多元积分的计算法

xyfJASON

积分的计算法

- 二重积分
  - 直角坐标
  - 极坐标
- 三重积分
  - 直角坐标
  - 柱坐标
  - 球坐标
- 第一型曲线积分
  - 参数化
- 第二型曲线积分
  - 平面
    - 参数化
    - 格林公式/与路径无关
  - 空间
    - 参数化
    - 斯托克斯公式/与路径无关
- 第一型曲面积分
  - 投影
- 第二型曲面积分
  - 投影(向三个面)
  - 转化为第一型后投影
  - 高斯公式/与形状无关

1 二重积分

1.1 直角坐标

典型小片面积：$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

x 型区域:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

y 型区域:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

1.2 极坐标

典型小片面积：$\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

作极坐标变换:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

θ 型区域:

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

r 型区域:

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_a^b \mathrm{d}r \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$$

2 三重积分

2.1 直角坐标

典型小块体积：$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

先一后二（投影法）：（以向 xOy 平面投影为例 ）

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

先二后一（截面法）：（以用平行于 xOy 的平面去截为例）

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2.2 柱坐标

典型小块体积：$\mathrm{d}V=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

作柱坐标变换：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

先一后二（投影法）：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{r\theta}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}z$$

先二后一（截面法）：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_a^b \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

2.3 球坐标

典型小块体积：$\mathrm{d}V=\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

作球坐标变换：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

先二后一（截面法）：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\iint\limits_{D_\theta} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

3 第一型曲线积分

3.1 参数化

定理：设 $f(x,y)$ 在曲线段 L 上连续，L 的参数方程为：

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad(\alpha\le t\le\beta)$$

其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数，且 $(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2\neq 0$，则曲线积分 $\int\limits_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在，且

$$\int\limits_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\mathrm{d}t$$

三维曲线类似。

如果给我们的是直角坐标方程 $y=y(x)$，可以看成是参数方程 $\begin{cases}x=x\\y=y(x)\end{cases}$ （x 为参数），套用上述公式，就容易得到：

$$\int\limits_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\mathrm{d}x$$

如果给我们的是极坐标方程 $r=r(\theta)$，可以看成是参数方程 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$ （θ 为参数），套用上述公式，就容易得到：

$$\int\limits_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$$

所以只需要理解参数方程就够了，其他情况往参数方程转化。因此，如果要计算第一型曲线积分，**一定要写出曲线的参数方程！**

注意式子中，$\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\mathrm{d}t$ 其实就是弧微分 $\mathrm{d}s$，这说明了，尽管我们定义积分时 $\mathrm{d}s$ 表示小弧段的长度而非弧微分，但是我们将其近似为弧微分后结果依旧正确（这一点不是自然的，需要证明）。这让我们很容易记忆公式。

第一型曲线积分计算法将对弧长的曲线积分转化为了定积分——参数方程给出了两个变量之间的约束，让我们能够把两个变量转化为一个变量，可以理解为对原积分进行了 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 的换元处理，从而得以积分。

4 第二型曲线积分

4.1 参数化

定理：设 xOy 平面上的有向曲线段 L 的参数方程为：

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (\alpha\le t\le\beta\quad \text{或}\quad \beta\le t\le\alpha)$$

当 t 单调地由 α 变成 β 时，曲线 L 上的点由起点 A 变到终点 B，若 $\varphi(t),\psi(t)$ 在以 α,β 为端点的闭区间上有连续导数，$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2\neq 0$，且函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上连续，则曲线积分 $\int\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 存在，且

$$\int\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\Big[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]\mathrm{d}t$$

三维曲线类似。

如果给我们的是直角坐标方程 $y=y(x)$，可以看成是参数方程 $\begin{cases}x=x\\y=y(x)\end{cases}$（$x$ 为参数），套用上述公式即可。

如果给我们的是极坐标方程 $r=r(\theta)$，可以看成是参数方程 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），套用上述公式即可。

