Calculus IB Exercises - 多元函数微分学

硝基苯

1

求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

法一：极坐标

> 出现 xy，x^2-y^2 或 x^2+y^2 时考虑极坐标代换

引入极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

有

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\\
&= (r\cos\theta)(r\sin\theta)\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1}\\
&= \frac{1}{2}r^2\sin2\theta\cos2\theta\\
&= \frac{1}{4}r^2\sin4\theta
\end{aligned}
$$

$$\therefore -\frac{1}{4}r^2 \le f(x,y) \le \frac{1}{4}r^2$$

$$\because \lim_{r\to0}-\frac{1}{4}r^2=\lim_{r\to0}\frac{1}{4}r^2=0$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$$

法二：定义

> 定义法在下述情景使用方便
> 趋于原点，且极限为零
> 可放缩为含 x^2+y^2 的函数

令 $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
则定义域为 $D=R^2\backslash\{(0,0)\}$
故原点 $O(0,0)$ 为 D 的聚点

> 几何平均数 < 算术平均数

考虑
$x^2-y^2\le x^2+y^2$
$xy\le\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$
则

> 此处 0 为极限值

$$|f(x,y)-0|\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\sqrt{2\varepsilon}$
则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$
即 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(O,\delta)$ 时，有
$|f(x,y)-0|<\dfrac{1}{2}\delta^2=\varepsilon$ 恒成立

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$$

2

设 $z=f(x,y,z)$，$y=g(x,t)$，其中 f,g 有连续的偏导数，且 $\dfrac{\partial g}{\partial x}\ne 0$，$\dfrac{\partial f}{\partial z}\ne 1$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial t}$

法一：直接求偏导法

> 直接求偏导法保持函数结构关系，需明确自变量和因变量。

> 题中条件可视为 x,y,z 和 x,y,t 之间的关系式。根据所求偏导数，可以看作 $z=z(x,y)$，$x=x(y,t)$，即 y,t 为自变量。

将 $z=f(x,y,z)$ 两边对 y 求偏导

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_x\frac{\partial x}{\partial y}+f'_y+f'_z\frac{\partial z}{\partial y}$$

将 $y=g(x,t)$ 两边对 y 求偏导

$$1=g'_x\frac{\partial x}{\partial y}$$

代入，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f'_x+f'_yg'_x}{g'_x(1-f'_z)}$$

将 $z=f(x,y,z)$ 两边对 t 求偏导

$$\frac{\partial z}{\partial t}=f'_x\frac{\partial x}{\partial t}+f'_z\frac{\partial z}{\partial t}$$

将 $y=g(x,t)$ 两边对 t 求偏导

$$0=g'_x\frac{\partial x}{\partial t}+g'_t$$

代入，得

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{-f'_xg'_t}{g'_x(1-f'_z)}$$

法二：公式法

> 公式法只求一阶偏导数。
> 公式法也需考虑函数关系。

$$\begin{cases}F(y,t,x,z)=z-f(x,y,z)=0\\G(y,t,x,z)=y-g(x,t)=0\end{cases}$$

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}=\begin{vmatrix}F'_x & F'_z\\G'_x & G'_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-f'_x & 1-f'_z\\-g'_x & 0\end{vmatrix}=g'_x(1-f'_z)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=-\frac{1}{g'_x(1-f'_z)}\begin{vmatrix}-f'_x & -f'_y\\-g'_x & 1\end{vmatrix}=\frac{f'_x+f'_yg'_x}{g'_x(1-f'_z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,t)}=-\frac{1}{g'_x(1-f'_z)}\begin{vmatrix}-f'_x & 0\\-g'_x & -g'_t\end{vmatrix}=\frac{-f'_xg'_t}{g'_x(1-f'_z)}$$

3

设 $y=g(x,z)$，其中 z 由方程 $f(x-z,xy)=0$ 确定，g,f 有连续偏导数，求 dz/dx

> $z=z(x),\ y=y(x)$

对 x 求偏导
$\dfrac{dy}{dx}=g_x'+g_z'\dfrac{dz}{dx}$
$f_1'(1-\dfrac{dz}{dx})+f_2'(y+x\dfrac{dy}{dx})=0$

