多元函数微分学难点总结

xyfJASON

1 二重极限求解

一般方法：

- 利用定义
- 直接代入
- 整体换元
- 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时化为极坐标求极限：$r\to 0$
- 无穷小乘以有界变量等于无穷小
- 夹逼准则
- 选特殊路径证明极限不存在

下述仅仅是一些猜想和经验之谈（不保证正确性）：

- 一般地，当分子分母皆为多项式时：
  - $(x,y)\to(0,0)$ 时，分子次数不高于分母次数多半没戏，此时可以选取特殊路径或者极坐标换元证明极限不存在；
  - $(x,y)\to(0,0)$ 时，分子次数高于分母次数多半为 0，此时可以夹逼准则或极坐标换元求解；
- 存在一条使分母为 0 的路径时，极限多半不存在，因为可以选取该路径附近的路径使极限值“不稳定”。

  注意：第一点中的“一般地”即要排除这种情况！

> 例一：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{xy}y=\lim\limits_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to 2}y=1\cdot 2=2.$
>
> 注解：整体换元。

> 例二：证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$
>
> 证#1：$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\le\frac{x^2y^2}{x^2}=y^2\to 0$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$
>
> 证#2：令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,$ 则：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2}=\lim\limits_{r\to 0}r^2[\cos^2\theta\sin^2\theta]=0.$
>
> 注解：分子次数高于分母次数，可放缩夹逼，可极坐标换元。

> 例三：讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\ne(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的连续性.

解：由多元初等函数连续性知：$f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ 上连续.

在 $(0,0)$ 处，当 (x,y) 沿 $y=kx$ 趋向 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

极限不存在，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

注解：分子分母次数相同，往往可以取特殊路径或极坐标换元证明极限不存在。

例四：证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

证：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \xlongequal{x=ky^2} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ky^4}{k^2y^4+y^4} = \frac{k}{k^2+1}$，随 k 取值不同极限值不同，故极限不存在。

注解：分子次数低于分母次数，可选取特殊路径证明极限不存在。

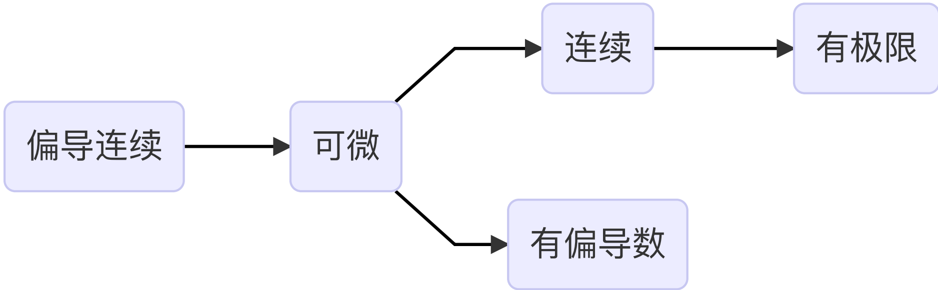
例五：计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

解#1：函数定义域为 $D=\{(x,y)|x+y\neq 0\}$，$(0,0)$ 是聚点。$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} \xlongequal{x+y=kx^2} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+k^2x^4-2kx^3}{kx^2} = \frac{2}{k}$，$k$ 取值不同时极限值不同，故极限不存在。

解#2：令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{r}{\cos\theta+\sin\theta}$. 当 $\theta=0$ 时，上式 $=0$；当 $\theta=r-\frac{\pi}{4}$ 时，上式 $=\lim\limits_{r\to 0} \frac{r}{\sqrt{2}\sin r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 由于 θ 取值不同时极限值不同，故极限不存在。

注解：虽然原式分子次数比分母高，但是这时候存在一条趋向 $(0,0)$ 的分母恒为 0 的路径 $x+y=0$，不能认为极限存在。事实上，只要我们选取的路径在趋近 $(0,0)$ 时也趋近 $x+y=0$ 这个“不稳定因素”，往往可以证明出极限不存在。解#1中的路径 $y=kx^2-x$，在 $(0,0)$ 处的斜率为 -1，换句话说，$x+y=0$ 是这条路径在 $(0,0)$ 的切线，沿这条路径可以使极限值“不稳定”而波动；如果按照这种思想，我们也可以构造出其他的路径来证明极限值不存在，例如：$y=kx^3-x$（算出来极限值为 ∞），$y=1-e^x$（算出来极限值为 -4），$y=-\ln(x+1)$（算出来极限值为 4）……

2 偏导连续、可微、可导、连续、极限存在的关系



例：函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是（C）.

