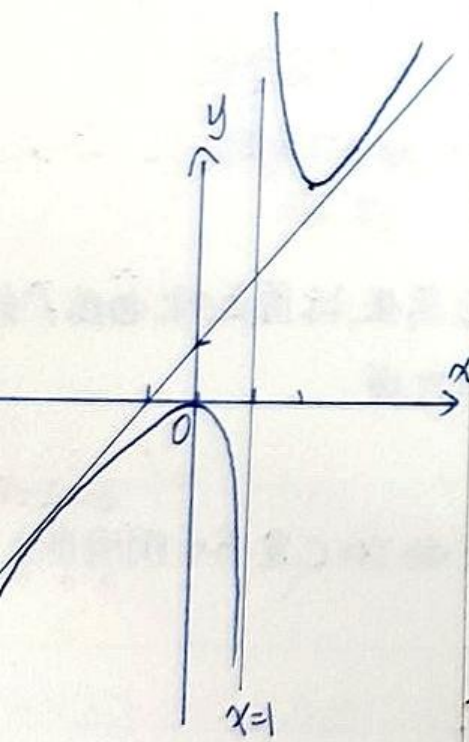
解: 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+e^x}{1-e^x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+e^x}{1-e^x} = +\infty$ $\therefore x=0$ 是垂直渐近线
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{(1-e^x)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}+1}{(e^{-x}-1)x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = -1$
 $\therefore y = -1$ 是水平渐近线
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^x}{(1-e^x)x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = 1$ $\therefore y = 1$ 是水平渐近线

3. 分析作图法 (描点)

- (1) 定义域
- (2) $f(x) = 0$ 及不可导的点
- (3) $f'(x) = 0$ 及不可导的点
- (4) 渐近线及渐近方向
- (5) 列表再描图形 (加周期性, 奇偶性)

例2: 作函数 $y = \frac{x^2}{x-1}$ 的图形

解: 定义域 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ $y' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0$ $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$ $\therefore x=1$ 是垂直渐近线
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\frac{x^2}{x-1} - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$
 $\therefore y = x+1$ 是一条渐近线



列表

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	-	-	0	+
y''	-		-	+		+
y	\nearrow	极大值 0	\searrow	\searrow	极小值 4	\nearrow

例3: 作曲线 $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ 的图形

解: 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y' = \frac{2e^x}{(1-e^{2x})^2}$ $y'' = \frac{2e^x(e^x+1)}{(1-e^{2x})^3}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+e^x}{1-e^x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+e^x}{1-e^x} = +\infty$ $\therefore x=0$ 是垂直渐近线
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{x(1-e^x)} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = -1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^x}{x(1-e^x)} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^x}{1-e^x} = 1$
 $\therefore y = \pm 1$ 是水平渐近线

例4: 作函数 $y = xe^x$ 的图形

解 定义域 $(-\infty, +\infty)$ $y' = (x+1)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$ $y'' = (x+2)e^x = 0 \Rightarrow x = -2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0$ $\therefore y=0$ 是水平渐近线

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
y'	-	-	-	0	+
y''	-	0	+	+	+
y	\searrow	拐点	\searrow	极小	\nearrow

§4.6 曲率

1. 曲线长

简单、连续、可度 ($\lim_{M' \rightarrow M} \frac{\widehat{MM'}}{MM'} = 1$) 曲线

曲线方程: 参数曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 函数曲线 $y = f(x)$ 极坐标曲线 $r = r(\theta)$

曲线长函数 S

设曲线 $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$ 是简单连续可度曲线, 以曲线左端点 $M_0(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ 为定点, $t \in [\alpha, \beta]$ 得到 L 上另一点 $M(\varphi(t), \psi(t))$, 设 $S = \widehat{M_0M}$, 易见 S 是 t 的函数, 记为 $S = S(t), t \in [\alpha, \beta], S(\alpha) = 0$

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \stackrel{\text{限制}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{M_0M} - \widehat{M_0M'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

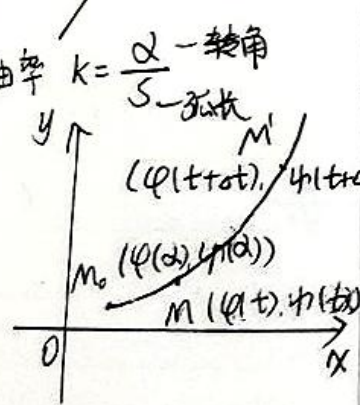
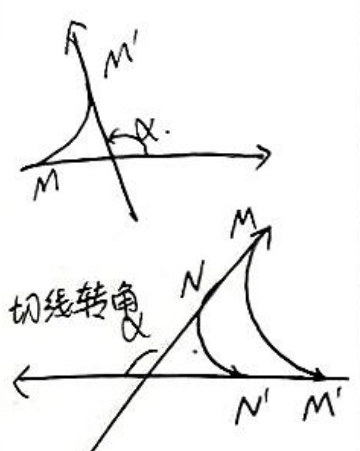
结论: 若 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 都可导, 则曲线长函数 $S = S(t)$ 也可导, 且

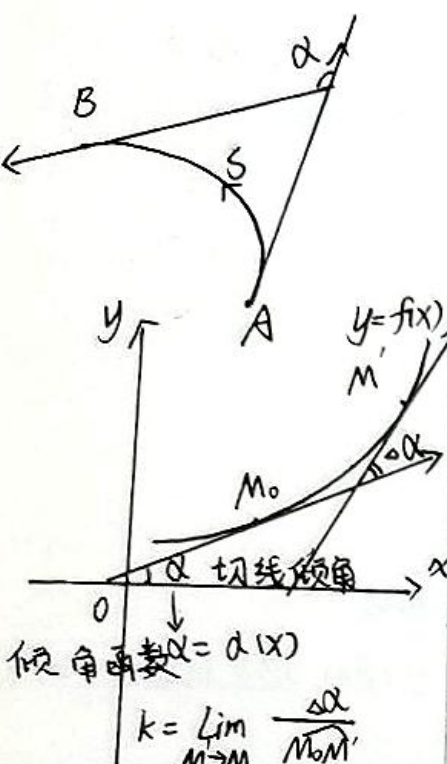
$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \quad (\text{规定 } dt > 0, \text{ 有 } ds > 0)$$

称上式为曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 的弧微分

几何意义: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = x \end{cases} ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad dx > 0 \quad ds > 0$$





金工实习
车铣钳刨
圆

极坐标曲线 $r=r(\theta)$ $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta$

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases} = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta \quad d\theta > 0, ds > 0$$

2. 曲率

定义1: 设有一光滑曲线段 AB, A是始点, 由A到B, A点的切线与B点的切线的转角为 α , AB的长度为 s , 规定 $k = \frac{\alpha}{s}$, 为曲线段 AB 的曲率

注: 直线的曲率为0 半径为R的圆的曲率为 $\frac{1}{R}$

定义2: 设曲线 $y=f(x)$ 处处有切线, 则其切线倾角又是关于 x 的一个函数, 称之为 $y=f(x)$ 的倾角函数, 记为 $\alpha = \alpha(x)$, 简记 $\alpha(x) = \arctan y'$

定义3: 设曲线在点 (x, y) 附近光滑, 若极限 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$ 存在, 则称此极限为曲线在 (x, y) 点处曲率, 记为 $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha / \Delta x}{\Delta s / \Delta x} = \frac{|\alpha'(x)|}{|s'(x)|} = \frac{|y''|}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

结论: 若 $y=f(x)$ 有二阶导数, 则点 (x, y) 处曲率存在, 且 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ - 曲率

例1: 求半径为R的圆的曲率

解: 设圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$2 + 2(y'^2 + yy'') = 0 \quad 1 + \frac{x^2}{y^2} + yy'' = 0 \quad y'' = -\frac{R^2}{y^3}$$

代入 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R}$

例2: 求曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点

解: $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$

$$k(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k'(x) = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{-2x^2+1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (舍去)}$$

当 $x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $k(x) > 0, k(x) \uparrow$ 当 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $k(x) < 0, k(x) \downarrow$

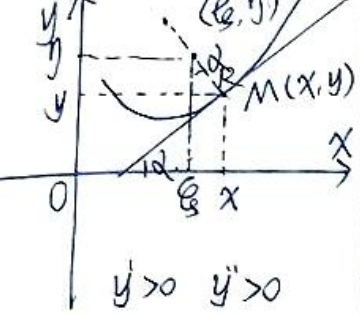
\therefore 当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $k(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 是极大值, 也是最大值

3. 曲率圆

曲线的分类

- ① $y' > 0$ $y'' > 0$
- ② $y' > 0$ $y'' < 0$
- ③ $y' < 0$ $y'' > 0$
- ④ $y' < 0$ $y'' < 0$

以①为例



定义: 设有曲线 Γ , $M_0 \in \Gamma$, 又有一个 $\odot O$, 若满足以下三条:

- ① 曲线 Γ 与 $\odot O$ 在 M_0 点相切, ② 在 M_0 点处曲线 Γ 与 $\odot O$ 有相同的凹向
- ③ Γ 在 M_0 点处的曲率等于 $\odot O$ 的半径倒数称 $\odot O$ 为曲线 Γ 在 M_0 点处的曲率圆, 此 $\odot O$ 的半径称为 M_0 点的曲率半径, O 点称为 M_0 点处的曲率中心。

若 Γ 上每一点都有曲率圆, 并且曲率中心又形成一条曲线 L , 称 L 为 Γ 的渐屈线, Γ 称为 L 的渐开线

曲率圆的确定 (半径, 曲率中心)

$$x - \xi = R \sin \alpha \quad \eta - y = R \cos \alpha \quad R = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad \tan \alpha = y' > 0$$

$$\sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = x - R \sin \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \eta = y + R \cos \alpha = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases} \quad \text{— 曲率中心公式}$$

例1: 求 $y = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率圆

解: $y' = 2x$ $y'' = 2$ $y'|_{(1,1)} = 2$ $R_{(1,1)} = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

设曲率中心 (ξ, η)

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = -4 \\ \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

\therefore 所求的曲率圆为 $(x+4)^2 + (y-\frac{7}{2})^2 = \frac{125}{4}$

例2: 求曲线 $\begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} (a > 0)$ 的渐屈线方程

解: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y't}{x't} = \frac{a(\cos t - \cos t + t \sin t)}{a(\sin t + \cos t - \sin t)} = \tan t$

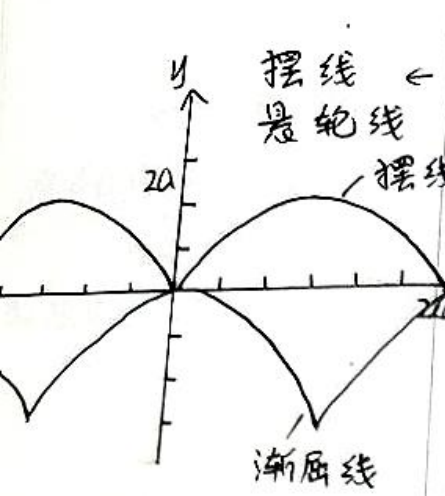
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{a t \cos t} = \frac{1}{a t \cos^3 t}$$

设渐屈线坐标为 (ξ, η)

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = a(t \sin t + \cos t) - a \cos^3 t \cdot \tan t (1 + \tan^2 t) = a \cos t$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = a(\sin t - t \cos t) + a t \cos^3 t (1 + \tan^2 t) = a \sin t$$

$\therefore \xi^2 + \eta^2 = a^2$, 所求渐屈线为 $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ 是圆



例3: 求曲线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的渐屈线 ($a > 0$)

解: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$
 $y'' = \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right)' / a(1 - \cos t) = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t}{(1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t)} = \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2}$

