高等数学（下册）易遗忘知识点

xyfJASON

1. 解的结构理论中，

$$y_1, y_2\text{线性相关} \iff \frac{y_2}{y_1} \equiv \text{const} \iff \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \equiv 0 \iff y_1 y_2' - y_2 y_1' \equiv 0$$

2. 证明 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微的方法：证明

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

3. 可用<u>极坐标法</u>计算二重极限或证明二重极限不存在。

4. 设空间曲线 L 由参数方程：$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$ 给出，L 上一点 $P(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ 的切向量为：

$$\{\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t)\}$$

5. 设空间曲线 L 由方程组：$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 给出，L 上一点 $P(x, y, z)$ 的切向量为：

$$\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}$$

（注：用两平面法向量叉积可以较为容易地推出来）

6. 设平面 Σ 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 给出，Σ 上一点 $P(x, y, z)$ 处的法向量为：

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\}$$

要求：$F(x, y, z,)$ 在 P 点可微！

7. 方向导数：

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = f_x' \cos\alpha + f_y' \cos\beta$$

8. 函数 $z = f(x, y)$ 在 P 点的梯度 $\text{grad}\, z = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\}$ 恰好是等值线 $f(x, y) = C$ 在 P 点的法向量 $\vec{n}$ ；

   函数 $u = f(x, y, z)$ 在 P 点的梯度 $\text{grad}\, u = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$ 恰好是等值面 $f(x, y, z) = C$ 在 P 点的法向量 $\vec{n}$。

9. **Hessian** 矩阵正定 $\iff$ 极小值；

   Hessian 矩阵负定 $\iff$ 极大值；

   Hessian 矩阵不定 $\iff$ 非极值；

Hessian 矩阵半正定、半负定 $\Longleftrightarrow$ 不确定。

10. 任何两个定积分相乘都能写作一个二重积分。
11. 球坐标中典型小块体积 $\mathrm{d}V=\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$。
12. 求质心坐标即以坐标为权重对质量求平均。例如：$\overline{x}=\frac{\iiint x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint \rho(x,y,z)\mathrm{d}V}$.
13. 梯度：$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$；

    散度：$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$；

    旋度：$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$.
14. 证明某极限趋近于零，可以通过证明以该式为通项的无穷级数收敛来证明。
15. 幂级数与求导、积分级数的收敛域不同，不能用后者的收敛域判断幂级数的收敛域，应该用公式或比值审敛法把幂级数的收敛域求出来。
16. 将函数展开为傅立叶级数后，记得写“由于 $f(x)$ 满足狄利克雷条件，故 $S(x)=\cdots$”。