Cramer 法则即可解出 dz/dx

4

已知 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，在 $(0,1,1)$ 的某一邻域内，z 能否确定有连续偏导数的函数

> 错误解法

设 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$
则
$F(0,1,1)=0$
$F_z'(0,1,1)=-\ln y+xe^{xz}=0$

> 故 z 不能确定函数 [错误]
> 定理是充分条件不是必要条件

> 正解如下

带入 $x=0,\ y=1$ 有
$xy-z\ln y+e^{xz}\equiv 1$
即 $f(x,y)$ 对应无数个 z
故 z 不能确定函数

5

抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这个椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值

设 (x,y,z) 为椭圆上一点
则该点到原点距离 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

> 考虑与 d 极值相同的，更简单的函数

不妨考虑函数
$f(x,y,z)=d^2=x^2+y^2+z^2$
在条件
$\varphi(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$
$\psi(x,y,z)=x+y+z-1=0$
下的极值问题

做拉格朗日函数
$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$
令

$$\begin{cases} L'_x=2x+2\lambda x+\mu=0 & (1) \\ L'_y=2y+2\lambda y+\mu=0 & (2) \\ L'_z=2z-\lambda+\mu=0 & (3) \\ L'_\lambda=x^2+y^2+z=0 & (4) \\ L'_\mu=x+y+z-1=0 & (5) \end{cases}$$

> 通过结构相似的方程，用加减法化简
> 通常用原函数的偏导数的方程得到 x,y,z 关系式，代入条件得值
> 有时也通过解出 x,y,z 与 λ 或 μ 的关系式求解

(1) - (2) 得
$2(\lambda+1)(x-y)=0$
解得
$\lambda=-1$ 或 $x=y$

若 $\lambda=-1$，由 (1) (2) 知 $\mu=0$
代入 (3) 知 $z=-0.5$
代入 (4) (5) 有
x,y 无解

若 $x=y$，与 (4) (5) 联立得
$x=y=-\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$，$z=2\pm\sqrt{3}$
$\therefore d=\sqrt{9\pm5\sqrt{3}}$

> 拉格朗日乘数法求得的是可能的极值点，至于确定是否是极值点，可通过实际问题的性质来确定

根据问题的实际意义，知距离的最大值和最小值存在，故有
$d_{\max} = \sqrt{9+5\sqrt{3}}$
$d_{\min} = \sqrt{9-5\sqrt{3}}$

分析 - todo

最大值 / 最小值处有（有吗？）
$\nabla f = (-\lambda)\nabla\varphi + (-\mu)\nabla\psi$

6

求由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的驻点，并判别驻点处是否取极值

方程两边分别对 x,y 求偏导得

> 注意 z 是 x,y 的函数

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

> 不必解出 z 的解析式

令偏导数为零，得 $x=3y,\ z=y$
代入原方程，解得
$x=+9,\ y=+3,\ z=+3$ 或
$x=-9,\ y=-3,\ z=-3$
故驻点为 $(9,3)$ 和 $(-9,-3)$

> 即，原方程在点 $(\pm9,\pm3,\pm3)$ 处成立，故此时方程能在该点邻域内确定一个有连续偏导数的函数 $z=z(x,y)$，且 $(\pm9,\pm3)$ 为 $z(x,y)$ 驻点

对 x,y 求二阶偏导数有

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2(\frac{\partial z}{\partial x})^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2(\frac{\partial z}{\partial y})^2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2(\frac{\partial z}{\partial y})^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

点 $(9,3)$ 处有

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{6}$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2}$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{5}{3}$$

得

$$AC-B^2=\frac{1}{36}>0\,,\ A=\frac{1}{6}>0$$

故 $(9,3)$ 为极小值点

同理得 $(-9,-3)$ 为极大值点