设渐屈线坐标为 (ξ, η)

$$\xi = x - (1 + y'^2) y' / y'' = a(t - \sin t) - \left[1 + \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}\right] \frac{\sin t}{1 - \cos t} / \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2}$$

$$= a(t + \sin t)$$

$$\eta = y + (1 + y'^2) / y'' = a(1 - \cos t) + \left[1 + \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}\right] \cdot [-a(1 - \cos t)^2]$$

$$= a(\cos t - 1)$$

令 $t = \pi + \theta$ $\sin t = -\sin \theta$ $\cos t = -\cos \theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = a(\pi + \theta - \sin \theta) \\ \eta = a(-1 - \cos \theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi - a\pi = a(\theta - \sin \theta) \\ \eta + 2a = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

第五章 不定积分

§5.1. 原函数与不定积分

1. 原函数

定义1: 若在区间 I 上有 $F(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 比如 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数, $\sin x + C$ 还是 $\cos x$ 的原函数

若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 则其原函数有无穷多个, $F(x) + C$ (C 是任意常数) 都是 $f(x)$ 的原函数, 且 $f(x)$ 的所有原函数都在 $F(x) + C$ 中

定理: 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x) + C$ (C 是任意常数) 是 $f(x)$ 的所有原函数的统一表达式. (包括复数)

证: 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $\varphi'(x) = f(x)$, 又 $F(x) = f(x)$

$$\therefore \varphi'(x) = F'(x) \Rightarrow \exists C, \text{ 使 } \varphi(x) = F(x) + C$$

2. 不定积分

2种理解

- 1. 一般性代表
- 2. 集合表达

←

定义2: 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数, 则称 $f(x)$ 在 I 上的所有原函数的统一表达式 (的集合) $F(x) + C$ 为 $f(x)$ 的不定积分, 记为 $F(x) + C = \int f(x) dx$, " \int " - 积分号 (表示连续的求和), " $f(x)$ " - 被积函数 " x " - 积分变量 " $f(x) dx$ " - 被积表达式 " C " - 积分常数

3. 性质与简单计算

- (1) $(\int f(x) dx)' = f(x)$ $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$
- (2) $\int f(x) dx = f(x) + C$ $\int d f(x) = f(x) + C$
- (3) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ } 线性性质
- (4) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

4. 原函数的存在性

- (1) 连续函数一定有原函数
- (2) 含有第 I 类间断点的函数, 没有原函数
- 含有第 II 类间断点的函数, 可能有原函数

eg. $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $F(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$

$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$ 原函数
∃ 的函数

5. 不定积分的基本公式

- (1) $\int 0 dx = C$ (2) $\int 1 dx = x + C$ (3) $\int x^u dx = \frac{x^{u+1}}{u+1} + C$ ($u \neq -1$)
- (4) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \begin{cases} \ln x + C, & x > 0 \\ \ln(-x) + C, & x < 0 \end{cases}$
- (5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (6) $\int e^x dx = e^x + C$
- (7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (8) $\int \cos x dx = \sin x + C$
- (9) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ (10) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
 $= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$ $= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$

\int 来源于 sum

$\int 1 dx = x + C$ ←

↓

$\int d f(x) = f(x) + C$

两边求导得证

不是所有函数都有不定积分, 导函数元第 I 类间断点

直接积分法

加一项减一项

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$$

$$(2) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C'$$

例1: 设 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 1 \\ x, & x < 1. \end{cases}$ 求 $\int f(x) dx$

$$\text{解: } \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + C_1, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_2, & x < 1 \end{cases}$$

$$\int f(x) dx \text{ (连续)} \Rightarrow \frac{1}{4} + C_1 = \frac{1}{2} + C_2 \\ \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4} + C_2$$

$$\therefore \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4} + C, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C, & x < 1 \end{cases}$$

$$\text{例2: } \int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$$

$$\text{解: } \int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

$$\text{例3: } \int (\sqrt{x}-1)(x+1) dx$$

$$\text{解: 原式} = \int (x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} - 1) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C$$

$$\text{例4: } \int \tan^2 x dx$$

$$\text{解: 原式} = \int (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

$$\text{例5: } \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$$

$$\text{解: } \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x + \frac{1}{2} x + C$$

§.5.2 第一换元积分法

复合函数求导法 → 定理1: 设 $F(u)$ 可导, 且 $F'(u) = f(u)$, $u = g(x)$ 也可导, 则

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

证: 由复合函数求导有

$$[F(g(x))] = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x)$$

$$\therefore \int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

$$\therefore F'(u) = f(u) \quad \therefore \int f(u) du = F(u) + C \quad \text{令 } u = g(x)$$

有 $\int f(g(x)) dg(x) = F(g(x)) + C$

$$\therefore \int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C$$

第一换元积分公式, 也叫凑微分法

例1: $\int \sin(3x+5) dx$

解: 原式 = $\frac{1}{3} \int \sin(3x+5) d(3x+5) = -\frac{1}{3} \cos(3x+5) + C$

\therefore 若 $F(x) = \int f(x) dx$ 则 $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) d(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

例2: $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

解: 原式 = $\int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln^2 x dx = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$

例3: $\int a^{\arctan x} / (1+x^2) dx$

解: 原式 = $\int a^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \int a^{\arctan x} d(\arctan x) = \frac{a^{\arctan x}}{\ln a} + C$

2. 显示第一换元积分形: 若 $F(x) = \int f(x) dx$ 则

$$\int \frac{f(hx)}{x} dx = \int f(hx) dhx = F(hx) + C$$

$$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x) = F(\arcsin x) + C$$

$$\int \frac{f(\arccos x)}{-\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arccos x) d(\arccos x) = F(\arccos x) + C$$

$$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x) = F(\arctan x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+e^x} d(e^x+1) = \ln|e^x+1| + C$$

3. 四个积分基本公式

$$(13) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$$(14) \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

$$(15) \int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x - 1}$$
$$= \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$$
$$= \ln \left| \frac{1-\cos x}{\sin x} \right| + C = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + C = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$(16) \int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} - \cot(x+\frac{\pi}{2}) \right|$$
$$+ C = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$(15) \text{法二: } \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

4. 常见的三角函数积分

例1: $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

解 原式 = $\int \sin^2 x \cos^2 x d\sin x = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d\sin x = \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d\sin x$
= $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

$\int \sin^m x \cos^n x dx$, 若 m, n 中至少有一个是奇数时, 不妨设 $n=2k+1$, 则

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d\sin x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

例2: $\int \sin^4 x dx$

解 原式 = $\int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x) dx + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} (x - \sin 2x) + \frac{1}{8} (x + \frac{1}{4} \sin 4x) + C$$

$$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

例3: $\int \tan^3 x dx$

解 原式 = $\int \tan x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan x d\tan x - \int \tan x dx$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C$$

$\int \tan^n x dx$ 或 $\int \cot^n x dx$ ($n \geq 2$) 利用 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

$$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$$

例4: $\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx$

解 原式 = $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\cos^3 x} d\cos x + \int \frac{1}{\sin x} dx$

$$= \frac{1}{\cos x} + \ln |\csc x - \cot x| + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^3 x} dx \text{ 分子 } 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

例5: $\int \frac{1}{1 + 3\sin^2 x} dx$

解 原式 = $\int \frac{1}{4\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{4\tan^2 x + 1} dx = \int \frac{\frac{1}{2} d\tan x}{1 + (2\tan x)^2}$

$$= \frac{1}{2} \arctan(2\tan x) + C$$

$\int \frac{1}{a + b\sin^2 x} dx$ 或 $\int \frac{1}{a + b\cos^2 x} dx$ 将 $a = (\sin^2 x + \cos^2 x)a$ 代入

5. 第一换元的技巧

例1: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

解: 原式 = $\frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{d(2x+x^2+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}} - \int \frac{2dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} \right)$

例2: $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

解: 原式 = $\int \frac{dx}{(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3} = \int \frac{1}{\sin^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x} dx$
 $= \int \frac{dx}{(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 + \sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x} = \int \frac{d(\frac{1}{2} \tan 2x)}{1 + (\frac{1}{2} \tan 2x)^2}$
 $= \arctan(\frac{1}{2} \tan 2x) + C$

例3: $\int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx$ ($a, b \neq 0$)

解: 原式 = $\frac{1}{-b - \frac{a^2}{b}} \int \frac{(a \cos x - b \sin x) - \frac{a}{b} (a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} dx$
 $= \frac{-b}{a^2 + b^2} \left(\ln |a \sin x + b \cos x| - \frac{a}{b} x \right) + C$

例4: $\int \frac{1}{\sin x + \tan x} dx = t$

解: 原式 = $\int \frac{\cos x}{\sin x (1 + \cos x)} dx = \int \frac{1 + \cos x - 1}{\sin x (1 + \cos x)} dx = \int \frac{1}{\sin x} dx - \int \frac{1}{\sin x (1 + \cos x)} dx$
 $\int \frac{1}{\sin x (1 + \cos x)} dx = \int \frac{1 - \cos x + \cos x}{\sin x (1 + \cos x)} dx = \int \frac{1 - \cos x}{\sin x (1 + \cos x)} dx + t$

则原式 $t = \int \frac{1}{\sin x} dx - \int \frac{1 - \cos x}{\sin x (1 + \cos x)} dx + t$

\therefore 原式 = $\frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{\sin x} dx - \int \frac{1 - \cos x}{\sin x (1 + \cos x)} dx \right)$

$\int \frac{1 - \cos x}{\sin x (1 + \cos x)} dx = \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x + 1)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x} + C$

法二: 原式 = $\int \frac{\cos x}{\sin x (1 + \cos x)} dx = \int \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx$

$= \int \frac{1}{2} \frac{1}{\sin x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cos^3 \frac{x}{2}} d\frac{x}{2}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x} dx + \int \frac{1}{2 \cos^3 \frac{x}{2}} d \cos \frac{x}{2}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x} dx + \frac{1}{2} \frac{\cos^{-2} \frac{x}{2}}{-2} = \frac{1}{2} (\ln |\sec x - \cot x| - \frac{1}{1 + \cos x}) + C$

例5: $\int \frac{x \cos x - \sin x}{(x + \sin x)^2} dx$ $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

解: 原式 = $\int \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} / \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{d(\frac{\sin x}{x})}{(1 + \frac{\sin x}{x})^2} dx$

$= -\frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} + C$

$= -\frac{x}{x + \sin x} + C$

§ 5.3 分部积分法

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow$$

$$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx = f(x)g(x) + C \Rightarrow$$

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad \text{--- 分部积分公式}$$

$$\text{或 } \int g(x)df(x) = f(x)g(x) - \int f(x)dg(x)$$

注: 在此公式中, 将被积表达式折成两个因子 $g(x)$ 与 $d f(x)$ 的乘积, 要使 $f(x)$ 的原函数“好”求, $g(x)$ 的导数 $g'(x)$ 相对简单

1. 典型的部分积分形

例 1: $\int \ln^2 x dx$

$$\text{解 原式} = x \ln^2 x - \int x d \ln^2 x = x \ln^2 x - \int 2 \ln x dx$$

$$= x \ln^2 x - 2(x \ln x - \int x d \ln x)$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

$$(1) \int \ln^n x dx = x \ln^n x - \int x d \ln^n x = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx$$

例 2: $\int \arctan x dx$

$$\text{解 原式} = x \arctan x - \int x d \arctan x = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$(2) \int \arcsin x dx, \int \arccos x dx, \int \arctan x dx, \int \operatorname{arccot} x dx$$

例 3: $\int x^2 \arcsin x dx$

$$\text{解 原式} = \int \arcsin x d \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} x^3 \arcsin x - \frac{1}{3} \int x^3 d \arcsin x$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \arcsin x - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{-\frac{1}{2} x^2}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = \frac{1}{2} \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) d(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$(3) \int \text{正整数幂函数} \times \text{反三角函数} dx$$

例 4: $\int x^2 \ln x dx = \int \ln x d \frac{1}{3} x^3$

$$\text{解原式} = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

(4) \int 正整数幂函数 \times 对数函数 dx

例6: $\int x \cos x dx$

$$\text{解原式} = \int x d\sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

(6) \int 正整数幂函数 \times 正(余)弦函数 $\cdot dx$

例5: $\int e^x \sin x dx$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int \sin x de^x = \sin x \cdot e^x - \int e^x d\sin x = \sin x \cdot e^x - \int e^x \cos x dx \\ &= \sin x \cdot e^x - (e^x \cos x - \int e^x d\cos x) = \sin x e^x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