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0, \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y,0)-f(0,0)}{y}=0$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

D. $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0, \lim\limits_{y\to 0}[f'_y(y,0)-f'_y(0,0)]=0$

注解：主要问题在于 D 选项，D 选项并不能说明偏导数在 $(0,0)$ 处连续！因为连续要求以任意路径趋近，而 D 选项只沿着两条路径（x 轴和 y 轴）趋近。

3 求各种偏导数——搞清楚变量间的关系

多元函数微分学最大的坑就是自变量、中间变量、因变量之间~~如胶似漆~~扑朔迷离的关系。

隐函数的变量甚至根本说不清自不自、因不因、中不中间，得看提问的表述。借助好方程思想。

显函数

显函数还算良心，基本上一眼就能看出来因变量是谁、自变量是谁。

> 例一：设 $u=f(x,xy,xyz)$ 可微，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.
>
> 分析：显然，u 因变量，x,y,z 自变量，u 是关于 x,y,z 的三元函数。
>
> 解：$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot y+f_3'yz$.

> 例二：设 $u=f(x,y,z),y=\phi(x,t),t=\psi(x,z)$，其中 f,ϕ,ψ 均可微，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.
>
> 分析：虽然复合多了点，但是也很显然，从总的角度来看 u 是因变量。
>
> 解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$.
>
> 注解：复合太多可以画树形图辅助。

> 例三：求函数 $f(x,y,z)=(z-3^{xy})\sin\ln x^2$ 在点 $(1,0,2)$ 的三个偏导数.
>
> 解：
>
> $$\begin{aligned}f_x'(1,0,2)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0,2)\Big|_{x=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\ln x^2\Big|_{x=1}=\frac{2}{x}\cos\ln x^2\Big|_{x=1}=2\\f_y'(1,0,2)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(1,y,2)\Big|_{y=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}0\Big|_{x=1}=0\\f_z'(1,0,2)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(1,0,z)\Big|_{z=2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}0\Big|_{z=2}=0\end{aligned}$$
>
> 注解：<u>求在某点的导数值时先代值，再求一元函数导更方便。</u>

> 例四：设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2xy}\sin(x^2y) & ,xy\neq 0\\ 0 & ,xy=0\end{cases}$. 求 $f'_x(0,1),f'_y(0,1)$.
>
> 解：由偏导数定义得：
>
> $$f'_x(0,1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1)\Big|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^2}{2x}-0}{x}=\frac{1}{2}$$
> $$f'_y(0,1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y)\Big|_{y=1}=\lim_{y\to 1}\frac{0-0}{y-1}=0$$
>
> 注解：<u>原则上，分段函数在分段点的导数用导数定义求解。</u>

看着大家做的这么开心，于是出题人加了点料。

> 例五：设 $f(x,y)$ 可微，且 $f(1,1)=1,f'_x(1,1)=a,f'_y(1,1)=b$，又设 $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\varphi'(1)$.
>
> 分析：$\varphi(x)$ 终归只是 x 的一元函数，按照链导法则求导即可。
>
> 解：求导得：$\varphi'(x)=f'_x(x,f(x,x))+f'_y(x,f(x,x))\cdot[f'_x(x,x)+f'_y(x,x)]$.
>
> 令 $x=1$ 得：$\varphi'(1)=a+b(a+b)=a+ab+b^2$.
>
> 注解：这道题有两种 f，中间变量不能省略；可以画树形图辅助来避免紊乱；$f(x,x)$ 可以看成 $f(x,y)$ 和 $y=x$ 的复合。

> 例六：设 $z=f(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数，且满足方程 $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，作变换 $u=x+ay,v=x-ay\ (a\neq 0)$，试求 z 作为 u,v 的函数所满足的方程。
>
> 分析：首先我们先指定 u,v 和 x,y 究竟谁是自变量，谁是中间变量。我们不妨视 u,v 为中间变量，x,y 为自变量。
>
> 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$；$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial u}-a\frac{\partial z}{\partial v}$.
>
> $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot 1+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot 1+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot 1+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 1=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.
>
> $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial z}{\partial u}-a\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot a^2-\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot a^2-\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot a^2+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot a^2=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$
> .

> 带入方程化简得：$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}=0.$
>
> 上式对 v 积分得：$\frac{\partial z}{\partial u}=\varphi(u)$，对 u 积分得：$z=\phi(u)+\psi(v)=\phi(x+ay)-\psi(x-ay)$. 其中 ϕ,ψ 为任意具有二阶连续导数的函数。
>
> 注解：第一步一定要指定好中间变量和自变量。

