Calculus IB Exercises - 多元函数积分学

硝基苯

1

计算 $\iint\limits_{D} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$，其中 D 由直线 $x=-1$，$y=1$ 及曲线 $y=x^3$ 围成，$f(x)$ 连续

> 不需要知道 $f(x)$ 解析式，利用对称性

用曲线 $y=-x^3$ 将 D 分为关于 x 轴对称的 D_1 和 关于 y 轴对称的 D_2
$\iint\limits_{D} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy = \iint\limits_{D_1} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy + \iint\limits_{D_2} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$

> $(-x)[1+yf[(-x)^2+y^2]=-x[1+yf(x^2+y^2)]$
> D_2 关于 y 轴对称

$$\iint\limits_{D_2} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy=0$$

考虑
$\iint\limits_{D_1} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$

> 分开分析

$$=\iint\limits_{D_1} x\,dxdy+\iint\limits_{D_1} xyf(x^2+y^2)dxdy$$

> $x(-y)f[x^2+(-y)^2]=-xyf(x^2+y^2)$
> D_1 关于 x 轴对称

$$= \iint\limits_{D_1} x\,dxdy + 0$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{x^3}^{-x^3} xdy = -2\int_{-1}^{0} x^4 dx = -\frac{2}{5}$$

$$\therefore \iint\limits_{D} x[1 + yf(x^2 + y^2)]dxdy = -\frac{2}{5}$$

2

设 $f(x)$ 是取值为正值的连续函数，计算 $\iint\limits_{D} \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dxdy$ ，其中

$$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 2\,,\ x \ge 0\,,\ y \ge 0 \right\}$$

观察知 D 关于直线 $y = x$ 对称，故由对等性知

$$\iint\limits_{D} \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dxdy = \iint\limits_{D} \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} dydx$$

> 思想援引自求解一些一元函数的定积分

即

$$\iint\limits_{D} \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D} \left[\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D} (a + b)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}(a + b) \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{2})^2\pi$$

$$= \frac{\pi}{4}(a + b)$$

3

求 $\iint\limits_D r^2 \sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\, dr d\theta$ ，其中 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le \cos\theta,\, 0\le \theta\le \frac{\pi}{4}\}$

> 需要活用一元函数定积分所学

D 在直角坐标系下化为 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\, 0\le y\le x\}$

原式

$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\, dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 \left(1-x^2+y^2\right)^{3/2}\Big|_{y=0}^{y=x} dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}dx$$

> 做换元 $x=\sin t$

$$\overset{x=\sin t}{=}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\, dt$$

> 定积分的公式

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$$

4

将区域 $D: x^2+y^2\le x$ 化为极坐标

> 注意取值范围
> 错误答案： $0\le\theta\le\pi,\, 0\le\rho\le\cos\theta$

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\, 0\le\rho\le\cos\theta$$

5

$f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调增加，试证 $(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$

> 设 $D=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$
> 则 $\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x)g(y)dy=\left[\int_a^b f(x)dx\right]\left[\int_c^d g(y)dy\right]$

令 $D=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,\ a\leq y\leq b\}$

$$I\triangleq(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$$

$$=\int_a^b dy\cdot\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(y)dy$$

$$=\iint\limits_D f(x)g(x)dxdy-\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy$$

$$=\iint\limits_D f(x)\left[g(x)-g(y)\right]dxdy$$

由对称性知

$$I=\iint\limits_D f(y)\left[g(y)-g(x)\right]dxdy$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\cdot 2I=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[f(x)-f(y)\right]\left[g(x)-g(y)\right]dxdy$$

由于 $f(x), g(x)$ 单调增加
有被积函数 ≥ 0
即 $I\geq 0$

即证

6

$\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2} dv$ ，其中 Ω 是由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 及平面 $z=1$ 围成的闭区域。

柱坐标系下

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\rho,\theta,z)\big|0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1,\ \rho\le z\le 1\} \qquad \text{(投影法)}\\ &= \{(\rho,\theta,z)\big|0\le z\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le z\} \qquad \text{(截面法)}\end{aligned}$$

> 截面法得原式 $=\pi\int_0^1 \ln(1+z^2)dz$，无法解出
> 应采用投影法

$$\text{原式} = \cdots = 2\pi\int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho^2}(1-\rho)d\rho$$

> 复习一元函数积分学

$$= 2\pi\int_0^1 [\frac{\rho}{1+\rho^2} - (1-\frac{1}{1+\rho^2})]d\rho$$

$$= 2\pi[\frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - \rho + \arctan\rho]\Big|_0^1$$

$$= \pi\ln 2 - 2\pi + \frac{\pi^2}{2}$$