(5) \int 指数函数 \times 正(余)弦函数 dx

例7: $\int x e^x dx$

$$\text{解原式} = \int x de^x = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C$$

(7) \int 正整数幂函数 \times 指数函数 dx

例8: $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int \frac{1}{\cos x} d\tan x = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \tan x \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tan x}{\cos x} + \int \frac{dx}{\cos x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\tan x}{\cos x} + \ln |\sec x + \tan x| \right) + C$$

$$\begin{aligned} \text{法二: 原式} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \tan^2 x \sec x dx + \int \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int \tan x d\sec x + \int \frac{1}{\cos x} dx = \tan x \sec x - \int \sec x \sec^2 x dx + \int \frac{1}{\cos x} dx \end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2} (\tan x \sec x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$$

18) $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ 或 $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ ($n \geq 3$) 用分部积分公式变成 $\int \frac{1}{\cos^{n-2} x} d\tan x$. $\int \frac{1}{\sin^{n-2} x} d\cot x$, 再变成方程, 移项解之

$$\int \frac{dx}{\cos^{2m+2} x} = \int \frac{1}{\cos^{2m} x} d\tan x$$

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{d\tan x}{\cos^{n-2} x} = \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - \int \tan x (n-2) \cos^{1-n} x \sin x dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - \int \tan x (n-2) \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} dx = \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2) \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

$$\therefore I_n = \frac{1}{n-1} \left(\frac{\tan x}{\cos^{n-1} x} + (n-2)I_{n-2} \right) \quad I_1 = \int \frac{1}{\cos x} dx \quad I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

例9: $I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n} dx \quad (n \geq 2)$

解: $I_1 = \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

$$I_n = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} - \int x(-n) \frac{1}{(a^2+x^2)^{n+1}} 2x dx$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}$$

$$\therefore I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{x}{(a^2+x^2)^n} + (2n-1)I_n \right]$$

罗尔定理
1

求抽象函数
积分常用

2. 一般分部积分形

例1: $\int [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)] dx$

解: 原式 = $\int g(x) df(x) - \int f(x) dg(x)$

$$= f'(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx - f(x)g'(x) + \int g'(x)f(x) dx$$

$$= f(x)g(x) - f(x)g'(x) + C$$

(1) 含有抽象函数的积分往往用分部积分法

例2: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 在 (a, b) 内 $f(x) \neq 0$, 且 $f(a) = f(b)$, $f(b) = f(a)$

证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} = 1$

证明: 设 $F(x) = g(x)[f'(x) - f(x)]$, 则

$$F(x) = \int g(x)[f''(x) - f(x)] dx = \int g(x) df(x) - \int g(x)f(x) dx$$

$$= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx - \int g(x)f(x) dx$$

$$= f'(x)g(x) - \int g(x) df(x) - \int g(x)f(x) dx$$

$$= f(x)g'(x) - [g'(x)f(x) - \int f'(x)g'(x) dx] - \int f(x)g(x) dx$$

$$= f(x)g'(x) - g'(x)f(x) + \int (f'(x)g'(x) - f(x)g'(x)) dx$$

令 $g''(x) = g(x)$ 即 $g(x) = e^x$ 或 e^{-x} 不妨取 $g(x) = e^x$ 则 $F(x) = e^x(f'(x) - f(x))$

(2) 不同类函数乘积的积分往往用分部积分法, 除了 $\int \ln x \frac{1}{x} dx$, $\int \arctan x \frac{1}{1+x^2} dx$

不同类函数积分 - 分部
同类函数积分 - 第一

$$\frac{1}{1+x^2} dx$$

例1: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\text{整体}}{\arcsin x} dx$

解 原式 = $-\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx$
= $-\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} d\arcsin x$
= $-\sqrt{1-x^2} \arcsin x + x + C$

例2: $\int \frac{1}{x^2+1} \arctan x dx$

解 原式 = $\int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}) \arctan x dx$
= $\int \arctan x d(-\frac{1}{x}) - \int \frac{1}{x^2+1} \arctan x dx$
= $-\frac{1}{x} \arctan x - \int \frac{-1}{x} \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \arctan^2 x$

而 $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$

\therefore 原式 = $-\frac{1}{x} \arctan x - \frac{1}{2} \arctan^2 x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$

例3: $\int x \overset{f(x)}{\arctan x} \ln(1+x^2) dx$

解 原式 = $\int \ln(1+x^2) d f(x)$

$f(x) = \int x \arctan x dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{1+x^2} dx$
= $\frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx$
= $\frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + C$
= $\frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C$

\therefore 原式 = $f(x) \ln(1+x^2) - \int f(x) d \ln(1+x^2)$

而 $\int f(x) d \ln(1+x^2) = \int f(x) \frac{2x}{1+x^2} dx = \int x \arctan x dx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx$
= $f(x) - (x - \arctan x) + C$

\therefore 原式 = $f(x) \ln(1+x^2) - f(x) + x - \arctan x + C$

= $(\frac{x^2+1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{3}{2} \arctan x + \frac{3}{2} x + C$

例4: 设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 互为反函数且 $F(x) = f(x)$, 求 $\int g(x) dx$

解 设 $y = g(x)$, $x = f(y)$, $g(x) = \frac{dy}{dx}$

$\int g(x) dx = xg(x) - \int x g'(x) dx = xg(x) - \int f(y) dy = xg(x) - F(y) + C$

$$= xg(x) - Fg(x) + C$$

3. "不存在"形的积分也往往用分部积分法

例如: $\frac{\sin x}{x}$, e^{x^2} , $\sqrt{1+x^3}$, $e^x \tan x$, $\frac{e^x}{\cos x}$, ...

例1: $\int (\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln|x|) dx$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int \frac{\sin x}{x} dx + \int \ln|x| d\sin x \\ &= \int \frac{\sin x}{x} dx + \sin x \ln|x| - \int \sin x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \sin x \ln|x| \end{aligned}$$

例2: $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \int e^{2x} (\tan^2 x + 1 + 2 \tan x) dx = \int e^{2x} (\sec^2 x + 2 \tan x) dx \\ &= \int e^{2x} d \tan x + 2 \int e^{2x} \tan x dx \\ &= e^{2x} \tan x - 2 \int \tan x e^{2x} dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx = e^{2x} \tan x + C \end{aligned}$$

§5.4 第二换元积分法

方法: $\int f(x) dx \xrightarrow{x=g(t)} \int f(g(t)) g'(t) dt = G(t) + C = G(g^{-1}(x)) + C$

要求 $g(t)$ 单调可导, 称此等式为第二换元积分公式

证: $t = g^{-1}(x)$ $x = g(t)$

$$[G(g^{-1}(x))]_x = G'(t) \frac{dt}{dx} = f(g(t)) \cdot g'(t) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = f(g(t)) = f(x)$$

$$\text{第一换元: } \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int f(g(t)) dg(t) = \int f(x) dx = F(x) + C$$

1. 典型的第二换元积分

$$= F(g(t)) + C$$

$$(1) \int f\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

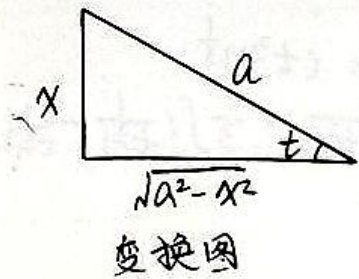
例1: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

$$\text{解原式} \xrightarrow{x=t^6} \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 + 1}{t+1} dt$$

$$= 6 \int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}) dt = 6(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln|t+1|) + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln|x^{\frac{1}{6}}+1| + C$$

$$(2) \int f(\sqrt{AX^2+BX+C}) dx$$



将 $Ax^2 + Bx + C$ 配方 $A(x + \frac{B}{2A})^2 + C - \frac{B^2}{4A}$

① $\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx \approx x = a \sin t$

例2: $\int \sqrt{1-x^2} dx \approx x = \sin t$

解原式 = $\int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C$
 $= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$

② $\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx \approx x = a \tan t$

例3: $\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

解原式 $\approx x = \tan t \int \frac{\tan^2 t}{\sec^3 t} \sec^2 t dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt$
 $= \int (\frac{1}{\cos t} - \cos t) dt = \ln |\frac{1}{\cos t} - \tan t| - \sin t + C$
 $= \ln |\sqrt{1+x^2} - x| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

③ $\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx \approx x = a \sec t$ 或 $a \csc t$

例4: $\int \frac{1}{(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}} dx$

解原式 $\approx x = \sec t \int \frac{\sec t + \tan t}{(\cos^2 t - 1)\tan t} dt = \int \frac{1}{\cos t} - \cos t dt = \int \frac{\cos t dt}{1 + \sin^2 t}$
 $= \arctan |\sin t| + C = \arctan \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$

例5: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$

解原式 $\approx x = \sec t \int \frac{\sec t + \tan t}{\tan t} dt = \ln |\sec t + \tan t| + C$
 $= \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C$

$(\ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

★ 第(17)个基本公式 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

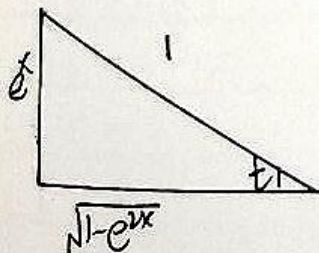
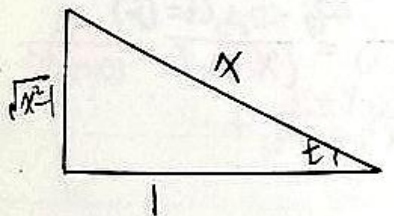
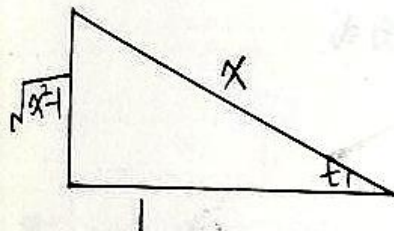
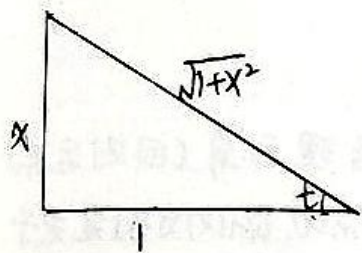
2. 第二换元的思路 —— 去掉复杂运算

例1: $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$

令 $t = \arcsin e^x \quad \sin t = e^x$

解原式 = $\int \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int t d(1 - \csc t) = -\csc t \cdot t + \int \csc t dt$
 $= -t \csc t + \ln |\csc t - \cot t| + C$
 $= -e^{-x} \arcsin e^x + \ln |e^{-x} - \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}| + C$

可先分部后第二换元计算积分



$$= -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \ln|1 - \sqrt{1 - e^{2x}}| - x + C$$

例2: $\int \frac{dx}{(2x+x^4)\sqrt{1+x^3}}$ 令 $\sqrt{1+x^3} = t \Rightarrow x = (t^2-1)^{\frac{1}{3}}$

解原式 = $\int \frac{\frac{2}{3}(t^2-1)^{\frac{2}{3}} \cdot 2t dt}{(t^2-1)^{\frac{1}{3}} t (t^2-1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2-1)} = \frac{1}{3} \int (\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) dt$
 $= \frac{1}{3} \int [\frac{1}{2}(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) - \frac{1}{t+1}] dt$
 $= \frac{1}{6} \ln|\frac{t-1}{t+1}| - \frac{1}{3} \arctan t + C$

3 有理函数的积分

(1) 有理函数及其分类

有理函数: 自变量 x 经过有限次的有理运算 (四则运算)