所以只需要理解参数方程就够了，其他情况往参数方程转化。因此如果要直接计算第二型曲线积分，**一定要写出曲线的参数方程**！

第二型曲线积分的直接计算法将对坐标的曲线积分转化为了定积分——参数方程给出了两个变量之间的约束，让我们能够把两个变量转化为一个变量，可以理解为对原积分进行了 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 的换元处理，从而得以积分。

4.2 转换为对弧长的曲线积分

向量形式：

$$\int\limits_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int\limits_L\vec{F}\cdot\left(\overrightarrow{\tau_0}\mathrm{d}s\right)=\int\limits_L\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{\tau_0}\right)\mathrm{d}s$$

其中，$\mathrm{d}\vec{r}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}$，$\overrightarrow{\tau_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$，$\vec{F}(x,y)=\{P(x,y),Q(x,y)\}$，故分量形式：

$$\int\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int\limits_L\Big(P\cos\alpha+Q\cos\beta\Big)\mathrm{d}s$$

物理意义的两种理解：

- $\cos\alpha\cdot\mathrm{d}s$ 是 $\mathrm{d}s$ 在 x 方向的投影距离，乘上 P 是 x 方向上做的功；$\cos\beta\cdot\mathrm{d}s$ 是 $\mathrm{d}s$ 在 y 方向的投影距离，乘上 Q 是 y 方向上做的功；二者之和即为总功。
- $P\cos\alpha$ 是力 P 在 $\mathrm{d}s$ 方向上的投影，乘上 $\mathrm{d}s$ 是力 P 做的功；$Q\cos\beta$ 是力 Q 在 $\mathrm{d}s$ 方向上的投影，乘上 $\mathrm{d}s$ 是力 Q 做的功；二者之和即为总功。

如果给出了有向曲线段 L 的参数方程：$x=\varphi(t),y=\psi(t)(\lambda\leq t\leq\mu$ 或 $\mu\leq t\leq\lambda)$，那么 L 的向量形式为 $\vec{r}(t)=\{\varphi(t),\psi(t)\}$，故切向量为 $\vec{r}'(t)=\{\varphi'(t),\psi'(t)\}$（方向与 t 增加的方向一致），所以有：

$$\cos\alpha=\pm\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}},\quad\cos\beta=\pm\frac{\psi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}}$$

当 L 的方向与 t 增加方向一致时取正，反之取负。

代入分量形式中，应用第一型曲线积分的计算法可得：

$$\int\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_\lambda^\mu\Big[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]\mathrm{d}t$$

这与直接用参数方程推导出的结果一样。所以转换为对弧长的曲线积分并没有给我们新的计算法，但是它说明了这个理论的自洽性，并且同一种思路应用在曲面积分上确可以简化积分（详见后文）。

4.3 平面曲线——格林公式 / 与路径无关

定理：设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有连续偏导数，D 的边界 L 由分段光滑简单闭曲线所组成，则有格林公式：

$$\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 L 是 D 的正向边界曲线。

格林公式揭示了平面区域上的积分与其边界曲线上的积分的联系。

定理：设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通区域 G 内有连续偏导数，则下列四个命题等价：

（1）在 G 内，曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关；

（2）在 G 内，对任一分段光滑简单闭曲线 C，积分 $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$；

（3）在 G 内，表达式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，即有：$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$；

（4）在 G 内，P,Q 满足条件：$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

4.4 空间曲线——斯托克斯公式 / 与路径无关

定理：设 L 为分段光滑空间有向闭曲线，Σ 是以 L 为边界的分片光滑有向曲面，L 的方向与 Σ 的方向符合右手螺旋法则，若函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲面 Σ（连同边界）上有连续偏导数，则有斯托克斯公式：

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

或

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

斯托克斯公式解释了曲面上的积分与该曲面的边界线上的曲线积分之间的联系。

定理：设函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲面单连通区域 G 内有连续偏导数，则下列四个命题等价：

