多元函数微分学知识梳理

xyfJASON

第一节 基本概念

1 平面点集与多元函数概念

略。

2 多元函数极限及其计算

定义略。

求解方法与技巧详见「多元函数微分学难点总结」。

3 多元函数的连续性

定义简述：二重极限值等于函数值，则函数在该点连续。

⚠️注意：讲一个多元函数在某点连续，考察的是二重极限值，于是要求以任意可行路线趋近该点时极限值存在相等且等于该点函数值。

类比一元函数，连续函数的和、差、积、商、复合都连续；一切多元初等函数在其定义区域内连续。

第二节 偏导数

1 定义及计算

定义略。

只要函数在某点在 x, y 轴方向上有定义（不需要是内点），就有可能具有偏导数。

多元函数求偏导本质即一元函数求导：

$$
\begin{aligned}
f'_x(x_0, y_0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} \\
f'_y(x_0, y_0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}
\end{aligned}
$$

💎技巧：在求某点的偏导数时，可以先代值，再求一元函数导以简便计算。

💎原则上，分段函数在分段点的导数用导数定义求解。

偏导数 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 是一个整体，不可拆开。（因为对不同自变量偏导，∂y 意义不同）

⚠️注意：多元函数偏导数存在（可导），函数不一定有极限，更不一定连续。因为偏导只研究了两条路径，而连续/极限要求任意路径。

2 高阶偏导数

定义略。

若 $z = f(x, y)$ 的两个混合偏导数在区域 D 内连续，则 D 内必有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

一般地，高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下与求导次序无关。

求解方法与技巧详见「多元函数微分学难点总结」。

第三节 全微分

全增量：$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

全微分：若 Δz 可写作：$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中 A, B 为常数，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则记全微分 $\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$.

- **可微的必要条件**：若 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微，则函数 $z = f(x, y)$ 在点 P_0 处偏导数 $f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0)$ 都存在，且：

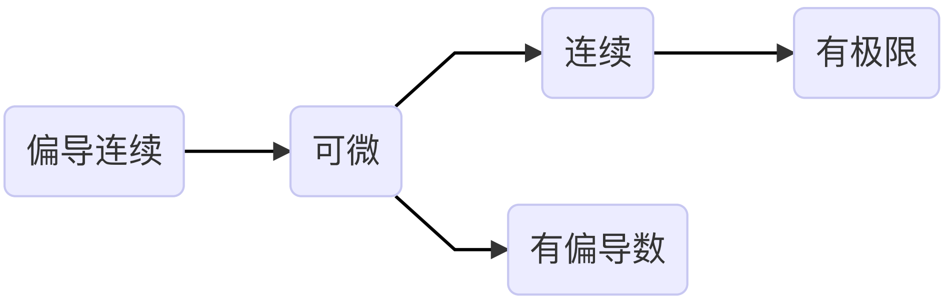
  $$\mathrm{d}z\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x'(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y'(x_0, y_0)\mathrm{d}y$$

  （若 $z = f(x, y)$ 在 D 内可微，则 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.）

- **可微的充分条件**：若函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f_x'(x, y)$ 和 $f_y'(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处一个连续、另一个存在，则 $z = f(x, y)$ 在 P_0 处可微。

  ⚠️注：函数可微，偏导不一定连续。

- 💎 用定义说明函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的可微性：证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$ 即可.



求解方法与技巧详见「多元函数微分学难点总结」。

第四节 多元复合函数的求导法则

定理：若函数 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 在 (x,y) 处有偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在点 (x,y) 的对应点 (u,v) 可微，那么复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在 (x,y) 有偏导数，且：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

全导数公式：定理中，若 $u=\varphi(t),v=\psi(t)$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

全微分形式的不变性。

💎一般求解思路：画出树形图，走叶节点是求导对象的路径链导下去。

更多求解方法与技巧详见「多元函数微分学难点总结」。

第五节 隐函数的求导公式

1 一个方程的情形

定理（一个方程两个变量情形的隐函数存在定理）：设函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有对 x,y 的连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0, F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内唯一确定具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足 $y_0=f(x_0)$，并且:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

定理（一个方程三个变量情形的隐函数存在定理）：设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有对各个变量的连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0, F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内唯一确定具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足 $z_0=f(x_0,y_0)$，并且:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

2 方程组的情形

定理（两个方程三个变量情形的隐函数组存在定理）：设函数 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有对各个变量的连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=G(x_0,y_0,z_0)=0, \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0$，则方程组 $F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内唯一确定具有连续导数的函数组 $y=y(x), z=z(x)$，它们满足 $y_0=y(x_0), z_0=z(x_0)$，并且:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

定理（两个方程四个变量情形的隐函数组存在定理）：设函数 $F(x,y,u,v)$ 和 $G(x,y,u,v)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内具有对各个变量的连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}\neq 0$，则方程组 $F(x,y,u,v)=0, G(x,y,u,v)=0$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某邻域内唯一确定具有连续偏导数的函数组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$，它们满足 $u_0=u(x_0,y_0), v_0=v(x_0,y_0)$，并且:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

求解方法与技巧详见「多元函数微分学难点总结」。

第六节 多元函数微分学的几何应用

1 一元向量值函数及其导数

定义、极限定义、导向量定义均略。

2 空间曲线的切线和法平面

空间曲线 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$（对应参数 $t=t_0$）处的切向量为 $\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$.