组成的函数, 记为 $R(x)$, 易见 $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, 其中 $P_m(x)$, $Q_n(x)$ 分别是关于

x 的 m 次, n 次多项式. 若 $m \geq (<) n$, 称 $R(x)$ 为假(真)分式

如 $\frac{x}{x^2+1}$ - 真分式 $\frac{x^2+1}{x+2}$, 多项式都是假分式

(2) 有理函数的分解

定理1: 假分式 = 多项式 + 真分式

定理2: 若多项式 $Q_n(x)$ 在实数范围内的分解式为: $(x+a_1)^{k_1} \dots (x+a_s)^{k_s}$

$(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_r x+q_r)^{l_r}$, 则真分式 $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x+a_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x+a_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{k_1}}{x+a_1} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_r x+C_r}{x^2+p_r x+q_r} + \dots$

(3) 最简分式积分

$$\textcircled{1} \int \frac{A}{(x+a)^n} dx = \begin{cases} A \ln|x+a|, & n=1 \\ A \frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} dx \quad p^2-4q < 0$$

$$x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2+a^2$$

$$Bx+C = B(t-\frac{p}{2})+C = Bt + C - \frac{p}{2}B$$

$$I_n = \int \frac{Bt+N}{(t^2+a^2)^n} dt$$

$$I_1 = \frac{B}{2} \ln(t^2+a^2) + \frac{N}{a} \arctan \frac{t}{a} + C$$

$$I_n = \frac{B}{2} \frac{(t^2+a^2)^{-n+1}}{-n+1} + \int \frac{N}{(t^2+a^2)^n} dt$$

注: 有理函数的原函数是初等函数

例1: $\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

解: $\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

$x = A(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2$

$= x^3(B+C) + x^2(A+B+2C+D) + x(B+2D+C) + A+B+D$

$\Rightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ B+2D+C=1 \\ A+B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=\frac{1}{2} \\ C=0 \\ B=0 \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 原式 $= \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)^2 - (x^2+1)}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$
 $= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$
 $= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2(x+1)} + C$

例2: $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$

解: 原式 $= \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1} dx = \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4+x^2+1)} dx$
 $= \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{x^2}{x^6+1} dx = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3 + C$

例3: $\int \frac{dx}{x^4+1}$

解: 原式 $= \int \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2} - (1 - \frac{1}{x^2})}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2}$ 令 $u = x + \frac{1}{x} \int \frac{du}{u^2 - 2}$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right| + C$

4. 三角函数有理式的积分

$\sin x, \cos x$ 经过有限次的有理运算得到的表达式, 称之为三角函数有理

式, 记为 $R(\sin x, \cos x)$.

万能变换: 设 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} (1 - \tan^2 \frac{x}{2}) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$x = 2 \arctan t \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$ - t 的有理函数积分

例4: $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx$

解: 原式 $\frac{2t = \tan \alpha}{1+t^2} \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} (1 + \frac{1-t^2}{1+t^2})} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2 + 2t + 1}{2t} dt$

$$= \frac{1}{2} \ln|t| + t + \frac{1}{4} t^2 + C$$

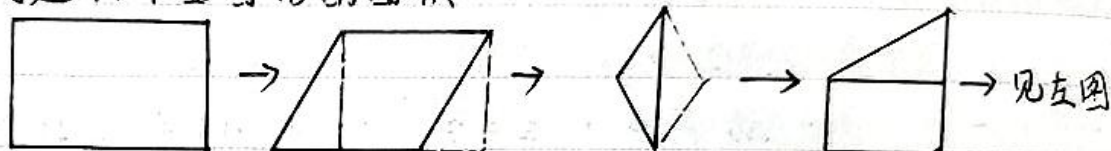
$$= \frac{1}{2} \ln|\tan \frac{\alpha}{2}| + \tan \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \tan^2 \frac{\alpha}{2} + C$$

第六章 定积分

§. 6.1 定积分的概念与性质

1. 典型问题

问题1: 平面图形的面积



$$S: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

方法: (1) 将区间 $[a, b]$ 任意分成 n 个小区间, $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$

$$(2) f(\xi_i) \Delta x_i \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$(3) \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$(4) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \rightarrow S \quad \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$$

问题2: 变速直线运动的路程 $S = \int_a^b v(t) dt$

方法: (1) 分割: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

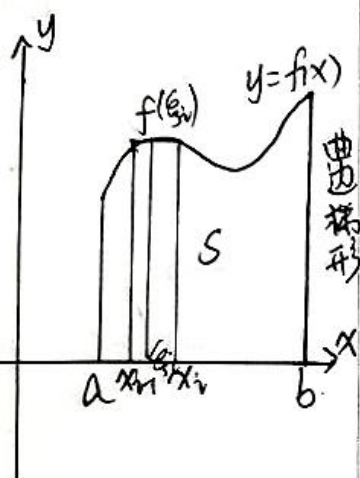
$$(2) \text{作乘积: } v(\xi_i) \Delta t_i \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = \overline{1, n}$$

$$(3) \text{求和: } \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i \approx S$$

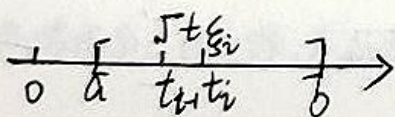
$$(4) \text{取极限, } \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\}, \text{ 当 } \lambda \rightarrow 0, \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i \rightarrow S$$

2. 积分定义

定义: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, (1) 任取 $[a, b]$ 的一个分划, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$; (2) 任取一个点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 作乘积 $f(\xi_i) \Delta x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

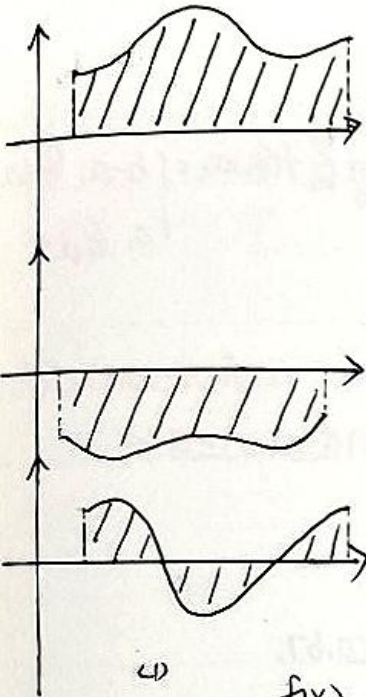


$$\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$$



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 不同于一般极限

$x_i, i=1, n$ (3) 求和: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ (4) 若无论 $[a, b]$ 的分划如何, ξ_i 的选取如何, 和式极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 总是存在且相等, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$, 则称此极限为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分, 也称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积。记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ "f" 积分号, "a" 积分下限, "b" 积分上限, " $[a, b]$ " 积分区间, " dx " 被积表达式, " $f(x)$ " 被积函数, " dx " 积分变量 x 的微分。(点 x 的长度微元)



3. 定积分的意义

- (1) $\int_a^b f(x) dx$ 表示曲边梯形面积的代数和 eg $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx$
- (2) $\int_a^b f(x) dx$ 表示变速直线运动 ($f(x)$ - 速度) 在时间段 $[a, b]$ 所走的路程的代数和
- (3) $\int_a^b f(x) dx$ 表示力的大小为 $f(x)$, 方向指向 x 轴的正方向, 将质点从 A 点移动到 B 点所做的功

4. 定积分的性质

- (1) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$
- (2) $\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \beta \int_a^b g(x) dx$ (线性性质)
- (3) $\int_a^a f(x) dx = 0$
- (4) $\int_a^b dx = b - a$
- (5) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ (有向性)
- (6) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- (7) $f(x) \leq g(x), a < b$, 有 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- (8) $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx (a < b)$
- (9) $m \leq f(x) \leq M$, 则 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) (a < b)$

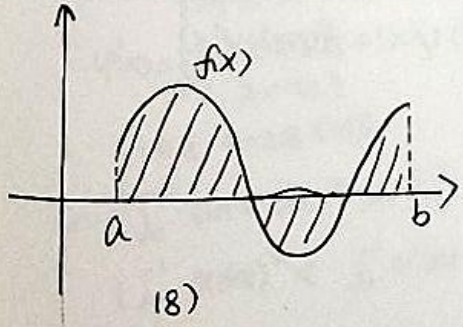
} 计算性质
} 不等式性质

(10) 定积分中值定理: 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$

一 积分中值公式

证: $\because f(x) \in C[a, b], \therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m

定积分又与积分区间及被积函数的函数关系有关, 与积分变量记号无关, 这点与不定积分有很大不同。积分上限与下限无所谓谁大谁小, 皆可。



(18)

数学意义: 将有限数的平均值推广至无穷多个数的平均值
 物理意义: 变速直线运动的平均速度

$$\text{即 } m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M, \text{ 由介值原理,}$$

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ 使 } f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

§6.2 定积分定理

1. 定积分存在的必要条件

定理1: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界

注: ① 有界不一定可积 eg. $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \begin{cases} b-a, & \xi_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \xi_i \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$
 ② 无界必不可积

2. 定积分存在的充分条件 则 $\int_a^b D(x) dx$ 不 \exists

定理2: 若 $f(x)$ 满足下列条件之: (1) $f(x) \in C[a, b]$, (2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界且有有限个间断点, (3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

3. 微积分基本定理

(1) 变限积分函数

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 称 $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$,

$$\psi(x) = \int_x^b f(t) dt, x \in [a, b]$$

为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的变上限(下限)积分函数

(2) 微积分基本定理第一部分 - 微分部分

定理3: 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可导, 且 $\varphi'(x) = f(x), x \in [a, b]$

证明: $\varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)]$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right)$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \xrightarrow{\text{定积分中值定理}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} f(\xi) \Delta x \quad \xi \text{ 介于 } x, x+\Delta x \text{ 之间}$
 $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \xi \rightarrow x, f(\xi) \rightarrow f(x) = f(x)$

注: ① 若 $f(x)$ 连续 $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$ $(\int_x^b f(t) dt)' = (-\int_b^x f(t) dt)' = -f(x)$

② 若 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)$ 可导, $(\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt)' = f(\varphi(x)) \varphi'(x)$

$$\text{令 } u = \varphi(x) \quad \frac{d}{du} \left(\int_a^u f(t) dt \right) \frac{du}{dx} = f(u) \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x)$$

变上限积分函数是连续函数的一个原函数

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt$$

$$= \int_{\varphi(x)}^a f(t) dt + \int_a^{\psi(x)} f(t) dt$$

$$= -f(\varphi(x))\varphi'(x) + f(\psi(x))\psi'(x)$$

③ 变限积分函数导数公式: $\varphi(x), \psi(x)$ 都存在, $f(x)$ 连续

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

例1: 设 $y^y + e^x = x + \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt$, 求 y'

$$\text{解: } y^y (y \ln y)' + e^x = 1 + \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot 3x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x$$

$$\therefore y^y (y' \ln y + y \cdot \frac{1}{y} y') + e^x = 1 + \frac{3 \sin x^3}{x} - \frac{2 \sin x^2}{x}$$

$$\text{即 } y' = (1 + \frac{3 \sin x^3 - 2 \sin x^2}{x} - e^x) / [y^y (\ln y + 1)]$$

例2: 设 $f(x) \in [0, 1]$, 证明 $\exists \xi \in (0, 1)$ 使 $\xi f(\xi) - \int_{\xi}^1 f(x) dx = 0$

$$\text{证明: } \int [x f(x) + \int_1^x f(t) dt] dx$$

$$= \int x f(x) dx + x \int_1^x f(t) dt - \int x d(\int_1^x f(t) dt)$$

$$= \int x f(x) dx + x \int_1^x f(t) dt - \int x f(x) dx$$

$$= x \int_1^x f(t) dt + C$$

\therefore 取 $F(x) = x \int_1^x f(t) dt$ 有 $F(0) = F(1)$ 且 $f(x) \in [0, 1]$ 故 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导

由罗尔定理可得 $\exists \xi \in (0, 1)$ 使 $\xi f(\xi) - \int_{\xi}^1 f(x) dx = 0$

13) 微积分基本定理第二部分 — 积分部分

— 牛顿-莱布尼兹公式

定理4: 设 $f(x) \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$

证明: $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x) \therefore \int_a^x f(t) dt = F(x) + C$

令 $x=a$ 则 $C = -F(a)$, 令 $x=b$, 有 $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

例1: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 (D)

(A) $\exists \xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$

(B) $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可导, 且 $\varphi'(x) = f(x), x \in [a, b]$