（1）在 G 内，曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 与路径无关；

（2）在 G 内，对任意光滑简单闭曲线 C，积分 $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$；

（3）在 G 内，表达式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 是某个函数 $u(x,y,z)$ 的全微分，即有：$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$；

（4）在 G 内，恒有：$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

5 第一型曲面积分

5.1 投影

定理：设空间曲面 Σ 由方程 $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$ 给出，且函数 $z(x,y)$ 在区域 D_{xy} 上具有连续偏导数，又设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 存在，且

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理，

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y(z,x),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

所以，计算第一型曲面积分时，一定要进行投影，即把曲面写作 $z=z(x,y)$ 或 $y=y(z,x)$ 或 $x=x(y,z)$。

注意式子中，$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其实就是曲面面积的微分 $\mathrm{d}S$，这说明了，尽管我们定义积分时 $\mathrm{d}S$ 表示小曲面的面积而非面积的微分，但是我们将其近似为面积的微分后结果依旧正确（这一点不是自然的，需要证明）。这让我们很容易记忆公式。

第一型曲面积分投影计算法将对面积的曲面积分转化为了二重积分——曲面方程给出了三个变量之间的一个约束，让我们能够把三个变量转化为两个变量，从而得以积分。

5.2 *参数化

设曲面 Σ 由参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in D$$

给出，其中 D 是一个平面有界区域，又 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 在 D 上具有连续偏导数，且 $\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\neq 0$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

同样的，式子中 $\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 是曲面面积的微分 dS.

第一型曲面积分参数方程的计算法将对面积的曲面积分转化为了二重积分——参数方程将三个变量转化为两个参数变量，可以理解为对原积分进行了 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 的换元处理，从而得以积分。

6 第二型曲面积分

6.1 投影

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint\limits_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设曲面 Σ 可依次表达成 $x=x(y,z), y=y(z,x), z=z(x,y)$，$\Sigma$ 在坐标面 yOz, zOx, xOy 上的投影区域记为 D_{yz}, D_{zx}, D_{xy}，则：

$$\iint\limits_{\Sigma\binom{\text{前}}{\text{后}}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iint\limits_{\Sigma\binom{\text{右}}{\text{左}}} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint\limits_{D_{zx}} P(x,y(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\iint\limits_{\Sigma\binom{\text{上}}{\text{下}}} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_{D_{xy}} P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

第二型曲面积分的直接计算法将对坐标的曲面积分转化为了二重积分——曲面方程给出了三个变量之间的一个约束，让我们能够把三个变量转化为两个变量，从而得以积分。

6.2 转换为对面积的曲面积分

向量形式：

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_{\Sigma} \vec{F}\cdot\left(\overrightarrow{n_0}\mathrm{d}S\right) = \iint\limits_{\Sigma}\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)\mathrm{d}S$$

其中，$\mathrm{d}\vec{S}=\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$，$\overrightarrow{n_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，$\vec{F}(x,y)=\{P(x,y),Q(x,y),R(x,y)\}$，故分量形式：

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma}\Big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\Big)\mathrm{d}S$$

物理意义的两种理解：

- $\cos\alpha\cdot\mathrm{d}S$ 是 $\mathrm{d}S$ 在 yOz 平面上的投影面积，乘上 P 是 yOz 平面上的流量；$\cos\beta\cdot\mathrm{d}S$ 是 $\mathrm{d}S$ 在 zOx 平面上的投影面积，乘上 Q 是 zOx 平面上的流量；$\cos\gamma\cdot\mathrm{d}S$ 是 $\mathrm{d}S$ 在 xOy 平面上的投影