但是万恶的出题人总是能出一些让你混乱的万恶的题目。

> 例七：设函数 $z=f(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数，且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，$f(x,2x)=x, f'_x(x,2x)=x^2$，求 $f''_{xx}(x,2x), f''_{xy}(x,2x), f''_{yy}(x,2x)$.
>
> 分析：问题中 $f(x,2x)$ 其实是 $f(x,y)$ 和 $y=2x$ 的复合，而这个复合函数仅仅是 x 的函数，所以本题中所有的 $'$ 都是对 x 撇的！对 x 撇的！对 x 撇的！下标的 xx,yy 之流等同于 $11,22$，不是求导对象！
>
> 解：$f(x,2x)=x$ 两边求导得：$f'_x(x,2x)+2f'_y(x,2x)=1$，所以 $f'_y(x,2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$. 注意这是一个关于 x 的复合函数。求导得：
>
> $$f''_{yx}(x,2x)\cdot 1+f''_{yy}(x,2x)\cdot 2=-x$$
>
> $f'_x(x,2x)=x^2$ 两边求导得：
>
> $$f''_{xx}(x,2x)\cdot 1+f''_{xy}\cdot 2=2x$$
>
> 又有条件：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，翻译成 f 的式子是：$f''_{11}(x,y)=f''_{22}(x,y)$，代入 $y=2x$ 并用 xy 代替 12 得：$f''_{xx}(x,2x)=f''_{yy}(x,2x)$.
>
> 联立上面三式，加上二阶偏导数连续可以知道 $f''_{xy}(x,2x)=f''_{yx}(x,2x)$，解得：
>
> $$\begin{cases} f''_{xx}(x,2x)=-\frac{4}{3}x \\ f''_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x \\ f''_{yy}(x,2x)=-\frac{4}{3}x \end{cases}$$
>
> 注解：$'$ 都是对 x 求导，因为 $f(x,2x)$ 本就只是 x 的函数。当下标写 x,y 容易弄混时，不妨以 $1,2$ 代替之。

隐函数

隐函数就恶心多了，循环复合、方程、方程组应有尽有。事实上，你可以指定任何特定个变量为自变量，其他变量为因变量，所以究竟谁作因变量、谁作自变量需要看提问的表述。

隐函数的求解一般有三种方法，直接法、公式法、全微分法。但是无论哪种方法，**解题前都要指定好变量的依赖关系**——一般采用直接法解题时变量间有函数关系，而采用后两者时都是地位平等的自变量。

方程思想在解题过程中很重要，因为方程弱化了因变量、自变量的概念，所有出现在方程里的都是变量，满足方程的约束。

> 例一：已知函数 $z=z(x,y)$ 可微，$\frac{\partial z}{\partial x}\neq 0$，且满足方程 $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$，若将 x 视作 y,z 的函数，试求它的偏导数所满足的方程。
>
> 分析：这道题直接告诉我们 x 是 y,z 的函数了，所以要把 x 视为因变量，y,z 视为自变量。
>
> 解：方程 $z=z(x,y)$ 确定了一个隐函数：$x=x(y,z)$，所以方程两边同时对 y 求导得：$0=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}$.
>
> 与 $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 联立解得：$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}$.
>
> **注解**：**方程思想**！不要把 $z=z(x,y)$ 看成 z 是 x,y 的函数，而是看做一个方程。如此一来，我们可以根据题意指定因变量、自变量。

> 例二：设 $y=f(x,t)$，而 $t=\phi(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 具有连续偏导数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
>
> 分析：这道题的变量间的复合关系较为复杂，但我们不必弄清楚它们之间的具体联系。观察问题——$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，我们知道 x 是自变量；又因为题干给出了两个方程，所以可以认定 y,t 都是 x 的一元函数。
>
> 解【直接法】：由方程组 $\begin{cases}y=f(x,t)\\F(x,y,t)=0\end{cases}$ 可以确定隐函数组：$\begin{cases}y=y(x)\\t=t(x)\end{cases}$. 方程组关于 x 求导得：$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\end{cases}$.
>
> 消去 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ 解得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}$$

【公式法、全微分法略去，但核心都是先认定 x 为自变量且上述方程组确定了 y,t 是 x 的一元函数】

注解：复合关系复杂时，根据问题自行认定自变量和函数关系。

例三：设 $xu-yv=0,yu+xv=1$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$.

分析：这道题给出了一个方程组，在没有给出问题时，我们其实可以认定任何变量为自变量或因变量。观察问题描述，显然我们为了解题需要认定 u,v 为因变量，x,y 为自变量。

解【全微分法】：方程组取全微分得：

$$\begin{cases}x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x-y\mathrm{d}v-v\mathrm{d}y=0\\ y\mathrm{d}u+u\mathrm{d}y+x\mathrm{d}v+v\mathrm{d}x=0\end{cases}$$

解出 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 得：

$$\mathrm{d}u=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{xv-yu}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}v=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{xu+yv}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

对应系数就是对应偏导数。

【直接法、公式法略去】

例四：设 $u=f(x^2,y^2,z^2)$，其中 $y=e^x,\varphi(y,z)=0$，f,φ 皆可微，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

分析：根据提问可知，u 是 x 的一元函数，于是三个方程确定了三个一元函数 $u=u(x),y=y(x),z=z(x)$.

解：方程 $\varphi(y,z)=0$ 对 x 求导得：$\varphi_1'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\varphi_2'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$，所以 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-e^x\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'}$.

于是 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot 2ye^x+f_3'\cdot 2z\left(-e^x\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'}\right)=2xf_1'+2e^{2x}f_2'-2ze^x\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'}f_3'$.

注解：u 是一个基于 f 法则形成的 x 的一元函数，求导时逐层链导。