(C) $(\int_a^b f(x) dx)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx$

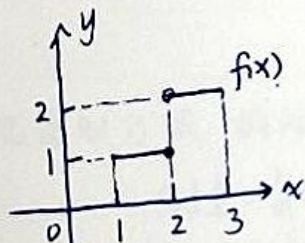
(D) $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续

证明: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$

$\therefore f(x)$ 可积 $\therefore \exists M > 0$ 使 $|f(x)| \leq M, x \in [a, b]$

$0 \leq |\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt| \leq M|\Delta x| \rightarrow 0 \therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta \varphi = 0$ (两边夹挤)

运用定积分性质 (8)



$$a=1 \quad b=3$$

$$A: \int_a^b f(x) dx = 3$$

$$f(\xi) = \frac{\int_1^3 f(x) dx}{3-1} = \frac{3}{2}$$

$$B: \varphi(x) = \int_1^x f(t) dt$$

$$= \begin{cases} x-1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x-3, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$\varphi(x)$ 在 $x=2$ 处不可导

$$C: (\int_0^{\pi} \sin x dx)^2 > \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$(\int_0^1 x dx)^2 < \int_0^1 x^2 dx$$

定积分 \Rightarrow 不定积分

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

注: ① $f(x) \in [a, b]$ 则 $\psi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可导

② $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\psi(x) = \int_a^x f(t) dt \in C[a, b]$

例2. 正确的是 (C)

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数 $f(x)$ 可能有第一类间断点

(B) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积 $f(x)$ 可能无界

(C) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界

(D) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

§ 6.3. 定积分的计算

1. 用牛顿-莱布尼兹公式: $\int_a^b f(t) dt = F(x) \Big|_a^b$ ($f(x) \in C[a, b]$)

例1: $\int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 \Big|_{-1}^1 = 0$

例2: $\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin x} dx$

解: 原式 = $\int_0^\pi |\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}| dx$
= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}) dx$
= $2 (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 (-\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi$
= -4

2. 定积分的第一换元与分部积分公式

(1) 第一换元公式: $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_a^b$

例3: $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

解: 原式 = $\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$

(2) 分部积分公式: $\int_a^b g(x) df(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dg(x)$

例4: $\int_0^\pi e^x \sin x dx$

解: 原式 = $e^x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x d \sin x = -\int_0^\pi e^x \cos x dx$
= $-\int_0^\pi \cos x de^x = -(e^x \cos x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x d(\cos x) = -(-e^\pi - 1) + \int_0^\pi e^x \sin x dx$
 \therefore 原式 = $\frac{1}{2} (e^\pi + 1)$

例15: 设 $f(x) = \int_1^{\frac{x^2}{t}} \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $\int_0^1 x f(x) dx$

解: 原式 = $\int_0^1 f(x) d(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2 f(x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x dx$
 $= \frac{1}{2}x^2 f(x)|_0^1 - \int_0^1 \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \cos x^2 |'_0^1 = \frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$

13) 定积分的第二换元公式

定理1: (第二换元公式) 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $x = g(t)$ 满足:

- (i) $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$
- (ii) $g(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上连续
- (iii) 当 $t \in [\alpha, \beta]$, (或 $[\beta, \alpha]$) 时, $g(t) \in [a, b]$

则 $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$

结论1: 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续函数, 当 $f(x)$ 是奇函数时, 有
 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ (偶)
 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

换元要换限

拆限+换元

结论1中 $f(x)$ 为可积函数

仍然正确

证: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$
 $= \int_a^0 f(-t) d(-t) + \int_0^a f(x) dx$
 $= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx$
 $= \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx$

结论2中 $f(x)$ 为可积函数

仍然正确

结论2: 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

证: $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$
 $\int_a^0 f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(t+T) dt = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = 0$

观察积分限, 拆限

例1: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} dx$
 解: 原式 = $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} dx$
 令 $x = -t$ = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 t}{1+e^{-t}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} (x + \frac{1}{2} \sin 2x) |_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

两次拆限换元

解为程

例2: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$
 解: 原式 = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ 令 $\frac{\pi}{2} - x = t$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \cos t \, (-dt) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln \sin x + \ln \cos x) \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln \frac{1}{2} \sin 2x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 \, dx \\
 &\stackrel{2x=t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \ln \sin t \, dt - \frac{\pi}{4} \ln 2 \\
 \therefore \text{原式} &= -\frac{\pi}{2} \ln 2
 \end{aligned}$$

例3: 正确的是 () 已知 $f(x)$ 连续且 $F(x) = \int_a^x f(x) \, dx$

(A) 当 $f(x)$ 是偶函数, 则 $F(x)$ 是奇函数 $f(x)=0 \quad F(x)=C$

(B) 当 $f(x)$ 是奇函数, 则 $F(x)$ 是偶函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数, 则 $F(x)$ 是周期函数 $(\sin x)' = \cos x \quad (x + \sin x)' = 1 + \cos x$

(D) 当 $f(x)$ 是无界函数, 则 $F(x)$ 是无界函数 $F(x) = \sin \frac{1}{x}$

拆限. 换元

(B) $f(-x) = -f(x) \quad F(x) = \int_a^x f(t) \, dt + C$

$$F(-x) = \int_a^{-x} f(-t) \, d(-t) + C = \int_a^x f(t) \, dt + C = F(x) + \int_a^x f(t) \, dt$$

§ 6.4 广义积分

1. 无穷区间上的广义积分

$\varphi(x) = \int_a^x f(t) \, dt \in C(a, +\infty) \leftarrow$ 定义: 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的任何有限子区间上都可积, 称极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) \, dt$ 为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的广义积分, 若此极限存在, 则称此广义积分收敛或存在; 否则, 称此广义积分发散或不存在. 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) \, dt =$

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(x) \, dx \right)$$

若 $F(x) = \int_a^x f(x) \, dx$ 且 $f(x)$ 连续, 则

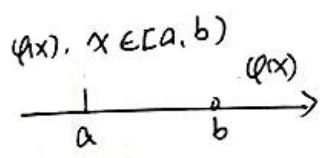
$$\begin{aligned}
 \int_a^{+\infty} f(x) \, dx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(a)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a) \\
 &= F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty}
 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b$$

例: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$

解: 原式 = $\arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

注意: 两个不同变限函数
趋向不同, 有一个函数极
限不存在则其极限和
差均不存在, 当且仅当
两个函数极限都存在,
则极限存在.



例2: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$
 解: 原式 = $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$
 = $\arctan x \Big|_{-\infty}^0 + \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \pi$

注: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$

例3: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)} dx \quad (0 < \beta < 1)$

解: 原式 = $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)} dx$
 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)} dx \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^0 \frac{t^\beta}{(t^2+1)(t^\beta+1)} \cdot (-\frac{1}{t^2}) dt = \int_0^1 \frac{t^\beta}{(t^2+1)(t^\beta+1)} dt$
 \therefore 原式 = $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt \in C[a, b], \lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = \varphi(b) = \int_a^b f(t) dt$

考虑: $\varphi(x)$ 在 b 点不连续, $\varphi(x)$ 在 $\dot{U}(b)$, 但 $\varphi(b)$ 不 \exists , 则 $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x)$ 可能 \exists 可能不 \exists

2. 瑕积分 $\varphi(x) \in C[a, b) \quad \psi(x) = \int_x^b f(t) dt \in C(a, b]$

定义2: 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 的任何闭子区间上可积, $f(x)$ 在 b 点的左邻域内无界, 称

$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ 为瑕积分, 称 $x=b$ 为瑕点.

$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt \quad x=a$

若此极限存在, 则称此瑕积分收敛或存在, 否则称其发散或不 \exists .

记为 $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$ 若 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ 且 $f(x)$ 连续则 $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b^-}$

$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx \quad (\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b)$

例1: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

解: 原式 = $\arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$

例2: $\int_1^+ \frac{1}{x} dx$

解: 原式 = $\ln|x| \Big|_1^+ = 0 (X)$

原式 = $\int_1^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^+ \frac{1}{x} dx$

$\int_1^0 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^0 = -\infty$ 不 $\exists \quad \int_0^+ \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_0^+ = +\infty$ 不 \exists

$\therefore \int_1^+ \frac{1}{x} dx$ 不 \exists

注: 瑕点 $c \in (a, b), \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ 且左端两个瑕积分都存在 \Rightarrow 左端积分 \exists

3. 定积分求极限

$$\text{公式: } \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n}$$

利用此公式求“无穷和”“无穷积”的数列极限

$$\text{例1: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

$$\text{解原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

$$\text{例2: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} [\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)]} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)]} \\ &= e^{\int_0^1 \ln(1+x) dx} = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e} \end{aligned}$$

例3: 设 $f(x) \in C[0,1]$ 且 $f(x) > 0$

证明: $\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx$

$$\text{证: } \ln \int_0^1 f(x) dx = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{n} [f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)]$$

$$\int_0^1 \ln f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln f\left(\frac{1}{n}\right) + \ln f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \ln f\left(\frac{n}{n}\right)]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \dots f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

由均值不等式得 $\ln \frac{1}{n} [f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)] \geq \ln \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \dots f\left(\frac{n}{n}\right)}$

由极限的保序性得 $\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx$

§ 6.5 定积分的应用

1. 微元法

设 S 满足: ① S 具有可加性 ② \exists 闭区间 $[a, b]$ 与 S 对应 ③ $\forall x \in [a, b]$ 点区间 $[x, x+dx]$ 所对应的 S 的分量(微元) ds 等于 $f(x)$ 在点区间 $[x, x+dx]$ 上的值 $f(x)$ 乘以点区间的长度 dx : $ds = f(x) dx$ 则 $S = \int_a^b f(x) dx$

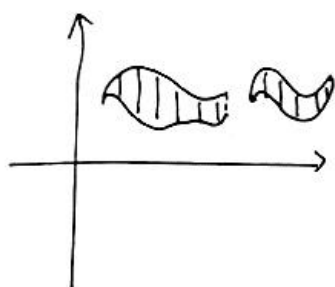
2. 求平面图形面积

① 均值不等式:

$$x_i > 0, i = \overline{1, n}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$\text{② } x_n \geq y_n \Rightarrow \lim x_n \geq \lim y_n$$



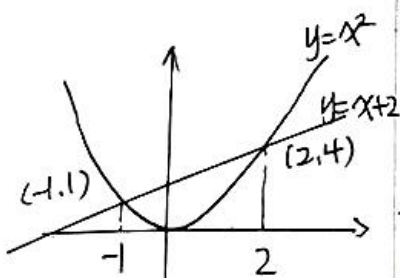
(1) 函数曲线所围图形面积

(a) X-型域S的面积

$$S: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad \text{X-型域} \quad S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

(b) Y-型域S的面积

$$S: \begin{cases} a \leq y \leq b \\ g(y) \leq x \leq f(y) \end{cases} \quad \text{Y-型域} \quad S = \int_a^b [f(y) - g(y)] dy$$



例1: 求由曲线 $y=x^2$, $y=x+2$ 所围图形面积

解 $S = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \frac{9}{2}$

例2: 求由直线 $y=x$, $y=2x$, $x+y=1$, $x+y=2$ 所围图形面积

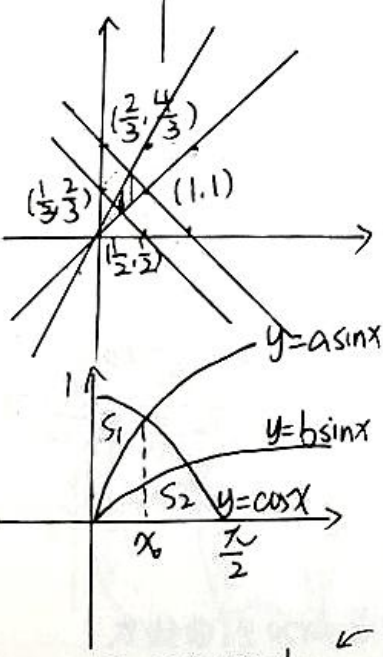
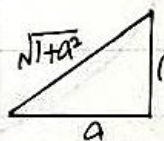
解 $S = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [2x - (1-x)] dx + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} (2x - x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2-x-x) dx = \frac{1}{4}$