面积，乘上 R 是 xOy 平面上的流量；三者之和即是总流量。

- $P\cos\alpha$ 是流速场 P 垂直于 $\mathrm{d}S$ 平面的流速场分量，乘上 $\mathrm{d}S$ 是流速场 P 的流量；$Q\cos\beta$ 是流速场 Q 垂直于 $\mathrm{d}S$ 平面的流速场分量，乘上 $\mathrm{d}S$ 是流速场 Q 的流量；$R\cos\gamma$ 是流速场 R 垂直于 $\mathrm{d}S$ 平面的流速场分量，乘上 $\mathrm{d}S$ 是流速场 R 的流量；三者之和即是总流量。

若将 Σ 写成函数 $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，则 Σ 不同侧的法向量为（上侧取正，下侧取负）：

$$\vec{n}=\pm\left\{-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right\}$$

所以方向余弦为：

$$\begin{aligned}
\cos\alpha&=\pm\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\\
\cos\beta&=\pm\frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\\
\cos\gamma&=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}
\end{aligned}$$

代入分量形式中，应用第一型曲面积分的计算法可得：

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma\binom{\text{上}}{\text{下}}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\pm\iint\limits_{D_{xy}}\left[-P\big(x,y,z(x,y)\big)\frac{\partial z}{\partial x}-Q\big(x,y,z(x,y)\big)\frac{\partial z}{\partial y}+R\big(x,y,z(x,y)\big)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

同理，若将 Σ 写成函数 $x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$，则有：

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma\binom{\text{前}}{\text{后}}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\pm\iint\limits_{D_{yz}}\left[P\big(x(y,z),y,z\big)-Q\big(x(y,z),y,z\big)\frac{\partial x}{\partial y}-R\big(x(y,z),y,z\big)\frac{\partial x}{\partial z}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

若将 Σ 写成函数 $y=y(z,x),(z,x)\in D_{zx}$，则有：

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma\binom{右}{左}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\pm\iint\limits_{D_{zx}}\left[-P\big(x,y(z,x),z\big)\frac{\partial y}{\partial x}+Q\big(x,y(z,x),z\big)-R\big(x,y(z,x),z\big)\frac{\partial y}{\partial z}\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

更一般地，若 Σ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 所决定，则 Σ 的法向量为：

$$
\vec{n}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}=\{F_x',F_y',F_z'\}
$$

设方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，由于 $\begin{cases}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}S\\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\,\mathrm{d}S\\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\,\mathrm{d}S\end{cases}$，容易得到：

$$
\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\cos\alpha}=\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos\beta}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\gamma}\implies\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{F_x'}=\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{F_y'}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{F_z'}
$$

所以，若将 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 用上式转化为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，就有：

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma\binom{上}{下}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint\limits_{\Sigma\binom{上}{下}}\left[P(x,y,z)\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}+Q(x,y,z)\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}+R(x,y,z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\pm\iint\limits_{D_{xy}}\left[P(x,y,z(x,y))\frac{F_x'(x,y,z(x,y))}{F_z'(x,y,z(x,y))}+Q(x,y,z(x,y))\frac{F_y'(x,y,z(x,y))}{F_z'(x,y,z(x,y))}+R(x,y,z(x,y))\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

将 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 转化为 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 及将 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化为 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 同理。

如果直接应用第二型曲面积分的计算法，我们需要将 Σ 向三个面做投影，然后在三个投影面上分别计算积分；而将第二型曲面积分转化为第一型曲面积分后，只需要向一个面做投影，计算一个积分就行了，简化了计算过程！

6.3 高斯公式 / 与形状无关

定理：设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续的偏导数，则有高斯公式：

$$\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中，Σ 是整个边界曲面的外侧（称为 Ω 的正向边界曲面）。

高斯公式揭示了空间区域上的积分与其边界曲面上的积分的联系。

定理：设函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在空间单连通区域 G 内有连续偏导数，则下列三个命题等价：

（1）在 G 内，对任意两个有相同边界、相同侧的分片光滑有向曲面 Σ_1,Σ_2，都有：

$$\iint\limits_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_2} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（2）在 G 内，对任意分片光滑有向闭曲面 Σ 都有：

$$\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

（3）在 G 内，恒有：

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$