空间曲线 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为 $\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}$.

3 曲面的切平面与法线

空间曲面 $\Sigma:F(x,y,z)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面的法向量为 $\{F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\}$.

空间曲面 $\Sigma:z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切平面的法向量为 $\{f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1\}$.

第七节 方向导数和梯度

1 方向导数

定义略。

⚠️偏导数存在 $\Rightarrow$ 沿 x,y 轴正、负的四个方向导数都存在；沿任意方向的方向导数都存在 $\nRightarrow$ 偏导数存在！（应是“左”“右”“上”“下”偏导数存在）

定理：设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处沿任一方向 $\vec{l}$ 的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中，$\cos\alpha,\cos\beta$ 是方向 $\vec{l}$ 的方向余弦。

2 梯度

定义简述：

二维：$\mathrm{grad}f=\nabla f=f_x'(x,y)\vec{i}+f_y'(x,y)\vec{j}$.

三维：$\mathrm{grad}f=\nabla f=f_x'(x,y,z)\vec{i}+f_y'(x,y,z)\vec{j}+f_z'(x,y,z)\vec{k}$.

与梯度方向相同的方向上的方向导数值最大，且为 $|\mathrm{grad}f|$；与梯度方向相反的方向上的方向导数值最小，且为 $-|\mathrm{grad}f|$；与梯度方向垂直的方向上的方向导数值为 0.

第八节 多元函数的极值及其求法

1 多元函数的极值及最大值与最小值

定义略。

定理（极值的必要条件）：设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极值，且在点 (x_0,y_0) 处函数的偏导数都存在，则必有 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$.

定理（极值的充分条件）：设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内具有连续的二阶偏导数，且 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$，令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则：

1. 若 $AC-B^2>0$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有极值 $f(x_0,y_0)$，且当 $A<0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 是极大值；当 $A>0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 是极小值；
2. 若 $AC-B^2<0$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处没有极值；
3. 若 $AC-B^2=0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是否是极值不确定。

附注：$\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ 为二维 Hessian 矩阵，若该矩阵正定，则 $f(x_0,y_0)$ 是极小值；若该矩阵负定，则 $f(x_0,y_0)$ 是极大值；若该矩阵不定，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值；若该矩阵半正定或半负定，则不确定。

2 条件极值、拉格朗日乘数法

拉格朗日乘数法（二元函数一个约束的情形）：

求二元函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值嫌疑点，其中 f,φ 具有连续偏导数，设拉格朗日函数：$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

解方程组得到拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)$ 的驻点 (x_0,y_0,λ_0)，从而得到极值嫌疑点 (x_0,y_0).

拉格朗日乘数法（三元函数一个约束的情形）：

求三元函数 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值嫌疑点，其中 f,φ 具有连续偏导数，设拉格朗日函数：$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$，令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=f_x'(x,y,z)+\lambda\varphi_x'(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=f_y'(x,y,z)+\lambda\varphi_y'(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=f_z'(x,y,z)+\lambda\varphi_z'(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=\varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

解方程组得到拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)$ 的驻点 (x_0,y_0,z_0,λ_0)，从而得到极值嫌疑点 (x_0,y_0,z_0).

拉格朗日乘数法（三元函数两个约束的情形）：

求三元函数 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$ 下的极值嫌疑点，其中 f,φ,ψ 具有连续偏导数，设拉格朗日函数：$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi(x,y,z)+\lambda_2\psi(x,y,z)$，令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=f_x'(x,y,z)+\lambda_1\varphi_x'(x,y,z)+\lambda_2\psi_x'(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=f_y'(x,y,z)+\lambda_1\varphi_y'(x,y,z)+\lambda_2\psi_y'(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=f_z'(x,y,z)+\lambda_1\varphi_z'(x,y,z)+\lambda_2\psi_z'(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=\varphi(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=\psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

解方程组得到拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$ 的驻点 $(x_0,y_0,z_0,\lambda_{10},\lambda_{20})$，从而得到极值嫌疑点 (x_0,y_0,z_0).

第九节 二元函数的泰勒公式

定理：设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有 $n+1$ 阶连续的偏导数，(x_0+h,y_0+k) 为该邻域内任意一点，则有：

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

其中，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{\partial^m f}{\partial^i x\partial^{m-i}y}\bigg|_{(x_0,y_0)}h^ik^{m-i}$$