例3: 由曲线 $y=\cos x$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 间部分与两坐标轴所围图形面积被曲线

$y=a \sin x$, $y=b \sin x$ ($a > b > 0$) 分成三等分, 求 a, b

解 $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$ $S_1 = \frac{1}{3}$ $a \sin x_0 = \cos x_0$ $\tan x_0 = \frac{1}{a}$

$S_1 = \int_0^{x_0} (\cos x - a \sin x) dx = (\sin x + a \cos x) \Big|_0^{x_0} = \sin x_0 + a \cos x_0 - a$
 $= \sqrt{1+a^2} - a = \frac{1}{3}$ $\sqrt{1+a^2} + a = 3$ $\therefore a = \frac{4}{3}$ 类似地 $b = \frac{5}{2}$



(2) 极坐标曲线所围图形面积

扇形域 $S: \begin{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta \\ g(\theta) \leq r \leq f(\theta) \end{cases}$

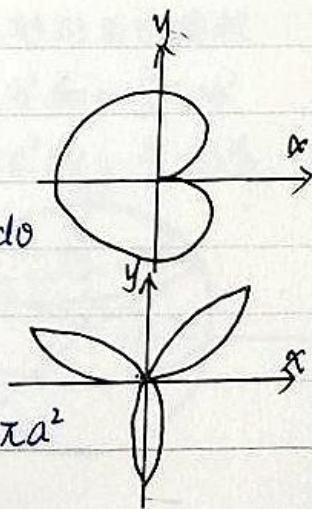
由微元法, 有 $S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)^2 - g(\theta)^2] d\theta$

例1: 求心脏线 $r=a(1-\cos \theta)$ 所围图形的面积

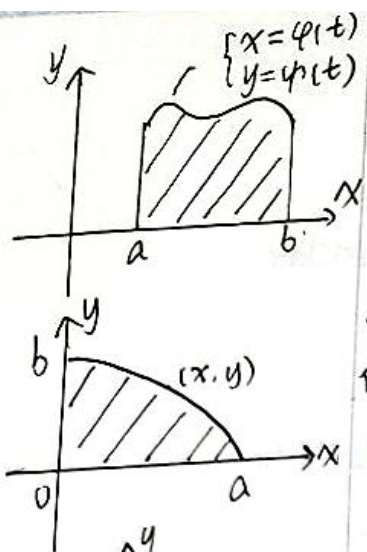
解 $S = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1-\cos \theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos^2 \theta - 2\cos \theta) d\theta$
 $= a^2 \int_0^{\pi} (1 + \frac{1+\cos 2\theta}{2} - 2\cos \theta) d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2$

例2: 求曲线 $r=a \sin 3\theta$ ($a > 0$) 所围图形面积

解 $S = 6 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} a^2 \sin^2 3\theta d\theta = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \pi a^2$



$S: \begin{cases} a \leq r \leq b \\ g(r) \leq \theta \leq f(r) \end{cases}$



(3) 参数曲线所围图形面积

由一条参数曲线所围曲边梯形 $S: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq y(x) \end{cases}$ 的面积,

$S = \int_a^b y(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} y(t) d\varphi(t)$ 其中 $y(x)$ 为参数曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

例1: 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形的面积

解: $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin \theta d(a \cos \theta) = \pi ab$

例2: 求曲线 $\begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 及直线 $x=a (y \leq 0)$

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{y't}{x't} = \tan t$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y't)'}{x't} = \frac{1}{a t \cos^3 t}$

$y' = 0 \Rightarrow t = 0, \pi, 2\pi$ $y'' \neq 0 \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
 $t=0 (a, 0)$ $t = \frac{\pi}{2} (\frac{\pi}{2}a, a)$ $t = \pi (-a, \pi a)$ $t = \frac{3\pi}{2} (-\frac{3}{2}\pi a, -a)$
 $t = 2\pi (a, -2\pi a)$

如图 $S = S_1 + S_2$ $S_2 = \frac{1}{2} a \cdot 2\pi a = \pi a^2$
 $S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} a^2 (1+t^2) \frac{t^2}{1+t^2} dt$ $d\theta = \frac{d}{dt} dt = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y' dx - x' dy}{x^2} = \frac{t^2}{1+t^2} dt$
 $\therefore S = S_1 + S_2 = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 + \pi a^2$

3. 平面曲线的弧长

(1) 函数曲线 $y=f(x)$, 弧微分 $ds = \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$, 要求 $dx > 0$ 则曲线长

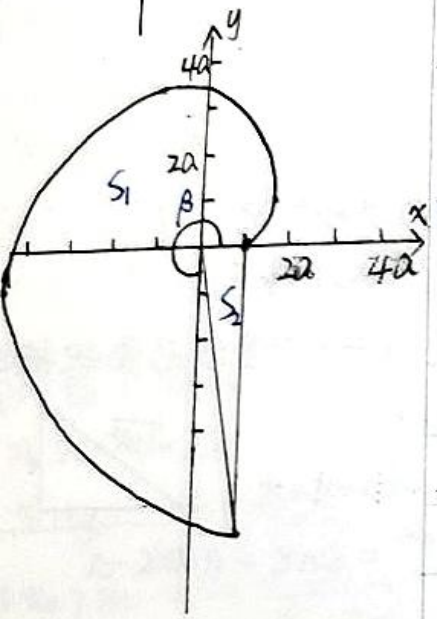
$S = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$

(2) 参数曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$, $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$, $dt > 0$, 则

$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$

(3) 极坐标曲线 $r=r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, 则 $ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'(\theta)^2} d\theta$, $d\theta > 0$, 则

$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'(\theta)^2} d\theta$



例1: 半径为R的圆的周长

解如图, $x^2 + y^2 = R^2$, $\begin{cases} x = R \cos \theta, & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = R \sin \theta \end{cases}$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{x_\theta^2 + y_\theta^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2} d\theta = 2\pi R$$

例2: 求 $r = a(1 - \cos \theta)$ 的长度, ($a > 0$)

$$\begin{aligned} \text{解: } S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1 - \cos \theta)]^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 4a (-\cos \frac{\theta}{2}) \Big|_0^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

4. 横截面已知的空间体体积

例1: 设有正相圆柱体, 底面座落在 xOy 平面上, 其方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, 用过 Ox 轴且与 xOy 平面成 30° 的平面去截此柱体得到一弓形体, 求该弓形体体积

$$\begin{aligned} \text{解: 如图 } V &= 2 \int_0^a \frac{1}{2} y \cdot y \tan \frac{\pi}{6} dx = \int_0^a \frac{\sqrt{3}}{3} y^2 dx = \int_0^a \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \frac{x^2}{a^2}) b^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3} ab^2 \end{aligned}$$

5. 旋转体的体积

由曲边梯形 $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体体积

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} a \leq y \leq b \\ 0 \leq x \leq g(y) \end{cases} \quad V = \int_a^b \pi g(y)^2 dy$$

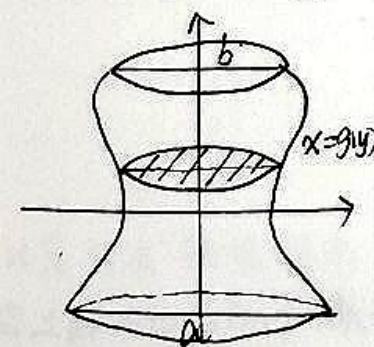
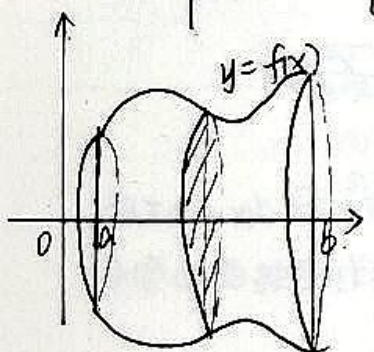
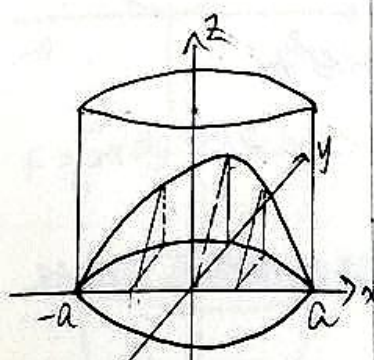
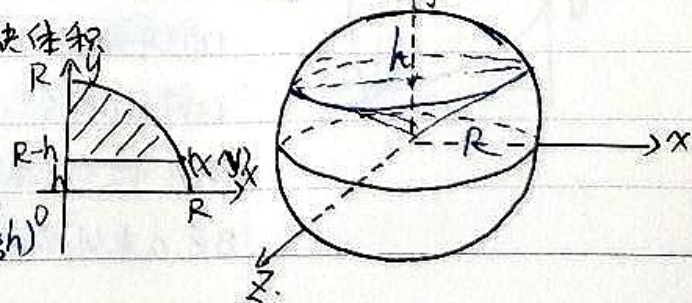
例1: 求由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形分别绕两个坐标轴旋转形成的体积

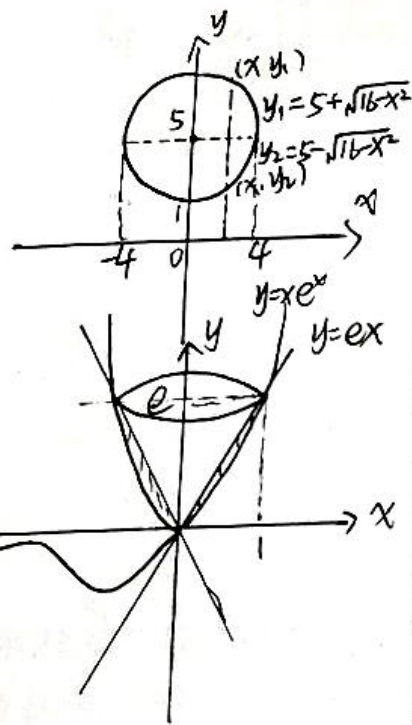
$$\text{解 } \textcircled{1} \text{ 绕 } x \text{ 轴旋转 } V = 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 2 \int_0^a \pi (1 - \frac{x^2}{a^2}) b^2 dx = \frac{4}{3} \pi ab^2$$

$$\textcircled{2} \text{ 绕 } y \text{ 轴旋转 } V = 2 \int_0^b \pi x^2 dy = 2 \int_0^b \pi (1 - \frac{y^2}{b^2}) a^2 dy = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

例2: 求半径为R, 高为h的球缺体积

$$\begin{aligned} \text{解: 如图, } V &= \int_{R-h}^R \pi x^2 dy \\ &= \int_{R-h}^R \pi (R^2 - y^2) dy \\ &= \pi (R^2 y - \frac{1}{3} y^3) \Big|_{R-h}^R = \pi h^2 (R - \frac{1}{3} h) \end{aligned}$$





例3: 求由曲线 $x^2 + (y-5)^2 = 16$ 所围成图形绕 x 轴旋转形成的体积

解: 如图. $V = 2 \left[\int_0^4 \pi y_1^2 dx - \int_0^4 \pi y_2^2 dx \right]$

$$= 2 \int_0^4 \pi 20 \sqrt{16-x^2} dx = 40\pi \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx = 40\pi \times \frac{1}{4} \pi 4^2 = 160\pi^2$$

$$\underline{x=4\sin t} \quad 40\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16-16\sin^2 t} d(4\sin t)$$

例4: 求由曲线 $y = xe^x$ 直线 $y = ex$ 所围图形绕 y 轴旋转形成的体积

解: 如图 $xe^x = ex \Rightarrow x=0, 1$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 e = \frac{\pi}{3} e$$

$$V_2 = \int_0^e \pi x^2 dy = \int_0^e \pi x^2 d(xe^x) = \int_0^e \pi x^2 (x+1) e^x dx$$

$$= \int_0^1 \pi (x^3 + x^2) de^x = \pi (4 - e)$$

6. 旋转体的侧面积

曲边梯形 $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周形成的旋转体侧面积

$$S = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1+y'^2} dx$$

例1: 半径为 R 的球面面积

解: $S = 2 \int_0^R 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = 2 \int_0^R 2\pi \sqrt{R^2-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}} dx$

$$= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2} dx = 4\pi R^2$$

球冠的表面积: $S = \int_{R-h}^R 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_{R-h}^R \sqrt{R^2} dx = 2\pi rh$

例2: 求曲线 $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ 绕 x 轴旋转形成的旋转曲面面积

解: $S = \int_0^1 2\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+(\frac{1}{2\sqrt{x}})^2} dx = \frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$

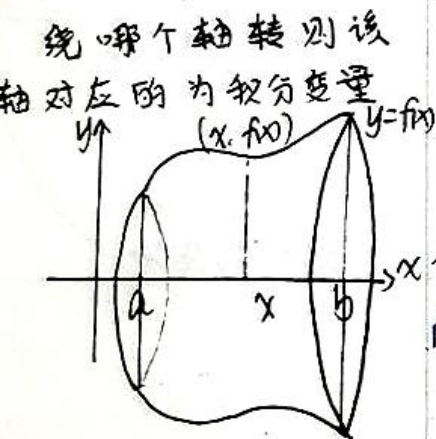
7. 定积分在物理方面的应用

(1) 质点间引力: $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$

(2) (平面) 小薄片: $F = \rho_{\text{水}} g h S = g h S$

(3) $W = FS$

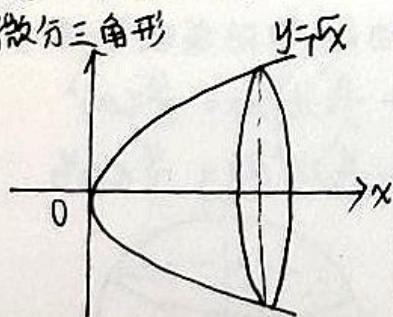
例: 设有一条长 l 米质量为 M 千克的均匀细杆 AB , 在 AB 的延长线上距 B 点 a 米处有一个质量为 m 千克的质点, 求细杆 AB 对质点 m 的引力 F .



$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

微分三角形



(3) 力系数 $k > 0$

解: $F \leftrightarrow [-l, 0] \forall x \in [-l, 0], [x, x+dx]$

$$F = \int_{-l}^0 k \frac{M}{l} dx \cdot m \frac{l}{(a-x)^2} = \frac{kMm}{l} \frac{1}{a-x} \Big|_{-l}^0 = \frac{kMm}{a(a+l)}$$

$$\int_a^{a+l} F_x = \frac{kMm}{x(x+l)}$$

例2: 设水库有一抛物线型的闸门(如图), 闸门的上沿宽 $2a$ 米, 高为 h 米, 让水库蓄满水, 求此闸门所承受的水压力 F ($\rho_k = 1$)

解如图, $y = bx^2, x = a, y = h$ 代入 $\Rightarrow b = \frac{h}{a^2} \therefore y = \frac{h}{a^2}x^2$

$$F = \int_0^h 2g(h-y) \sqrt{\frac{a^2 y}{h}} dy = \frac{8}{15} agh^2$$

例3: 设有一个半径为 R 的半球形面(如图), 盛满水, 将此容器中水全部抽出所做的功. ($\rho_k = 1$)

解: 如图所示, 由微元法, 有 $W = \int_{-R}^0 \pi x^2 dy \rho_k g (0-y) = \pi g \int_{-R}^0 x^2 (-y) dy$
 $= \pi g \int_{-R}^0 (R^2 - y^2)(-y) dy = \frac{\pi}{4} g R^4$

第七章 微分方程

§ 7.1 基本概念

(1) 常微分方程: 含有未知函数导数或微分的等式

(2) 微分方程的阶: 方程中未知函数的最高阶数

(3) 微分方程的解:

(4) 通解

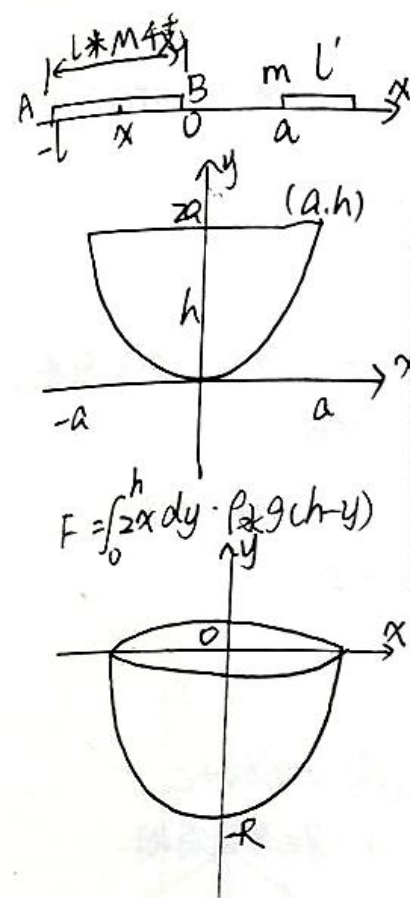
(5) 奇解: 不包含在通解中的解

(6) 定解条件(初始条件) n 阶方程满足的 n 个条件: $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_1, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{n-1}$ 称为定解条件

(7) 特解: 通解中通过定解条件得到的解

(8) 解的存在性、唯一性、稳定性

"计算方法" 数值解法



§7.2. 一阶微分方程

1. 可分离变量方程:

称 $y' = p(x)q(y)$ ($p(x)$ 是关于 x 的已知函数, $q(y)$ 是关于 y 的已知函数) 为可分离变量方程

解法: 可分离变量法

$$\frac{dy}{dx} = p(x)q(y) \quad \frac{dy}{q(y)} = p(x)dx \quad (q(y) \neq 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx + C \quad (\text{这里 } \int \frac{dy}{q(y)}, \int p(x)dx \text{ 都只表示一个原函数})$$

方程的通解

例1: 求方程 $yy' + x = 0$ 满足条件 $y|x=0=0$ 的特解

$$\text{解: } y \cdot \frac{dy}{dx} + x = 0 \Rightarrow y dy = -x dx \Rightarrow \int y dy = \int -x dx + C$$

$$\Rightarrow \text{通解为 } \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{代入 } y|x=0=0 \text{ 得 } C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{特解为 } x^2 + y^2 = 1$$

例2: 求解方程 $yy' = \sqrt{1-y^2}$

$$\text{解: } y \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \quad (y \neq \pm 1) \Rightarrow \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int dx + C$$

$$-\sqrt{1-y^2} = x + C \Rightarrow (x+C)^2 + y^2 = 1 \quad (x+C \leq 0) \quad y = \pm 1 \text{ 是奇解}$$

2. 方程的变量代换

已知

(1) 齐次方程 $y' = f(\frac{y}{x})$, $f(\frac{y}{x})$ - 齐次函数

$$\text{解法: 令 } \frac{y}{x} = u, \Rightarrow y = ux, \Rightarrow y' = u + xu' = f(u)$$

$$\Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = f(u) \quad \frac{du}{f(u)-u} = \frac{1}{x} dx$$

例1: 解方程 $\frac{x+y}{x-y} = y'$

$$\text{解: 令 } \frac{y}{x} = u, \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + xu' = \frac{1+u}{1-u}$$

$$\begin{cases} xu' = \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \arctan u - \frac{1}{2} \ln|u^2+1| = \ln|x| + C \\ \int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{1}{x} dx + C \end{cases}$$

$$\text{通解} \leftarrow \text{即 } \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{y^2}{x^2}) = \ln|x| + C$$

例2: 求与曲线族 $x^2 + y^2 = 2cx$, 正交的曲线族

$$\text{解: } (\frac{x^2+y^2}{x})' = (2c)'_x \Rightarrow y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

设两簇曲线的交点为 (x, y) , 所求曲线簇在点 (x, y) 处满足 $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$
 令 $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow u + xu' = \frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow xu' = \frac{u+u^3}{1-u^2}$
 $\int \frac{u+u^3}{u+u^3} du = \int \frac{1}{x} dx + c' \Rightarrow \int (\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}) du = \ln|x| + c' \Rightarrow$

$$\ln|u| - \ln(1+u^2) = \ln|x| + c' \Rightarrow \ln \frac{|u|}{1+u^2} = \ln|x| + c'$$

$$\Rightarrow \frac{u}{1+u^2} = x \cdot (\pm e^{c'}) = x \cdot C_1 \quad (C_1 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = C_1 x \Rightarrow \frac{xy}{x^2+y^2} = C_1 x \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{C_1} y = C_2 y$$

(2) 线性分式方程: $y' = f\left(\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}\right)$

① 当 $C_1 = C_2$, 为齐次方程

② 当 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda$, $y' = f\left(\frac{\lambda(A_2x+B_2y)+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}\right) \xrightarrow{u=\frac{A_2x+B_2y}{u+C_2}} f\left(\frac{\lambda u+C_1}{u+C_2}\right) \quad u' = A_2+B_2y'$

$\Rightarrow \frac{u'-A_2}{B_2} = f\left(\frac{\lambda u+C_1}{u+C_2}\right)$ - 可分离变量

例1: $y' = \frac{x-y+1}{x-y}$

解: 令 $u = x-y \Rightarrow u' = 1-y' \Rightarrow y' = 1-u' = \frac{u+1}{u} = 1+\frac{1}{u} \Rightarrow -u' = \frac{1}{u}$

$\Rightarrow \int u du = \int (-1) dx + c \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = -x + c \Rightarrow \frac{1}{2}(x-y)^2 = -x + c$ - 通解

③ 当 $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, 令 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$

令 $\begin{cases} x = X+x_0 \\ y = Y+y_0 \end{cases} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(Y+y_0)}{d(X+x_0)} = \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{A_1X+B_1Y}{A_2X+B_2Y}\right)$
 令 $u = \frac{Y}{X}$

例2: 解方程 $y' = \frac{y+2}{x+y-1}$

解: 令 $\begin{cases} y+2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases} \quad \text{令 } \begin{cases} x=X+3 \\ y=Y-2 \end{cases} \quad \text{则原方程变为 } \frac{dY}{dX} = \frac{Y}{X+Y} = \frac{\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$

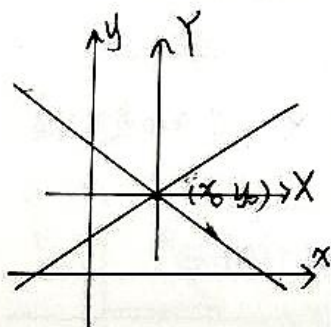
令 $u = \frac{Y}{X} \Rightarrow Y = uX \quad \frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX} = \frac{u}{1+u} \Rightarrow X \frac{du}{dX} = \frac{u}{1+u} - u = \frac{-u^2}{1+u}$

$\therefore \int \frac{1+u}{u^2} du = \int \frac{1}{X} dx + c' \Rightarrow -\frac{1}{u} + \ln|u| = -\ln|X| + c'$

$\therefore \ln|u| + \ln|X| = \frac{1}{u} + c' \Rightarrow |uX| = e^{\frac{1}{u}} \cdot e^{c'} \Rightarrow uX = e^{\frac{1}{u}} \cdot (\pm e^{c'})$

$\Rightarrow Y = e^{\frac{1}{X}} \cdot C \quad (C \neq 0) \Rightarrow y+2 = e^{\frac{x-3}{y+2}} \cdot C \quad (C \neq 0)$

$\therefore y = -2$ 是方程的解, 通解为 $y+2 = e^{\frac{x-3}{y+2}} \cdot C$, C 为任意常数



$$y' = (x+y)^2 \quad \text{令 } u=x+y \Rightarrow u' = 1+y' = 1+u^2 \Rightarrow u' - 1 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1+u^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+u^2} du = \int dx + c' \Rightarrow \arctan u = x + c'$$

$$\Rightarrow \arctan(x+y) = x + c'$$

3. 一阶线性微分方程

定义: 称 $y' = p(x)y + q(x)$ 为一阶线性微分方程, 其中 $p(x), q(x)$ 为 x 的已知函数。称 $q(x)$ 为方程的非齐次项, 自由项。若 $q(x) \equiv 0$ (\equiv) 称此方程为一阶线性非齐次(齐次)微分方程。

(1) 齐次方程通解公式

$$y' = p(x)y \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int p(x) dx + c' \Rightarrow \ln|y| = \int p(x) dx + c'$$

$$|y| = e^{\int p(x) dx} \cdot e^{c'} \Rightarrow y = e^{\int p(x) dx} \cdot (\pm e^{c'}) = C \cdot e^{\int p(x) dx} \quad (C \neq 0)$$

此处仅需求出 $p(x)$ 的一个原函数

$$\therefore y=0 \text{ 也是方程解 } \therefore y = C \cdot e^{\int p(x) dx}, C \text{ 为任意常数}$$

例: 解方程 $xy' = y$

$$\text{解: } y' = \frac{1}{x}y \Rightarrow y = C e^{\int \frac{1}{x} dx} = C e^{\ln|x|} = C|x| \quad X \text{ 在 } x=0 \text{ 点不可导}$$

$$\text{故 } = C e^{\ln x} = Cx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c' \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c' = \ln|y| = \ln|x| \cdot e^{c'} \Rightarrow y = x(\pm e^{c'}) = Cx$$

注: 在通解公式中, $e^{\int p(x) dx} = e^{\ln|f(x)|}$, $f(x)$ 不打绝对值

(2) 非齐次的通解公式 $y' = p(x)y + q(x)$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int p(x) dx + \int \frac{q(x)}{y} dx + c'$$

$$\ln|y| = \int p(x) dx + \int \frac{q(x)}{y} dx + c'$$

$$y = e^{\int p(x) dx} \left[e^{\int \frac{q(x)}{y} dx} \cdot C \right] = \boxed{u} \cdot e^{\int p(x) dx}$$

解法: 常数变易法 令 $y = u \cdot e^{\int p(x) dx}$, $u = u(x)$

$$y' = u' \cdot e^{\int p(x) dx} + u \cdot e^{\int p(x) dx} \cdot p(x) = p(x)u \cdot e^{\int p(x) dx} + q(x)$$

$$u' = e^{-\int p(x) dx} \cdot q(x) \Rightarrow u = \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + C$$

$$\therefore y = (C + \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx) e^{\int p(x) dx} \quad \text{— 通解公式}$$

$$= y_1 + y_2$$

$$y_1 = C e^{\int p(x) dx} \quad \text{齐次通解}$$

$$y_2 = \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx e^{\int p(x) dx} \quad \text{非齐次特解}$$

类比线代 ←

一阶线性微分方程的通解公式

例1: 求 $xy' = y + x^2e^x$ 满足 $y|_{x=1} = 0$ 的解

解: $y' = \frac{1}{x}y + xe^x$

$$y = (c + \int xe^x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx) e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

$$= (c + \int xe^x \frac{1}{x} dx) x = (c + e^x) x$$

将 $x=1, y=0$ 代入得 $c = -e$ 即 $y = (e^x - e)x$

例2: 解方程 $(x - y^2e^y)y' = y$

解: $x - y^2e^y = y \frac{dx}{dy} = x' \cdot y \Rightarrow x' = \frac{1}{y}x - ye^y$ $p(y) = \frac{1}{y}$ $q(y) = -ye^y$

$$x = (c + \int -ye^y e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy) e^{\int \frac{1}{y} dy}$$

$$= (c - e^y) y$$

$$y' = p(x)y + y^\lambda q(x) \quad (\lambda \neq 0, 1)$$

例1: 一个儿童用一米长的竹杆拉一个玩具。起始时, 儿童在 $(0, 0)$ 处, 玩具在 $(1, 0)$ 处, 现在儿童以匀速 v 沿 y 轴正向行走, 问玩具所运行的轨迹如何?

解: 如图设 $t=0$ 为初始状态, 经过时间 t , 儿童运行到 $(0, vt)$ 处, 玩具在 (x, y) 处, 有 $(y - vt)^2 + x^2 = 1$ ①

过 x, y 点切线 $Y - y = y'(X - x)$ 代入 $(0, vt)$ 得 $vt - y = y'(x)$ ② $\sin x = vt$

② 代入①中有 $y^2 x^2 + x^2 = 1$ 且 $y|_{x=1} = 0 \Rightarrow y' = -\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} \quad (0 < x \leq 1)$ $y = \int -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$

4. 贝努利方程: $y' = p(x)y + y^\lambda q(x) \quad (\lambda \neq 0, 1)$ 代入 $t = \arcsin x$ $y|_{x=1} = 0 \Rightarrow C = 0$

$$y^{-\lambda} y' = y^{-\lambda} p(x)y + q(x) = y^{1-\lambda} p(x) + q(x) \quad \text{令 } y^{1-\lambda} = u \Rightarrow (1-\lambda)y^{-\lambda} y' = u'$$

$$\Rightarrow \frac{u'}{1-\lambda} = p(x)u + q(x) \Rightarrow u' = (1-\lambda)p(x)u + (1-\lambda)q(x)$$

通解公式一

$$\therefore y^{1-\lambda} = u = (c + \int (1-\lambda)q(x) e^{-\int (1-\lambda)p(x) dx} dx) e^{\int (1-\lambda)p(x) dx}$$

例3: 解方程: $xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$ $p(x) = \frac{4}{x}$ $q(x) = x$ $\lambda = \frac{1}{2}$

解: $y^{\frac{1}{2}} = (c + \int \frac{1}{2}x e^{\int \frac{4}{x} dx} dx) e^{\int \frac{1}{2} \frac{4}{x} dx}$

$$= (c + \int \frac{1}{2}x \cdot e^{2\ln x} dx) \cdot x^2$$

$$= (c + \frac{1}{2} \ln|x|) x^2$$

$$yx' = 4x + y^{\frac{1}{2}}x \quad x' = \frac{4}{y}x + y^{\frac{1}{2}}x \quad p(y) = \frac{4}{y} \quad q(y) = y \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

不适合分离变量

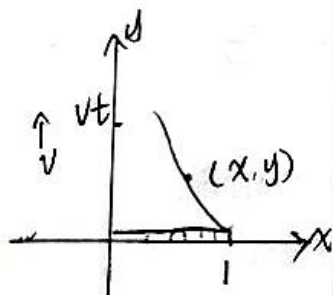
也不是典型

可尝试将 x 看作函数

y 看作自变量

或者换元转化

方程的应用
见反面



§7.3. 三种可降阶的高阶方程

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型方程 $y^{(3)} = x$

$$y = \underbrace{\int \int \dots \int}_n f(x) (dx)^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_{n-2} x^{n-2} + \dots + C_1 x + C_0$$

2. $F(x, y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$ 型方程

解法: 令 $y^{(n)} = u$, $y^{(n-1)} = u'$, 则方程变为 $F(x, u, u') = 0$

若此方程可解, 则原方程可解

例1: 求方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 满足 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3$ 的解

解: 设 $u = y'$, $u' = y''$, 原方程变为 $(1+x^2)u' = 2xu \Rightarrow u' = \frac{2x}{1+x^2}u$

$$u = C e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = C(1+x^2) \quad \text{代入 } u|_{x=0} = 3 \text{ 得 } C = 3$$

$$\therefore y' = u = 3(1+x^2) \quad \therefore y = x^3 + 3x + C' \quad \text{代入 } y|_{x=0} = 1 \text{ 得 } C' = 1$$

$$\therefore y = x^3 + 3x + 1$$

3. $F(y, y', y'') = 0$ 型方程

$$\text{设 } y' = u, u = u(y), y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$$

$$\text{方程变为 } F(y, u, u \frac{du}{dy}) = 0$$

例2: 求方程 $yy'' = 1 + (y')^2$ 满足 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$ 的解.

解: 设 $u = y'$, $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$, 原方程变为

$$y \cdot u \cdot \frac{du}{dy} = 1 + u^2 \Rightarrow \int \frac{u}{1+u^2} du = \int \frac{1}{y} dy + C' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|y| + C' \Rightarrow \sqrt{1+u^2} = |y| \cdot e^{C'} = y \cdot (\pm e^{C'})$$

$$\sqrt{1+u^2} = y \cdot C'' \quad \text{代入 } u|_{y=1} = 0 \text{ 得 } C'' = 1$$

$$\therefore \sqrt{1+u^2} = y \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = y \Rightarrow y' = \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} dy = \int \pm dx + C \Rightarrow \ln|y + \sqrt{y^2 - 1}| = \pm x + C$$

$$\Rightarrow |y + \sqrt{y^2 - 1}| = e^{\pm x} \cdot e^C \Rightarrow y + \sqrt{y^2 - 1} = e^{\pm x} \cdot C_0 \quad \text{代入 } y|_{x=0} = 1 \text{ 得 } C_0 = 1$$

$$\therefore y + \sqrt{y^2 - 1} = e^{\pm x} \quad y - \sqrt{y^2 - 1} = e^{\mp x} \quad (\text{分子有理化})$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

例2: 飞机着陆时, 为减少滑行距离, 立即打开机尾减速伞. 经测试, 此伞

形成的阻力大小与滑行速度成正比, 比例系数 $K = 6 \times 10^6$ 。今有一架重 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700km/h 。若不计算飞机与地面摩擦力, 求飞机最长滑行多少米?

解: 由牛顿第二定律: t -时间 s -滑行距离, $t=0$ 为初始状态

$$9000 \frac{d^2s}{dt^2} = -6 \times 10^6 \frac{ds}{dt} \quad \text{且 } s|_{t=0} = 0, v = \frac{ds}{dt} \quad v|_{t=0} = 700$$

令 $v = \frac{ds}{dt}$, 则方程变为 $9000 \frac{dv}{dt} = -6 \times 10^6 v$ 且 $v|_{t=0} = 700$

$$v = C \cdot e^{\int \frac{-6 \times 10^6}{9000} dt} = C e^{-\frac{2000}{3}t} \quad \text{将 } v|_{t=0} = 700 \text{ 代入 } C = 700$$

$$\therefore v = 700 \cdot e^{-\frac{2000}{3}t} \Rightarrow s = \int v dt = \int 700 e^{-\frac{2000}{3}t} dt = -\frac{21}{20} e^{-\frac{2000}{3}t} + C'$$

$$\text{将 } s|_{t=0} = 0 \text{ 代入得 } C' = \frac{21}{20} \quad \therefore s = \frac{21}{20} - \frac{21}{20} e^{-\frac{2000}{3}t}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s = \frac{21}{20} = 1.05 \text{ (公里)}$$

例3: 有一个装有进出两个水嘴的圆柱形容器, 盛有 50% 浓度的酒精水溶液 bL 。现同时打开两个水嘴, 它们的速度均为 aL/min , 而进水嘴流进 10% 浓度的酒精水溶液。问经过多长时间, 容器中酒精水溶液浓度变为 20% ?

解: t -时间 $y(t)$ - t 时刻容器中的浓度, 给 t 一个增量 Δt

$$\Delta y = \frac{[y(t)b + a\Delta t \cdot 10\% - y(t)a\Delta t]}{b} - y(t)$$

$$\therefore \Delta y = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{10} \Delta t - \frac{a}{b} y(t) \Delta t$$

$$\Rightarrow y' = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{10} - \frac{a}{b} y(t) \quad \text{且 } y|_{t=0} = 50\%$$

$$y = a4 e^{-\frac{a}{b}t} + 0.1 = 0.2 \Rightarrow t = \frac{b}{a} \ln 4$$

§ 7.4 n 阶线性微分方程及其通解的结构

一. n 阶线性微分方程

$$\text{型如: } y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

称(1)为 n 阶线性微分方程。当 $f(x) = 0$ 时, 称(1)为 n 阶线性齐次方程,

当 $f(x) \neq 0$ 时, 称(1)为 n 阶线性非齐次微分方程。令 $L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$

$$L(y) = f(x) \quad (1)$$

$$L(y) = 0 \quad (2)$$